Ф-ОБ-003-018

ҚОЖА АХМЕТ ЯСАУИ АТЫНДАҒЫ ХАЛЫҚАРАЛЫҚ ҚАЗАҚ-ТҮРІК УНИВЕРСИТЕТІ

Жаратылыстану факультеті

ӘӨЖ: 517.968 Қолжазба құқығында

Туркпенбаева Гулжанай Хожахметкызы

Жылдам осцилляцияланатын коэффициентті сингуляр ауытқымалы интегро-дифференциалдық жүйенің шешімінің тұрақты асимптотикасы

7М05426 – Математика білім беру бағдарламасы бойынша жаратылыстану ғылымдарының магистрі дәрежесін алу үшін магистрлік диссертация

Ғылыми жетекшісі: ____________ ф.-м.ғ.д., проф. м.а. Калимбетов Б.Т.

Магистрлік диссертация қорғауға жіберілді: «______» ___________20___ж.

Кафедра меңгерушісі: ____________ техн.ғ.к., доцент Қошанова М.Д

Түркістан, 2021ж

МАЗМҰНЫ

КІРІСПЕ

Зерттеу тақырыбынының өзектілігі. Жоғарғы жиелікті күштер әсерінде болған механикалық және электр жүйелері жылдам осцилляцияланатын коэффицентті сингуляр ауытқымалы интегро-дифференциялдық теңдеулер көмегінде модельденеді. Жоғары жиелікті қосындының теңдеуде қатысуы оның шешімінің нақты түрде жазылуына кедергі болады, сондықтан бұндай есептерді асимптотикалық әдістер тұрғысынан зерттеу қазіргі таңда өзекті мәселенің бірі болып табылады. Интегралдық және интегро-дифференциалдық теңдеулер теориясының негізгі ұғымдарын қарастырайық және бұндай теңдеулерге С.А. Ломовтың регуляризация әдісін [8] қолдану мәселелерін кеңінен талқылайық. Жоғарыда айтылған регуляризация әдісі келесі түрдегі сингуляр ауытқыған интегралдық және интегро-дифференциалдық теңдеулер және теңдеулер жүйесіне қолданылуы мүмкін.

Нәтижелердің ғылыми жаңалығы. Бірінші ғылыми нәтіже жаңа. Себебі, жылдам осцилляцияланатын коэффициентті сингуляр ауытқымалы интегро-дифференциалдық жүйенің регуляризацияланған асимптотикалық шешімі алғашқы рет құрылған. *Екінші ғылыми нәтіже де жаңа.* Себебі, жылдам осцилляцияланатын коэффициентті сингуляр ауытқымалы интегро-дифференциалдық жүйе үшін резонанссыз шешімдер класының интегралдық операторға инварианттылығы алғашқы рет дәлелденген. *Үшінші ғылыми нәтіже де жаңа.* Себебі, жылдам осцилляцияланатын коэффициентті сингуляр ауытқымалы интегро-дифференциалдық жүйе үшін итерацион есептердің қалдық мүшесі туралы теорема үзіліссіз функциялар классында бірінші рет дәлелденген.

Жұмыстың мақсаты мен міндеті. С.А. Ломовтың регуляризациялау әдісі негізінде коэффиценттерді жылдам осцилляцияланатын интегро-дифференциялдық жүйенің асимптотикалық шешімін құру алгоритімін жасау. Диссертациялық жұмысты орындау барысында зерттеу нысанына қатысты материалдарды жинақтау, әдебиттерге шолу жасау, есептің қисынды қойылуын қадағалау және есепті шешу алгоритімін негіздеу.

Зерттеу әдістері. Жұмыста жылдам осцилляцияланатын коэффициентті сингуляр ауытқымалы интегро-дифференциалдық жүйе үшін резонанссыз шешімдер класының интегралдық операторға инварианттылығы, коэффициентті сингуляр ауытқымалы интегро-дифференциалдық жүйе үшін итерацион есептердің қалдық мүшесі туралы теорема үзіліссіз функциялар классынада есептер дәлелденді.

Жұмыстың жариялылығы. диссертациялық жұмысының нәтижелері Х.А.Ясауи атындағы ХҚТУ Хабарлары, Математика, физика, информатика сериясы журналында жарияланған және Scopus деректер базасындағы IAENG IJAM журналында жариялауға қабылданған.

Диссертациялық жұмыстың көлемі мен құрылымы. Диссертациялық жұмыс кіріспеден, 2 тараудан, қорытындыдан және әдебиттер тізімінен тұрады. Негізгі материалдар көлемі 82 бетпен берілген, 22 қолданылған әдебиеттер атаулары келтірілген.

Диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері:

Жұмыстың негізгі бөлімінде сингуляр ауытқымалы интегро-дифференциалдық теңдеулердің практикада кең қолданысқа ие болған жылдам тербелмелі коэффициенттері бар жүйені қарастырамыз. Бұндай теңдеуде ядросы экспоненциалдық түрде өзгеретін интегралдық операторы бар жүйені қарастырамыз. Зерттеулеріміздің негізгі мақсаты – жоғарыдағы атап өтілген типтегі жүйелер үшін регуляризация әдісінің алгоритмін жасау және интегралдық мүшенің Коши есебінің шешімінің асимптотикасының негізгі мүшесіне әсерін анықтау. Алдын-ала айта кету қажет бірдей резонанс жағдайы қарастырылады, яғни жылдам тербелмелі коэффициенттің меншікті мәндерінің бүтін сызықтық комбинациясы барлық қарастырылған уақыт аралығында шектеу операторының спектрінің нүктелерімен сәйкес келетін жағдай. Сонымен қатар, жылдам тербелмелі коэффициенттің меншікті мәнінің шекті оператордың спектрінің нүктелерімен сәйкес келу жағдайы алынып тасталынды. Бұл жағдай келесі жұмыстарымызда зерттелуі керек. Неғұрлым күрделі резонанс жағдайлары (мысалы, нүктелік резонанс) мұқият талдауды қажет етеді және ол бұл жұмыста қарастырылмаған.

Динамикалық тұрақтылыққа байланысты әр түрлі мәселелерде, периодтық құрылымы бар медианың қасиеттерін зерттеу кезінде, басқа қолданбалы есептерді зерттеу кезінде жылдам тербелмелі коэффициенттері бар дифференциалдық теңдеулерді қарастыру керек. Осы түрдегі теңдеулер жоғары жиілікті сыртқы күштердің әсерінен кейбір механикалық немесе электрлік жүйелерді, сызықтық басқарылатын объектімен автоматты басқару жүйелерін және т.б. сипаттай алады. Жоғары жиілікті терминдердің болуы оларды тікелей сандық шешуде күрделі мәселелер туғызады. Сондықтан, мұндай теңдеулерге әдетте асимптотикалық әдістер қолданылады, олардың ішіндегі ең әйгілі Фещенко-Шкил-Николенко бөлу әдісі [1, 2, 3, 4, 8] және Ломовтың регуляризациясы әдісі [5, 6, 7]. Соңғы уақытта сингуляр ауытқыған мәселелердің асимптотикалық шешімдері зеттеулер жасалған [9, 10, 11, 12,13,14,15,16,17,18,19,20].

Бұл жұмыста Ломовтың регуляризация әдісі бұрын зерттелмеген интегро-дифференциалдық жүйенің жылдам осцилляцияланатын коэффициентті және жылдам өзгеретін ядро түрі

$$\varepsilon\frac{dz}{dt}-A(t)z-\varepsilon g(t)\cos\frac{\beta(t)}{\varepsilon}B\left(t\right)z-\int_{t_0}^{t}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu(\theta)d\theta}K\left(t,s\right)z(s,\varepsilon)ds=h(t),$$

$$z(t_0,\varepsilon)=z^0,t\in[t_0,T], \qquad (0.1)$$

Мұндағы $z=\{z_1,z_2\}, h(t)=\{h_1(t),h_2(t)\}, \omega(t)>0, \mu(t)<0\left(\forall t\in[t_0,T]\right), g(t)-$ скаляр функция, $A(t)$ және $B(t)-$ $(2\times 2)-$ матрица, сонымен қатар $A(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(t) & 0 \end{pmatrix}$, $\beta'(t)>0$ – жылдам осцилляцияланатын косинус жиілігі, $z^0=\{z_1^0,z_2^0\}, \varepsilon>0-$ кіші параметр. $\beta(t)=2\gamma(t), B(t)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ дәл осындай жүйе және интегралдық теңдеудің мүшесі болмаған жағдай [5,6,7] жұмыстарда қарастырылған.

$\lambda_1(t)=-i\omega(t)$, $\lambda_2(t)=+i\omega(t)$ функциялар $A(t)$ операторының бастапқы спектрін қалыптастырады, функция жылдам өзгеретін интегралдық оператордың ядросын сипаттайды, $\lambda_5(t)=\mu(t)$ функциясы интегралдық оператор ядросының жылдам өзгеруін сипаттайды, ал $\lambda_3(t)=-i\beta'(t)$ және $\lambda_4(t)=+i\beta'(t)$ функциялары (0.1) жүйесіндегі жылдам осцилляцияланатын косинустың $\cos\dfrac{\beta(t)}{\varepsilon}$ болуымен байланысты. Келесі енгізулерді жазайық:

$\lambda(t)=\left(\lambda_1(t),...,\lambda_5(t)\right)$,

$m=(m_1,...,m_5)-$ теріс емес $m_j, j=\overline{1,5}$ компонентері бар мультииндекс

$|m|=\sum_{j=1}^{5} m_j$ – m мультииндекстің биіктігі

$\left(m,\lambda(t)\right)=\sum_{j=1}^{5} m_j\lambda_j(t)$.

(0.1) есепті төмендегі шарттар бойынша қарастырамыз:

$$\omega(t),\mu(t),\beta(t)\in C^\infty\left([t_0,T],\mathbb{R}\right), g(t)\in\left([t_0,T],\mathbb{C}^1\right), h(t)\in C^\infty\left([t_0,T],\mathbb{C}^2\right),$$

$$B(t)\in C^\infty\left([t_0,T],\mathbb{C}^{2\times 2}\right), K(t,s)\in C^\infty\left(\{t_0\le s\le t\le T\},\mathbb{C}^{2\times 2}\right),$$

1) $|m|\ge 2-$ мен барлық мультииндекстер үшін $\left(m,\lambda(t)\right)=0, \left(m,\lambda(t)\right)=\lambda_j(t), j\in\{1,...,5\}$ қатынастары ешқандай $t\in[t_0,T]-$ ге сәйкес келмейді немесе бүкіл сегмент бойынша бірдей қанағаттандырылады.

Басқаша айтқанда, резонанстық мультипликациялар келесі жиынтықтармен аяқталады:

$$\Gamma_0 = \left\{ m : \left(m, \lambda(t)\right) \equiv 0, |m| \geq 2, \forall t \in [t_0, T] \right\},$$

$$\Gamma_j = \left\{ m : \left(m, \lambda(t)\right) \equiv \lambda_j(t), |m| \geq 2, \forall t \in [t_0, T] \right\}, \ j = \overline{1,5}.$$

Теорема 0.1. *1) және 2) шарттары мен U кеңістікте жататын $H(t,\tau) = H_0(t) + \sum_{i=1}^{5} H_i(t) e^{\tau_i} + \sum_{2\leq|m|\leq N_z}^{*} H^m(t) e^{(m,\tau)}$ (2.3.11) жүйенің оң жағы орындалсын. Онда (2.3.11) жүйенің U кеңістікте теп-теңдік орын алуы қажет және жеткілікті*

$$< H(t,\tau), \chi_k(t) e^{\tau_k} > \equiv 0, k = 1, 2, \forall t \in [t_0, T].$$

Ескерту 0.1. Егер тепе-теңдік (2.3.12) сәйкес болса, онда 1) және 2) шарттар (2.3.11) жүйесінде U кеңістіктегі келесі шешім бар

$$z(t,\tau) = z_0(t) + \sum_{i=1}^{5} z_i(t) e^{\tau_i} + \sum_{2\leq|m|\leq N_z}^{*} z^m(t) e^{(m,\tau)} \equiv z_0(t) + \sum_{k=1}^{2} \alpha_k(t) \varphi_k(t) e^{\tau_k} +$$

$$+ h_{12}(t) \varphi_2(t) e^{\tau_1} + h_{21}(t) \varphi_1(t) e^{\tau_2} + z_5(t) e^{\tau_5} + \sum_{i=3}^{4} P_i(t) e^{\tau_i} + \sum_{2\leq|m|\leq N_H}^{*} P^m(t) e^{(m,\tau)}, \tag{0.2}$$

мұндағы $\alpha_k(t) \in C^\infty\left([t_0, T], \mathbb{C}^1\right) -$ кез-келген функция, $k = 1, 2,\ z_0(t) = -A^{-1} H_0(t),\ z_5(t) -$ интегралдық жүйенің шешімі және анықтаулар берілген:

$$h_{12}(t) \equiv \frac{\left(H_1(t), \chi_2(t)\right)}{\lambda_1(t) - \lambda_2(t)}, h_{21}(t) \equiv \frac{\left(H_2(t), \chi_1(t)\right)}{\lambda_2(t) - \lambda_1(t)}, P_i(t) \equiv \left[\lambda_i(t) I - A(t)\right]^{-1} H_i(t),$$

$$P^m(t) \equiv \left[\left(m, \lambda(t)\right) I - A(t)\right]^{-1} H^m(t).$$

Теорема 0.2 *1) және 2) шарттары орындалсын және (2.3.11) жүйенің оң жақ* $H(t,\tau) = H_0(t) + \sum_{i=1}^{5} H_i(t) e^{\tau_i} + \sum_{2 \le |m| \le N_z}^{*} H^m(t) e^{(m,\tau)} \in U$ *(2.3.12) жүйенің шарттын қанағаттандырсын. Онда (2.3.11) есеп қосымша шарттарда*

$$\hat{G} < (t,\tau), \chi_k(t) e^{\tau_k} > \equiv 0 \, \forall t \in [t_0, T], k = 1, 2, \qquad (0.3)$$

мұндағы $Q(t,\tau) = Q_0(t) + \sum_{k=1}^{5} Q_k(t) e^{\tau_k} + \sum_{2 \le |m| \le N_Q}^{*} Q^m(t) e^{(m,\tau)} -$ U *кеңістігінің белгілі вектор-функциясы,* $U -$ *да бірмәнді шешімді.*

1 ИНТЕГРАЛДЫҚ ЖӘНЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ТЕОРИЯСЫ

Интегралдық және интегро-дифференциалдық теңдеулер теориясының негізгі ұғымдарын қарастырайық және бұндай теңдеулерге С.А. Ломовтың регуляризация әдісін [8] қолдану мәселелерін кеңінен талқылайық. Жоғарыда айтылған регуляризация әдісі келесі түрдегі сингуляр ауытқыған интегралдық және интегро-дифференциалдық теңдеулер және теңдеулер жүйесіне қолданылуы мүмкін.

$$\varepsilon y = \int_0^t K(t,s)y(s,\varepsilon)ds + h(t),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = A(t)y + \int_0^\alpha K(t,s)y(s,\varepsilon)ds + h(t),$$

мұндағы $\varepsilon -$ шексіз аз шама, $K(t,s) -$ ядро. $A(t) -$ матрица, $h(t) -$ скаляр немесе вектор-функция, $t \in [0,T],$ немесе $\alpha = T$, ал екінші теңдеу үшін бастапқы шарт $(y(0,\varepsilon) = y^0),$ немесе шекаралық шарт келесі түрде жазылыды: $(ly(t,\varepsilon) = y^0, ly \equiv My(0,\varepsilon) + Ny(1,\varepsilon)).$

1.1 Фредгольмнің интегралдық теңдеулері

Келесі теңдеу

$$y(t) = \lambda \int_0^T K(t,s)y(s)ds + h(t), \qquad (1.1.1)$$

мұндағы $t \in [0,T], y = \{y_1(t),...,y_n(t)\}$ - белгісіз функция, $h(t) = \{h_1(t),...,h_n(t)\}$- берілген вектор – функция, $K(t,s) -$ $n \times n$ өлшемдегі берілген матрица – функция, $\lambda \in \mathbb{C} -$ сан (параметр), екінші түрдегі Фредгольм интегралдық теңдеулер жүйесі деп аталады. Егер (1.1.1) -дің сол жағында белгісіз $y(t)$ векторлық функциясы болмаса, оған сәйкес келетін жүйені *бірінші типтегі Фредгольм интегралдық жүйесі* деп атаймыз. Практикада көптеген құбылыстар немесе процестер екінші типтегі интегралдық теңдеулерменен сипаталады. Сондықтан біздің негізгі зеттеулеріміз екінші типтегі интегралдық теңдеулерге арналған болып, оларды кеңінен зерттейміз.

Жоғарыда келтірілген (1.1.1) жүйесін $C\left(\left[0,T\right],\mathbb{C}^n\right)$ кеңістігінде қарастырсақ ондағы $g(t)=\left\{g_1(t),...,g_n(t)\right\}$ вектор-функциясы келесі

$$\left\|g(t)\right\|_{C[0,T]}=\max_{\forall t\in[0,T]}\left\|g(t)\right\|,$$

нормамен анықталады. Мұндағы $\left\|g(t)\right\|$ норма әрбір фиксирленген $t\in\left[0,T\right]$ үшін кез-келген $\mathbb{C}^n$ кеңістігіндегі норманы анықтайды.

Мысалы,

$$\left\|g\right\|=\left\|g\right\|_1=\sum_{i=1}^{n}\left|g_i\right|,\left\|g\right\|=\left\|g\right\|_2=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left|g_j\right|^2}, \tag{1.1.2}$$

$$\left\|g\right\|=\left\|g\right\|_\infty=\max_{j=\overline{1,n}}\left|g_j\right|.$$

Сонымен қатар, $\left[0,T\right]\times\left[0,T\right]$ квадратта $K(t,s)$ ядросы әрқашан үзіліссіз және нөлге тең емес деп қабылдаймыз. Көрсетілген (1.1.2) нормалар баламалы екенін ескере отырып, $c_1>0$ және $c_2>0$ тұрақтылары үшін

$$c_1\le\frac{\left\|g\right\|_i}{\left\|g\right\|_j}\le c_2\ \ (i,j=1,2,3),$$

теңсіздік орындалады.

$A:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ сызықтық операторының нормасы келесі түрде анықталады:

$$\left\|A\right\|=\sup_{\left\|g\right\|\ne0}\frac{\left\|A_g\right\|}{\left\|g\right\|}\Leftrightarrow\left\|A\right\|=\sup_{\left\|g\right\|=1}\left\|A_g\right\|. \tag{1.1.3}$$

Осы анықтамадан

$$\left\|A_g\right\|\le\left\|A\right\|\cdot\left\|g\right\|\ \left(\forall g\in\mathbb{C}^n\right). \tag{1.1.4}$$

келесі теңсіздік туындайды.

Егер $A=(a_{ij})-(n\times n)-$ матрица болса, онда бұл матрица үшін нормалар келесі түрде анықталады:

$$\|A\| = \|A\|_1 = \max_{j=\overline{1,n}} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \|A\| = \|A\|_\infty = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \qquad (1.1.4')$$

$$\|A\| = \|A\|_2 = \max_{i=\overline{1,n}} \sqrt{\lambda_j}, \ \{\lambda_j\} = \sigma(A^* A).$$

Нормалар $|\|g\|_1$ және $\|A\|_1$, $\|g\|_2$ және $\|A\|_2$, $\|g\|_\infty$ және $\|A\|_\infty$ — бұл дәйекті жұп нормалар.

Ескере кетейік, $\|g\|$ және $\|A\|$ дәйекті нормалар деп аталады, егер бұл нормалардың теңсіздігі бар болса (1.1.4), ал норма $\|A\|$ келесідей түрде болса, $\|A \cdot B\| \le \|A\| \cdot \|B\|$ (кез-келген A және B матрицалары үшін). Келесі $\|g\|$ векторлардың нормалары $\mathbb{C}^n$ және $\|A\|$ нормасының A матрицасы барлық жағдайда сәйкес келеді.

Сонымен, егер бұл нормалар $\|A\|$ және $\|g\|$ келісілген болса және егер $\exists g \neq 0$ $\|Ag\| = \|A\| \cdot \|g\|$ болса, $\|A\|$ векторының $\|g\|$ нормасына бағыну деп аталатынын ескеруге болады. (1.1.3) теңдікпен айқындалатын $\|A\|$ операторлық норма осы теңдікте көрінетін $\|g\|$ нормаға бағынышты болып табылады, ал (1.1.4') көрсетілген $\|A\|_j$ нормаларының кез келгені (1.1.2) көрсетілген $\|g\|_j$ нормасына бағынады. Алдағы уақытта біз келесі нормаларды қолданамыз:

$$\|g\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |g_i|, \ \|A\|_1 = \max_{j=\overline{1,n}} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Енді (1.1.1) интегралдық теңдеулерді зерттейік. Теңдеудегі $Jy = \int_0^T K(t,s)y(s)ds$ интегралдық оператордың $(K(t,s) \in C([0,T]\times[0,T], \mathbb{C}^{n^2})$ ядросының үздіксіздігінен келесі қатынас орындалады;

a) $J : C([0,T], \mathbb{C}^n) \to C([0,T], \mathbb{C}^n)$;

b) J - сызықтық оператор, яғни $\forall y_1(t), y_2(t) \in C([0,t], \mathbb{C}^n)$ теңдіктер сақталады

$J(c_1 y_1(t) + c_2 J y_2(t)) = c_1 J y_1(t) + c_2 J y_2(t)$ (c_1 және c_2 - ерікті күрделі тұрақты).

(1.1.1) теңдеуді қысқаша былай жазуға болады:

$$y = \lambda J y + h \Leftrightarrow (I - \lambda J) y = h, \qquad (1.1.5)$$

мұндағы I - жалғыз оператор. Алдымен $(h(t)\equiv 0)$ біртекті теңдеуді қарастырайық

$$y-\lambda Jy=0. \qquad (1.1.5_0)$$

Анықтама 1.1.1. $(1.1.5_0)$ *теңдеудің тривалды емес (яғни нөлге тең емес)* $y=y(t)\in C([0,T],\mathbb{C}^n)$ *шешімі болатын* $\lambda\in\mathbb{C}$ *мәні* $K(t,s)$ *ядросының (немесе J оператор) сипаттамалық мәні немесе сипаттамалық саны деп аталады. Сонымен қатар,* λ *сипаттамалық мәніне сәйкес келетін* $y=y(t)$ *шешімі* $K(t,s)$ *ядросының (немесе J операторының) меншікті функциясы деп аталады (көбінесе* $y=y(t)$ *—J операторының меншікті функциясы деп аталады).* $\mu=\dfrac{1}{\lambda}(\lambda\neq 0)$ *саны* $K(t,s)$ *ядросының (немесе J операторының) меншікті мәні деп аталады.*

λ сипаттамалық мәніне сәйкес келетін J операторының барлық $y(t)$ меншікті функцияларының жиынтығы $C([0,T],\mathbb{C}^n)$ кеңістігінде сызықтық ішкі кеңістігін құрайды. Бұл кеңістіктің R өлшемі (яғни, сипаттамалық санға сәйкес келетін сызықтық тәуелсіз функциялардың λ максималды саны) сипаттамалық санның еселісі деп аталады (дәлірек: геометриялық еселісі), немесе λ характеристикалық санының рангы (немесе $\mu=\dfrac{1}{\lambda}$меншікті мәні). деп аталады. Егер $r=1$ болса, онда λ — жай сипаттамалық сан; егер $r>1$ болса, онда λ — еселі сипатамалық сан болады. Егер теңдеуі $(1.1.5_0)$ интегрелдық теңдеу $\lambda=\lambda_0\in\mathbb{C}$ тиісті тек $y(t)\equiv 0$ тривиалды шешімге ие болса, онда λ_0 саны регуляр сан деп аталады.

Келесі теоремалар интегралдық теңдеулердің шешімдерінің бар және жалғыздығын қамтамасыз етеді:

в) Интегралдық (1.1.5) теңдеуі жалғыз шешімге ие болу үшін, біртекті теңдеу $C([0,T],\mathbb{C}^n)$ кеңістігінде $y(t)\equiv 0$ тривиалдық шешімге ие болуы қажетті және жеткілікті.

