

Ф-ОБ-003-018

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫНЫҢ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ  
МИНИСТРЛІГІ

ҚОЖА АХМЕТ ЯСАУИ АТЫНДАҒЫ ХАЛЫҚАРАЛЫҚ ҚАЗАҚ-ТҮРІК  
УНИВЕРСИТЕТІ

Жаратылыстану факультеті

ӘӨЖ: 517.968: 519.612

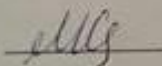
Қолжазба құқығында

Әмзе Перизат Спатайқызы

ЭЛЛИПТИК ТЕНДЕУДІҢ ОҢ ЖАҒЫН ТІКТЕУ КЕРІ ЕСЕБІН САНДЫҚ  
ШЕШУДІҢ АЛГОРИТМДЕРІ МЕН БАҒДАРЛАМАЛАРЫН ҚҰРУ

7М06129-Математикалық және компьютерлік модельдеу білім беру  
бағдарламасы бойынша жаратылыстану ғылымдарының магистрі дәрежесін алу  
үшін магистрлік диссертация

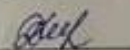
Ғылыми жетекшісі:



ф.-м.ғ.к., профессор м.а.  
Султанов М.А.

Магистрлік диссертация қорғауға жіберілді: « 26 » 05 2021 ж.

Кафедра меңгерушісі:



техн.ғ.к., доцент Қошанова М.Д.

Түркістан, 2021ж.

## КІРІСПЕ

**Зерттеу тақырыбының өзектілігі.** Ғылым мен техникадағы көптеген құбылыстар дербес туындылы дифференциалдық теңдеулермен сипатталады. Оларға түрлі техникалық құрылғылардағы, атом электр станциясындағы құрылғылардағы жылу тарқалу процестері мысал бола алады [1]. Ал математикалық физика теңдеулерінің негізгі үш түрі болады: параболалық (жылу, диффузия процестерін сипаттайды), гиперболалық (тербеліс процесстерін сипаттайды) және эллипстік (стационар орныққан физикалық процесстерді сипаттайды). Эллипстік типті теңдеулер стационар, яғни уақытта тәуелді болмаған көптеген физикалық, химиялық процесстерді сипаттайды. Оларға электр зарядтарының электр өрісіндегі үлестірімі, сұйықтықтың потенциал ағысы, кеуек денелердегі фильтрация есептері, денеде температураның стационар үлестірімі, сызықтық серпімділік теориясындағы кернеудің үлестірімі есептері және т.б. Көптеген физикалық есептер салдар-себеп сипатында болып, салдар белгілі болғанда себепті анықтау қажет болады. Мұндай жағдайда біз кері есепке келеміз [2]. Ал бүгінгі таңда кері есептер ғылымның барлық салаларында көптеп кездеседі. Сонымен қатар, кері есептер қисынсыз есептер қатарына жатады, яғни есеп корректілігінің Адамар қойған үш шартының (есептің шешімі бар, есептің шешімі жалғыз, есептің шешімі орнықты) кемінде біреуі орындалмайды. Көптеген практикалық маңызды қолданбалы есептер қисынсыз есептер болып келеді және мұнадай есептер ғылым мен техниканың көптеген салаларында кездесетін болғандықтан оларды зерттеу және шешу әдістерін құрудың маңызы үлкен.

**Зерттеудің мақсаты мен міндеттері.** Екі өлшемді эллипстік теңдеудің белгісіз оң жағын анықтау кері есебін сандық шешу алгоритмін құру, онымен байланысты тура есепті сандық шешу әдістерін қарастыру, есептеу тәжірибелерін жүргізу.

Жобада қойылған мақсатқа жету үшін келесі негізгі *міндеттерді* шешу қажет:

1. Эллипстік типті Пуассон және Лаплас теңдеулері үшін қойылатын Дирихле есебін сандық шешу әдістерін зерттеу.
2. Кері есептерді шешудің сандық әдістерін зерттеу.
3. Екі өлшемді Пуассон теңдеуінің белгісіз оң жағын анықтау кері есебінің есептеу алгоритмін құру.

**Зерттеу объектісі.** Эллипстік типті Пуассон теңдеуі.

**Зерттеу әдістері.** Ақырлы айырымдар әдісі, айырымдық схемалар теориясы, орнықтыру әдісі, ақырлы элементтер әдісі, итерациялық әдістер.