г) Егер J интегралдық операторының $K(t,s)$ ядросының $\lambda=\lambda_0$ характеристикалық мәнінің r рангға ие болса $(1.1.5_0)$ біртекті теңдеудің жалпы шешімі келесі түрде жазылады:

$$y=y(t,c)=c_1y^{(1)}(t)+...+c_ry^{(r)}(t),$$

мұндағы $\left\{y^{(j)}(t)\right\}$- сипаттамалық λ_0 мәніне сәйкес келетін барлық сызықтық тәуелсіз меншікті функциялар жүйесі, $c_1,....,c_r$ – кез-келген тұрақтылар.

д) Егер r – саны J интегралдық операторының $K(t,s)$ ядросының λ_0 характеристикалық мәнінің рангы болса және $(1.1.5_0)$ біртекті емес теңдеу $C([0,T],\mathbb{C}^n)$ кеңістігінде шешімге ие болса онда бұл теңдеудің жалпы шешімі келесі түрде жазылады

$$y = y(t,c) = c_1 y^{(1)}(t) + ... + c_r y^{(r)} + \tilde{y}(t),$$

мұнда $c_1,...,c_r$ - кез-келген тұрақтылар, $\left\{y^{(j)}(t)\right\}$ - барлық сызықтық тәуелсіз меншікті функциялар жүйесі $y = \tilde{y}(t)$ — жоғарыда келтірілген (1.1.5) біртекті емес интегралдық теңдеудің дербес шешімі.

е) Кез-келген сипаттамалық мәннің r рангы шектеулі.

Осы қасиеттердің барлығы $K(t,s)$ айныған ядро үшін негізделген болады. Енді $C([0,T],\mathbb{C}^n)$ кеңістігінде скаляр көбейтінді ұғымына енгіземіз:

$$[y,z] \equiv [\{y_1,...,y_n\},\{z_1,...,z_n\}] \stackrel{def}{=} \int_0^T (y(t),z(t))dt \equiv \int_0^T \sum_{j=1}^n y_j(t)\overline{z}_j(t)dt.$$

Сонымен қатар $L = I - \lambda J$ операторына түйіндес болған L^* операторын құрамыз. L^* операторы келесі тепе-теңдікті қанағаттандырады:

$$\left|Ly,z\right| \equiv \left[y,L^*z\right]\left(\forall y,z \in C([0,T],\mathbb{C}^n\right).$$

Алдымен, I және J операторларының сызықтығына байланысты $L^* = \left(I - \lambda I\right)^* = I^* - \overline{\lambda}\,J^* = I - \overline{\lambda}\,J$ теңдік орындалады. Сондықтан тек J^* табу жеткілікті. Бізде

$$\left[Jy,z\right] = \int_0^T (Jy,z)dt \equiv \int_0^T (\int_0^T K(t,s)y(s)ds, z(t))dt =$$

$$= \int_0^T (\int_0^T K(t,s)y(s), z(t)ds)dt = \int_0^T (\int_0^T (y(s), K^*(t,s)z(t))ds)dt =$$

$$= \int_0^T (\int_0^T (y(s), K^*(t,s)z(t)dt)ds \equiv (y, J^*z).$$

яғни

$$\left(J^*z\right)(s) = \int_0^T K^*(\mathrm{t,s})z(t)dt$$

және

$$\left(J^{*}z\right)(s)=\int_{0}^{T}K^{*}(s,t)z(s)ds\equiv\int_{0}^{T}\overline{K^{'}(s,t)}z(s)ds,$$

мұнда штрихпен транспозиция белгісі көрсетілген.

$\overline{K'(s,t)}$ ядросы $K(t,s)$ ядросына одақтас деп аталады және $K_{*}(t,s)$ деп белгіленеді. Осылайша,

$$K_{*}(t,s)=K^{*}(s,t)\equiv\overline{K'(s,t)}$$

Бұл жағдайда L^{*} операторына қосылған L операторы келесі түрде жазылады

$$L^{*}y=y(t)-\overline{\lambda}\int_{0}^{T}K_{*}(t,s)y(s)ds\equiv y(t)-\overline{\lambda}\int_{0}^{T}\overline{K'(s,t)}y(s)ds$$

Теңдеу

$$L^{*}z=0\Leftrightarrow z(t)-\overline{\lambda}\int_{0}^{T}K_{*}(t,s)y(s)ds=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z(t)-\overline{\lambda}\int_{0}^{T}\overline{K'(s,t)}z(s)ds=0 \qquad (1.1.6_{0})$$

теңдеуге қатысты конъюгация деп аталады $(1.1.5_{0})$ (кейде бұл теңдеу түпнұсқаға қатысты одақтас теңдеу деп аталады $(1.1.5_{0})$

Теорема 1.1.1. (1.1.5) жүйесінде $h(t)\in C([0,T],\mathbb{C}^{n})$ біртектілігі болсын, $K(t,\mathrm{s})\in \mathrm{C}([0,\mathrm{T}]\times[0,T],\mathbb{C}^{n^{2}})$ ядро. Бұл жағдайда келесі тұжырымдар дұрыс:

1) $(1.1.5_{0})$ және $(1.1.6_{0})$ теңдеулер бір уақытта ғана тривиальды шешімдерге ие болады (λ және $\overline{\lambda}$ бұл жағдайда $K(t,s)$ және $K_{*}(t,s)=K^{*}(s,t)$ ядроларының сипаттамалық сандары емес) немесе сызықтық тәуелсіз шешімдердің бірдей саны бар (бұл λ және $\overline{\lambda}$ жағдайда $K(t,s)$ ядроларының сипаттамалық сандары болады) және тиісінше $K^{*}(t,s)$);

2) (1.1.1) интегралдық теңдеу $C([0,T],\mathbb{C}^{n})$ кеңістікте шешімі болу үшін, $(1.1.6_{0})$ біріккен біртекті теңдеудің барлық $z(t)$ шешімдеріне $h(t)$ біртектіліктің ортогоналды болуы қажет және жеткілікті, яғни сондай-ақ

$$\int_0^T (h(t), z^{(j)}(t))dt = 0,\ j = \overline{1,r},$$

мұндағы $\left\{z^j(t)\right\}$ – λ сипаттамалық мәніне сәйкес келетін L^* операторының ядросының өзіндік функциясының базалық жүйесі.

Бұл теорема көбінесе альтернативті тұжырым ретінде тұжырымдалады

Фредгольмге альтернативалары: Көрсетілген интегралдық теңдеу

$$y(t) = \lambda\int_0^T K(t,s)y(s)ds + h(t), \qquad (1.1.1)$$

мұндағы $K(t,s) \in C([0,T]\times[0,T],\mathbb{C}^{n^2}), h(t) \in C([0,T],\mathbb{C}^n)$ үшін екі ерекше келесі жағдайлар туындауы мүмкін:

а) λ - $k(t,s)$ ядросының характеристикалық мәні болып табылмайды, және сонда ғана (1.1.5) интегралдық біртекті емес теңдеу және төменде көрсетілген түйіндес теңдеу

$$w(t) = \overline{\lambda}\int_0^T \overline{K'(s,t)}w(s)ds + g(t) \qquad (1.1.7)$$

$C([0,T],\mathbb{C}^n)$ берілген мына класста біртекті емес $h(t), g(t) \in C([0,T],\mathbb{C}^n)$ функцияның кез-келген оң жақ мәні үшін бір мәнді шешімді болады; сонымен қатар $y = \lambda Jy, w = \overline{\lambda}J^*w$ біртекті теңдеулер $y \equiv 0, w \equiv 0$ тривиальды шешімдері болады;

б) (1.1.1) теңдеудегі $K(t,s)$ ядроның (r рангы) λ сипаттамалық мәні болса және $C([0,T],\mathbb{C}^n)$ класта шешімге ие болады, егер $h(t)$ біртекті емес $z^{(1)}(t),...,z^{(r)}(t)$ ж әне тек біртектілігі, барлық негізгі шешімдерге ортогональ болған жағдайда ғана сәйкес біртектес ілеспе теңдеудің $z = \overline{\lambda}J^*z$ сонымен қатар $y = \lambda Jy$ біртекті теңдеуінде $y^{(1)}(t),...,y^{(r)}(t)$, және біртекті емес теңдеудің әрбір шешімі (1.1.1) түрінде ұсынылған $y(t,c) = c_1y^{(1)}(t) + ... + c_ry^{(r)}(t) + \tilde{y}(t)$ мұндағы $\tilde{y}(t)$ - біртекті емес теңдеудің (1.1.1) нақты шешімі $C([0,T],\mathbb{C}^n)$,$c_1,...c_r$ - еркікті тұрақтылар.

Жоғарыда атап өтілген салдардан $K(t,s)$ ядроның айныған ядро түрінде берілуі де толық зерттелінген соларды қарастырып өтейік.

1.2. Фредгольмнің айныған ядролы интегралдық теңдеулері

Егер (1.1.1) теңдеуде $K(t,s)$ ядросы төмендегі түрде көрсетілсе

$$K(t,s)=\sum_{j=1}^{m}A_j(t)B_j(s) \tag{1.2.8}$$

мұндағы $A_j(t), B_j(s)$ – анықталған матрицалар түрінде жазылады (олардың мөлшері мен тегістігі төменде көрсетілген), $j=\overline{1,m}$ айныған ядролы интегралдық теңдеулер жүйесі деп аталады. Мұндай теңдеулерді төменде қарастырылған алгебралық теңдеулер жүйесіне келтіруге болады
(1.2.8) ді (1.1.1) ге қойсақ бізде

$$y(t)=\lambda\sum_{j=1}^{m}A_j(t)\int_0^T B_j(s)y(s)ds+h(t) \tag{1.2.9}$$

белгілейміз

$$w_j=\int_0^T B_j(s)y(s)ds,\ j=\overline{1,m}. \tag{1.2.10}$$

Бұдан аламыз

$$y(t)=\lambda\sum_{j=1}^{m}A_j(t)w_j+h(t). \tag{1.2.11}$$

(1.2.11) теңдеудің сол жағын $B_i(t)$ көбейтіп, алынған теңдікті $t\in[0,\mathrm{T}]$ -ге интегралдасақ, бізде

$$\int_0^T B_i(t)y(t)dt=\lambda\sum_{j=1}^{m}(\int_0^T B_i(t)A_j(t)dt)w_j+\int_0^T B_i(t)h(t)dt, i=\overline{1,m}.$$

(1.2.10) көмегімен алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз

$$w_i=\lambda\sum_{j=1}^{m}c_{ij}w_j+H_i(i=\overline{1,m}), \tag{1.2.12}$$

көрсетілген жерде:

$$c_{ij}=\int_0^T B_i(t)A_j(t)dt,\ \ H_i=\int_0^T B_i(t)h(t)dt,\ \ i,j=\overline{1,m}.$$

Енді $A_j(t),B_j(t),\ \ j=\overline{1,m}$ матрицаларындағы шарттарды қарастырайық. Бұл матрицалар $[0,\mathrm{T}]$ бойынша интегралдануы керек екендігі белгілі. Олардың барлық элементтері $[0,\mathrm{T}]$ кесіндісінде үзіліссіз болады деп есептейміз. Матрицалар алгебрасына сүйене отырып келесі теңдіктердің орындалуы арқылы $A_jB_j, B_iA_j,\ \ \sum_{i=1}^{m}B_iA_j,\ \ B_jy$ олардың өлшемдері барлық $i,j=\overline{1,m}$ өлшемдерінде сәйкес болу керек .Бұған бірдей өлшемдегі $n\times p$ $A_i(t)$ матрицаларын және $p\times n$ бірдей өлшемдегі $B_j(t)$ матрицаларды аламыз, мұндағы $p-$ кез келген натурал сан. Сонда w_i векторы $p\times 1$ өлшемдегі бағанына айналады $c_{ij}-(p\times p)-$ матрица, $H_j-(p\times 1)-$ вектор, $i,j=\overline{1,\mathrm{n}}$. $(pm)\times 1$ өлшемді $w=\{w_1,...,w_m\},H=\{H_1,...,H_m\}$ векторларын төмендегі матрицаны енгіземіз

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mm}\end{pmatrix}$$

Бұл матрица $(mp)\times(mp)$ өлшемді квадрат матрица. Енді (1.2.12) жүйені былай жазсақ болады:

$$w=\lambda Cw+H\Leftrightarrow(I-\lambda C)w=H. \qquad (1.2.13)$$

$\lambda=0$ үшін (1.2.12) жүйенің $w=H$ нақты шешімі бар, сондықтан $\lambda\neq 0$ болған жағдайды қарастырайық. Бұл жағдайда (1.2.13) жүйені келесідей етіп жазуға болады

$$(\mu I-C)w=\mu H\quad(\mu=\frac{1}{\lambda}). \qquad (1.2.14)$$

Енді жүйе (1.2.14) мен (1.1.1) жүйе арасында байланыс орнатайық. Бұл жүйелер келесі салдарда бір-біріне эквивалентті:

егер (1.2.9) жүйесінің $y=y(t)\in C([0,T],\mathbb{C}^n)$ шешімі болса, онда оған сәйкес (1.2.14) жүйенің $w=\left\{\int_0^T B_1(s)y(s)ds,...,\int_0^T B_m(s)y(s)ds\right\}$ шешімі бар болады.

Керісінше: егер (1.2.14) жүйенің $w=\{w_1,...,w_m\}\in C^{mp}$ *шешімі бар болса, онда бастапқы (1.1.1) жүйенің* $y(t)=\lambda\sum_{j=1}^{m}A_j(t)w_j+h(t)$ *шешімі бар болады.*

Соңғы мәлімдеме дәлелдеуді қажет етеді. $y(t)$ функциясын (1.2.9) -ге ауыстырыңыз; содан алатынымыз

$$h(t)+\lambda\sum_{j=1}^{m}A_j(t)w_j=\lambda\sum_{j=1}^{m}A_j(t)\int_0^T B_j(s)(\lambda\sum_{i=1}^{m}A_i(s)w_i+$$

$$+h(s))ds+h(t)\Leftrightarrow\sum_{j=1}^{m}A_j(t)w_j=\lambda\sum_{j=1}^{m}A_j(t)\int_0^T(B_j(s)\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{m}A_i(s)w_i)ds+\sum_{j=1}^{m}A_j(t)\int_0^T B_j(s)h(s)ds. \qquad (1.2.15)$$

Осы теңдіктің сәйкестік екенін көрсетейік.Теңдеудің оң жағын түрлендірейік

$$\lambda\sum_{j=1}^{m}A_j(t)\sum_{i=1}^{m}\int_0^T(B_j(s)A_i(s)ds)w_i+\sum_{j=1}^{m}A_j(t)H_j\equiv$$

$$\equiv\lambda\sum_{j=1}^{m}A_j(t)\sum_{i=1}^{m}c_{ij}w_j+\sum_{j=1}^{m}A_j(t)H_j.$$

w_i функция (1.2.12) жүйесін қанағаттандыратынын ескере отырып, келесі теңдікке ие боламыз

$$\sum_{i=1}^{m}c_{ij}w_j=\frac{1}{\lambda}w_j-\frac{1}{\lambda}H_j.$$

Бұл өрнекті алдыңғы сәйкестіктің оң жағына ауыстырып, мына формаға келеміз

$$\lambda\sum_{j=1}^{m}A_j(t)(\frac{1}{\lambda}w_j-\frac{1}{\lambda}H_j)+\sum_{j=1}^{m}A_j(t)H_j\equiv\sum_{j=1}^{m}A_j(t)w_j.$$

Сонымен, түрлендірулерден кейін (1.2.15) теңдеудің сол жақ бөлігі $t\in[0,T]$ барлық мәндері үшін оң жағымен сәйкес келетіндігі көрсетілген. Бұл дегеніміз (1.2.11) функциясы (1.2.9) интегралдық жүйенің шешімі болып табылады.

(1.2.13) жүйенің әр түрлі шешімдері қандай жағдайда (1.2.9) интегралдық жүйенің әр түрлі шешімдерін тудыратынын анықтайық. Сонымен, (1.2.13) жүйенің $w=\{w_1,...,w_m\}$ және $\bar{w}=\{\bar{w}_1,...,\bar{w}_m\}$ әр түрлі шешімдері болсын. Онда (1.2.9) интегралдық жүйенің $y(t)$ және $\tilde{y}(t)$ шешімдері сәйкес келеді, егер

$$\sum_{j=1}^{m} A_j(t)w_j \equiv \sum_{j=1}^{m} A_j(t)\tilde{w}_j \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m} A_j(t)(w_j - \tilde{w}_j) \equiv 0(\forall t \in [0,T]). \qquad (1.2.16)$$

Егер $A_j^{(k)}$ арқылы A_j матрицасының k бағанын, ал $w_j^{(k)}, \tilde{w}_j^{(k)}$ сәйкесінше w_j және $\tilde{w}_j$ векторларының k компонентін белгілесек, онда сәйкесінше (1.2.16) мына түрде жазуға болады

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} A_j^{(k)}(t)\cdot(w_j^{(k)} - \tilde{w}_j^{(k)}) \equiv 0(\forall t \in [0,T]). \qquad (1.2.16')$$

$w \neq \tilde{w}$ болғандықтан, $w_j^{(k)} - \tilde{w}_j^{(k)}$ айырмашылықтарының ең болмағанда біреуі нөлге тең емес, сондықтан сәйкестілік $(1.2.16')$ матрицаның бағаны болып табылады

$$S(t) = (A_1^{(1)}(t),..., A_1^{(p)}(t); A_2^{(1)}(t),..., A_2^{(p)}(t);....; A_m^{(1)}(t),..., A_m^{(p)}(t))$$

және $[0,T]$ кесіндісіне сызықтық тәуелді. Демек, егер $S(t)$ матрицасының бағандары $[0,T]$ аралықта сызықтық тәуелді болмаса, онда $(7.16')$ тепе-теңдікте $w_j^{(k)} \equiv \tilde{w}_j^{(k)}$ екенідігі шығады; сондықтан, $y(t) \equiv \tilde{y}(t)$. Сонымен, $S(t)$ матрицасының бағандарының $[0,T]$ сегментіндегі сызықтық тәуелсіз болған жағдайында $w \to y(t)$ сәйкестігі бір-біріне сәйкес келеді $(w \leftrightarrow y(t))$, сондықтан бұл жағдайда (1.2.9) жүйенің шешімділігін зеттеу үшін (1.2.13) алгебралық теңдеулер жүйенің шешімділігін қарастыруда ауыстыруға болатынын көрсетеміз. Бұдан былай $S(t)$ матрицаның барлық бағандары $[0,T]$ кесіндіде сызықты тәуелсіз болсын.

Бұған дейін (1.2.13) түрдегі жүйелерді қарастырғанбыз. 1.1 теоремадан келесі салдар келіп шығады, егер $\mu = \dfrac{1}{\lambda}$ C матрицасының менщікті мәні болмаса, онда $(\mu I - C)w = 0$ біртекті жүйеде тек тривиальды шешім болады. Бұл интегралдық теңдеуге эквивалент болған (1.2.9) интегралдық жүйеміз $h(t) \in C([0,T], \mathbb{C}^n)$ кез-келген оң жақ үшін шешімге ие болады, оны мына түрде жазуға болады

$$y(t) = \frac{1}{\mu}\sum_{j=1}^{m} A_j(t)w_j + h(t)(w \equiv \{w_1,..., w_m\}).$$

Егер $\mu = \frac{1}{\lambda}(\lambda \neq 0)$ C матрицасының r геометриялық еселігінің меншікті мәні болса, онда $(\mu I - C)w = 0$ біртекті жүйеде шешімдердің $w = \alpha_1 w^{(1)} + ... + \alpha_r w^{(r)}$ базистік жүйесін құрастырады және оның жалпы шешімі келесі түрде жазылады

$$w = \alpha_1 w^{(1)} + ... + \alpha_r w^{(r)},$$

мұндағы $\alpha_1, ..., \alpha_r$ - кез-келген тұрақтылар. Сонымен қатар $(\overline{\mu} I - C^*)z = 0$ жұптасқан біртекті жүйе $z^{(1)}, ..., z^{(r)}$ теңдеулер жүйесін құрастырады ал олардың өлшемі r вектордан тұрады. Сондықтан (1.2.14) біртекті емес жүйе шешімге болуы үшін оның оң жағы базистің барлық векторларына ортогоналды болуы қажет және жеткілікті

$$(\mu H, z^{(j)}) = 0 \Leftrightarrow (H, z^{(j)}) = 0, j = \overline{1, r}. \qquad (1.2.17)$$

Бұл жағдайда (1.2.14) келесі түрде жазылады:

$$w = \alpha_1 w^{(1)} + ... + \alpha_r w^{(r)} + \tilde{w}, \qquad (1.2.18)$$

Мұндағы $\alpha_1, ..., \alpha_r$ - кез-келген тұрақтылар, $w = \tilde{w} -$ (1.2.14) жүйенің бір шешімі (немесе, дәл сол (1.2.13) жүйесі). Бастапқы интегралдық (1.2.9) жүйенің шарты (1.2.17) шартқа қандай эквивалентті болатынын көрейік. Ол үшін (1.2.9) теңдеу үшін түйіндес болған біртекті теңдеуді келесі түрде жазып аламыз:

$$\tilde{y}(t) = \overline{\lambda} \sum_{j=1}^{m} \int_0^T B_j^*(t) A_j^*(s) \hat{y}(s) ds \Leftrightarrow \hat{y}(t) = \overline{\lambda} \sum_{j=1}^{m} B_j^*(t) \int_0^T A_j^*(s) \hat{y}(s) ds. \qquad (1.2.19)$$

мұнда белгілесек

$$z_j = \int_0^T A_j^*(s) \hat{y}(s) ds, j = \overline{1, m}, \qquad (1.2.20)$$

(1.2.20) -дің екі жағын да $A_i^*(t)$ -ге көбейтіп, $t \in [0, T]$ -ге интегралдасақ, аламыз

$$\int_0^T A_i^*(t) \hat{y}(t) dt = \overline{\lambda} \sum_{j=1}^{m} (\int_0^T A_i^*(t) B_j^*(t) dt) z_j \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_i = \bar{\lambda}\sum_{j=1}^{m} d_{ij} z_j, \quad i = \overline{1, m}, \qquad (1.2.20_1)$$

Белгіленгендей

$$d_{ij} = \int_0^T A_i^*(t) B_j^*(t) dt, \quad i, j = \overline{1, m}.$$

$d_{ij} = c_{ji}^*$, екенін көру қиын емес, мұнда c_{ij} — жүйеге қатысатын матрицалар (1.2.12). Жүйе матрицасы $(1.2.20_1)$

$$C^* = \begin{pmatrix} c_{11}^* & c_{21}^* & \dots & c_{m1}^* \\ c_{12}^* & c_{22}^* & \dots & c_{m2}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1m}^* & c_{2m}^* & \dots & c_{mn}^* \end{pmatrix}$$

сондықтан (1.2.19) біртекті түйіндес интегралдық теңдеуге сәйкес келетін алгебралық теңдеулер жүйесі келесідей болады:

$$z = \bar{\lambda} C^* z \Leftrightarrow (I - \bar{\lambda} C^*) z = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\bar{\mu} I - C^*) z = 0 (\mu = \frac{1}{\lambda}, \lambda \neq 0). \qquad (1.2.21)$$

(1.2.19) теңдеудің барлық шешімдері (1.2.20) – дан табылады, мұндағы $z = \{z_1, ..., z_m\} - (1.2.21)$ жүйенің шешімі. Ортогоналдылық (1.2.17) теңдеу келесі түрде жазылады ($H = \left\{ \int_0^T B_1(t) h(t) dt, ..., \int_0^T B_m(t) h(t) dt, z^{(j)} = \left\{ z_1^{(j)}, ..., z_m^{(j)} \right\} \right\}$ екенін ескерген жөн)

$$\sum_{i=1}^{m} \int_0^T (B_i(t) h(t) dt, z_i^{(j)}) dt = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} \int_0^T (h(t), B_i^*(t) z_i^{(j)}) dt = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \int_0^T (h(t), \bar{\lambda} \sum_{i=1}^{m} B_i^*(t) z_i^{(j)} dt = 0, \quad j = \overline{1, r}.$$

(1.2.20) теңдікке сүйене отырып, (1.2.17) ортогоналдылық шарттары эквивалентті екенін білдіреді

$$\int_0^T (h(t), \hat{y}^{(j)}(t))dt = 0, \quad j = \overline{1,r}, \tag{1.2.22}$$

мұндағы $\hat{y}^{(t)}(t),...,\hat{y}^{(m)}(t)$ — (1.2.19) түйіндес интегралдық жүйенің шешімдерінің базистік шешімі болады. Сонымен, егер $\mu = \frac{1}{\lambda}(\lambda \neq 0) -$ теңдеу r ядросының (1.2.9) геометриялық еселігінің меншікті мәні болса, онда (1.2.9) интегралдық жүйенің $C([0,T],\mathbb{C}^n)$ кеңістігіндегі шешімділігі үшін ортогоналдық шарттардың (1.2.22) орындалуы қажет және жеткілікті. Бұл жағдайда жалпы шешім (1.2.9) формада жазылады

$$y(t) = \alpha_1 y^{(1)}(t) + ... + \alpha_r y^{(r)}(t) + \tilde{y}(t), \tag{1.2.23}$$

мұндағы $\alpha_1,...,\alpha_r$ - кез-келген тұрақтылар ((1.2.18) -дегі сияқты), $y^{(1)}(t),...,y^{(r)}(t) -$ базистік біртекті теңдеудің шешімдерінің негізгі жүйесі $y(t) = \lambda\int_0^T K(t,s)y(s)ds \;\; (\lambda = \frac{1}{\mu})$, және $y = \tilde{y}(t) -$ біртекті емес жүйенің шешімі (1.2.9). Осылайша, 1.1 теоремасы айныған $K(t,s)$ ядро түрінде берілген (1.2.9) интегралдық жүйе туралы теорема дәлелденді.

Ескерту 1.2.1. Жоғарыда келтірілген C матрицасының (1.2.13) J интегралдық операторының $K(t,s)$ ядросының λ характеристикалық мәні (R еселігі) болады егер $\mu = \frac{1}{\lambda}(\lambda \neq 0)$ шарты меншікті мән болса. Шешімді табу процесі (1.2.23) келесі алгоритм арқылы жүзеге асырылатын алгебралық операциялар келуін көрсетейік.

1.2.1 А л г о р и т м і

1) $C = (c_{ij})$ және $C^* = (d_{ij})$ матрица құрайық, мұндағы

$$c_{ij} = \int_0^T B_i(t)A_j(t)dt, \quad i,j = \overline{1,m}.$$

2) Түйіндес оператор құрамыз

$$(I - \bar{\lambda}C^*)z = 0 \Leftrightarrow (\bar{\mu}I - C^*)z = 0 \;\; (\mu = \frac{1}{\lambda}, \lambda \neq 0)$$

және $z^{(1)},...,z^{(r)} \;\; (z^{(j)} = \{z_1^{(j)},...,z_m^{(j)}\})$ шешімдерінің базистік жүйесін табамыз

3) $H = \{H_1, ..., H_m\}$ векторын құрамыз, мұнда

$$H_i = \int_0^T B_i(t)h(t)dt, \ i = \overline{1,m},$$

және $(H, z^{(j)}) = 0 \ \ (j = \overline{1,m})$ ортогоналдылық шарттарын тексереміз. Егер бұл шарт орындалмаса, онда бастапқы (1.2.9) интегралдық жүйенің шешімі болмайды. Егер ол қанағаттандырылса, онда $w = \{w_1, ..., w_m\}$ жүйелер шешімін есептейміз (1.2.13):

$$(I - \lambda C)w = H$$

4) Функция құрамыз

$$y(t) = \lambda \sum_{j=1}^{m} A_j(t) w_j + h(t)$$

Бұл функция бастапқы(1.2.9) интегралды жүйенің шешімі болады

1.2.1 мысал. Скалярлық теңдеуді қарастырайық

$$y(t) = \lambda \int_0^1 t(1+s)y(s)ds + t^2. \qquad (1.2.24)$$

мына түрде қайта жазайық

$$y(t) = \lambda t \int_0^1 (1+s)y(s)ds + t^2$$

$\int_0^1 (1+s)y(s)ds = w$ түрде жазып аламыз. Сонда бізде

$$y(t) = \lambda t w + t^2$$

Осы теңдеуді $(1+t)$ көбейтеміз және алынған теңдікті $t \in [0,T]$ -ге интегралдаймыз:

$$\int_0^1 (1+t)y(t)dt = \lambda(\int_0^1 t(1+t)dt)w + \int_0^1 t^2(1+t)dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w = \lambda(\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3})|_0^1\, w + (\frac{t^3}{3}+\frac{t^4}{4})|_0^1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w = \frac{5}{6}\lambda w + \frac{7}{12} \Leftrightarrow (1-\frac{5}{6}\lambda)w = \frac{7}{12}.$$

Егер $\lambda \neq \frac{6}{5}$ болса, онда соңғы теңдеуде $w = \frac{7}{2(6-5\lambda)}$ ерекше шешімі болады; сондықтан (1.2.24) бастапқы теңдеудің $y(t) = \frac{7\lambda}{2(6-5\lambda)}t + t^2$ ерекше шешімі болады. Егер $\lambda = \frac{6}{5}$ болса, онда $(1-\frac{6}{5}\lambda)w = \frac{7}{12}$ теңдеуі шешімге ие болмай қалады, онда (1.2.24) теңдеу берілген аралықта шешімдері жоқ. Енді (1.2.24) - де t^2 орнына кез-келген $f(t)$ функциясын қоятын болсақ, (1.2.25) ке ие боламыз:

$$y(t) = \lambda\int_0^1 t(1+s)y(s)ds + f(t) \tag{1.2.25}$$

Жоғарыдағы түрлендірулерді қайта орындайтын болсақ, төмендегі шешімге ие болмыз

$$w = \frac{5}{6}\lambda t\int_0^1 f(t)(1+t)dt \Leftrightarrow (1-\frac{5}{6}\lambda)w = \int_0^1 f(t)(1+t)dt. \tag{1.2.26}$$

Егер $\lambda \neq \frac{6}{5}$ болса, онда бұл теңдеу, (1.2.25) $y(t) = f(t) + \lambda\int_0^1 \frac{t(1+s)}{1-\frac{5}{6}\lambda} f(s)ds$ теңдеудің ерекше шешімі болады. Егер $\lambda = \frac{6}{5}$ болса, онда (1.2.26) теңдеудің шешімі $\int_0^1 f(t)(1+t)dt = 0$ болу керек және жеткілікті. Онда (1.2.26) шешім ретінде кез келген α константаға тең болады, ал (1.2.25) $y(t) = f(t) + \frac{6}{5}t\alpha$ теңдеуінің шешімдер жиынына ие болады. Мұнда $\hat{y}(t) = 1+t$ біртекті түйіндес теңдеудің шешімі болғандықтан $\hat{y} = \frac{6}{5}\int_0^1 s(1+t)\hat{y}(s)ds$ негізгі шешімі екенін ($\int_0^1 f(t)(1+t)dt=0$ шартын қанағаттандыратын нақты $f(t)$ функциясын таңдаңыз) табу керек. Енді біз (1.2.9) жүйеге арналған резолвента ұғымын енгіземіз. Ол үшін (1.2.9) жүйенің шешімін λ $K(t,s)$ ядросының сипаттамалық мәні болмаған жағдайда жазамыз:

$$y(t)=h(t)+\lambda\sum_{j=1}^{m}A_j(t)w_j. \tag{1.2.27}$$

$w=\{w_1,...,w_m\}$ функциямыз (1.2.13) түрде жазылады. Себебі λ характеристикалық мән болмағандықтан келесі теңдік орынды болады

$$w=(I-\lambda C)^{-1}H.$$

$(I-\lambda C)^{-1}$ матрицасын блок түрінде жазамыз:

$$(I-\lambda C)^{-1}=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{pmatrix}\Delta_{11}(\lambda) & ... & \Delta_{m1}(\lambda)\\ \Delta_{12}(\lambda) & ... & \Delta_{m2}(\lambda)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \Delta_{1m}(\lambda) & ... & \Delta_{mm}(\lambda)\end{pmatrix}$$

мұндағы $\Delta_{ij}(\lambda)$ $p\times p$ өлшемдегі блоктар, $\Delta(\lambda)=\det(I-\lambda C),\ i,j=\overline{1,m}.$ Содан кейін

$$w=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{pmatrix}\Delta_{11}(\lambda) & \cdots & \Delta_{m1}(\lambda)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \Delta_{1m}(\lambda) & \cdots & \Delta_{mm}(\lambda)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\int_0^T B_1(s)h(s)ds\\ \vdots\\ \int_0^T B_m(s)h(s)ds\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{m}\Delta_{i1}(\lambda)\int_0^T B_i(s)h(s)ds\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^{m}\Delta_{im}(\lambda)\int_0^T B_i(s)h(s)ds\end{pmatrix}$$

және (1.2.27) теңдеуді келесі интегралдық теңдеу түрінде жазып аламыз

$$y(t) = h(t) + \frac{\lambda}{\Delta(\lambda)} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} A_j(t) \Delta_{ij}(\lambda) \int_0^T B_i(s) h(s) ds \equiv$$
$$\equiv h(t) + \lambda \int_0^T \frac{1}{\Delta(\lambda)} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} A_j(t) \Delta_{ij}(\lambda) B_i(s)) h(s) ds.$$

Бұл жерде біз

$$\Gamma_\lambda(t,s) \equiv \frac{1}{\Delta(\lambda)} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} A_j(t) \Delta_{ij}(\lambda) B_i(s), \quad (1.2.28)$$

онда алдыңғы теңдеуді мына түрде жазайық

$$y(t) = h(t) + \lambda \int_0^T \Gamma_\lambda(t,s) h(s) ds. \quad (1.2.29)$$

$n \times n$ матрицасы $\Gamma_\lambda(t,s)$ теңдеудің шешуші ядросы (1.2.9) деп аталады (немесе $K(t,s)$ ядросының шешуші күші). $\Gamma_\lambda(t,s)$ λ нүктелерінде $K(t,s)$ ядросының сипаттамалық мәндері болатын ерекше қасиеттерге ие екенін ескеріңіз. Резольвент ұғымы $K(t,s)$) ерікті ядро жағдайында да жалпыланады (міндетті түрде бүлінбейді), бұл туралы кейінірек айтылады.

1.3 Фредгольм теңдеу үшін тізбектеп шешу әдісі Резольвенттаны қайталанатын ядролар түрінде өрнектеу

Тағы да интегралдық теңдеулер жүйесін қарастырайық (1.1.1), оны ыңғайлы болу үшін қайта жазамыз:

$$y(t) = \lambda \int_0^T K(t,s) y(s) ds + h(t). \quad (1.1.1)$$

Біз бұрынғыдай $y = \{y_1, ..., y_n\}$, $h(t) = \{h_1, ..., h_n\}$, $K(t,s)$ - деп есептейміз, — $(n \times n)$ - матрица, ал $h(t) \in C([0,T], \mathbb{C}^n)$, $K(t,s) \in C([0,T] \times [0,T], \mathbb{C}^{n^2})$. Сонда бар

$$\max_{0 \le t,s \le T} \|K(t,s)\| = M < \infty.$$

Біз келесі теореманы дәлелдейміз.

Теорема 1.3.2. *Егер* λ $|\lambda| < \dfrac{1}{TM}$ *кіші болса онда (1.1.1) жүйеміз* $C([0,T],\mathbb{C}^n)$ *кеңістігінде жалғыз шешімге ие болады (*λ J *операторның* $K(t,s)$ *ядросының менікті мәні болмайды).*

Д ә л е л д е у. Келесі тізбекті құрайық

$$y_0(t) = h(t),\;\; y_1(t) = h(t) + \lambda\int_0^t K(t,s)y_0(s)ds, ...,$$

$$y_n(t) = h(t) + \lambda\int_0^T K(t,s)\,y_{n-1}(s)ds \;\; (n = 0,1,2,...) \qquad (1.3.30)$$

және осы реттілікке сәйкес келетін келесі қатарды құрамыз

$$S(t) = y_0 t + \sum_{n=1}^{\infty}(y_n(t) - y_{n-1}(t)). \qquad (1.3.31)$$

Біз осы қатардың жалпылама мүшесін бағалаймыз

$$\|y_1(t) - y_0(t)\|_{C[0,T]} = |\lambda|\cdot\left\|\int_0^T K(t,s)h(s)ds\right\|_{C[0,T]} \le |\lambda| M\,\|h(t)\|_{[0,T]}T \equiv$$

$$\equiv |\lambda| MTH_0 \qquad (H_0 = \|h(t)\|_{C[0,T]});$$

$$\|y_2(t) - y_1(t)\|_{C[0,T]} = |\lambda|\cdot\left\|\int_0^T K(t,s)(y_1(s) - y_0(s))ds\right\|_{[0,T]} \le$$

$$\le |\lambda||\lambda| MTH_0\int_0^T \|K(t,s)\|_{C[0,T]}\,ds \le |\lambda|^2 M^2T^2H_0.$$

Егер бағалау орынды деп отырып

$$\|y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)\|_{C[0,T]} \le (|\lambda| MT)^{n-1}H_0,$$

Төмендегі шешімге ие боламыз

$$\|y_n(t) - y_{n-1}(t)\|_{C[0,T]} = |\lambda|\cdot\left\|\int_0^T K(t,s)(y_{n-1}(s) - y_{n-2}(s))ds\right\| \le$$

$$\le |\lambda|\cdot\|y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)\|_{C[0,T]}\int_0^T \|K(t,s)\|_{C[0,T]}\,ds \le$$

$$\leq |\lambda| (|\lambda| MT)^{n-1} H_0 MT = (|\lambda| MT)^n H_0. \qquad (1.3.32)$$

(1.3.31) жалпы мүшенің индукциясына сәйкес (1.3.32) бағалау орынды болады демек бұл қатар келесі қатарға мажарланған болады

$$H_0 + H_0 \sum_{n=1}^{\infty} (|\lambda| MT)^n,$$

$|\lambda| MT < 1 \Leftrightarrow |\lambda| < \dfrac{1}{MT}$ мәнінде жинақты болады. Сондықтан (1.3.31) қатар λ көрсетілген мәндерінде $t \in [0,T]$ сигментінде абсолютті және бірқалыпты жинақты болады. Бұл қатардың $S_n(t)$ дербес қосындысы $y_n(t)$ сәйкес келеді, демек $y_n(t) \to S(t)$ $n \to \infty$. Сонымен қатар, $S(t) \in C([0,\mathrm{T}],\mathbb{C}^n)$ кеңістікке тиісті болады

$$S(t) = h(t) + \lambda \int_0^T K(t,s) S(s) ds,$$

яғни $y = S(t)$ функциясы (1.1.1) жүйесін қанағаттандырады. Егер (1.1.1) теңдеуде басқа $y(t) \in C([0,T],\mathbb{C}^n)$ шешімі болса, онда олардың айырымы $R(t) = S(t) - y(t)$ біртекті жүйені қанағаттандырар еді

$$R(t) = \lambda \int_0^T K(t,s) R(s) ds,$$

содан кейін теңсіздік орын алады

$$\|R(t)\|_{C[0,T]} \leq |\lambda| MT \|R(t)\|_{C[0,T]} \Leftrightarrow (1 - |\lambda| MT) \|R(t)\|_{C[0,T]} \leq 0.$$

$1 - |\lambda| MT > 0$ болғандықтан, бұл теңсіздік орын алу үшін $\|R(t)\|_{C[0,T]} = 0 \Leftrightarrow R(t) \equiv 0 \equiv S(t) \equiv y(t)$ тепе-теңдік орын алу керек демек $y = S(t)$ үспе-үс түседі. Теорема дәлелденді.

Ескерту 1.3.2 Бастапқы $y_0(t)$ жуықтау ретінде кез-келген $y_0(t) \in C([0,T],\mathbb{C}^n)$ функциясын алуымыз мүмкін, яғни (1.1.1) жүйесінің шешімі бастапқы жуықтауды таңдауға тәуелді емес. Сонымен қатар құрылған тізбек төмендегі шартты да қанағаттандыра береді:

$$||\lambda| < (\int_0^T\int_0^T |K(t,s)|^2\, dsdt)^{-\frac{1}{2}}.$$

Енді интегралдық теңдеуді тағы бір қарастырайық

$$J_y \equiv \int_0^T K(t,s)y(s)ds : C([0,T],\mathbb{C}^n) \to C([0,T],\mathbb{C}^n)$$

және J операторының n -ші қуаты J^n қандай ядроларға ие болатынын көрсетейік

$$J^2 y = J(Jy) = \int_0^T K(t,s)(\int_0^T K(s,\xi)y(\xi)d\xi)ds =$$
$$= \int_0^T(\int_0^T K(t,s)K(s,\xi)ds)y(\xi)d\xi.$$

Демек, J^2 операторында $K_2(t,\xi) = \int_0^T K(t,s)K(s,\xi)ds$ ядросы болады яғни

$$J^2 y = \int_0^T K_2(t,\xi)y(\xi)d\xi \ .$$

Әрі қарай,

$$J^3 y = J(J^2 y) \equiv \int_0^T K(t,s)(\int_0^T K_2(s,\xi)y(\xi)d\xi)ds =$$
$$= \int_0^T(\int_0^T K(t,s)K_2(s,\xi)ds)y(\xi)d\xi.$$

Демек, J^3 операторында $K_3(t,\xi) = \int_0^T K(t,s)K_2(s,\xi)ds$ ядросы болады, яғни $J^3 y = \int_0^T K_3(t,\xi)y(\xi)d\xi$. Осы процесті жалғастыра отырып, біз мұны аламыз

$$J^n y = \int_0^T K_n(t,\xi)y(\xi)d\xi, \qquad (1.3.33)$$

онда $K_n(t,\xi)=\int\limits_0^T K(t,s)K_{n-1}(s,\xi)d\xi,\ \ n=1,2,...$

Анықтама 1.3.2. Ядролар

$$K_1(t,s)\equiv K(t,s),\quad K_2(t,\xi)\equiv\int\limits_0^T K(t,s)K_1(s,\xi)ds,...,$$

$$K_n(t,\xi)=\int\limits_0^T K(t,s)K_{n-1}(s,\xi)ds\quad (n=1,2,...)$$

J интегралдық операторының қайталанатын ядролары деп аталады. J операторының J^n n -ші дәрежелі ядросы $K(t,s)$ операторының n -ші итерациясына сәйкес келетіндігін көреміз. $K(t,s)$ ядросының n-ші итерациясы келесі түрде жазылады

$$\underbrace{\int\limits_0^T\int\limits_0^T\cdots\int\limits_0^T}_{n-1} K(t,s_1)K(s_1,s_2)K(s_2,s_3)...K(s_{n-1},s)ds_1ds_2...ds_{n-1}. \qquad (1.3.34)$$

Бұдан келесі салдар келіп шығады:

$$K_{n+m}(t,s)=\int\limits_0^T K_n(t,\xi)K_m(\xi,s)d\xi,\quad n,m=1,2,...$$

Дәл осындай қасиет J операторының дәрежесінің орын ауыстыруынанда есептесе болады: $J^nJ^m=J^mJ^n=J^{m+n}$. Бірізді жақындату әдісі арқылы алынған интегралдық теңдеудің $y(t)=\lim\limits_{n\to\infty}y_n(t)$ қайталанатын ядролар түрінде жазып алайық

$$y_0(t)=h(t)\equiv Ih,\ \ y_1(t)=h(t)+\lambda\int\limits_0^T K(t,s)y_0(s)ds=h(t)+\lambda Jh(t)\equiv$$

$$\equiv(I+\lambda J)h(t),\ \ y_2(t)=h(t)+\lambda\int\limits_0^T K(t,s)y_1(s)ds=h(t)+\lambda\int\limits_0^T K(t,s)[h(s)+$$

$$+\lambda\int\limits_0^T K(s,\xi)h(\xi)d\xi]ds=h(t)+\lambda\int\limits_0^T K(t,s)h(s)ds+\lambda^2\int\limits_0^T K(t,s)\int\limits_0^T K(s,\xi)\times$$

$$\times h(\xi)d\xi=h(t)+\lambda\int\limits_0^T K_1(t,s)h(s)ds+\lambda^2\int\limits_0^T K_2(t,\xi)h(\xi)d\xi\equiv$$

$$\equiv(I+\lambda J+\lambda^2J^2)h(t).$$

Индукция арқылы аламыз

$$y_n(t) = h(t) + \lambda\int_0^T K_1(t,s)h(s)ds + \lambda^2\int_0^T K_2(t,\xi)h(\xi)d\xi + ... +$$

$$+\lambda^n\int_0^T K_n(t,\xi)h(\xi)d\xi \equiv (I + \lambda J + \lambda^2 J^2 + ... + \lambda^n J^n)h(t).$$

$n \to \infty$ -ге өтетін болсақ, шешімін аламыз

$$y(t) = \lim_{n\to\infty} y_n(t) = h(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\int_0^T K_n(t,\xi)h(\xi)d\xi \equiv$$

$$\equiv h(t) + \lambda\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_n(t,\xi)h(s)d\xi. \qquad (1.3.35)$$

Белгілейік

$$R_\lambda(t,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_n(t,\xi) \equiv K_1(t,\xi) + \lambda K_2(t,\xi) + ... + \lambda^{n-1}K_n(t,\xi) + ... \qquad (1.3.36)$$

Бұл қатар $|\lambda| < \dfrac{1}{MT}$ шарты орындалса $0 \le s,t \le T$ салада $t \in [0,T]$ барлық мәндерінде абсалют және бірқалыпты жинақты екені келіп шығады.

Анықтама 1.3.3 $n \times n$ өлшемдегі $R_\lambda(t,\xi)$ матрицасы (1.3.36) түрдегі J интеграл операторының $K(t,s)$ яросының резольвентасы (немесе осы оператордың шешуші ядросы) деп аталады.

(1.3.35) -тен (1.1.1) интегралдық жүйенің ($|\lambda| < \dfrac{1}{MT}$ үшін) жалғыз шешімі төмендегі формуламен жазылады

$$y(t) = h(t) + \lambda\int_0^T R_\lambda(t,s)h(s)ds. \qquad (1.3.37)$$

$K(t,s)$ дегенерацияланған ядросы үшін алынған (1.2.28) резольвентаның $|\lambda| < \dfrac{1}{MT}$ -ге сәйкес келетінін көруге болады (1.3.36).

Ескерту 1.3.3 Интеграл оператордың $R_\lambda(t,s)$ резольвентасы келесі екі интегралды жүйені қанағаттандырады:

$$\begin{cases} R_\lambda(t,s) = K(t,s) + \lambda \int\limits_0^T K(t,\xi) R_\lambda(\xi,s) d\xi, \\ R_\lambda(t,s) = K(t,s) + \lambda \int\limits_0^T R_\lambda(t,\xi) K(\xi,s) d\xi. \end{cases} \tag{1.3.38}$$

Анықтама 1.3.4 $K(t,s)$ ядросының резолвентасы деп $R_\lambda(t,s)$ (өлшемі $n \times n$) матрицалық функцияның (1.3.38) интегралдық теңдеулер жүйесін қанағаттандыратын функциясын айтады.

Теорема 1.3.3 Егер қандай да бір λ-ның мәндерінде $R_\lambda(t,s)$ матрицалық функцияның $[0,T]\times[0,T]$ квадратта үздіксіз болса (1.3.38) интегралдық теңдеулер жүйесін қанағаттандырса онда (1.1.1) интегралдық теңдеулер жүйеміз λ-ның $y(t) \in C([0,T],\mathbb{C}^n)$ жалғыз шешіміне ие болады, (егер, әрине, $h(t) \in C([0,T],\mathbb{C}^n)$ және $K(t,s) \in C([0,T],\mathbb{C}^n)$ (1.3.37) түрінде жазылса).