**Зерттеудің ғылыми жаңалықтары:** Айырымдық жағдайда кері есеп екі функция жұптығын анықтау үшін екі торлық Пуассон теңдеуі үшін жүйеге келтірілген. Осы теңдеулер шекаралық шарттармен байланыстырылған. Нәтижеде эллипстік теңдеудің белгісіз оң жағын анықтау кері есебі жүктелген айырымдық Пуассон теңдеуін шешуге келтіріледі Қазіргі қолданбалы бағдарламалық камтаманың құрылуы мен есептеу тәжірибелері.

**Зерттеудің теориялық құндылығы.** Жұмыста эллипстік теңдеудің белгісіз оң жағын анықтау есебі үшін құрылған есептеу алгоритмін күрделірек көп өлшемді сызықтық емес кері есептері жуықтап шешуде әдістердің жинақтылығын, орнықтылығын зерттеуде пайдалану мүмкіндігі.

**Зерттеудің практикалық мәні.** Жұмыста эллипстік теңдеудің белгісіз оң жағын анықтау есебі үшін құрылған сандық шешу алгоритмін түрлі стационар процесстердің математикалық модельдерін сандық зерттеулерде қолданыс табу мүмкіншілігі.

**Зерттеудің жалпы сипаттамасы.** Жұмыста математикалық физика теңдеулерін шешу әдістері, функционалдық талдау әдістері, есептеу математикасы әдістері және қазіргі заманғы қолданбалы математикалық жүйелер қолданылады.

Математикалық есептер әдетте, коррект және коррект емес есептер болып екіге бөлінеді. Мұндай бөліну қатаң математикалық тұрғыда алғаш рет француз ғалымы Ж.Адамардың коррект есепке берген анықтамасынан бастау алады. Оның осы анықтамасы бойынша коррект есептер үшін мынадай үш шарт орындалуы қажет:

- 1) есептің шешімі бар.
- 2) есептің шешімі жалғыз.
- 3) есептің шешімі орнықты.

Бастапқыда Ж.Адамар коррект емес есептер физикалық мағынаға ие болмайды деген тұжырым айтқан болатын, осы жансақ айтылған тұжырым салдарынан коррект емес есептер теориясы 40-50 жылдай зерттеусіз қалған. Негізінде ғалымдар мен инженерлер кері есептермен өз практикаларында алдыннан кездесіп, оларды өз деңгейлерінде зерттеп, шешу жолдарын қарастырған. Бұған мысал ретінде геофизик ғалымдарды келтіруге болады. Кері және қисынсыз есептердің практикалық маңызға ие болатындығын және оларды шешу әдістерін алғаш ұсынған белгілі ғалым А.Н.Тихонов болды. Ол өткен ғасырдың орталарында алғаш болып, осындай қисынсыз есептерді шешу әдісін - регуляризация әдісін ұсынды. Осы кезеңнен бастап, қисынсыз есептерді шешу әдістерін зерттеу дүниежүзінде кеңінен жүргізіле бастады. Олардың қарқынды дамуына математикада соның ішінде есептеу математикасы әдістерінің жетілдіруі және жаңа әдістерінің құрылуы, жоғары жылдамдықты есептеу машиналарының пайда болуы, сондай-ақ мүмкіндіктері мол қолданбалы математикалық жүйелердің пайда болуы және көптеген жаратылыстану және инженерлік ғылымдар салаларында кеңінен қолданыс табуы себеп болды.

Қисынсыз есептерді шешу коррект есептерге қарағанда анағұрлым күрделі болып келеді. Мұндай есептерді жоғары дәлдікпен шешу көпшілік жағдайда мүмкін бола бермейді. Мұндай жағдайларда, жуық шешім дәлдігін арттыру іс-әрекеттері алынатын нәтижелердің нашарлауына, басқаша айтқанда, дәл шешімнен елеулі ауытқуға алып келуі мүмкін. Мұның басты себебі есептің қисынсыз есеп болғандығы. Сондықтан, қисынсыз есептерді шешуде зерттеушіге белгілі бір дәлдік деңгейінде есептеулерді тоқтатуға тура келеді.

Бұл жағдай, қисынсыз есептерде тоқтау ережесі деген шартты орындауды талап етеді.

Математикада қисынсыз есептер мен қатар, кері есептер де кеңінен зерттеліп, даму үстінде. Кері есептерде теңдеудің коэффициенттері немесе теңдеудің оң жағы немесе бастапқы және шекаралық шарттарды табу қажет болады. Кері есептерді физикалық мағынадан интерпретациялайтын болсақ, салдар бойынша себепті анықтаудан тұрады. Түрлі ғылымдарда кездесетін, көптеген қолданбалы есептер кері есептер қатарына жатады. Мұндай кері есептер геофизика саласында, компьютерлік диагностика есептерінде, астрофизика саласында және көптеген салаларда кездеседі. Кері есептерді шешуде қазіргі күннен оларды шешу теориясы мен сандық шешу әдістері көптеп құрылған. Соған қарамастан, кері есептерді шешудің аналитикалық, сандық шешу әдістерін құру мәселелері бүгінгі таңда қарқынды жүргізілуде. Диссертациялық жұмыста, екі өлшемді эллипстік теңдеудің белгісіз оң жағын тіктеу кері есебін андық шешудің есептеу алгоритмдері мен бағдарламаларын құру мәселесі қарастырылған.