Дәлелдеу. (1.3.37) вектор функциясы (1.1.1) жүйенің шешімі екенін дәлелдейміз. Біз (1.3.37) - ді (1.1.1) қоятын болсақ;

$$h(t) + \lambda \int\limits_0^T R_\lambda(t,s) h(s) ds - h(t) - \lambda \int\limits_0^T K(t,s)[h(s) +$$
$$+\lambda \int\limits_0^T R_\lambda(s,\xi) h(\xi) d\xi] ds = 0,$$

немесе

$$\int\limits_0^T R_\lambda(t,s) h(s) ds - \int\limits_0^T K(t,s) h(s) ds - \lambda \int\limits_0^T \int\limits_0^T K(t,s) R_\lambda(s,\xi) h(\xi) d\xi ds = 0,$$

немесе

$$\int\limits_0^T [R_\lambda(t,s) - K(t,s) - \lambda \int\limits_0^T K(t,\xi) R_\lambda(\xi,s) d\xi] ds = 0.$$

(1.3.38) теңдіктің бірінші қосылыстағы квадрат жақша ішіндегі мәні нөлге тең болғандықтан (1.3.37) функциямыз (1.1.1) функциялық жүйені қанағаттандырады. Енді осы $y = y(t)$ жалғыз шешімі екендігін көрсетеміз. Ол үшін $y = y(t)$ (1.1.1) жүйенің шешімі болсын, оны (1.1.1) теңдеуге қойып тепе-теңдік аламыз. Бұл тепе-теңдіктің сол екі жағын $\lambda R_\lambda(x,t)$ − ге көбейтіп

$t\in[0,T]$ аралығында интегралдайтын болсақ келесі тепе-теңдікке ие боламыз:

$$\lambda\int_0^T R_\lambda(x,t)y(t)dt \equiv \lambda\int_0^T R_\lambda(x,t)h(t)dt + \lambda\int_0^T(\int_0^T R_\lambda(x,t)K(t,s)dt)y(s)ds.$$

(1.3.38) теңдіктің екінші қосындысынан келесі теңдік шығады

$$\lambda\int_0^T R_\lambda(x,t)K(t,s)dt = R_\lambda(x,s) - K(x,s),$$

онда соңғы тепе-теңдік келесі түрде қайта жазылады

$$\lambda\int_0^T R_\lambda(x,t)y(t)dt \equiv \lambda\int_0^T R_\lambda(x,t)h(t)dt + \lambda\int_0^T R_\lambda(x,s)y(s)ds -$$
$$-\lambda\int_0^T K(x,s)y(s)ds \Leftrightarrow \lambda\int_0^T R_\lambda(x,t)h(t)dt = \lambda\int_0^T \mathrm{K}(x,s)y(s)ds.$$

Себебі (1.3.1) теңдеуі бойынша) $\lambda\int_0^T K(x,s)y(s)ds \equiv h(x)-y(x)$ болғандықтан, біз одан аламыз

$$y(x) = h(x) + \lambda\int_0^T R_\lambda(x,t)h(t)dt,$$

яғни $y=y(t)$ (1.3.37) интегралдық теңдеулер жүйесінің шешімі екені көрсетілді.
Теорема дәлелденді.

Егер λ J интегралдық операторының $K(t,s)$ ядросының сипаттамалық мәні болмаса, сонымен қатар $K(t,s)\in C(0\le s,t\le T,\mathbb{C}^{n^2})$ қанағаттандыратын болса, онда (1.3.38) бірінші интегралдық теңдеу $C([0,T],\mathbb{C}^{n^2})$ классында $s\in[0,T]$ әрбір фиксерленген мәндерінде бір мәнді шешім болады. Сонымен, λ кез-келген регуляр мәндерінде $R_\lambda(t,s)$ резольвента табылып (егер, әрине, $K(t,s)$ үшін $(s,t)\in[0,T]\times[0,T]$ үзділіссіз ядро болса). Сонымен қатар $R_\lambda(t,s)$ $s\in[0,T]$ үшін $t\in[0,T]$ мәндерінде үзділіссіз функция болады. Бұл шешім (1.3.38) -дегі екінші теңдеуді де қанағаттандырады, бұл теңдеуді $R_\lambda(t,s)$ қатысты әрбір тұрақты $t\in[0,T]$ үшін интегралдық теңдеу ретінде қарастыруға болады, сондықтан $R_\lambda(t,s)$ функция $t\in[0,T]$ үшін $s\in[0,T]$ мәнінде үзіліссіз болады. Бұдан, $R_\lambda(t,s)$ резольвентамыз $[0,T]\times[0,T]$ квадратындағы екі айнымалыда үздіксіз екендігін білдірмейді. Дегенмен, бұл айтылған пікір орынды, бірақ біз бұл фактіні дәлелдемейміз. Демек, λ – регуляр мәндерінде $[0,T]\times[0,T]$ квадратық болған үздіксіз $K(t,s)$ ядромыз сол квадратта $R_\lambda(t,s)$ үзіліссіз резольвентаның пайда болуына себепші болады.

$$R_\lambda(t,s)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\Delta_\lambda(t,s), \tag{1.3.39}$$

Мұндағы $\Delta(\lambda)$ - скалярлық функция, ал $\Delta_\lambda(t,s)$ - $n\times n$ өлшемді матрицалық функция, бұл екі функция да $\lambda\in\mathbb{C}$ мәнінде бүтін функциялар және $\Delta_\lambda(t,s)$ $(t,s)\in[0,T]\times[0,T]$ қатысты үзіліссіз функция. Бұл жағдайда бөлгіштің $\lambda=\lambda_0$ нөлдері $K(t,s)$ ядросына характеристикалық мәні болады.

$K(t,s)\in C([0,T],\mathbb{C}^n)$ ядросының сипаттамалық мәндері мен меншікті функцияларының негізгі қасиеттерін тағы бір рет дәлелдемесіз тұжырымдайық (бұл қасиеттер тек деградацияланған $K(t,s)$ ядро үшін дәлелденді).

1) Кез-келген шектеулі аймақта $D\subset\mathbb{C}$ жазықтығы λ мүмкін $K(t,s)$ ядросының характеристикалық мәндерінің соңғы саны болып табылады.

2) $K(t,s)$ ядросының әрбір сипаттамалық мәніне $K(t,s)$ ядросының сызықты тәуелсіз функциясының шектелген саны ғана сәйкес келеді, яғни λ мәнінің характеристикалық түбірінің дәрежесі (геометриялық еселік) ақырлы.

3) λ және $\bar{\lambda}$ $K(t,s)$ ядросының және $K_*(t,s)=\overline{K^T(s,t)}$ ядросының характеристикалық мәндерінің дәрежелері сәйкес келеді.

4) Егер λ дәрежесінің $K(t,s)$ ядросының характеристикалық мәні және (1.1.1) интегралдық біртекті емес теңдеу $C([0,T],\mathbb{C}^n)$ шешілсе, онда бұл теңдеудің жалпы шешімі формула бойынша беріледі

$$y(t)=y(t,c)=c_1y^{(1)}(t)+...+c_ry^{(r)}(t)+\tilde{y}(t),$$

мұндағы $y^{(1)}(t),...,y^{(r)}(t)$ λ меншікті мәніне сәйкес келетін меншікті функциялардың базистік жүйесі.

1.4 Вольтерр типіндегі интегралдық теңдеулер

Бұл түрдің интегралдық жүйелері деп аталады

$$y(t)=\lambda\int_0^t K(t,s)y(s)ds+h(t),\ \ t\in[0,T], \tag{1.4.40}$$

мұндағы $y=\{y_1,...,y_n\},h(t)=\{h_1(t),...,h_n(t)\}$ — белгілі векторлық функция, $K(t,s)=(k_{ij}(t,s))$ — интегралдық оператордың ядросы деп аталатын белгілі $n\times n$ өлшемді матрицалық функция

$$J_y=\lambda\int_0^t K(t,s)y(s)ds, \tag{1.4.41}$$

(1.4.40) жүйе - $K=\tilde{K}(t,s)$ ядросы бар (1.3.1) жүйенің жеке түрі

$$\tilde{K}(t,s)=\begin{cases}K(t,s),0\le s\le t,\\ 0,t<s\le T.\end{cases}$$

Енді біз Вольтерр жүйелерінің характеристикалық сандары жоқ екенін көрсетеміз.

Теорема 1.3.4 (1.4.40) жүйесінде $K(t,s)\in C(0\le s\le t\le T,\mathbb{C}^{n^2})$ ядросы болсын. Онда λ және $h(t)\in C([0,T],\mathbb{C}^n)$ қандай болса да, (1.4.40) жүйесінде әрқашан $y(t)\in C([0.T],\mathbb{C}^n)$ шешімі болады және бұл шешім жалғыз.

Дәлелдеу. Келесі кезектегі жуықтамаларды құрайық

$$y_0=h(t),y_1(t)=h(t)+\lambda\int_0^t K(t,s)y_0(s)ds,...,$$

$$y_n(t)=h(t)+\lambda\int_0^t K(t,s)y_{n-1}(s)ds\quad(n=1,2,...)$$

бірқатар құрамыз

$$S(t)=y_0(t)+(y_1(t)-y_0(t))+...+(y_n(t)-y_{n-1}(t))+... \tag{1.4.42}$$

және оның ортақ мүшесін бағалаңыз. Белгілейміз

$$\max_{0\le s\le t\le T}\|K(t,s)\|=M.$$

бізде $t \in [0,T]$:

$$\|y_0(t)\| = \|h_0(t)\| \le H_0,$$

$$\|y_1(t) - y_0(t)\| \le |\lambda| \int_0^t \|K(t,s)\| \cdot \|y_0(s)\| ds \le |\lambda| M H_0 t,$$

$$\|y_2(t) - y_1(t)\| \le |\lambda| \int_0^t \|K(t,s)\| \cdot \|y_1(s) - y_0(s)\| ds \le$$

$$\le |\lambda| M \, |\lambda| M H_0 \int_0^t s ds = H_0 \frac{(|\lambda| M)^2}{2!} t^2,$$

Бағалау дұрыс болсын

$$\|y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)\| \le H_0 \frac{|(\lambda| M)^{n-1}}{(n-1)!} t^{n-1} (\forall t \in [0,T]).$$

Онда

$$\|y_n(t) - y_{n-1}(t)\| \le |\lambda| \int_0^t \|K(t,s)\| \cdot \|y_{n-1}(s) - y_{n-2}(s)\| ds \le$$

$$\le |\lambda| M H_0 \int_0^t H_0 \frac{(|\lambda| M)^{n-1}}{(n-1)!} s^{n-1} ds = H_0 \frac{(|\lambda| M)^n}{n!} t^n (\forall t \in [0,T]). \qquad (1.4.43)$$

Осылайша, (1.4.43) бағалау индукция арқылы көрсетіледі, біз оны аламыз

$$\|y_n(t) - y_{n-1}(t)\|_{C[0,T]} \le H_0 \frac{(|\lambda| M)^n}{n!} T^n, \quad n = 1, 2, ...$$

Бірақ содан кейін (1.4.42) қатар

$$H_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|\lambda| M)^n}{n!} T^n \equiv H_0 \sum_{n=0}^{\infty} c_n. \qquad (1.4.44)$$

Даламбердің белгісі бойынша бізде $(\lambda \ne 0)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\lambda|^{n+1} M^{n+1} T^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|\lambda|^n M^n T^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\lambda| MT}{n+1} = 0.$$

Демек, (1.4.44) сандар қатары жинақталады, демек (1.4.42) функционалдық қатар $t\in[0,T]$ мәндерінде абсолютті және бірқалыпты барлық $\lambda\in\mathbb{C}$ -қа дейін жинақталады.

$$\lim_{n\to\infty}S_n(t)\equiv\lim_{n\to\infty}y_n(t)=S(t),\ \lim_{n\to\infty}y_n(t)=h(t)+$$
$$+\lambda\int_0^t K(t,s)\lim_{n\to\infty}y_{n-1}(s)ds\Leftrightarrow S(t)=h(t)+\lambda\int_0^t K(t,s)S(s)ds,$$

яғни $y=S(t)$ - кез келген (1.4.40) интегралдық жүйенің $\lambda\in\mathbb{C}$ және кез келген $h(t)\in C([0,T],\mathbb{C}^n)$ үшін жалғыз шешім екені келіп шығады.

Шешімнің жалғыз екенін дәлелдейік. (1.4.40) теңдеуінің екі шешімі болсын: $y(t)$ және $\tilde{y}(t)$. Сонда олардың $z(t)=y(t)-\tilde{y}(t)$ айырымы $z=\int_0^t K(t,s)z(s)ds\Leftrightarrow z=\lambda Jz$ біртекті теңдеуді қанағаттандырады.

Демек $n=1,2,...,$ мәні үшін $z=\lambda J(\lambda Jz)=\lambda^2J^2z=...=\lambda^nJ^nz$ теңдік орынды болады. Әрі қарай,

$$\|J_z\|\le\left\|\int_0^t K(t,s)z(s)ds\right\|\le Mt\|z\|_{C[0,T]},\quad \|J^2z\|=\left\|\int_0^t K(t,s)(Jz)(s)ds\right\|\le$$
$$\le M\int_0^t\|(Jz)(s)\|ds\le M\int_0^t Ms\|z\|_{C[0,T]}ds\le\frac{M^2t^2}{2!}\|z\|_{C[0,T]}$$

Жалпы $\|J^nz\|\le\frac{M^nt^n}{n!}\cdot\|z\|_{C[0,T]}$. Яғни

$$\|z\|_{C[0,T]}\equiv\|\lambda^nJ^nz\|_{C[0,T]}\le\frac{|\lambda|^nM^nT^n}{n!}\cdot\|z\|_{C[0,T]},$$
$$\|z\|_{C[0,T]}(1-\frac{|\lambda|^nM^nT^n}{n!})\le 0.$$

$n\to\infty$ шегіне өтіп, $\|z\|_{C[0,T]}\le 0$, демек, $\|z\|_{C[0,T]}\le 0\Leftrightarrow z=0$, яғни $y(t)\equiv\tilde{y}(t)$. Теорема дәлелденді.

Салдар. (1.4.40) Вольтерра теңдеуінде характеристикалық сандарға ие емес (яғни, ол $\lambda\in\mathbb{C}$ үшін барлық тұрақты).

Фредгольм теңдеулерінде бұл қасиет жоқ екендігіне тағы бір рет назар аударамыз.

Ескерту 1.4.4 1.4 теоремасының шарттарын жеңілдетсе болады және $L_2([0,T],\mathbb{C})=\{y(t):\int_0^T \|y(t)\|^2 dt<\infty\}$ кеңістігінде шешім алуға болады. Келесі мәлімдеме бар.

Теорема 1.4.5 (1.4.40) интегралдық теңдеуде $K(t,s)\in L_2([0,T]\times[0,T],\mathbb{C}^{n^2})$ ядроға тиісті, ал оң жағы $h(t)\in L_2[0,T],\mathbb{C}^n)$ тиісті. Сонда кез-келген $\lambda\in\mathbb{C}$ (1.4.40) интегралдық жүйеде $y(t)\in L_2([0,T],\mathbb{C}^n)$ жалғыз шешімі болады.

1.5 Интегралдық теңдеулер шешімдерінің сылықтығы

(1.1.1) интегралдық жүйені қарастырайық. $y=y(t)$ функцияның оның шешімі болсын. Біз оны (1.1.1) -ге ауыстырамыз және t-ге қатысты дифференциалдасақ келесі алынған сәйкестендіруді ажыратамыз;

$$\frac{dy(t)}{dt}\equiv\lambda\int_0^T\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}y(s)ds+\dot{h}(t)$$

Бұл $y(t)$ туындысының бар екендігін және $[0,T]$ -де бірқалыпты үзділіссіз болатындығын көрсетеді, егер $\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}\in C(0\le t,s\le T,\mathbb{C}^{n^2})$, $\dot{h}(t)\in C([0,T],\mathbb{C}^{n^2})$
Бұл процесті әрі қарай жалғастыра отырып, біз келесі нәтижеге қол жеткіземіз.

Теорема 1.5.6 Егер (1.1.1) жүйесінде $\frac{\partial^m K(t,s)}{\partial t^m}\in C(0\le t,s\le T,\mathbb{C}^{n^2})$, $h^{(m)}(t)\in C([0,T],\mathbb{C}^n)$ болса, онда осы жүйенің $y(t)$ шешімі (егер ол бар болса) $\mathbb{C}^m([0,T],\mathbb{C}^n)(m=0,1,2,...)$ класының функциясы болады.

Енді (1.4.40) Вольтерра типінің интегралдық жүйесін қарастырайық. Оны $t\in[0,T]$ қатысты формальді түрде дифференциалдасақ, бізде

$$\frac{dy}{dt}=\lambda K(t,t)y(t)+\lambda\int_0^t\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}y(s)ds+\dot{h}(t),$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}=\lambda\left(\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}\Big|_{s=t}+\frac{\partial K(t,s)}{\partial s}\Big|_{s=t}\right)y(t)+\lambda K(t,t)\dot{y}(t)+$$

$$+\lambda\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}\Big|_{s=t}y(t)+\lambda\int_0^t\frac{\partial^2K(t,s)}{\partial t^2}y(s)ds+\ddot{h}(t)$$

Бұл $d^2y(t)/dt^2$ үздіксіз екінші туындысының болуы үшін $h(t)\in C^2([0,T],\mathbb{C}^n)$, $\frac{\partial K(t,s)}{\partial s}|_{s=t}, \frac{\partial K(t,s)}{\partial t}|_{s=t}, \frac{\partial^2 K(t,s)}{\partial t^2}\in C([0,T],\mathbb{C}^{n^2})$ тиісті болуы қажет. Бұл процесті әрі қарай жалғастыра отырып, біз келесі нәтижеге қол жеткіземіз.

Теорема 1.5.7 Егер (1.4.40) жүйеде $h(t)\in C^m([0,T],\mathbb{C}^n)$ функциясы, ал $\frac{\partial^m K(t,s)}{\partial t^{m_1}\partial s^{m_2}}\in C([0,T],\mathbb{C}^{n^2})$ функциялары болса $s_1+s_2=m$ болатындай барлық $s_1\geq 0, s_2\geq 0$ үшін $y(t)\in C^m([0,T],\mathbb{C}^n)$ оның шешімі.

Мұнда s айнымалысына қатысты $K(t,s)$ ядросының сыптырлығы біршама жоғары бағаланады. Алайда, s-дегі тегістікті бөлшектеу теореманың тұжырымдалуын едәуір қиындатады.

1.6 Интегро-дифференциалдық теңдеулер

Интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесінің түрлері

$$\frac{dy}{dt}=A(t)y+\lambda\int_0^{\alpha}K(t,s)y(s)ds+h(t),\quad y(0,\varepsilon)=y^0, t\in[0,T], \tag{1.6.45}$$

Мұндағы $y=\{y_1(t),...,y_{n0}(t)\}$ белгісіз функция, $h(t)=\{h_1(t),...,h_n(t)\}$ белгілі функция (бірқалыпты), $A(t)$ және $K(t,s)$,$n\times n$ өлшемдегі матрицалары белгілі, оларды интегралды-дифференциалдық теңдеулер жүйесі деп атайды (немесе жай интегралды-дифференциалдық жүйелер). Егер (1.6.45) жоғарғы шегі $\alpha=T$ болса, (1.6.45) Фредгольм типіндегі жүйе, егер $\alpha=t$ болса, (1.6.45) жүйе
Вольтерра типетегк жүйе. Екі жағдайда да (1.6.45) жүйе интегралды жүйеге келтірілген.

$Y(t)-$ $\frac{dz}{dt}=A(t)z$ дифференциалдық жүйе шешімдерінің негізгі матрицасы делік. $H(t)\equiv\lambda\int_0^{\alpha}K(t,s)y(s)ds+h(t)$ дифференциалдық жүйенің $dy/dt=A(t)y+H(t),\ y(0)=y^0$ біртекті еместігін есепке ала отырып ретінде, оның «шешімін» табымыз

$$y(t)=Y(t)y^0+\lambda\int_0^t Y(t)Y^{-1}(\varsigma)\left(\int_0^{\alpha(\varsigma)}K(\varsigma,s)y(s)ds\right)d\varsigma+$$

$$+\int_0^t Y(t)Y^{-1}(\varsigma)h(\varsigma)d\varsigma$$

Белгілей

$$h_0(t) \equiv Y(t)y^0 + \int_0^t Y(t)Y^{-1}(\varsigma)h(\varsigma)d\varsigma \qquad (1.6.45')$$

және қайталанатын интегралда интеграция тәртібін өзгертетін болсақ, бізде

$$y(t) = \lambda\int_0^{\alpha}\left(\int_{\beta}^{t} Y(t)Y^{-1}(\varsigma)K(\varsigma,s)d\varsigma\right)y(s)ds + h_0(t). \qquad (1.6.46)$$

Біз ядросы бар интегралды жүйені аламыз

$$G(t,s) \equiv \int_{\beta}^{t} Y(t)Y^{-1}(\varsigma)K(\varsigma,s)d\varsigma, \qquad (1.6.46')$$

мұндағы $\beta = 0$, егер $\alpha = T$ болса және $\beta = 0$ болса, $\alpha = t$.

(1.6.46) жүйеге (1.6.45) эквивалентті екенін көрсету оңай. Келесі нәтиже алынады.

Лемма 1.6.1 Егер $Y(t)$ біртекті жүйенің шешімдерінің фундаменталь матрицасы болса $\dot{z} = A(t)z$ ($[0,T]$ аралығында болады деп есептеледі), онда (1.6.45) интегралды-дифференциалдық теңдеулер интегралдық жүйеге эквивалент болып табылады.

$$y(t) = \lambda\int_0^{\alpha} G(t,s)y(s)ds + h_0(t), \qquad (1.6.47)$$

мұндағы $h_0(t) \equiv Y(t)y^0 + \int_0^t Y^{-1}(\varsigma)h(\varsigma))d\varsigma$, ал $G(t,s)$ ядросы (1.6.46') мындай түрге ие.

Теорема 1.6.8 (1.6.45) жүйеге $A(t) \in C([0,T],\mathbb{C}^{n^2})$ матрица, $K(t,s) \in C(0 \le s \le t \le T,\mathbb{C}^{n^2})$ ядросы, $h(t) \in C([0,T],\mathbb{C}^n)$ біртектілік. Содан кейін $\alpha = t$ (Вольтерр типті жүйе) (1.6.45) теңдеудің λ кез-келген мәндерінде $C^1([0,T],\mathbb{C}^n)$ класында жалғыз шешімге ие болады және бұл шешім келесідей жазылуы мүмкін

$$y(t) = h_0(t) + \lambda\int_0^t R_\lambda(t,s)h_0(s)ds, \qquad (1.6.48)$$

мұндағы $R_\lambda(t,s)$ — (1.6.46') ядроның резольвентасы ($\beta = s$ кезінде), $h_0(t)$ — (1.6.45') функция .

Фредгольм ($\alpha = T$) типті (1.6.45) теңдеулер үшін ажыратымдылықтар күрделі көрінеді.