Жалпы, екінші ретті эллипстік типті теңдеулер үшін шеттік есептердің теориясы (шешілімділігі, шешімнің жалғыздығы мен орнықтылығы), яғни тура есептер теориясы А.В.Бицадзе [3], , А.Н.Тихонов, А. А.Самарский [4], ал осындай тура есептерді жуықтап шешу әдістері А. А. Самарский, В. Б. Андреев [5], А. А. Самарский, Е. С.Николаев [6] еңбектерінде жан-жақты қарастырылған.

Ал эллипстік теңдеу үшін кері есептер теориясы А. I. Prilepko, D.G. Orlovsky, I. A. Vasin [7], М. М.Лаврентьев, В. Г. Романов, В.П. Шишатский [8], В. В. Соловьёв [9], W. Rundell [10], А.Хайдаров [11], V.M. Isakov [12] және т.б. зерттеулерде қарастырылған.

Эллипстік теңдеу үшін коэффициенттік және оң жағын тіктеу кері есебінің шешілімділігі және орнықтылығы, шешімінің жалғыздығы мәселелері цилиндрлік облыста В.В.Соловьёв жұмыстарында [13], Гельдер кеңістігінде эллипстік теңдеу үшін кері есептер А.Б.Костин [14] еңбектерінде зерттеу жүргізілген.

Эллипстік теңдеу үшін коэффициенттік және оң жағын тіктеу кері есептерін сандық шешу А.А.Самарский, П.Н.Вабищевич [15], А.Н.Тихонов, А.В.Гончарский, В.В.Степанов, А.Г.Ягола [16], П.Н.Вабищевич [17], С. Б. Сорокин [18] және басқа да көптеген ғалымдар әдістерімен зерттелген. Мысалға, осы келтірілген жұмыстардан П.Н.Вабищевичтің жұмысында кері есеп итерациялық әдіспен, ал С. Б. Сорокиннің жұмысында Пуассон теңдеуінің белгісіз оң жағын тіктеу кері есебі дискрет жағдайда айнymалыларды бөлектеу (Фурье) әдісімен тиімді сандық алгоритм құрылып шешілген.

Жұмыста стационар болған Пуассон теңдеуінің белгісіз оң жағын анықтау кері есебінің есептеу алгоритмуі құрылған. Кері есепті шешуде қажет болатындықтан тура есеп ақырлы айырымдар әдісімен, есептеулерді орнықтыру әдісімен және ақырлы элементтер әдістерімен сандық шешілген. Үлгілік берілгендермен есептеу тәжірибелері жүргізілген.

## 1 СТАЦИОНАР ТЕҢДЕУЛЕР

### 1.1 Эллипстік типті теңдеу және олар сипаттайтын процесстер

Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер түрлі салаларда: математика, физика, химия, биология, экономика және т.б. кездесетін процесстерді математикалық қатынастармен сипаттау құралы болып табылады. Мұндай теңдеулер осы айтылған процесстердің қасиеттерін, мысал үшін, физикалық процесстерге қатысты айтатын болсақ, сол заңдар интегралдық немесе дифференциалдық қатынастар арқылы жазылады. Осындай математикалық қатынастарды алуда әдетте, мынадай деп ұйғарылады: осы қарастырылатын процесс жүретін орта тұтас деп есептелінеді, ал процессті сипаттайтын физикалық немесе басқа да шамалар нүктелері координаталар мен уақыттың функциялары деп, олар сыптығыр, туындысы бар деп қарастырылады.

Осындай дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер ішінде Лаплас және Пуассон теңдеулері маңызды орын алады. Бұл теңдеулер стационар процесстерді сипаттайды. Осындай теңдеулерге алып келетін процесстерге мысал ретінде келтіруімізге болады: біртекті қатты денеде орныққан температура, сығылмайтын сұйықтықтың потенциал қозғалысы, электростатикалық зарядтардың потенциалдары және т.б. көптеген қолданбалы есептердің математикалық модельдері осындай теңдеулермен беріледі.

Төмендегі операторды Лаплас операторы (жазықтықта) деп атайды:

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy}.$$

Осы оператормен екі теңдеу байланысқан:

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \quad (\text{Лаплас теңдеуі}), \\ u_{xx} + u_{yy} &= g(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (\text{Пуассон теңдеуі}), \end{aligned}$$

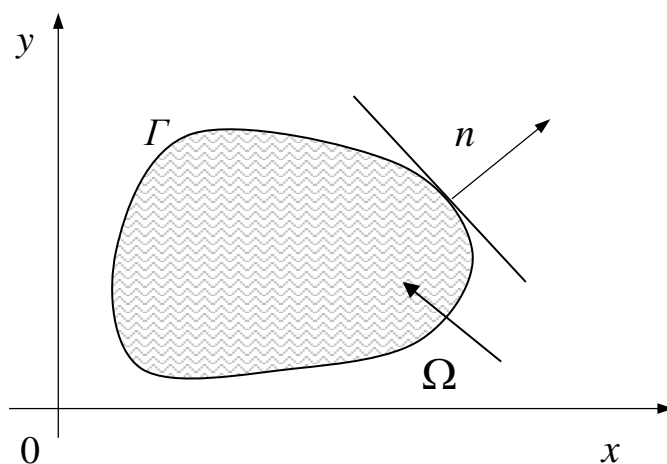
мұнда  $\Omega - R^2$  – дегі қандайда бір берілген облыс, ал  $\Gamma$  оның шекарасы,  $n$  – нормаль вектор (сурет 1).

Жоғарыда атап өтілген Лаплас және Пуассон теңдеулері үшін төмендегідей есептер қойылады:

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, \quad (x, y) \in \Omega, \\ u|_{\Gamma} &= g(x, y), \quad x, y \in \Gamma, \quad (\text{Дирихле есебі}) \\ u_{xx} + u_{yy} &= 0, \quad (x, y) \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} &= g(x, y), \quad x, y \in \Gamma, \quad (\text{Нейман есебі}) \end{aligned}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$\alpha u|_{\Gamma} + \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = g(x, y), \quad x, y \in \Gamma \text{ (3-ші шеттік есеп)}$$



1 Сурет – Аймаққа иллюстрация

## 1.2 Дирихле (Нейман) есептерін аналитикалық шешу әдістері

Біз мұнда тақырыпта көрсетілген есептерді дәл шешу әдістеріне қысқаша тоқталып кетеміз. Белгілі болғандай, эллипстік типті теңдеулер үшін қойылатын шекаралық Дирихле және Нейман есептерін дәл шешудің бірқатар әдістері бар. Олар мыналар:

- а) айнымалыларды бөлектеу (Фурье) әдісі;
- б) Грин функциясы әдісі;
- в) потенциалдар әдісі.

1-ші әдіс есеп қарастыралатын облыс қарапайым болғанда, яғни тіктөтбұрыш, параллелепипед,  $n$ -өлшемді параллелепипед болғанда қолданылады. Ал 2-ші әдіс Грин функциясы мен оның қасиеттеріне негізделген болып келеді. 3-ші әдіс жай және екі еселі потенциалдар теориясына сүйенеді.

## 1.3 Дирихле (Нейман) есептерін жартылай жуықтап шешу әдістері

Біздің мақсатымыз эллипстік теңдеу үшін қойылатын кері есепті (теңдеудің оң жағын сандық тіктеу) сандық шешу болғандықтан, біз жұмыста қарастырылатын теңдеуді жуықтап, яғни сандық шешу мәселесіне негізгі көңіл аударатын боламыз.

### 1.3.1 Вариациялық Ритц әдісінің жалпы сұлбасы

Біз мұнда жалпы түрде баяндау жүргіземіз. Төменде берілген

$$Ly = f \quad (1)$$

теңдеуді жуықтап шешуді көрейік. Мұнда  $L: D(L) \subseteq H \rightarrow H$  – сызықтық оператор,  $H$  – нақты гильберт кеңістігі. Біз мынадай ұйғарым жасаймыз: берілген (1) теңдеу жалғыз  $y^*$  шешімге ие. Мына шарттарда осы ұйғарым дұрыс болады:

$$(Ly, y) \geq 0 \quad \forall y \in D(L), \quad ((Ly, y) = 0 \Leftrightarrow y = 0).$$

Жоғарыдағы теңдеуге  $J[y]: H \rightarrow R_1$  сондай функционал сәйкес қойылады, ол төменнен шенелген болып, өзінің ең кіші мәніне жалғыз нүктеде жететін болып, ол нүкте (1) теңдеудің ізделініп жатқан  $y^*$  шешімімен дәл түсетін болсын. Онда (1) есеп мындай экстремаль есепке келтіріледі:

$$J[y] \rightarrow \min, \quad y \in D(L). \quad (2)$$

Егер (1)-гі  $L$  операторға (2)-дегі  $J[y]$  функционал төмендегі түрде сәйкес қойылса

$$J[y] := \|Ly - f\|^2 = (Ly, Ly) - 2(Ly, f) + \|f\|^2, \quad (3)$$

яғни, квадраттық функционал, онда сәйкес вариациялық әдіс ең кіші квадраттар әдісі деп аталады. Белгілі нәрсе, мұндай функционал  $D(L)$  жиында әрқашан минимумға ие.