Теорема 1.6.9 *(1.6.45) жүйеде* $\alpha = T$ *және* $A(t) \in C([0,T],\mathbb{C}^{n^2})$, $K(t,s) \in \ \in C(0 \le s,t \le T,\mathbb{C}^{n^2}), h(t) \in C([0,T],C^n)$ *болсын. Содан кейін келесі мәлімдемелер орынды:*

а) егер λ *(1.6.46') (*$\beta = 0$*) ядроның характеристикалық мәні болмаса онда (1.6.45) интегралды-дифференциалдық жүйе* $h(t)$ *кез-келген оң жақ мәндері үшін шешіледі, бұл жағдайда оның шешімі формуламен беріледі*

$$y(t) \equiv h_0(t) + \lambda\int_0^T R_\lambda(t,s)h_0(s)ds, \qquad (1.6.49)$$

б) егер λ *(1.46 ') (β = 0) -* r *рангындағы ядроның характеристикалық мәні болса, (1.6.45) жүйесі* $C^1([0,T],\mathbb{C}^n)$ *класста шешімге ие болады, егер (1.6.46') біртектілік біртектес* $z(t) = \overline{\lambda}\int_0^T \overline{G^T(s,t)}z(s)ds$ *жүйенің барлық шешімдеріне ортогональ болса яғни.*

$$\int_0^T (h_0(t), z^{(j)}(t))dt = 0, \ j = \overline{1,r}, \qquad (1.6.50)$$

мұндағы $z^{(1)}(t),...,z^{(r)}$ *- біртекті теңдеулер жүйесінің базисті жүйесі. Бұл жағдайда (1.6.45) интегралды-дифференциалдық жүйенің шешімі төмендегі формула бойынша келтірілген*

$$y(t) = \sum_{j=1}^r \alpha_j y^{(j)}(t) + \tilde{y}(t), \qquad (1.6.51)$$

мұндағы $y^{(1)}(t),...,y^{(r)}(t)$ *- біртекті жүйенің шешімдерінің базистік жүйесі* $y(t) = \lambda\int_0^T G(t,s)y(s)ds,$*, ал* $\tilde{y}(t)$ *(1.6.47 интегралдың теңдеудің дербеср шешім жүйесі),* $\alpha_1,...,\alpha_r$ *- кез-келген тұрақтылар.*

Ескерту 1.6.5 Эквивалентті интегралды жүйеге көшуді біз қазір көрсететін А.И.Некрасовтың түрлендірулерін қолдана отырып, басқаша жасауға болады. Белгілеу, бұрынғыдай,

$$H(t)=\int_0^{\alpha} K(t,s)y(s)ds+h(t), \tag{1.6.52}$$

(1.6.45) жүйенің «шешімін» $Y(t)$ негізгі матрицасы тұрғысынан жазамыз:

$$y(t)=Y(t)y^0+\lambda\int_0^t Y(t)Y^{-1}(\zeta)H(\zeta)d\zeta. \tag{1.6.53}$$

$Y(t)$ -ді (1.6.52) орнына қойып, бізде бар

$$H(t)=(\int_0^{\alpha} K(t,s)Y(s)y^0ds+h(t))+\lambda\int_0^{\alpha}(\int_0^{s} K(t,s)Y(s)Y^{-1}(\zeta)H(\zeta)d\zeta)ds.$$

Бірінші қосылғышын $h_0(t)$ арқылы белгілеп, екінші қосылғысын интегралдау ретін өзгертіп, біз төмендегі теңдеуге ие боламыз

$$H(t)=h_0(t)+\lambda\int_0^T\left(\int_{\zeta}^T K(t,s)Y(s)Y^{-1}(\zeta)ds\right)H(\zeta)d\zeta, \tag{1.6.54}$$

егер $\alpha=T$

$$H(t)=h_0(t)+\lambda\int_0^t\left(\int_{\zeta}^t K(t,s)Y(s)Y^{-1}(\zeta)ds\right)H(\zeta)d\zeta, \tag{1.6.54'}$$

егер $\alpha=t$. Ядросымен интегралдық теңдеу алынады

$$G(t,\zeta)=\int_{\zeta}^{\alpha} K(t,s)Y(s)Y^{-1}(\zeta)ds,$$

сәйкесінше $\alpha=T$ және $\alpha=t$ үшін бастапқы интегралды-дифференциалдық жүйеге (1.6.45) эквивалент (жүйенің (1.6.45) $y=y(t)$ шешімдері мен жүйенің (1.6.54) $H(t)$ шешіміне сәйкес келеді) (1.6.54 $'$)) өзара байланысты теңдіктер (1.6.53) және (1.6.52)).

Бастапқы теңдеуде $\alpha=T$ және $K(t,s)$ ядросы деградацияланған делік, яғни

$$K(t,s)=\sum_{j=1}^{m}A_j(t)B_j(s), \qquad (1.6.55)$$

барлық $A_j(t)$ — $n\times p$ өлшемді матрицалар, ал $B_j(s)$ — $p\times n$ өлшемі матрицалар, $j=\overline{1,m}$ (матрицаның бағандары $S(t)=(A_1(t),...,A_m(t))$ — кесіндіде сызықты тәуелсіз $[0,T]$). Сонда (1.6.47) теңдеудің ядросы пайда болады

$$G(t,s)=\int_0^t Y(t)Y^{-1}(\zeta)K(\zeta,s)d\zeta=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}Y(t)\left(\int_0^t Y^{-1}(\zeta)A_j(\zeta)d\zeta\right)B_j(s)\equiv\sum_{j=1}^{m}\Phi_j(t)B_j(s), \qquad (1.6.56)$$

мында көрсетілген $\Phi_j(t)\equiv Y(t)\int_0^t Y^{-1}(\zeta)A_j(\zeta)d\zeta,\ j=\overline{1,m}.$ Сонымен, (1.6.55) айныған ядромыз берілген (1.6.45) интегро-дифференциалдық теңдеуге (1.6.56) айныған интегралдық теңдеудің ядросыа келіп шығады, сондықтан айтылған бұл интегралдық теңдеуді алгебралық теңдеулер жүйесіне келтіре отырып дәлелдесе болады.

Ерікті үздіксіз ядро үшін 1.6.8 теоремасы $K(t,s)$ дегенеративті ядромен (кез-келген дәлдік деңгейімен) жуықтау арқылы дәлелденеді. Вольтерр типті жүйе (1.6.45) жағдайында тіпті нашарлаумен де 1.6.8 теоремасын дәлелдеу үшін әдетте дәйекті жуықтаулар жасалады.

Мысалдарды қарастыруға көшейік. Төменде жазылған интегро дифференциалдық теңдеулерді шешу кезінде 1.1 алгоритмін пайдалануға болады.

1.7 Мысалдар

Мысал 1.7.2 Интегралдық дифференциалдық теңдеуді қарастырыңыз

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{t+1}\cdot y+\int_0^1 ts\cdot y(s)ds+1,\quad y(0)=y^0,\quad t\in[0,1]. \qquad (1.7.56_1)$$

Оны интегралдық теңдеуге келтірейік. Өйткені $Y(t)=t+1,$ $Y^{-1}(\zeta)=1/(\zeta+1)$, онда (1.6.46) мына түрге ие

$$y(t)=(t+1)y^0+(t+1)\int_0^t\frac{\zeta}{\zeta+1}\left(\int_0^1 sy(s)ds\right)d\zeta+\int_0^1\frac{t+1}{\zeta+1}d\zeta.$$

Мұнда барлық интегралдарды есептей отырып, бізде болады

$$y(t)=(t+1)y^0+(t+1)(t-\ln(\mathrm{t}+1))\int_0^1 sy(s)ds+ \\ +(t+1)(y^0+\ln(t+1)). \qquad (1.7.56_2)$$

$c=\int_0^1 sy(s)ds$ деп белгілеп, соңғы теңдеуді t -ге көбейтіп, содан кейін алынған теңдікті $t\in[0,1]$ -ге интегралдап, алгебралық теңдеуді аламыз

$$c=\left(\int_0^1 t(t+1)(t-\ln(t+1))dt\right)c+\int_0^1 t(t+1)(y^0+\ln(t+1))dt.$$

Мынаны ескере отырып

$$\int_0^1 t(t+1)(t-\ln(t+1))dt=\frac{11}{18}-\frac{2}{3}\ln 2,$$

$$\int_0 t(t+1)(y^0+\ln(t+1))dt=\frac{5}{6}y^0-\frac{1}{36}+\frac{2}{3}\ln 2,$$

және бұл шешімді соңғы теңдеуге қоя отырып, табамыз

$$c=\frac{15y^0-1/2+12\ln 2}{7+12\ln 2}=c_0$$

$(1.7.56_2)$ жүйедегі $\int_0^1 sy(s)ds=c$ интегралын c_0 өзгертсек, $(1.6.51_1)$ шешімін табамыз:

$$y(t)=(t+1)(t-\ln(t+1))c_0+(t+1)(y^0+\ln(t+1)).$$

Есептейік:

$$\frac{d}{dt}y(t)-\frac{y(t)}{t+1}-\int_0^1 tsy(s)ds-1.$$

Мәндерді қысқартқаннан кейін нөлдік шешімге ие боламыз және бұл мән есептің дұрыстығын көрсетеді.

Мысал 1.7.3 Күрделі интегро-дифференциалдық теңдеу қарастырайық

$$\frac{dy}{dt}=\frac{y}{t+1}+\lambda\int_0^1 ts(s+1)y(s)ds+h(t),\ y(0)=y^0,\ t\in[0,1]. \qquad (1.7.57)$$

(1.6.48) интегралына теңестірейік. Және ескере кетсек

$$Y(t)=t+1,\ Y^{-1}(t)=\frac{1}{t+1},\ h_0(t)=Y(t)y^0+\int_0^t Y(t)Y^{-1}(\zeta)h(\zeta)d\zeta\equiv$$

$$\equiv(t+1)y^0+\int_0^1\frac{t+1}{s+1}h(s)ds,$$

$$G(t,s)=\int_0^t\frac{t+1}{\zeta+1}\zeta s(s+1)d\zeta=(t+1)\left(\int_0^t\frac{\zeta}{\zeta+1}s(s+1)d\zeta\right)=$$

$$=(t+1)(t-\ln(t+1))s(s+1)y(s)ds+h_0(t). \qquad (.1.7.58)$$

Деградацияланған ядролы интегралдық теңдеу алынды. 1.2 әдіс арқылы оның шешімін табамыз. (1.7.58) мына түрде қайтып жазайық

$$y(t)=\lambda(t+1)(t-\ln(t+1))w+h_0(t). \qquad (1.7.58')$$

$t(t+1)-$ ге көбейтіп, $t\in[0,1]$ интегралдаймыз; мына шешімге ие боламыз

$$\int_0^t t(t+1)y(t)dt=\lambda(\int_0^t t(t+1)^2(t-\ln(t+1))dt)w+\int_0^1 h_0(t)t(t+1)dt.$$

$\int_0^1 h_0(t)t(t+1)dt \equiv l,\ \int_0^1 t(t+1)^2(t-\ln(t+1))dt = c,$ деп белгілей отырып мынаған ие боламыз

$$w = \lambda cw + l \Leftrightarrow (1-\lambda c)w = l. \qquad (1.7.59)$$

Егер $\lambda \neq \frac{1}{c}$, онда (1.7.58) теңдеудің жалғыз шешімі шығады:

$$y(t) = \lambda(t+1)(t-\ln(t+1))\frac{l}{1-\lambda c} + h_0(t).$$

Бұл жағдайда $w = \alpha -$ ерікті тұрақты, ал (1.7.58) сансыз көп шешімге ие болады

$$y(t) = \lambda(t+1)(t-\ln(t+1))\alpha + h_0(t).$$

Тағы бір мысал қарастырайық.

Мысал 1.7.4 Интегралдық теңдеулер жүйесі берілген

$$x(t) = -\int_0^1 \begin{pmatrix} ts & 2t \\ s & 2 \end{pmatrix} x(s)ds + \begin{pmatrix} \frac{5}{2}t+1 \\ 2t+\frac{5}{2} \end{pmatrix}, \qquad (1.7.62)$$

мұндағы $x(t) = \{y(t), z(t)\}$, $\lambda = -1$. (1.7.62) жүйені мына түрде көрсетсе болады

$$x(t) = -\int_0^1 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (s,2) \cdot x(s)ds + h(t), \qquad (1.7.63)$$

$h(t) = \left\{ \frac{5}{2}t +, 2t + \frac{5}{2} \right\}$ деп белгілесек. 1.1 алгоритіміне сай (1.7.63) мына түрде жазайық

$$x(t) = -\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \int_0^1 (s,2) \cdot x(s)ds + h(t).$$

$w = \int_0^1 (s,2)x(s)ds$ айнымалысын енгізейік. Онда соңғы жүйе мына түрде жаылады

$$x(t) = -\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} w + h(t). \qquad (1.7.64)$$

Теңдікті $B_1(t) = (t,2)$ көбейтіп және алынған мәнді $t \in [0,1]$ бойынша интегралдасақ, мына шешімге ие боламыз

$$\int_0^1 (t,2)x(t)dt = -w\int_0^1 (t,2)\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} dt + \int_0^1 (t,2)h(t)dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w = -\frac{7}{3}w + H \Leftrightarrow w = \frac{3}{10}H = \frac{5}{2}$$

(мұнда көрсетілген: $H=\int_0^1 (t,2)h(t)dt \equiv \int_0^1 (t,2)\begin{pmatrix} \frac{5}{2}t+1 \\ 2t+\frac{5}{2}\end{pmatrix} dt=\frac{25}{3}$). $w=\frac{5}{2}$ табылған мәнді (1.7.64) ке қойсақ, бастапқы (1.7.62) жүйенің шешіміне ие боламыз:

$$x(t)=-\begin{pmatrix} t \\ 1\end{pmatrix} w+h(t)=-\begin{pmatrix} t \\ 1\end{pmatrix}\cdot\frac{5}{2}+\begin{pmatrix} \frac{5}{2}t+1 \\ 2t+\frac{5}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2t\end{pmatrix}.$$

$\lambda=-1$ (1.7.62) жүйенің интегралдық операторының ядросының характеристикалық мәні емес екенін есепке аласақ, (1.7.62) жүйе $C([0,T],\mathbb{C}^2)$ классында $h(t)\in C([0,T],\mathbb{C}^2)$ кез-келген оң жақ мәні үшін шешімге ие болады.

Волтьтерраның интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі

$$\frac{dy}{dt}=A(t)y+\lambda\int_0^t \sum_{j=1}^m A_j(t)B_j(s)y(s)ds+h(t),\ y(0)=y^0,\ \ t\in[0,T],$$

Және келесі дифференциалдық теңдеулер жүйесіне ие боламыз

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y \\ z_1 \\ \vdots \\ z_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A(t) & A_1(t) & \dots & A_m(t) \\ \lambda B_1(t) & 0\dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda B_m(t) & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z_1 \\ \vdots \\ z_m\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} h(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; y(0)=y^0, \; z_1(0)=...=z_m(0)=0. \qquad (1.7.61)$$

Егер $y=y(t)-$ (1.7.60) жүйенің шешімі болса, онда

$$z=\left\{ y(t), \lambda\int_0^t B_m(s)y(s)ds,...,\lambda\int_0^t B_m(s)y(s)ds \right\}-$$

(1.7.61) жүйенің шешімі. Және керісінше: егер $w=\{y(t), z_1(t),...,z_m(t)\}-$ (1.7.61) жүйенің шешімі болса, онда $y=y(t)-$ (1.7.60) жүйенің шешімі. (1.7.61) дифференциалдық жүйе $C^1([0,T],\mathbb{C}^{n+mp})$ класында шешімді болғандықтан

$(A(t)\in C([0,\mathrm{T}],\mathbb{C}^{n^2}),\; A_j(t)\in C([0,T],\mathbb{C}^{pn}),\; B_j(t)\in C([0,T],\mathbb{C}^{pn}),\; h(t)\in C([0,T],$ $\mathbb{C}^n,\; j=\overline{1,m}$ екенін ескерсек), бастапқы (7.60) интегро-дифференциалдық жүйе кез-келген $\lambda\in\mathbb{C}$ $C^1([0,T],\mathbb{C}^n)$ класында шешімге ие деген сөз.

2 СИНГУЛЯР АУЫТҚЫМАЛЫ ИНТЕГРО ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІ ШЕШУ

Бұл тарауда сингуляр ауытқымалы интегро-дифференциалдық теңдеулердің практикада кең қолданысқа ие болған жылдам тербелмелі коэффициенттері бар жүйені қарастырамыз. Бұндай теңдеуде ядросы экспоненциалдық түрде өзгеретін интегралдық операторы бар жүйені қарастырамыз. Зерттеулеріміздің негізгі мақсаты – жоғарыдағы атап өтілген типтегі жүйелер үшін регуляризация әдісінің алгоритмін жасау және интегралдық мүшенің Коши есебінің шешімінің асимптотикасының негізгі мүшесіне әсерін анықтау. Алдын-ала айта кету қажет бірдей резонанс жағдайы қарастырылады, яғни жылдам тербелмелі коэффициенттің меншікті мәндерінің бүтін сызықтық комбинациясы барлық қарастырылған уақыт аралығында шектеу операторының спектрінің нүктелерімен сәйкес келетін жағдай. Сонымен қатар, жылдам тербелмелі коэффициенттің меншікті мәнінің шекті оператордың спектрінің нүктелерімен сәйкес келу жағдайы алынып тасталынды. Бұл жағдай келесі жұмыстарымызда зерттелуі керек. Неғұрлым күрделі резонанс жағдайлары (мысалы, нүктелік резонанс) мұқият талдауды қажет етеді және ол бұл жұмыста қарастырылмаған.

2.1 Есептің қойылуы

Динамикалық тұрақтылыққа байланысты әр түрлі мәселелерде, периодтық құрылымы бар медианың қасиеттерін зерттеу кезінде, басқа қолданбалы есептерді зерттеу кезінде жылдам тербелмелі коэффициенттері бар дифференциалдық теңдеулерді қарастыру керек. Осы түрдегі теңдеулер жоғары жиілікті сыртқы күштердің әсерінен кейбір механикалық немесе электрлік жүйелерді, сызықтық басқарылатын объектімен автоматты басқару жүйелерін және т.б. сипаттай алады. Жоғары жиілікті терминдердің болуы оларды тікелей сандық шешуде күрделі мәселелер туғызады. Сондықтан, мұндай теңдеулерге әдетте асимптотикалық әдістер қолданылады, олардың ішіндегі ең әйгілі Фещенко-Шкил-Николенко бөлу әдісі [1, 2, 3, 4, 8] және Ломовтың регуляризациясы әдісі [5, 6, 7]. Соңғы уақытта сингуляр ауытқыған мәселелердің асимптотикалық шешімдері зеттеулер жасалған [9, 10, 11, 12,13,14,15,16,17,18,19,20].

Бұл жұмыста Ломовтың регуляризация әдісі бұрын зерттелмеген интегро-дифференциалдық жүйенің жылдам осцилляцияланатын коэффициентті және жылдам өзгеретін ядро түрі

$$\varepsilon\frac{dz}{dt}-A(t)z-\varepsilon g(t)\cos\frac{\beta(t)}{\varepsilon}B(t)z-\int_{t_0}^{t}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu(\theta)d\theta}K(t,s)z(s,\varepsilon)ds=h(t),$$

$$z(t_0,\varepsilon)=z^0, t\in[t_0,T], \tag{2.1.1}$$

Мұндағы $z=\{z_1,z_2\}, h(t)=\{h_1(t),h_2(t)\}, \omega(t)>0, \mu(t)<0\left(\forall t\in[t_0,T]\right), g(t)-$ скаляр функция, $A(t)$ және $B(t)-$ $(2\times2)-$ матрица, сонымен қатар $A(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\omega^2(t) & 0\end{pmatrix}$, $\beta'(t)>0-$ жылдам осцилляцияланатын косинус жиілігі, $z^0=\{z_1^0,z_2^0\}, \varepsilon>0-$ кіші параметр. $\beta(t)=2\gamma(t), B(t)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ дәл осындай жүйе және интегралдық теңдеудің мүшесі болмаған жағдай [5,6,7] жұмыстарда қарастырылған.

$\lambda_1(t)=-i\omega(t)$, $\lambda_2(t)=+i\omega(t)$ функциялар $A(t)$ операторының бастапқы спектрін қалыптастырады, функция жылдам өзгеретін интегралдық оператордың ядросын сипаттайды, $\lambda_5(t)=\mu(t)$ функциясы интегралдық оператор ядросының жылдам өзгеруін сипаттайды, ал $\lambda_3(t)=-i\beta'(t)$ және $\lambda_4(t)=+i\beta'(t)$ функциялары (2.1.1) жүйесіндегі жылдам осцилляцияланатын косинустың $\cos\frac{\beta(t)}{\varepsilon}$ болуымен байланысты. Келесі енгізулерді жазайық:

$\lambda(t)=(\lambda_1(t),...,\lambda_5(t))$,

$m=(m_1,...,m_5)-$ теріс емес $m_j, j=\overline{1,5}$ компонентері бар мультииндекс

$|m|=\sum_{j=1}^{5}m_j-$ m мультииндекстің биіктігі

$(m,\lambda(t))=\sum_{j=1}^{5}m_j\lambda_j(t)$.

(2.1.1) есепті төмендегі шарттар бойынша қарастырамыз:

$$\omega(t),\mu(t),\beta(t)\in C^\infty([t_0,T],\mathbb{R}), g(t)\in([t_0,T],\mathbb{C}^1), h(t)\in C^\infty([t_0,T],\mathbb{C}^2),$$

$$B(t)\in C^\infty([t_0,T],\mathbb{C}^{2\times2}), K(t,s)\in C^\infty(\{t_0\le s\le t\le T\},\mathbb{C}^{2\times2}),$$

(1) $|m| \geq 2-$ мен барлық мультииндекстер үшін $(m,\lambda(t))=0,(m,\lambda(t))=\lambda_j(t),\ j\in\{1,...,5\}$ қатынастары ешқандай $t\in[t_0,T]-$ ге сәйкес келмейді немесе бүкіл сегмент бойынша бірдей қанағаттандырылады.

Басқаша айтқанда, резонанстық мультипликациялар келесі жиынтықтармен аяқталады:

$$\Gamma_0=\left\{m:(m,\lambda(t))\equiv 0,|m|\geq 2,\forall t\in[t_0,T]\right\},$$

$$\Gamma_j=\left\{m:(m,\lambda(t))\equiv \lambda_j(t),|m|\geq 2,\forall t\in[t_0,T]\right\},\ j=\overline{1,5}.$$

2.2 Регуляризация әдісі

$\sigma_j=\sigma_j(\varepsilon)$ t -ге тәуелсіз $\sigma_1=e^{-\frac{i}{\varepsilon}\beta(t_0)},\ \sigma_2=e^{+\frac{i}{\varepsilon}\beta(t_0)}$ шамаларын белгілеп, (1) жүйені қайта жазайық

$$L_\varepsilon z(t,\varepsilon)\equiv\varepsilon\frac{dz}{dt}-A(t)z-\varepsilon\frac{g(t)}{2}\left(e^{-\frac{i}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\beta'(\theta)d\theta}\sigma_1+e^{+\frac{i}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\beta'(\theta)d\theta}\sigma_2\right)B(t)z-$$

$$-\int_{t_0}^{t}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu(\theta)d\theta}K(t,s)z(s,\varepsilon)ds=h(t),z(t_0,\varepsilon)=z^0,t\in[t_0,T]. \qquad (2.2.2)$$

Регуляризацияланған айнымалыларды енгіземіз ([5] қараңыз)

$$\tau_j=\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda_j(\theta)d\theta\equiv\frac{\psi_j(t)}{\varepsilon},\ j=\overline{1,5} \qquad (2.2.3)$$

және (2.2.2) есептің орнына төмендегі есепті қарастырамыз

$$L_\varepsilon \tilde{z}(t,\tau,\varepsilon) \equiv \varepsilon \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{5} \lambda_j(t) \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tau_j} - A(t)\tilde{z} - \varepsilon \frac{g(t)}{2}\left(e^{\tau_3}\sigma_1 + e^{\tau_4}\sigma_2\right)B(t)\tilde{z} -$$

$$-\int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu(\theta)d\theta} K(t,s)\tilde{z}(s,\frac{\psi(s)}{\varepsilon},\varepsilon)ds = h(t), \quad \tilde{z}(t,\tau,\varepsilon)|_{t=t_0,\tau=0} = z^0, t \in [t_0,T], \tag{2.2.4}$$

$\tau = (\tau_1,...,\tau_5)$, $\psi = (\psi_1,...,\psi_5)$ түрінде белгіленілген $\tilde{z} = \tilde{z}(t,\tau,\varepsilon)$ функциясы үшін ((3) сәйкес):. Егер $\tilde{z} = \tilde{z}(t,\tau,\varepsilon)$ (2.2.4) есептің шешімі болса, онда $z = \tilde{z}\left(t, \frac{\psi(t)}{\varepsilon}, \varepsilon\right)$ векторлық функциясы (2.2.2) есептің дәл шешімі болатыны түсінікті, сондықтан (2.2.4) есеп (2.2.2) есепке қатысты кеңейтілген. Алайда оны толығымен регуляризацяланған деп санауға болмайды, өйткені онда интеграл жүйенің регуляризация әдісі енгізілмеген

$$J\tilde{z} = \int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu(\theta)d\theta} K(t,s)\tilde{z}(s,\frac{\psi(s)}{\varepsilon},\varepsilon)ds$$

Оның регуляризациясы үшін $J\tilde{z}$ операторына қатысты M_ε класының асимптотикалық инвариациясын енгіземіз. Бірінші $z(t,\tau)$ вектор-функциясының U кеңістігін көрсетілген сумма арқылы карастырамыз

$$z(t,\tau,\sigma) = z_0(t,\sigma) + \sum_{i=1}^{5} z_i(t,\sigma)e^{\tau_i} + \sum_{2\le|m|\le N_z}^{*} z^m(t,\sigma)e^{(m,\tau)},$$

$$z_0(t,\sigma), z_i(t,\sigma), z^m(t,\sigma) \in C^\infty\left([t_0,T],\mathbb{C}^2\right), i = \overline{1,5},\ 2 \le |m| \le N_z, \tag{2.2.5}$$

Сумманың жоғарғы бөлігіндегі * $|m| \geq 2$ қосынсындының болуын көрсетеді, $m = (m_1,...,m_5)$, зезонанстық емес мультииндекстер үшін ғана орын алады, яғни $m \notin \bigcup_{i=0}^{5} \Gamma_i$. арқылы.