Ал (2)-де мынадай функционал алынса

$$J[y] := \|Ly - f\|^2 = (Ly, y) - 2(y, f), \quad (4)$$

онда бұл функционал энергия функционалы деп атайды. Бұл жағдайда (1) және (2) есеп шешімдерінің арасындағы бір мәнді сәйкестік төмендегі шарттарда орындалады:

$$(Lu, v) = (u, Lv) \quad \forall u, v \in D(L),$$

$$\exists \varepsilon > 0: (Lu, u) \geq \varepsilon \|u\|^2 \quad \forall u \in D(L).$$

(4)-ші функционалдың минимумын табуға негізделген вариациялық әдісті энергетикалық әдіс деп атайды.

Біз осы әдісті негізге алған (2)-ші минимумдау есебінің жуық шешімдерін құруды қарастыратын боламыз және бұл әдіс Ритц әдісі деп аталады.

$L$  операторына қойылған жоғарыдағы шарттарда  $D(L)$  жиын элементтерінде мынадай энергетикалық скаляр көбейтіндіні анықтаймыз:

$$[u, v] := (Lu, v), \quad \forall u, v \in D(L).$$

Ал сәйкес норма мынадай анықталады:

$$\|u\| := \sqrt{[u, u]} = \sqrt{(Lu, u)}.$$

Осы метрикада  $D(L)$  жиыны унитар кеңістікке айналады және ол толық кеңістікке дейін толықтырылады. Осындай құрылған  $H_L$  гильберт кеңістігін энергетикалық кеңістік деп атайды және  $u \in H_L$  болса,  $u \in H$  болатындығы дәлелденген.

Осы  $H_L$  кеңістікте

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots \quad (5)$$

элементтер тізбегін аламыз. Оларды координаталық элементтер деп атайды. Осы элементтер тізбегі мына төменде келтірілген шарттарды қанағаттандыратын болсын деп есептейміз:

- 1) Кез келген  $n$  үшін  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  элементтер сызықтық тәуелсіз;
- 2) (5) элементтер тізбегі толық, яғни

$$\forall u \in H_L, \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N}, \exists \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n_0} \mid \alpha_k \in R_1\} : \left\| u - \sum_{k=1}^{n_0} \alpha_k \varphi_k \right\| < \varepsilon.$$

Ритц әдісінде (2) вариациялық есептің жуық шешімі (яғни бастапқы есептің шешімі деген сөз) (4) функционалда төмендегі түрде ізделінеді:

$$y_n = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i, \quad (6)$$

мұндағы  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) сандар – (5) координаталық элементтер тізбегіндегі алғашқы  $n$  элементтерінің сызықтық комбинациясының коэффициенттері. Олар сондай таңдалады, мына шарт орынды болуы керек





### 1.3.2 Жазықтық жағдайында Дирихле есебін Ритц әдісімен шешу

Ритц әдісінің қолданылуын Пуассон теңдеуі үшін Дирихле мысалында қарастырып шығамыз.

Сонымен, вариациялық әдіспен төмендегі есептің жуық шешімін табуымыз қажет:

$$-u_{xx} - u_{yy} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (9)$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (10)$$

мұнда  $\Omega - R^2$  – дегі ашық аймақ,  $\Gamma - \Omega$  аймақтың шекарасы,  $f(x, y)$  - квадраты бойынша интегралы шенелген функция. Төмендегі белгілеуді енгіземіз:

$$Lu := -\Delta u \equiv -(u_{xx} + u_{yy}). \quad (11)$$

Сонда (11) анықталған  $L$  оператордың анықталу облысы  $D(L)$   $H$  кеңістікті  $\Omega$  аймақта екі рет дифференциалданушы үзіліссіз және аймақтың шекарасында нөлге айналатын функциялар жиынына тарылу болып табылады.

$L_2(\Omega)$  кеңістікте скаляр көбейтінді анықтаймыз:

$$(w, v) = \iint_{\Omega} wv \, d\Omega = \iint_{\Omega} w(x, y)v(x, y) \, dx dy.$$

Сонда (11) сай, аламыз:

$$(Lu, v) = -\iint_{\Omega} v \Delta u \, d\Omega = -\iint_{\Omega} v(u_{xx} + u_{yy}) \, dx dy. \quad (12)$$

Осы қатынасты пайдаланып  $L$  оператордың симметриялық және оң анықталғандығын көрсетеміз. Бұл бастапқы есептің вариациялық есепке пара-пар екендігі үшін қажет.

$L$  оператордың симметриялық екендігін көрсету үшін скаляр көбейтінділердің айырмасын  $D(L)$  тиісті функцияларда көреміз:

$$\begin{aligned} (Lu, v) - (Lv, u) &= -\iint_{\Omega} v \Delta u \, d\Omega + \iint_{\Omega} u \Delta v \, d\Omega + \\ &= -\iint_{\Omega} [v(u_{xx} + u_{yy}) - u(v_{xx} + v_{yy})] \, dx dy = -\iint_{\Omega} T(x, y) \, dx dy, \end{aligned}$$

мұнда

$$T(x, y) := v(u_{xx} + u_{yy}) - u(v_{xx} + v_{yy}) = \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

Соңғы теңдікті тексеріп көру қиынға соқпайды. Әрі қарай белгілі Грин формуласын қолданамыз:

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} P dx + Q dy.$$

Мынадай белгілеп

$$Q = v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x}, \quad P = -v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y},$$

аламыз

$$(Lu, v) - (Lv, u) = - \int_{\Gamma} \left( v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx - \left( v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy.$$

$u, v$  функциялар  $\Gamma$  – да нөлге айналатын болғандықтан, соңғы интеграл нөлге тең. Яғни  $(Lu, v) = (Lv, u)$ , ал бұл  $L$  оператордың симметриялық оператор екендігін білдіреді.

Енді  $L$  оператордың оң анықталғандығын көрсетеміз. (12) формулаға сай

$$(Lu, u) = - \iint_{\Omega} u(u_{xx} + u_{yy}) dx dy = - \iint_{\Omega} S(x, y) dx dy,$$

ал осы интеграл асты функция үшін төмендегі орынды

$$S(x, y) = u(u_{xx} + u_{yy}) = \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$$

Жоғарыдағы теңдікті және тағыда Грин формуласын пайдаланып,  $(Lu, u)$  скаляр көбейтіндіні төмендегідей жазуға мүмкіндік береді:

$$(Lu, u) = - \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy + \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \\ = - \int_{\Gamma} \left[ \left( -u \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx + \left( u \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy \right] + \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

Осы соңғы теңдікте қисық сызықты интеграл нөлге тең (10) шартқа сай, ал екі еселі интеграл интеграл асты функцияның теріс еместігі себепті теріс болмайды, сондықтан  $(Lu, u) \geq 0$ .

$$\iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

болатындықтан,  $u(x, y) = \text{const}$ ,  $\forall (x, y) \in \Omega$ . Ал функция үзіліссіз болғандықтан, ол  $\forall (x, y) \in \bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$  үшін үзіліссіз болады. Ал  $\Gamma$  шекарада  $u$  функция нөлге тең, сондықтан ол бүткіл  $\bar{\Omega}$  аймақта нөлге тең болады, яғни

$$(Lu, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

Сонымен,  $L$  оператор симметриялық және оң анықталған оператор. Бұл бастапқы есепті вариациялық есепке келтіруге болады дегені.

Төмендегі интегралды Дирихле интегралы деп атайды

$$(Lu, u) = \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

Сонда минимизациялау қажет функционал төмендегідей болады:

$$\Phi[u] = \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2uf(x, y) \right] dx dy. \quad (13)$$

Сонымен, Пуассон теңдеуі үшін Дирихле есебін Ритц әдісімен жуық шешуде мынадай жуықтау алынады:

$$u_n(x, y) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x, y). \quad (14)$$

Осы жуықтау  $n \rightarrow \infty$  ұмтылғанда (13) функционалға минимум беруі керек. Бұл негізінде  $\varphi_i = \varphi_i(x, y)$ ,  $i \in \mathbf{N}$ ,  $\mathbf{N}$  – натурал сандар жиыны, координаталық функциялар қаншалықты оңтайлы таңдап алынғандығына байланысты болады. Оларды таңдап алуда  $\Omega$  облыстың түріне көңіл бөлінеді. Координаталық функцияларды таңдап алу мүмкіндіктеріне тоқтала кетеміз. Егер  $\bar{\Omega}$  облыста  $\omega = \omega(x, y)$  беріліп, ол 1-ші ретке дейінгі үзіліссіз туындыларға ие болса және