(2.2.5)-те e^{τ_j} экспоненциалына қатысты $z(t,\tau,\sigma)$ көпмүшесінің N_z дәрежесі *z*. элементіне тәуелді екенін айта кетейік. Сонымен қатар, U кеңістігінің элементтері $\varepsilon > 0$ шектелген $\sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon)$ және $\sigma_2 = \sigma_2(\varepsilon)$ тұрақтыларына тәуелді, олар төменде сипатталған алгоритмнің дамуына әсер етпейді, сондықтан бұдан әрі осы U кеңістіктің (2.2.5) жазбасында қысқалығының $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$-ге тәуелділігін жоққа шығарамыз.

$M_\varepsilon = U|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}$ кластың J операторға қатысты асимптотикалық өзгермейтіндігін көрсетейік.

U кеңістіктің (2.2.5) элементіндегі J оператордың бейнесі келесі түрге ие:

$$Jz(t,\tau) = \int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_5(\theta)d\theta} K(t,s) z_0(s) ds + \sum_{i=1}^{5} \int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_5(\theta)d\theta} K(t,s) z_i(s) e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{s} \lambda_i(\theta)d\theta} ds +$$

$$+ \sum_{2\le|m|\le N_z}^{*} \int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_5(\theta)d\theta} K(t,s) z^m(s) e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{s} (m,\lambda(\theta))d\theta} ds =$$

$$= \int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_5(\theta)d\theta} K(t,s) z_0(s) ds + e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t \lambda_5(\theta)d\theta} \int_{t_0}^{t} K(t,s) z_5(s) ds +$$

$$+ \sum_{i=1, i\ne 5}^{5} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t \lambda_5(\theta)d\theta} \int_{t_0}^{t} K(t,s) z_i(s) e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{s} (\lambda_i(\theta)-\lambda_5(\theta))d\theta} ds +$$

$$+\sum_{2\le|m|\le N_z}^{*} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda_5(\theta)d\theta}\int_{t_0}^{t} K\left(t,s\right) z^m\left(s\right) e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{s}\left(m-e_5,\lambda(\theta)\right)d\theta} ds.$$

Бөлікпен интегралдасақ, бізде

$$J_0(t,\varepsilon)=\int_{t_0}^{t} K(t,s)z_0(s)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{s}\lambda_5(\theta)d\theta}ds=\varepsilon\int_{t_0}^{t}\frac{K(t,s)z_0(s)}{\lambda_5(s)}de^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{s}\lambda_5(\theta)d\theta}=$$

$$=\varepsilon\frac{K(t,s)z_0(s)}{\lambda_5(s)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{s}\lambda_5(\theta)d\theta}\Bigg|_{s=t_0}^{s=t}-\varepsilon\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{K(t,s)z_0(s)}{\lambda_5(s)}\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{s}\lambda_5(\theta)d\theta}ds=$$

$$=\varepsilon\left[\frac{K(t,t)z_0(t)}{\lambda_5(t)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda_5(\theta)d\theta}-\frac{K(t,t_0)z_0(t_0)}{\lambda_5(t_0)}\right]-\varepsilon\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{K(t,s)z_0(s)}{\lambda_5(s)}\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{s}\lambda_5(\theta)d\theta}ds.$$

Осы процесті жалғастыра отырып, келсі жіктеуге ие боламыз

$$J_0(t,\varepsilon)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\varepsilon^{\nu+1}\left[\left(I_0^{\nu}\left(K(t,s)z_0(s)\right)\right)_{s=t}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda_5(\theta)d\theta}-\left(I_0^{\nu}\left(K(t,s)z_0(s)\right)\right)_{s=t_0}\right],$$

$$I_0^0=\frac{1}{\lambda_5(s)}.,I_0^{\nu}=\frac{1}{\lambda_5(s)}I_0^{\nu-1}\,(\nu\ge 1).$$

Әрі қарай, дәл осындай әрекетті интегралдарға қолданамыз:

$$J_{5,i}(t,\varepsilon)=e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda_5(\theta)d\theta}\int_{t_0}^{t}K(t,s)z_i(s)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{s}(\lambda_i(\theta)-\lambda_5(\theta))d\theta}ds=$$

$$=\varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda_5(\theta)d\theta}\int_{t_0}^{t}\frac{K(t,s)z_i(s)}{\lambda_i(s)-\lambda_5(s)}de^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{s}\left(\lambda_i(\theta)-\lambda_5(\theta)\right)d\theta}=$$

$$=\varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda_5(\theta)d\theta}\left[\frac{K(t,s)z_i(s)}{\lambda_i(s)-\lambda_5(s)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{s}\left(\lambda_i(\theta)-\lambda_5(\theta)\right)d\theta}\Bigg|_{s=t_0}^{s=t}-\right.$$

$$\left.-\varepsilon\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{K(t,s)z_i(s)}{\lambda_j(s)-\lambda_5(s)}\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{s}\left(\lambda_i(\theta)-\lambda_5(\theta)\right)d\theta}ds\right]=$$

$$=\varepsilon\left[\frac{K(t,t)z_i(t)}{\lambda_i(t)-\lambda_5(t)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda_i(\theta)d\theta}-\frac{K(t,t_0)z_i(t_0)}{\lambda_i(t_0)-\lambda_5(t_0)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda_5(\theta)d\theta}\right]-$$

$$-\varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda_5(\theta)d\theta}\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{K(t,s)z_i(s)}{\lambda_i(s)-\lambda_5(s)}\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{s}\left(\lambda_i(\theta)-\lambda_5(\theta)\right)d\theta}ds=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\varepsilon^{\nu+1}\left[\left(I_i^{\nu}\left(K(t,s)z_i(s)\right)\right)_{s=t}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda_i(\theta))d\theta}-\left(I_i^{\nu}\left(K(t,s)z_i(s)\right)\right)_{s=t_0}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda_5(\theta)d\theta}\right],$$

$$I_i^0=\frac{1}{\lambda_i(t)-\lambda_5(t)},I_i^{\nu}=\frac{1}{\lambda_i(t)-\lambda_5(t)}I_i^{\nu-1},i=\overline{1,4};$$

$$J_m(t,\varepsilon)=e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda_5(\theta)d\theta}\int_{t_0}^{t}K(t,s)z^m(s)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{s}\left(m-e_5,\lambda(\theta)\right)d\theta}ds=$$

$$= \varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda_5(\theta)d\theta} \int_{t_0}^{t} \frac{K(t,s)z^m(s)}{\left(m-e_5,\lambda(s)\right)} de^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{s}\left(m-e_5,\lambda(\theta)\right)d\theta} =$$

$$= \varepsilon\left[\frac{K(t,t)z^m(t)}{\left(m-e_5,\lambda(t)\right)} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\left(m,\lambda(\theta)\right)d\theta} - \frac{K(t,t_0)z^m(t_0)}{\left(m-e_5,\lambda(t_0)\right)} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda_5(\theta)d\theta}\right] -$$

$$-\varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda_5(\theta)d\theta} \int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{K(t,s)z^m(s)}{\left(m-e_5,\lambda(s)\right)}\right) e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{s}\left(m-e_5,\lambda(\theta)\right)d\theta} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\varepsilon^{\nu+1}\left[\left(I_{5,m}^{\nu}\left(K(t,s)z^m(s)\right)\right)_{s=t} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\left(m,\lambda(\theta)\right)d\theta} -\right.$$

$$\left. -\left(I_{5,m}^{\nu}\left(K(t,s)z^m(s)\right)\right)_{s=t_0} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda_5(\theta)d\theta}\right],$$

$$I_{5,m}^{0} = \frac{1}{\left(m-e_5,\lambda(s)\right)}, I_{5,m}^{\nu} = \frac{1}{\left(m-e_5,\lambda(s)\right)} I_{5,m}^{\nu-1}, 2 \le |m| \le N_z.$$

Мұнда $\left(m-e_5,\lambda(s)\right) \neq 0$, U кеңістігінің анықтамасы бойынша, $m \notin \Gamma_5$. мультииндекстері ескерілген

$$Jz(t,\tau)=e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_5(\theta))d\theta}\int\limits_{t_0}^{t}K(t,s)z_5(s)ds+\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\varepsilon^{\nu+1}\left[\left(I_0^{\nu}\left(K(t,s)z_0(s)\right)\right)_{s=t}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_5(\theta))d\theta}-\right.$$

$$\left.-\left(I_0^{\nu}\left(K(t,s)z_0(s)\right)\right)_{s=t_0}\right]+\sum_{i=1,i\neq 5}^{5}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\varepsilon^{\nu+1}\left[\left(I_i^{\nu}\left(K(t,s)z_i(s)\right)\right)_{s=t}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_i(\theta))d\theta}-\right.$$

$$\left.-\left(I_i^{\nu}\left(K(t,s)z_i(s)\right)\right)_{s=t_0}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda_5(\theta)d\theta}\right]+$$

$$+\sum_{2\le|m|\le N_z}^{*}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\varepsilon^{\nu+1}\left[\left(I_{5,m}^{\nu}\left(K(t,s)z^m(s)\right)\right)_{s=t}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{t}(m,\lambda(\theta))d\theta}-\right.$$

$$\left.-\left(I_{5,m}^{\nu}\left(K(t,s)z^m(s)\right)\right)_{s=t_0}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda_5(\theta)d\theta}\right].$$

Шартқа сәйкес (2.2.5) түрдегі $z(t,\tau)\in U$ әрбір элементіне әсер ететін $R_\nu:U\to U$ операторларын енгізейік:

$$R_0z(t,\tau)=e^{\tau_5}\int_{t_0}^{t}K(t,s)z_5(s)ds, \qquad (2.2.6_0)$$

$$R_1 z(t,\tau) = [\left(I_0^0\left(K(t,s)z_0(s)\right)\right)_{s=t} e^{\tau_5} - \left(I_0^0\left(K(t,s)z_0(s)\right)\right)_{s=t_0}] +$$

$$+\sum_{i=1}^{4}[\left(I_i^0\left(K(t,s)z_i(s)\right)\right)_{s=t} e^{\tau_i} - \left(I_i^0\left(K(t,s)z_i(s)\right)\right)_{s=t_0} e^{\tau_5}] + \qquad (2.2.6_1)$$

$$+\sum_{2\le|m|\le N_z}^{*}\left(I_{5,m}^0\left(K(t,s)z^m(s)\right)\right)_{s=t} e^{(m,\tau)} - \left(I_{5,m}^0\left(K(t,s)z^m(s)\right)\right)_{s=t_0} e^{\tau_5}],$$

$$R_{\nu+1} z(t,\tau) = [\left(I_0^\nu\left(K(t,s)z_0(s)\right)\right)_{s=t} e^{\tau_5} - \left(I_0^\nu\left(K(t,s)z_0(s)\right)\right)_{s=t_0}] +$$

$$+\sum_{i=1}^{4}(-1)^\nu[\left(I_i^\nu\left(K(t,s)z_i(s)\right)\right)_{s=t} e^{\tau_i} - \left(I_i^\nu\left(K(t,s)z_i(s)\right)\right)_{s=t_0} e^{\tau_5}] + \qquad (2.2.6_{\nu+1})$$

$$+\sum_{2\le|m|\le N_z}^{*}\left(I_{5,m}^\nu\left(K(t,s)z^m(s)\right)\right)_{s=t} e^{(m,\tau)} - \left(I_{5,m}^\nu\left(K(t,s)z^m(s)\right)\right)_{s=t_0} e^{\tau_5}].$$

Енді $\tilde{z}(t,\tau,\varepsilon)$ асимптотикалық жіктелуі бар кез-келген $(t,\tau)\in[t_0,T]\times\left\{\tau:\operatorname{Re}\tau_j\le 0,\ j=\overline{1,5}\right\}$ - үздіксіз функция болсын

$$\tilde{z}(t,\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z_k(t,\tau),\ z_k(t,\tau)\in U, \qquad (2.2.7)$$

$\varepsilon\to+0$ кезінде жинақталған ($(t,\tau)\in[t_0,T]\times\left\{\tau:\operatorname{Re}\tau_j\le 0,\ j=\overline{1,5}\right\}$-ге тең). Содан кейін осы функцияның $J\tilde{z}(t,\tau,\varepsilon)$ бейнесі асимптотикалық қатарға дейін ыдырайды

$$J\tilde{z}(t,\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k Jz_k(t,\tau)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\sum_{s=0}^{r}R_{r-s}z_s(t,\tau)|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}.$$

Бұл теңдік (2.2.7) қатардағы J операторының кеңейтілуін енгізуге болып табылады

$$\tilde{J}\tilde{z}\left(t,\tau,\varepsilon\right)\equiv\tilde{J}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k}z_{k}\left(t,\tau\right)\right)\Delta=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^{r}\sum_{s=0}^{r}R_{r-s}z_{s}\left(t,\tau\right). \qquad (2.2.8)$$

$\tilde{J}$ операторы формальды түрде анықталғанымен, оның пайдалылығы айқын, өйткені іс жүзінде (2.2.2) есептің асимптотикалық шешімінің N – ге жуықтауын құрастырады, онда тек N –ге (2.2.7) қатардың ішінара қосындылары қатысады, формальды емес, шынайы мағынаға ие. Енді біз (2.2.2) есепті бастапқы есепке қатысты толығымен регуляризацияланған түрде жаза аламыз:

$$\varepsilon\frac{\partial\tilde{z}}{\partial t}+\sum_{j=1}^{5}\lambda_{j}\left(t\right)\frac{\partial\tilde{z}}{\partial\tau_{j}}-A(t)\tilde{z}-\varepsilon\frac{g(t)}{2}\left(e^{\tau_3}\sigma_{1}+e^{\tau_4}\sigma_{2}\right)B\tilde{z}-\tilde{J}\tilde{z}=h(t),$$

$$\tilde{z}(t,\tau,\varepsilon)\,|_{t=t_0,\tau=0}=z^{0},\ t\in[t_0,T]. \qquad (2.2.9)$$

2.3 Итерациялық есептер және олардың U кеңістіктегі шешімділігі. Бірінші итерациялық есептің шешімі

(2.2.7) қатарды (2.2.9) –ға ауыстырып, коэффициенттерді бірдей ε дәрежеде теңестіріп, келесі қайталанатын есептерді аламыз:

$$Lz_{0}\left(t,\tau\right)\equiv\sum_{j=1}^{5}\lambda_{j}\left(t\right)\frac{\partial z_{0}}{\partial\tau_{j}}-A(t)z_{0}-R_{0}z_{0}=h\left(t\right),z_{0}\left(t_{0},0\right)=z^{0}; \qquad (2.3.10_0)$$

$$Lz_{1}\left(t,\tau\right)=-\frac{\partial z_{0}}{\partial t}+\frac{g(t)}{2}\left(e^{\tau_3}\sigma_{1}+e^{\tau_4}\sigma_{2}\right)B\left(t\right)z_{0}+R_{1}z_{0},z_{1}\left(t_{0},0\right)=0; \qquad (2.3.10_1)$$

$$Lz_{2}\left(t,\tau\right)=-\frac{\partial z_{1}}{\partial t}+\frac{g(t)}{2}\left(e^{\tau_3}\sigma_{1}+e^{\tau_4}\sigma_{2}\right)B\left(t\right)z_{1}+R_{1}z_{1}+R_{2}z_{0},z_{0}\left(t_{0},0\right)=0; \qquad (2.3.10_2)$$

…

$$Lz_k(t,\tau) = -\frac{\partial z_{k-1}}{\partial t} + \frac{g(t)}{2}\left(e^{\tau_3}\sigma_1 + e^{\tau_4}\sigma_2\right)B(t)z_{k-1} + R_k z_0 + \ldots + R_1 z_{k-1},$$

$$z_k(t_0,0) = 0, k \geq 1. \qquad (2.3.10_k)$$

Әрбір $(2.3.10_k)$ итерациалық есепті мына түрде жазуға болады

$$Lz(t,\tau) \equiv \sum_{j=1}^{5}\lambda_j(t)\frac{\partial z}{\partial \tau_j} - A(t)z - R_0 z = H(t,\tau), z(t_0,0) = z^*, \qquad (2.3.11)$$

мұндағы $H(t,\tau) = H_0(t) + \sum_{i=1}^{5} H_i(t)e^{\tau_i} + \sum_{2\leq|m|\leq N_Z}^{*} H^m(t)e^{(m,\tau)}$ – U кеңістігіндегі белгілі вектор-функция, z^* – $\mathbb{C}^2$ комплекс кеңістіктегі белгілі тұрақты вектор, ал R_0 операторы мына түрге ие

$$R_0 z \equiv R_0\left(z_0(t) + \sum_{i=1}^{5} z_i(t)e^{\tau_i} + \sum_{2\leq|m|\leq N_Z}^{*} z^m(t)e^{(m,\tau)}\right) = e^{\tau_5}\int_{t_0}^{t} K(t,s)z_5(s)ds.$$

Алдағы уақытта $\lambda_j(t)$– $A(t)$ матрицасының меншікті векторы қажет болаы:

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega(t) \end{pmatrix}, \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ +i\omega(t) \end{pmatrix},$$

және де $\overline{\lambda}_j(t)$ – $A^*(t)$ матрицасының меншікті векторы:

$$\chi_1(t)=\begin{pmatrix}1\\ -\dfrac{i}{\omega(t)}\end{pmatrix},\chi_2(t)=\begin{pmatrix}1\\ +\dfrac{i}{\omega(t)}\end{pmatrix}.$$

Бұл векторлар биортогональды жүйені құрайды, яғни

$$\left(\varphi_k(t),\chi_j(t)\right)=\begin{cases}2,k=j,\\ \qquad\qquad (k,j=1,2).\\ 0,k\neq j\end{cases}$$

U кеңістігінде скалярлық ($t\in[t_0,T]$ әрқайсысы үшін) көбейтінді енгіземіз

$$<z,w>\equiv<z_0(t)+\sum_{i=1}^{5}z_i(t)e^{\tau_i}+\sum_{2\leq|m|\leq N_z}^{*}z^m(t)e^{(m,\tau)},$$

$$w_0(t)+\sum_{i=1}^{5}w_i(t)e^{\tau_i}+\sum_{2\leq|m|\leq N_w}^{*}w^m(t)e^{(m,\tau)}>\overset{def}{=}$$

$$\overset{def}{=}\left(z_0(t),w_0(t)\right)+\sum_{i=1}^{5}\left(z_i(t),w_i(t)\right)+\sum_{2\leq|m|\leq\min(N_z,N_w)}^{*}\left(z^m(t),w^m(t)\right),$$

мұндағы $(*,*)$ – $\mathbb{C}^2$ кеңістігіндегі кәдімгі скаляр көбейтіндісін білдіреді. Келесі тұжырымды дәлелдейік.

Теорема 2.3.1. *1) және 2) шарттары мен U кеңістікте жататын $H(t,\tau)=H_0(t)+\sum_{i=1}^{5}H_i(t)e^{\tau_i}+\sum_{2\leq|m|\leq N_z}^{*}H^m(t)e^{(m,\tau)}$ (2.3.11) жүйенің оң жағы орындалсын. Онда (2.3.11) жүйенің U кеңістікте теп-теңдік орын алуы қажет және жеткілікті*

$$< H(t,\tau), \chi_k(t)e^{\tau_k} > \equiv 0, k=1,2, \forall t \in [t_0, T]. \qquad (2.3.12)$$

Дәлелдеу. (2.3.11) жүйенің шешімін U кеңістіктің (2.2.5) түрдегі элементі бойынша шешіміз:

$$z(t,\tau) = z_0(t) + \sum_{i=1}^{5} z_i(t)e^{\tau_i} + \sum_{2\le|m|\le N_z}^{*} z^m(t)e^{(m,\tau)}. \qquad (2.3.13)$$

(2.3.13) жүйені (2.3.11) – ге қоя отырып, мынаған ие боламыз

$$\sum_{i=1}^{5}\left[\lambda_i(t)I - A(t)\right]z_i(t)e^{\tau_i} + \sum_{2\le|m|\le N_z}^{*}\left[\left(m,\lambda(t)\right)I - A(t)\right]z^m(t)e^{(m,\tau)} -$$

$$-A(t)z_0(t) - e^{\tau_5}\int_{t_0}^{t} K(t,s)z_5(s)ds = H_0(t) + \sum_{i=1}^{5} H_i(t)e^{\tau_i} + \sum_{2\le|m|\le N_z}^{*} H^m(t)e^{(m,\tau)}.$$

Мұнда бірдей көрсеткіштердегі еркін мүшелер мен коэффициенттерді жеке-жеке теңестіріп, келесі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$-A(t)z_0(t) = H_0(t), \qquad (2.3.14_0)$$

$$\left[\lambda_i(t)I - A(t)\right]z_i(t) = H_i(t), i = \overline{1,4}; \qquad (2.3.14_i)$$

$$\left[\lambda_5(t)I - A(t)\right]z_5(t) - \int_{t_0}^{t} K(t,s)z_5(s)ds = H_5(t), \qquad (2.3.14_5)$$

$$\left[\left(m,\lambda(t)\right)I - A(t)\right]z^m(t) = H^m(t),\ 2 \le |m| \le N_z,\ m \notin \bigcup_{j=0}^{5}\Gamma_j. \qquad (2.3.14_m)$$

$A(t)$ матрицасы кері болатындықтан, ($(2.3.14_0)$) жүйеде $-A^{-1}(t)H_0(t)$ шешімі бар. $\lambda_5(t)=\mu(t)$ нақты функция болғандықтан және $A(t)$ матрицасының меншікті шамалары тек жорамал шығарылған болғандықтан, $\lambda_5(t)I-A(t)$ матрицасы керілеті, сондықтан жүйені ($(2.3.14_5)$) түрінде жазуға болады

$$z_5(t)=\int_{t_0}^{t}\Big(\big[\lambda_5(t)I-A(t)\big]^{-1}K(t,s)\Big)z_5(s)ds+\big[\lambda_5(t)I-A(t)\big]^{-1}H_5(t). \qquad (2.3.15)$$

$\Big(\big[\lambda_5(t)I-A(t)\big]^{-1}K(t,s)\Big)$ ядроның сыпқырлығы және $\big[\lambda_5(t)I-A(t)\big]^{-1}H_3(t)$ біртекті Вольтерра интегралдық теңдеуі $z_5(t)\in C^{\infty}\big([t_0,T],\mathbb{C}^2\big)$ жалғыз шешімге ие. $(2.3.14_3)$ және $(2.3.14_4)$ жүйеде жалғыз шешімге ие.

$$z_i(t)=\big[\lambda_i(t)I-A(t)\big]^{-1}H_i(t)\in C^{\infty}\big([t_0,T],\mathbb{C}^2\big), i=3,4, \qquad (2.3.16)$$

өйткені $A(t)$ матрицаның $\lambda_3(t),\lambda_4(t)$ спектріне жатпайды. $(2.3.14_1)$ және $(2.3.14_2)$ жүйе $C^{\infty}\big([t_0,T],\mathbb{C}^2\big)$ кеңістікте шешімге ие және тек сол жағдайда $\big(H_i(t),\chi_i(t)\big)\equiv 0\,\forall t\in[t_0,T], i=1,2$ тепе-теңдік орын алады. Бұл тепе-теңдіктердің (2.3.12) тепе-теңдікпен сәйкес келетінін көру қиын емес.

Әрі қарай, $(2.3.14_m)$ жүйелерде $m\notin\bigcup_{j=0}^{5}\Gamma_j$ мультииндекстер бар онда $\big(m,\lambda(t)\big)\neq\lambda_i(t), i=1,2$, сондықтан бұл жүйелер $C^{\infty}\big([t_0,T],\mathbb{C}^2\big)$ кеңістікте C функциялары түрінде ерекше шешіледі.

$$z^m(t)=\big[\big(m,\lambda(t)\big)I-A(t)\big]^{-1}H^m(t), 0\le|m|\le N_z. \qquad (2.3.17)$$

Сонымен, (2.3.12) шарт U кеңістігінде жүйенің (2.3.11) шешімділігі үшін қажет және жеткілікті. Теорема дәлелденді.