сонымен қатар,  $\Omega$  облыста оң және оның  $\Gamma$  шекарасында нөлге тең болатын болса, онда координаталық функцияларды мынадай алуға болады [19]:

$$\varphi_0 = \omega, \varphi_1 = \omega x, \varphi_2 = \omega x^2, \varphi_0 = \omega xy, \dots, \quad (15)$$

Осылай алынған функциялар сызықтық тәуелсіз және толық жүйе құрайды. Мысал ретінде, тікбұрышты  $[-a, a] \times [-b, b]$  облыс үшін төмендегі функцияны алуға болады:

$$\omega(x, y) := (x^2 - a^2)(y^2 - b^2), \quad (16)$$

ал центрі координата басында, радиусі  $r$  болған дөңгелек үшін мынадай алуға болады:

$$\omega(x, y) := r^2 - x^2 - y^2.$$

Сондай-ақ, тікбұрышты  $[0, a] \times [0, b]$  облыс үшін төмендегі тригонометриялық функциялар тізбегін алуға болады [19]:

$$\varphi_{kj}(x, y) = \sin\left(k \frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(j \frac{\pi y}{b}\right), \quad k, j \in \mathbf{N}.$$

Сонымен, егер (14) өрнектегі  $\varphi_i$  координаталық функциялар қандайда бір жоғарыда айтылған тәсілдердің бірімен таңдап алынған болса, онда сызықтық тендеулер жүйесінің

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} c_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (17)$$

$a_{ij}$  коэффициенттерін және оң жағын төмендегі формулалар арқылы есептеу керек болады:

$$a_{ij} = (L\varphi_i, \varphi_j) = -\iint_{\Omega} \varphi_j \left( \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} \right) dx dy \quad (18)$$

$$b_i = (\varphi_i, f) = \iint_{\Omega} \varphi_i f(x, y) dx dy, \quad (19)$$

және әрі қарай (17) жүйеден  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) коэффициенттерді тауып, оларды және жоғарыда таңдалған  $\varphi_i$  функцияларды (14) қойып жуық шешімді аламыз.

**Мысал.** Осы сипатталған Ритц әдісімен төмендегі есепті жуықтап шешуді қарастырайық:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -x - y, \quad (x, y) \in \Omega = (-1, 1) \times (-1, 1),$$

$$u|_{\Gamma} = 0.$$

Координаталық функцияларды таңдауға қатысты жоғарыда айтылғандарға сай, (16) – ны есепке ала отырып, аламыз:  $\omega(x, y) = (x^2 - 1)(y^2 - 1)$  және (15) жүйеден екі функцияны мынадай аламыз:

$$\varphi_1 = x\omega(x, y) = (x^3 - x)(y^2 - 1), \quad \varphi_2 = y\omega(x, y) = (x^2 - 1)(y^3 - y).$$

Дербес туындыларды табамыз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} &= (3x^2 - 1)(y^2 - 1), & \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} &= 6x(y^2 - 1), \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} &= 2y(x^3 - x), & \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} &= 2(x^3 - x), \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} &= 2x(y^3 - y), & \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} &= 2(y^3 - y), \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} &= (x^2 - 1)(3y^2 - 1), & \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} &= 6y(x^2 - 1). \end{aligned}$$

Әрі қарай, (17) жүйедегі  $c_1$  және  $c_2$  белгісіздер алдындағы коэффициенттерді (18) формула бойынша есептейміз. Осы есептеулерде  $x, y$  айнымалылардың  $\varphi_1, \varphi_2$  функцияларға және олардың туындыларына енуінің және  $\Omega$  аймақтың симметриялығын есепке ала отырып, табамыз:

$$\begin{aligned} a_{11}(a_{22}) &= -\iint_{\Omega} \varphi_1 \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right) dx dy = \\ &= -\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x^3 - x)(y^2 - 1) [6x(y^2 - 1) + 2(x^3 - x)] dx dy = \frac{3328}{1575}, \\ a_{12}(a_{21}) &= -\iint_{\Omega} \varphi_2 \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right) dx dy = \\ &= -\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x^2 - 1)(y^3 - y) [6x(y^2 - 1) + 2(x^3 - x)] dx dy = 0. \end{aligned}$$

(17) теңдеулер жүйесіндегі  $b_1, b_2$  оң жақтарды табуда біз Ритц әдісін жүзеге асыру формулаларында Пуассон теңдеуі  $-\Delta u = f$  түрінде жалызатындығын есепке алуымыз қажет болады. Яғни  $f(x, y) = x + y$  деп алу керек. (19) формуладан табамыз:

$$b_1(b_2) = \iint_{\Omega} \varphi_1 f d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x^3 - x)(y^2 - 1)(x + y) dx dy = \frac{16}{45}.$$