2.3.1. Егер тепе-теңдік (2.3.12) сәйкес болса, онда 1) және 2) шарттар (2.3.11) жүйесінде U кеңістіктегі келесі шешім бар

$$z(t,\tau)=z_0(t)+\sum_{i=1}^{5} z_i(t)e^{\tau_i}+\sum_{2\le|m|\le N_z}^{*} z^m(t)e^{(m,\tau)}\equiv z_0(t)+\sum_{k=1}^{2}\alpha_k(t)\varphi_k(t)e^{\tau_k}+$$

$$+h_{12}(t)\varphi_2(t)e^{\tau_1}+h_{21}(t)\varphi_1(t)e^{\tau_2}+z_5(t)e^{\tau_5}+\sum_{i=3}^{4}P_i(t)e^{\tau_i}+\sum_{2\le|m|\le N_H}^{*} P^m(t)e^{(m,\tau)}, \tag{2.3.18}$$

мұндағы $\alpha_k(t)\in C^\infty\left([t_0,T],\mathbb{C}^1\right)-$ кез-келген функция, $k=1,2,\ z_0(t)=-A^{-1}H_0(t),\ z_5(t)$ − (2.3.15) интегралдық жүйенің шешімі және анықтаулар берілген:

$$h_{12}(t)\equiv\frac{\left(H_1(t),\chi_2(t)\right)}{\lambda_1(t)-\lambda_2(t)},h_{21}(t)\equiv\frac{\left(H_2(t),\chi_1(t)\right)}{\lambda_2(t)-\lambda_1(t)},P_i(t)\equiv\left[\lambda_i(t)I-A(t)\right]^{-1}H_i(t),$$

$$P^m(t)\equiv\left[\left(m,\lambda(t)\right)I-A(t)\right]^{-1}H^m(t).$$

2.4 U ғеңістіктегі жалпы қайталанатын есептің бірегей шешімділігі Қалдық мүше туралы теорема

U кеңістігінде (2.3.11) жүйенің бірегей шешімділігі шарттарының сипаттамасына көшейік

$$Lw(t,\tau)=-\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{g(t)}{2}\left(e^{\tau_3}\sigma_1+e^{\tau_4}\sigma_2\right)B(t)z+R_1z+Q(t,\tau), \tag{2.4.19}$$

Мұндағы $z=z(t,\tau)-$ (2.3.11) жүйедегі (2.3.18) шешімі, $Q(t,\tau)\in U-$ U кеңістігінің белгілі функциясы. Бұл жүйенің оң жақ бөлігі:

$$G(t,\tau)\equiv-\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{g(t)}{2}\left(e^{\tau_3}\sigma_1+e^{\tau_4}\sigma_2\right)B(t)z+R_1z+Q(t,\tau)=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}[z_0(t)+\sum_{i=1}^{5}z_i(t)e^{\tau_i}+\sum_{2\le|m|\le N_z}^{*}z^m(t)e^{(m,\tau)}]+$$

$$+\frac{g(t)}{2}\left(e^{\tau_3}\sigma_1+e^{\tau_4}\sigma_2\right)B(t)\left[z_0(t)+\sum_{i=1}^{5}z_i(t)e^{\tau_i}+\sum_{2\le|m|\le N_z}^{*}z^m(t)e^{(m,\tau)}\right]+R_1z+Q(t,\tau),$$

U кеңістігіне тиісті болмауы мүмкін, егер $z=z(t,\tau)\in U$. $-\frac{\partial z}{\partial t},R_1z,Q(t,\tau)\in U$ болғандықтан, бұл фактты тексеру керек

$$Z(t,\tau)\equiv\frac{g(t)}{2}\left(e^{\tau_3}\sigma_1+e^{\tau_4}\sigma_2\right)B(t)[z_0(t)+\sum_{i=1}^{5}z_i(t)e^{\tau_i}+$$

$$+\sum_{2\le|m|\le N_z}^{*}z^m(t)e^{(m,\tau)}]=\frac{g(t)}{2}B(t)z_0(t)\left(e^{\tau_3}\sigma_1+e^{\tau_4}\sigma_2\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{5}\frac{g(t)}{2}B(t)z_i(t)\left(e^{\tau_i+\tau_3}\sigma_1+e^{\tau_i+\tau_4}\sigma_2\right)+$$

$$+\frac{g(t)}{2}\left(e^{\tau_3}\sigma_1+e^{\tau_4}\sigma_2\right)B(t)\sum_{2\le|m|\le N_z}^{*}z^m(t)e^{(m,\tau)}.$$

$Z(t,\tau)\notin U$ функциясында резонанстық көрсеткіштер болғандықтан

$$e^{\tau_3+\tau_4}=e^{(m,\tau)}|_{m=(0,0,1,1,0)},e^{\tau_3+(m,\tau)}(m_3+1=m_4,m_1=m_2=m_5=0),$$

$$e^{\tau_4+(m,\tau)}\left(m_4+1=m_3, m_1=m_2=m_5=0\right),$$

сол үшін (2.4.19) жүйенің $G(t,\tau)=Z(t,\tau)-\dfrac{\partial z}{\partial t}+R_1 z+Q(t,\tau)$ оң жағы U кеңісттікке жатпайды. Содан кейін, белгілі теорияға сәйкес, U кеңістігіне (2.4.19) жүйенің оң жағындағы $G(t,\tau)-$ ге $\wedge : G(t,\tau)\to\hat{G}(t,\tau)$ -ті енгізу керек. Бұл амал келесідей анықталады. $G(t,\tau)=\sum\limits_{|m|=0}^{N} w^m(t)e^{(m,\tau)}$ функция резонанстық экпоненталар қамтысын, яғни $G(t,\tau)$ түрге ие

$$G(t,\tau)=w_0(t)+\sum_{i=1}^{5}w_i(t)e^{\tau_i}+\sum_{j=0}^{5}\sum_{|m^j|=2:m^j\in\Gamma_j}^{N}w^{m^j}(t)e^{(m^j,\tau)}+\sum_{|m|=2,m\neq m^j,\,j=\overline{0,5}}^{N}w^m(t)e^{(m,\tau)}.$$

Онда

$$\hat{G}(t,\tau)=w_0(t)+\sum_{i=1}^{5}w_i(t)e^{\tau_i}+\sum_{j=0}^{5}\sum_{|m^j|=2:m^j\in\Gamma_j}^{N}w^{m^j}(t)e^{\tau_j}+\sum_{|m|=2,m\neq m^j,\,j=\overline{0,5}}^{N}w^m(t)e^{(m,\tau)}.$$

Осылайша, енгізу операциясы тек резонанстық көрсеткіштерге әсер етеді және оларды ережеге сәйкес біріншн e^{τ_j} көрсеткіштің өлшем бірлігімен немесе дәрежесімен алмастырады:

$$\left(e^{(m,\tau)}\,|_{m\in\Gamma_0}\right)^{\wedge}=e^0=1,\left(e^{(m,\tau)}\,|_{m\in\Gamma_j}\right)^{\wedge}=e^{\tau_j},\ j=\overline{1,5}.$$

Енді келесі тұжырымның дәлелдемесіне көшейік.

Теорема 2.4.2 *1) және 2) шарттары орындалсын және (2.3.11) жүйенің оң жақ* $H(t,\tau)=H_0(t)+\sum\limits_{i=1}^{5}H_i(t)e^{\tau_i}+\sum\limits_{2\le|m|\le N_z}^{*}H^m(t)e^{(m,\tau)}\in U$ *(2.3.12) жүйенің шарттын қанағаттандырсын. Онда (2.3.11) есеп қосымша шарттарда*

$$< G(t,\tau), \chi_k(t) e^{\tau_k} > \equiv 0 \forall t \in [t_0, T], k = 1,2, \tag{2.4.20}$$

мұндағы $Q(t,\tau) = Q_0(t) + \sum_{k=1}^{5} Q_k(t) e^{\tau_k} + \sum_{2 \le |m| \le N_Q}^{*} Q^m(t) e^{(m,\tau)}$ – U *кеңістігінің белгілі вектор-функциясы,* $U-$ *да бірмәнді шешімді.*

Дәлелдеуі. (2.3.11) жүйенің оң жақ бөлігі (2.3.12) шарттын қанағаттандырғандықтан, онда бұл жүйе U кеңістігінде (2.4.18) мына шешімге ие, мұндағы $\alpha_k(t) \in C^\infty([t_0,T], \mathbb{C}^1), k = 1,2$ -қазірге кез-келген функция. $z(t_0,0) = z^*$ бастапқы (2.3.18) шартына бағындырайық. $\sum_{k=1}^{2} \alpha_k(t_0)\varphi_k(t_0) = z_*$ ие боламыз, мұнда белгіленген

$$z_* = z^* + A^{-1}(t_0)H_0(t_0) - [\lambda_5(t_0)I - A(t_0)]^{-1} H_5(t_0) -$$

$$-\sum_{i=3}^{4} [\lambda_i(t_0)I - A(t_0)]^{-1} H_i(t_0) - \frac{(H^{e_1}(t_0), \chi_2(t_0))}{\lambda_1(t_0) - \lambda_2(t_0)} \varphi_2(t_0) -$$

$$-\frac{(H^{e_2}(t_0), \chi_1(t_0))}{\lambda_2(t_0) - \lambda_1(t_0)} \varphi_1(t_0) - \sum_{2 \le |m| \le N_z}^{*} z^m(t_0) e^{(m,\tau)}.$$

$\sum_{k=1}^{2} \alpha_k(t_0)\varphi_k(t_0) = z_*$ скаляр теңдеуді $\chi_j(t_0)-$ ге көбейте отырып, және $\{\varphi_k(t)\}$ мен $\{\chi_j(t)\}$ жүйенің биортогонал екенін ескере отырып, $\alpha_k(t_0) = \frac{1}{2}(z_*, \chi_k(t_0)), k = 1,2$ мәнін табамыз. Енді (2.3.18) шешімді (2.4.20) ортогональдық шартқа бағындырамыз. $G(t,\tau)$ жүйесінің оң жағын толығырақ жазайық (2.4.19):

$$G(t,\tau) \equiv -\frac{\partial}{\partial t}[z_0(t) + \sum_{k=1}^{2} \alpha_k(t)\varphi_k(t) e^{\tau_k} + h_{12}(t)\varphi_2(t) e^{\tau_1} + h_{21}(t)\varphi_1(t) e^{\tau_2} +$$

$$+z_5(t)e^{\tau_5}+\sum_{i=3}^{4}P_i(t)e^{\tau_i}+\sum_{2\le|m|\le N_H}^{*}P^m(t)e^{(m,\tau)}]+$$

$$+\frac{g(t)}{2}\left(e^{\tau_3}\sigma_1+e^{\tau_4}\sigma_2\right)B(t)[z_0(t)+\sum_{k=1}^{2}\alpha_k(t)\varphi_k(t)e^{\tau_k}+h_{12}(t)\varphi_2(t)e^{\tau_1}+$$

$$+h_{21}(t)\varphi_1(t)e^{\tau_2}+z_5(t)e^{\tau_5}+\sum_{i=3}^{4}P_i(t)e^{\tau_i}+\sum_{2\le|m|\le N_H}^{*}P^m(t)e^{(m,\tau)}]+$$

$$+R_1[z_0(t)+\sum_{k=1}^{2}\alpha_k(t)\varphi_k(t)e^{\tau_k}+h_{12}(t)\varphi_2(t)e^{\tau_1}+h_{21}(t)\varphi_1(t)e^{\tau_2}+$$

$$+z_5(t)e^{\tau_5}+\sum_{i=3}^{4}P_i(t)e^{\tau_i}+\sum_{2\le|m|\le N_H}^{*}P^m(t)e^{(m,\tau)}]+Q(t,\tau).$$

Бұл функцияны U кеңістікке қоя отырып, ие боламыз

$$\hat{G}(t,\tau)\equiv-\frac{\partial}{\partial t}[z_0(t)+\sum_{k=1}^{2}\alpha_k(t)\varphi_k(t)e^{\tau_k}+h_{12}(t)\varphi_2(t)e^{\tau_1}+h_{21}(t)\varphi_1(t)e^{\tau_2}+$$

$$+z_5(t)e^{\tau_5}+\sum_{i=3}^{4}P_i(t)e^{\tau_i}+\sum_{2\le|m|\le N_H}^{*}P^m(t)e^{(m,\tau)}]+$$

$$+\{\frac{g(t)}{2}\left(e^{\tau_3}\sigma_1+e^{\tau_4}\sigma_2\right)B(t)(z_0(t)+\sum_{k=1}^{2}\alpha_k(t)\varphi_k(t)e^{\tau_k}+h_{12}(t)\varphi_2(t)e^{\tau_1}+$$

$$+h_{21}(t)\varphi_1(t)e^{\tau_2}+z_5(t)e^{\tau_5}+\sum_{i=3}^{4}P_i(t)e^{\tau_i}+\sum_{2\le|m|\le N_H}^{*}P^m(t)e^{(m,\tau)}\}^{\wedge}$$

$$+R_1[z_0(t)+\sum_{k=1}^{2}\alpha_k(t)\varphi_k(t)e^{\tau_k}+h_{12}(t)\varphi_2(t)e^{\tau_1}+h_{21}(t)\varphi_1(t)e^{\tau_2}+$$

$$+z_5(t)e^{\tau_5}+\sum_{i=3}^{4}P_i(t)e^{\tau_i}+\sum_{2\le|m|\le N_H}^{*}P^m(t)e^{(m,\tau)}]+Q(t,\tau)=$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}[z_0(t) + \sum_{k=1}^{2}\alpha_k(t)\varphi_k(t)e^{\tau_k} + h_{12}(t)\varphi_2(t)e^{\tau_1} + h_{21}(t)\varphi_1(t)e^{\tau_2} +$$

$$+z_5(t)e^{\tau_5} + \sum_{i=3}^{4}P_i(t)e^{\tau_i} + \sum_{2\le|m|\le N_H}^{*} P^m(t)e^{(m,\tau)}] +$$

$$+\{\frac{1}{2}g(t)B(t)(e^{\tau_3}\sigma_1 z_0(t) + \underline{e^{\tau_3+\tau_1}\sigma_1\alpha_1(t)\varphi_1(t)} + \underline{e^{\tau_3+\tau_2}\sigma_1\alpha_2(t)\varphi_2(t)} +$$

$$+e^{\tau_3+\tau_1}\sigma_1 h_{12}(t)\varphi_2(t) + e^{\tau_3+\tau_2}\sigma_1 h_{21}(t)\varphi_1(t) + e^{\tau_3+\tau_5}\sigma_1 z_5(t) +$$

$$+e^{2\tau_3}\sigma_1 P_3(t) + e^{\tau_3+\tau_4}\sigma_1 P_4(t) + e^{\tau_4}\sigma_2 z_0(t) + \underline{e^{\tau_4+\tau_1}\sigma_2\alpha_1(t)\varphi_1(t)} + \underline{e^{\tau_4+\tau_2}\sigma_2\alpha_2(t)\varphi_2(t)} +$$

$$+e^{\tau_4+\tau_1}\sigma_2 h_{12}(t)\varphi_2(t) + e^{\tau_4+\tau_2}\sigma_2 h_{21}(t)\varphi_1(t) + e^{\tau_4+\tau_5}\sigma_2 z_5(t) + e^{\tau_3+\tau_4}\sigma_2 P_3(t) + e^{2\tau_4}\sigma_2 P_4(t) +$$

$$+\frac{1}{2}g(t)B(t)\sum_{2\le|m|\le N_H}^{*} P(t)^m\left(e^{m\tau+\tau_3}\sigma_1 + e^{m\tau+\tau_4}\sigma_2\right)\}^{\wedge} +$$

$$+R_1[z_0(t) + \sum_{k=1}^{2}\alpha_k(t)\varphi_k(t)e^{\tau_k} + h_{12}(t)\varphi_2(t)e^{\tau_1} + h_{21}(t)\varphi_1(t)e^{\tau_2} +$$

$$+z_5(t)e^{\tau_5} + \sum_{i=3}^{4}P_i(t)e^{\tau_i} + \sum_{2\le|m|\le N_H}^{*} P^m(t)e^{(m,\tau)}] + Q(t,\tau). \qquad (**)$$

Енгізу операциясы тек резонанстық көрсеткіштерге әсер етеді, бұл көрсеткіштердегі коэффициенттер өзгеріссіз қалады. Өрнек екенін ескере отырып

$$R_1[z_0(t) + \sum_{k=1}^{2}\alpha_k(t)\varphi_k(t)e^{\tau_k} + h_{12}(t)\varphi_2(t)e^{\tau_1} + h_{21}(t)\varphi_1(t)e^{\tau_2} +$$

$$+z_5(t)e^{\tau_5} + \sum_{i=3}^{4}P_i(t)e^{\tau_i} + \sum_{2\le|m|\le N_H}^{*} P^m(t)e^{(m,\tau)}]$$

$\alpha_1(t)$ және $\alpha_2(t)$ бойынша сызықты тәуелді ((2.2.6$_1$) қараңыз), келесі тұжырымға келеміз, $\hat{G}(t,\tau)$ функциясын енгізгеннен кейін $\alpha_1(t)$ және $\alpha_2(t)$ бір-біріне сызықты тәуелді болады. (2.4.20) шартында скалярлық көбейту тек қана e^{τ_k}, $k=1,2,$ көрсеткіштерін қамтитын $\chi_k(t)e^{\tau_k}$ вектор-функциялары арқылы жүзеге асырылатындығын ескере отырып, $G(t,\tau)$ өрнегінде тек e^{τ_1} және e^{τ_2} дәрежелерімен терминдерді сақтау қажет. Сонда (2.4.20) шарты мына түрге ие болады

$$<-\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{k=1}^{2}\alpha_k(t)\varphi_k(t)e^{\tau_k}+h_{12}(t)\varphi_2(t)e^{\tau_1}+h_{21}(t)\varphi_1(t)e^{\tau_2}\right)+$$

$$+\left(\sum_{|m^1|=2:m^1\in\Gamma_1}^{N} w^{m^1}\left(\alpha_1(t),\alpha_1(t),t\right)\right)e^{\tau_1}+\left(\sum_{|m^2|=2:m^2\in\Gamma_2}^{N} w^{m^2}\left(\alpha_1(t),\alpha_1(t),t\right)\right)e^{\tau_2}+$$

$$+Q_1(t)e^{\tau_1}+Q_2(t)e^{\tau_2},\chi_k(t)e^{\tau_k}>\equiv 0,\forall t\in[t_0,T],k=1,2,$$

мұндағы $w^{m^j}\left(\alpha_1(t),\alpha_2(t),t\right), j=1,2$ функциялары сызықтық түрде $\alpha_1(t)$ және $\alpha_2(t)$ тәуелді болады (**) сызылған шарттарын және формуласын қараңыз). Мұнда скалярлық көбейтуді орындай отырып, (2.3.11) жүйенің (2.3.18) шешіміне қатысатын $\alpha_k(t), k=1,2$ функциялары үшін сызықтық қарапайым дифференциалдық теңдеулер аламыз. Оларға бұрын есептелген $\alpha_k(t_0)=\frac{1}{2}\left(z_*,\chi_k(t_0)\right),k=1,2$ бастапқы шарттарын қосып, біз $\alpha_k(t)$ функцияларын бірегей таба аламыз, сондықтан U кеңістігінде (2.4.19) есепке (2.3.18) шешім құра аламыз. Теорема дәлелденді.

Жоғарыда айтылғандай, қайталанатын есептердің оң жақтары (олар дәйекті түрде шешілген кезде) U кеңістігіне жатпауы мүмкін. Содан кейін, сәйкес, осы есептердің оң жақтары жоғарыда келтірілген ережеге сәйкес U -ге енгізілуі керек. Нәтижесінде біз келесі тапсырмаларды аламыз:

$$Lz_0(t,\tau)\equiv\sum_{j=1}^{5}\lambda_j(t)\frac{\partial z_0}{\partial\tau_j}-A(t)z_0-R_0z_0=h(t),z_0(t_0,0)=z^0; \qquad (2.4.\overline{10}_0)$$

$$Lz_1(t,\tau) = -\frac{\partial z_0}{\partial t} + \left[\frac{g(t)}{2}\left(e^{\tau_3}\sigma_1 + e^{\tau_4}\sigma_2\right)B(t)\,z_0\right]^{\wedge} + R_1 z_0, z_1(t_0,0) = 0;$$
$$(2.4.\overline{10}_1)$$

$$Lz_2(t,\tau) = -\frac{\partial z_1}{\partial t} + \left[\frac{g(t)}{2}\left(e^{\tau_3}\sigma_1 + e^{\tau_4}\sigma_2\right)B(t)\,z_1\right]^{\wedge} + R_1 z_1 + R_2 z_0, z_0(t_0,0) = 0;$$
$$(2.4.\overline{10}_2)$$

…

$$Lz_k(t,\tau) = -\frac{\partial z_{k-1}}{\partial t} + \left[\frac{g(t)}{2}\left(e^{\tau_3}\sigma_1 + e^{\tau_4}\sigma_2\right)B(t)\,z_{k-1}\right]^{\wedge} + R_k z_0 + \ldots + R_1 z_{k-1},$$

$$z_k(t_0,0) = 0, k \geq 1,$$
$$(2.4.\overline{10}_k)$$

($\frac{\partial}{\partial t}$ және R_ν сызықтық операторларының кескіндерін U кеңістігіне орналастырудың қажеті жоқ, өйткені бұл операторлар U-ден U -ге дейін әрекет етеді). Мұндай өзгеріс бастапқы (2.1.1) есептің асимптотикалық шешімін құруға әсер етпейді (немесе баламалы (2.2.2) есеп), өйткені $\tau = \frac{\psi(t)}{\varepsilon}$ шектеуіндегі ($(2.4.\overline{10}_k)$) есептер қатары ($(2.4.10_k)$) есептер қатарымен сәйкес келеді.

2.3.1 және 2.4.2 теоремаларды қайталанатын ($(2.4.\overline{10}_k)$) есептерге қолдана отырып, олардың U кеңістігінде ерекше шешімдерін табамыз және (2.2.7) қатарлар құрамыз. (2.4.22) -дегі сияқты келесі тұжырымды дәлелдейміз.

Теорема 2.4.3. *(2.2.2) жүйесі үшін 1) -2) шарттары орындалсын. Сонда,* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ ($\varepsilon_0 > 0$ *үшін жеткілікті аз), (2.2.2) жүйенің бірегей шешімі бар* $z(t,\varepsilon) \in \mathrm{C}^1([0,T],C^2)$ *; бұл жағдайда бағалау;*

$$\| z(t,\varepsilon) - z_{\varepsilon N}(t) \|_{C[0,T]} \le c_N \varepsilon^{N+1},$$

мұндағы $z_{\varepsilon N}(t)-$ N-ші қатардың дербес қосындысының (2.2.7) тарылу ($\tau = \dfrac{\psi(t)}{\varepsilon}$ кезінде) (қайталанатын есептерді қанағаттандыратын $z_k(t,\tau) \in U$ коэффициенттері бар ($2.3.\overline{10}_k$) және тұрақты $c_N > 0$ $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ кезіндегі ε -ге тәуелді емес.

2.5 Бірінші итерациалық есептің шешімін құру

2.3.1-теореманы қолдана отырып, бірінші қайталанатын $(2.3.10_0)$ есептің шешімін тауып көрейік. $(2.3.\overline{10}_0)$ жүйедегі $h(t)$ оң жағы (2.3.12) шарттын қанағаттандырғандықтан, бұл жүйеде ((2.3.18) сәйкес) U кеңістігінде шешім бар

$$z_0(t,\tau) = z_0^{(0)}(t) + \sum_{k=1}^{2} \alpha_k^{(0)}(t)\varphi_k(t)e^{\tau_k}, \tag{2.5.21}$$

мұндағы $\alpha_k^{(0)}(t) \in C^\infty([t_0,T],\mathbb{C}^1)-$ тұрақты функция, $k=1,2,\ z_0^{(0)}(t) = -A^{-1}(t)h(t).$ $z_0(t_0,0) = z^0$ бастапқы (2.4.20) шартына қоя отырып, ие боламыз

$$z_0^{(0)}(t_0) + \sum_{k=1}^{2} \alpha_k^{(0)}(t_0)\varphi_k(t_0) = z^0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{2} \alpha_k^{(0)}(t_0)\varphi_k(t_0) = z^0 + A^{-1}(t_0)h(t_0). \tag{2.5.22}$$

Бұл теңдікті $\chi_j(t_0)$ -ге скалярлы түрде көбейтіп, $\{\varphi_k(t)\}$ және $\{\chi_j(t)\}$ жүйелерінің биортогалентілігін ескере отырып, $\alpha_k^{(0)}(t_0) = \dfrac{1}{2}\left(z^0 + A^{-1}(t_0)h(t_0), \chi_k(t_0)\right), k=1,2$ мәндерін табамыз. $\alpha_k^{(0)}(t)$ функцияларын толық есептеу үшін келесі $(2.4.\overline{10}_1)$ итерациялық есепке көшеміз. Оған $(2.4.\overline{10}_0)$ жүйенің шешімін (2.5.21) ауыстырып, келесі жүйеге келеміз:

$$Lz_1(t,\tau) = -\frac{d}{dt}z_0^{(0)}(t) - \sum_{k=1}^{2}\frac{d}{dt}(\alpha_k^{(0)}(t)\varphi_k(t))e^{\tau_k} +$$

$$+\frac{K(t,t)z_0^{(0)}(t)}{\lambda_5(t)}e^{\tau_5} - \frac{K(t,t_0)z_0^{(0)}(t_0)}{\lambda_5(t_0)} +$$

$$+\left[\frac{g(t)}{2}\left(e^{\tau_3}\sigma_1 + e^{\tau_4}\sigma_2\right)B(t)\left(z_0^{(0)}(t) + \sum_{k=1}^{2}\alpha_k^{(0)}(t)\varphi_k(t)e^{\tau_k}\right)\right]^{\wedge} + \qquad (2.5.23)$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{\left(K(t,t)\alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t)\right)}{\lambda_j(t)}e^{\tau_j} - \frac{\left(K(t,t_0)\alpha_j^{(0)}(t_0)\varphi_j(t_0)\right)}{\lambda_j(t_0)}\right]$$

(мұнда біз $R_1 z(t,\tau)$ үшін $(2.2.6_1)$ өрнекті қолдандық және $z(t,\tau) = z_0(t,\tau)$ үшін тек e^{τ_1}, e^{τ_2} және e^{τ_5} бар мүшелер қосындыда болатындығын ескерді $(2.2.6_1)$. Есептейік

$$M = \left[\frac{g(t)}{2}\left(e^{\tau_3}\sigma_1 + e^{\tau_4}\sigma_2\right)B(t)\left(z_0^{(0)}(t) + \sum_{k=1}^{2}\alpha_k^{(0)}(t)\varphi_k(t)e^{\tau_k}\right)\right]^{\wedge} =$$

$$= \frac{1}{2}g(t)B(t)[\sigma_1\alpha_1^{(0)}(t)\varphi_1(t)e^{\tau_3+\tau_1} + \sigma_2\alpha_1^{(0)}(t)\varphi_1(t)e^{\tau_4+\tau_1} +$$

$$+\sigma_1\alpha_2^{(0)}(t)\varphi_2(t)e^{\tau_3+\tau_2} + \sigma_2\alpha_2^{(0)}(t)\varphi_2(t)e^{\tau_4+\tau_2} + e^{\tau_3}\sigma_1 z_0(t) + e^{\tau_4}\sigma_2 z_0(t))]^{\wedge}.$$

Резонанс үшін осында қамтылған екінші өлшемнің көрсеткіштерін талдайық:

$$e^{\tau_3+\tau_1}\big|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}=e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{t}(-i\beta'-i\omega)d\theta},$$

$$-i\beta'-i\omega=\left[\begin{array}{l}0,\\ -i\omega,\\ +i\omega,\end{array}\right.\Leftrightarrow\varnothing,\ -i\beta'-i\omega=\left[\begin{array}{l}-i\beta',\\ +i\beta',\\ \mu\end{array}\right.\Leftrightarrow\varnothing;$$

$$e^{\tau_4+\tau_1}\big|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}=e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{t}(+i\beta'-i\omega)d\theta},\ +i\beta'-i\omega=\left[\begin{array}{l}0,\\ -i\omega,\\ +i\omega,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\beta'=\omega,\\ \beta'=2\omega,\end{array}\right.$$

$$+i\beta'-i\omega=\left[\begin{array}{l}-i\beta',\\ +i\beta',\\ \mu,\end{array}\right.\Leftrightarrow 2\beta'=\omega\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}e^{\tau_4+\tau_1}=e^{0}=1\left(\beta'=\omega\right),\\ \\ e^{\tau_4+\tau_1}=e^{\tau_2}\left(\beta'=2\omega\right),\\ \\ e^{\tau_4+\tau_1}=e^{\tau_3}\left(2\beta'=\omega\right);\end{array}\right.$$

$$e^{\tau_3+\tau_2}\big|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}=e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{t}(-i\beta'+i\omega)d\theta},$$

$$-i\beta'+i\omega=\left[\begin{array}{l}0,\\ -i\omega,\\ +i\omega,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\beta'=\omega,\\ \beta'=2\omega;\end{array}\right.\ -i\beta'+i\omega=\left[\begin{array}{l}-i\beta',\\ +i\beta',\\ \mu,\end{array}\right.\Leftrightarrow 2\beta'=\omega$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} e^{\tau_3+\tau_2}=e^0=1\left(\beta'=\omega\right), \\ \\ e^{\tau_3+\tau_2}=e^{\tau_1}\left(\beta'=2\omega\right), \\ \\ e^{\tau_3+\tau_2}=e^{\tau_4}\left(2\beta'=\omega\right); \end{array}\right.$$

$$e^{\tau_4+\tau_2}\big|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}=e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}(+i\beta'+i\omega)d\theta},$$

$$+i\beta'+i\omega=\left[\begin{array}{l} 0, \\ -i\omega, \\ +i\omega, \end{array}\right. \Leftrightarrow\varnothing,\ +i\beta'+i\omega=\left[\begin{array}{l} -i\beta', \\ +i\beta', \\ \mu, \end{array}\right. \Leftrightarrow\varnothing$$

Сонымен, $e^{\tau_3+\tau_1}$ және $e^{\tau_4+\tau_2}$ дәрежелері резонансты емес, ал $e^{\tau_4+\tau_1}$ және $e^{\tau_3+\tau_2}$ дәрежелері $\beta'(t)$ және $\omega(t)$ жиіліктері арасындағы белгілі бір қатынаста резонанс тудырады және олардың енгізілуі келесідей жүзеге асырылады:

$$\left[\begin{array}{l} e^{\tau_4+\tau_1}=e^0=1\left(\beta'=\omega\right), \\ \\ e^{\tau_4+\tau_1}=e^{\tau_2}\left(\beta'=2\omega\right), \\ \\ e^{\tau_4+\tau_1}=e^{\tau_3}\left(2\beta'=\omega\right); \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} e^{\tau_3+\tau_2}=e^0=1\left(\beta'=\omega\right), \\ \\ e^{\tau_3+\tau_2}=e^{\tau_1}\left(\beta'=2\omega\right), \\ \\ e^{\tau_3+\tau_2}=e^{\tau_4}\left(2\beta'=\omega\right). \end{array}\right.$$

Сонымен, резонанстар жиіліктер арасындағы қатынастардың келесі жағдайларында ғана мүмкін: a) $\beta' = 2\omega,$ b) $\beta' = \omega,$ c) $2\beta' = \omega.$

Оларды қарастырайық.

a) $\beta' = \omega.$ Бұл жағдайда (2.5.23) жүйе енгізгеннен кейін формаға ие болады

$$
\begin{gathered}
Lz_1(t,\tau) = -\frac{d}{dt}z_0^{(0)}(t) - \sum_{k=1}^{2}\frac{d}{dt}(\alpha_k^{(0)}(t)\varphi_k(t))e^{\tau_k} + \\
+\frac{K(t,t)z_0^{(0)}(t)}{\lambda_5(t)}e^{\tau_5} - \frac{K(t,t_0)z_0^{(0)}(t_0)}{\lambda_5(t_0)} + \\
+\frac{1}{2}g(t)B(t)[\sigma_1\alpha_1^{(0)}(t)\varphi_1(t)e^{\tau_3+\tau_1} + \sigma_2\alpha_1^{(0)}(t)\varphi_1(t)e^{\tau_2} + \\
+\sigma_1\alpha_2^{(0)}(t)\varphi_2(t)e^{\tau_1} + \sigma_2\alpha_2^{(0)}(t)\varphi_2(t)e^{\tau_4+\tau_2} + e^{\tau_3}\sigma_1 z_0(t) + e^{\tau_4}\sigma_2 z_0(t))] + \\
+\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{\left(K(t,t)\alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t)\right)}{\lambda_j(t)}e^{\tau_j} - \frac{\left(K(t,t_0)\alpha_j^{(0)}(t_0)\varphi_j(t_0)\right)}{\lambda_j(t_0)}\right].
\end{gathered}
$$

Бұл жүйе U кеңістігінде тек ортогоналдылық шарттары орындалған жағдайда шешіледі:

$$
\begin{gathered}
\langle -\sum_{k=1}^{2}\frac{d}{dt}(\alpha_k^{(0)}(t)\varphi_k(t))e^{\tau_k} + \frac{1}{2}g(t)B(t)[\sigma_1\alpha_2^{(0)}(t)\varphi_2(t)e^{\tau_1} + \\
+\sigma_2\alpha_1^{(0)}(t)\varphi_1(t)e^{\tau_2}] + \sum_{i=1}^{2}\frac{\left(K(t,t)\alpha_i^{(0)}(t)\varphi_i(t)\right)}{\lambda_i(t)}e^{\tau_i}, \chi_j(t)e^{\tau_j}\rangle \equiv 0,\ j=1,2.
\end{gathered}
$$

Мұнда скалярлық көбейтуді орындай отырып, біз қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$-2\frac{d\alpha_1^{(0)}(t)}{dt}-\left(\dot{\varphi}_1(t),\chi_1(t)\right)\alpha_1^{(0)}(t)+$$

$$+\frac{1}{2}g(t)\sigma_1\left(B(t)\varphi_2(t),\chi_1(t)\right)\alpha_2^{(0)}(t)+\frac{\left(K(t,t),\chi_1(t)\right)}{\lambda_1(t)}\alpha_1^{(0)}(t)\equiv 0,$$

$$\tag{2.5.24}$$

$$-2\frac{d\alpha_2^{(0)}(t)}{dt}-\left(\dot{\varphi}_2(t),\chi_2(t)\right)\alpha_2^{(0)}(t)+$$

$$+\frac{1}{2}g(t)\sigma_2\left(B(t)\varphi_1(t),\chi_2(t)\right)\alpha_1^{(0)}(t)+\frac{\left(K(t,t),\chi_2(t)(t)\right)}{\lambda_2(t)}\alpha_2^{(0)}(t)\equiv 0.$$

Осы жүйеге бастапқы (2.5.22) шарттарды қосып, $\alpha_k^{(0)}(t)$, $k=1,2$, функцияларын бірегей таба аламыз, сондықтан U кеңістігінде $(2.4.\overline{10}_0)$ есептің (2.5.21) шешімін түрде есептей аламыз. Бұл жағдайда (2.2.2) есепті шешудің асимптотикасының бастапқы мүшесінің формасы болады

$$z_{\varepsilon 0}(t)=z_0^{(0)}(t)+\sum_{k=1}^{2}\alpha_k^{(0)}(t)\varphi_k(t)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda_k(\theta)d\theta} \tag{2.5.25}$$

мұндағы $\alpha_k^{(0)}(t_0)$ функциялары (2.5.22), (2.5.24), $z_0^{(0)}(t)=-A^{-1}(t)h(t)$ есептерін қанағаттандырады. (2.5.24) теңдеулер жүйесі жеке дифференциалдық теңдеулерге бөлінбейтіндігіне назар аударамыз (әдеттегі интегро-дифференциалдық теңдеулердегідей). (2.1.1) есепте жылдам тербелмелі коэффициенттің болуы (2.5.24) типтегі күрделі дифференциалдық жүйелерге әкеледі, олардың шешімдері олар $[t_0,T]$ кесіндісінде болғанымен, әрдайым айқын түрінде кездеспейді. Алайда, екінші және үшінші жағдайда ол шешімге ие бола бермейді.

b) $\beta' = \omega$. Бұл жағдайда (2.5.23) жүйе енгізілгеннен кейін форманы алады ($e^{\tau_4+\tau_1} = e^{\tau_3+\tau_2} = 1$ ескеріңіз)

$$Lz_1(t,\tau) = -\frac{d}{dt}z_0^{(0)}(t) - \sum_{k=1}^{2}\frac{d}{dt}(\alpha_k^{(0)}(t)\varphi_k(t))e^{\tau_k} +$$

$$+\frac{K(t,t)z_0^{(0)}(t)}{\lambda_5(t)}e^{\tau_5} - \frac{K(t,t_0)z_0^{(0)}(t_0)}{\lambda_5(t_0)} +$$

$$+\frac{1}{2}g(t)B(t)[\sigma_1\alpha_1^{(0)}(t)\varphi_1(t)e^{\tau_3+\tau_1} + \sigma_2\alpha_1^{(0)}(t)\varphi_1(t) +$$

$$+\sigma_1\alpha_2^{(0)}(t)\varphi_2(t) + \sigma_2\alpha_2^{(0)}(t)\varphi_2(t)e^{\tau_4+\tau_2} + e^{\tau_3}\sigma_1 z_0(t) + e^{\tau_4}\sigma_2 z_0(t)] +$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{\left(K(t,t)\alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t)\right)}{\lambda_j(t)}e^{\tau_j} - \frac{\left(K(t,t_0)\alpha_j^{(0)}(t_0)\varphi_j(t_0)\right)}{\lambda_j(t_0)}\right].$$

Бұл жүйе U кеңістігінде тек ортогоналдылық шарттары орындалған жағдайда шешіледі:

$$\langle -\sum_{k=1}^{2}\frac{d}{dt}(\alpha_k^{(0)}(t)\varphi_k(t))e^{\tau_k} + \sum_{i=1}^{2}\frac{\left(K(t,t)\alpha_i^{(0)}(t)\varphi_i(t)\right)}{\lambda_i(t)}e^{\tau_i}, \chi_j(t)e^{\tau_j}\rangle \equiv 0,\ j = 1,2.$$

Мұнда скалярлық көбейтуді орындай отырып, біз ыдырайтын қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесін аламыз

$$-2\frac{d\alpha_1^{(0)}(t)}{dt} - \left(\dot{\varphi}_1(t), \chi_1(t)\right)\alpha_1^{(0)}(t) + \frac{\left(K(t,t), \chi_1(t)\right)}{\lambda_1(t)}\alpha_1^{(0)}(t) \equiv 0,$$

$$-2\frac{d\alpha_2^{(0)}(t)}{dt} - \left(\dot{\varphi}_2(t), \chi_2(t)\right)\alpha_2^{(0)}(t) + \frac{\left(K(t,t), \chi_2(t)(t)\right)}{\lambda_2(t)}\alpha_2^{(0)}(t) \equiv 0. \tag{2.5.26}$$

Бастапқы шарттармен (2.5.22) бірге оның ерекше шешімі бар

$$\alpha_k^{(0)}(t) = \frac{1}{2}\left(z^0 + A^{-1}(t_0)h(t_0), \chi_k(t_0)\right)\exp\left\{\int_{t_0}^{t} \frac{\left(K(\theta,\theta) - \dot{\varphi}_k(\theta), \chi_k(\theta)\right)}{2\lambda_k(\theta)} d\theta\right\}, k = 1, 2,$$

сондықтан $(2.4.\overline{10}_0)$ есептің (2.5.21) шешімі U кеңістігінде табылған болады. Және асимптотиканың негізгі мәні (2.5.25) түрге ие болады, бірақ $\alpha_k^{(0)}(t)$ шешімді функциясымен. $\beta' = \omega$ жиіліктері сәйкес келген жағдайда асимптотиканың негізгі мүшесіне (2.1.1) жүйеде жылдам тербелмелі коэффициент әсер етпейтіндігіне назар аударамыз. Оның әсері бірінші және жоғары ретті асимптотиканы тұрғызғанда анықталады.

в) $2\beta' = \omega$. Бұл жағдайда $e^{\tau_4 + \tau_1} = e^{\tau_3}, e^{\tau_3 + \tau_2} = e^{\tau_4}$, сондықтан жүйенің (2.5.23) ортогоналдылық шарттары ыдырайтын дифференциалдық теңдеулермен де сипатталады (2.5.26), ал асимптотиканың жетекші мүшесі бастапқы жағдайдағыдай (2.5.25) түрге ие болады.

\

ҚОРЫТЫНДЫ

Диссертациялық жұмысымда жылдам осцилляцияланатын коэффициентті сингуляр ауытқымалы интегро-дифференциалдық жүйенің регуляризацияланған асимптотикалық шешімі туралы есептер қарастырылды. Интегралдық және интегро-дифференциалдық теңдеулер теориясының негізгі ұғымдарын қарастырылған және бұндай теңдеулерге С.А. Ломовтың регуляризация әдісін [8] қолдану мәселелерін кеңінен ашып көрсетілген. Диссертациялық зерттеудің қорытындылары магистрлік диссертация талаптарына сай орындалған. Диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері: Жылдам осцилляцияланатын коэффициентті сингуляр ауытқымалы Вольтерра типіндегі интегро-дифференциалдық жүйенің регуляризацияланған асимптотикалық шешімі құрылған.

Жылдам осцилляцияланатын коэффициентті сингуляр ауытқымалы интегро-дифференциалдық жүйенің регуляризациясы жасалған. Сингуляр ауытқымалы интегро-дифференциалдық теңдеулердің практикада кең қолданысқа ие болғандықтан жылдам тербелмелі коэффициенттері бар жүйені қарастырдым.. Бұндай теңдеуде ядросы экспоненциалдық түрде өзгеретін интегралдық операторы бар жүйені қарастырдық. Зерттеулеріміздің негізгі мақсаты – жоғарыдағы атап өтілген типтегі жүйелер үшін регуляризация әдісінің алгоритмін жасау және интегралдық мүшенің Коши есебінің шешімінің асимптотикасының негізгі мүшесіне әсерін анықтау болып табылды. Алдын-ала айта кету қажет бірдей резонанс жағдайы қарастырылды, яғни жылдам тербелмелі коэффициенттің меншікті мәндерінің бүтін сызықтық комбинациясы барлық қарастырылған уақыт аралығында шектеу операторының спектрінің нүктелерімен сәйкес келетін жағдай болды. Сонымен қатар, жылдам тербелмелі коэффициенттің меншікті мәнінің шекті оператордың спектрінің нүктелерімен сәйкес келу жағдайы алынып тасталынды.

Диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері:

- Жылдам осцилляцияланатын коэффициентті сингуляр ауытқымаы Вольтерра типіндегі интегро-дифференциалдық жүйенің регуляризацияланған асимптотикалық шешімі құрылған;
- Жылдам осцилляцияланатын коэффициентті сингуляр ауытқымалы интегро-дифференциалдық жүйенің регуляризациясы жасалған;
- Резонанссыз шешімдер класының интегралдық операторға инварианттылығы негізделген;
- Жалпы итерацион есептің нормаль және бір мәнді шешімділігі дәлелденген;
- Бірінші итерациялық есептің бір мәнді шешімі құрылған;
- Итерацион есептердің қалдық мүшесі туралы теорема дәлелденген;

Әрбір ғылыми нәтижесінің тұжырымдары мен қорытындылары жаналық дәрежесімен сыпатталады десек:

Бірінші ғылыми нәтіже жаңа. Себебі, жылдам осцилляцияланатын коэффициентті сингуляр ауытқымалы интегро-дифференциалдық жүйенің регуляризацияланған асимптотикалық шешімі алғашқы рет құрылған.

Екінші ғылыми нәтіже де жаңа. Себебі, жылдам осцилляцияланатын коэффициентті сингуляр ауытқымалы интегро-дифференциалдық жүйе үшін резонанссыз шешімдер класының интегралдық операторға инварианттылығы алғашқы рет дәлелденген.

Үшінші ғылыми нәтіже де жаңа. Себебі, жылдам осцилляцияланатын коэффициентті сингуляр ауытқымалы интегро-дифференциалдық жүйе үшін итерацион есептердің қалдық мүшесі туралы теорема үзіліссіз функциялар классында бірінші рет дәлелденген.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИТТЕР ТІЗІМІ

1. Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Николенко Л.Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. - Киев: Наукова думка, 1966. - 261 с.

2. Шкиль Н.И . Асимптотические методы в дифференциальных уравнениях. - Киев: Наукова думка, 1971. - 226 с.

3. Далецкий Ю.Л., Крейн С.Г. О дифференциальных уравнениях в гильбертовым пространстве // Укр. матем. журн., 2(4), 1950. - 71-91.

4.Далецкий Ю.Л. Асимптотический метод для некоторых дифференциальных уравнений с осциллирующими коэффициентами // ДАН СССР, 143(1962), 5. - 1026-1029.

5. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. - М.: Наука, 1981. - 400 с.

6.Рыжих А.Д. Асимптотическое решение линейного дифференциального уравнения с быстро осциллирующим коэффициентом // Тр. МЭИ, 357(1978). - 92-94.

7.Рыжих А.Д. Матер. Всесоюз. конф. по асимп. методам. Част I. - Алма-Ата: Наука, (1979). - 64-66.

8..Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. - М.: Наука, (1970). - 534 с.

9. Safonov V.F., Bobodzhanov A.A. Regularized asymptotics of solutions to integro-differential partial differential equations with rapidly varying kernels // Ufimsk. Mat. Zh., 2(2018). - 3-12.

10.Bobodzhanov A.A., Safonov V.F. A generalization of the regularization method to the singularly perturbed integro-differential equations with partial derivatives // Russian Math. (Iz. VUZ), 62(2018), 3. - 6–17.

11. Safonov V.F., Bobodzhanov A.A. Regularized asymptotic solutions of the initial problem of systems of integro-partial differential equations // Mathematical Notes, 102(2017), 1. - 22-30.

12.Bobodzhanov A.A., Safonov V.F. The method of normal forms for singularly perturbed systems of Fredholm integro-differential equations with rapidly varying kernels // Sibir. Math. J., 204(2013), 7. - 979–1002.

13.B.T.Kalimbetov, A.N.Temirbekov, B.I.Yeskaraeva, Internal boundary layer in a singularly perturbed problem of fractional derivative. Bulletin of KarSU, series Mathematics, 100(4), 2020, 92-100. DOI 10.31489/2020M4/92-100. \

14.B.T.Kalimbetov, E.Abylkasymova, G.Beissenova, On the asymptotic solutions of singulary perturbed differential systems of fractional order, Jour. of Math. and Comp. Science, 24, 2022, 165--172. doi: 10.22436/jmcs.024.02.07.

15.B.T.Kalimbetov, V.F.Safonov, Integro-differentiated singularly perturbed equations with fast oscillating coefficients, Bulletin of KarSU, series Mathematics, 94(2), 2019, 33--47. DOI 10.31489/2019M2/33-47

16.A.A.Bobodzhanov, B.T.Kalimbetov, V.F.Safonov, Integro-differential problem about para-metric amplification and its asymptotical integration, International Journal of Applied Mathematics, 33(2), 2020, 331--353. doi.org/10.12732/ijam.v33i2.12.

17. B.T.Kalimbetov, A.N.Temirbekov, A.S.Tulep, Asymptotic solutions of scalar integro-differential equations with partial derivatives and with fast oscillating coefficients, EJPAM, 13(2), 2020, 287--302. doi.org/10.29020/nybg.ejpam.v13i2.3664.

18. B.T.Kalimbetov, V.F.Safonov, Regularization method for singularly perturbed integro-differential equations with rapidly oscillating coefficients and rapidly changing kernels, Axioms, 9(4), 2020, 131. https://doi.org/10.3390/axioms9040131.

19.A.A.Bobodzhanov, B.T.Kalimbetov, V.F.Safonov, Nonlinear singularly perturbed integro-differential equations and regularization method, WSEAS Transactions on Mathematics, 19, 2020, Art. no. 30, 301-311. doi.org/10.37394/23206.2020.19.29.

20.A.A.Bobodzhanov, B.T.Kalimbetov, V.F.Safonov, Generalization of the regularization method to singularly perturbed integro-differential systems of equations with rapidly oscillating inhomogeneity, Axioms, 10(1), 40. 2021, https://doi.org/10.3390/axioms10010040.

21. В.Ф.Сафонов, А.А.Бободжанов, Курс высшей математики. Сингулярно возмущенные задачи и метод регуляризации: учебное пособие, М.: Издательский дом МЭИ, 2012.

22. А.А.Бободжанов, Б.Т.Калимбетов, В.Ф.Сафонов, Метод регуляризации для сингулярно возмущенных задач с быстро осциллирующими коэффициентами, Шымкент: Алем, 2020. – 312 с.