Сонымен, біздің жағдайда (17) жүйе мынадай:

$$\frac{3328}{1575} c_i = \frac{16}{45}, \quad i = 1, 2,$$

осыдан аламыз  $c_1 = c_2 = \frac{35}{208}$ . Сонда, ізделініп жатқан жуық шешім (14)-ке сай мынадай болады:

$$\begin{aligned} u_2(x, y) &= \frac{35}{208} x(x^2 - 1)(y^2 - 1) + \frac{35}{208} y(x^2 - 1)(y^2 - 1) = \\ &= \frac{35}{208} (x^2 - 1)(y^2 - 1)(x + y). \end{aligned} \quad (20)$$

Шешімнің алшақтығын бір тексеру нүктесінде  $(0,5; 0,5)$  есептеп көрелік. (20) функцияны екі рет дифференциалдап, алшақтық үшін аламыз:

$$\Delta u_2 + f = \frac{35}{104} \left[ (y^2 - 1)(3x + y) + (x^2 - 1)(x + 3y) \right] + (x + y),$$

оның  $(0,5; 0,5) \in \Omega$  нүктедегі мәні  $-\frac{1}{104}$  тең. Ал бұл мән координаталық функциялар саны екеу –ақ болған жағдай үшін жақсы деп бағалауға болады.

#### 1.4 Айырымдық схемалар

Мұнда біз зерттелетін есептерімізді сандық шешу үшін қажет болған айырымдық схемалар жайлы мәліметтерді қысқаша қарастырып өтетін боламыз.

Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер есептерін сандық шешу әдістерінің ішінде жиі қолданылатыны - **айырымдық әдістер (тор әдістері)**. Айырымдық әдістердің мағынасы мынадай: тәуелсіз айнымалылардың өзгеру аймағы **тор** деп аталатын нүктелердің дискрет жиынымен алмастырылады, ал

теңдеу мен бастапқы және шеттік шарттардағы туындылар осы торда айырымдық қатыстармен аппроксимацияланады. Нәтижеде, бастапқы сызықтық дифференциалдық есеп *айырымдық схема (есеп)* деп айтылатын ақырлы санды сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесімен (САТЖ) алмастырылады. Бастапқы есептің жуық шешімі ретінде айырымдық схеманың шешімі алынады. Жуықтау дәлдігі аппроксимациялау тәсіліне және тор нүктелерінің тығыздығына байланысты болады.

Бастапқы дифференциалдық есеп

$$Lu = f \quad (21)$$

түрде берілген болсын. Мұнда  $u$  -  $\bar{D} = D \cup \Gamma$  жиында анықталған ізделінетін функция;  $D$  - шекарасы  $\Gamma$  болған тәуелсіз айнымалылар кеңістігінің аймағы;  $f$  - берілген функция;  $L$  - сызықтық дифференциалдық оператор. Егер Дирихле есебі үшін

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} + u_{yy}, & (x, y) \in D, \\ u|_{\Gamma}, & (x, y) \in \Gamma, \end{cases} \quad f = \begin{cases} 0, & (x, y) \in D, \\ \varphi(x, y), & (x, y) \in \Gamma, \end{cases}$$

белгілеулерді енгізетін болсақ, онда Дирихле есебі (21-2.1) түрінде жазылады.

(21) есепті сандық шешу үшін  $\bar{D} = D \cup \Gamma$  аймағына тиісті нүктелердің дискрет жиыны  $D_h = \{M_h\}$  құрылады.  $D_h$  - жиынын *тор* деп, ал  $M_h$  - нүктелерді *тор түйіндері*,  $h$  - ты *тор қадамы* деп атайды.

Жалпы жағдайда  $h$  - ұзындығы  $|h|$  - қа тең вектор болып, барлық тәуелсіз айнымалылар бойынша қадамдар осы вектордың компоненттері болады. Әрі қарай, біз (21) есепте ізделінетін  $u$  және оң жақ  $f$  функциялар тәуелсіз  $x$  және  $t$  айнымалылардың функциясы деп, ал  $\bar{D}$  жиынды ұзындығы  $L$ , биіктігі  $T$  болған тіктөртбұрыш деп қарастырамыз, яғни  $\bar{D} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}$ .

$\bar{D}$  жиынды екі өлшемді тіктөртбұрышты  $D_{h\tau} = \{x_n, t_m\}$  тормен алмастырамыз. Мұнда  $x_n = nh, 0 \leq n \leq N; t_m = m\tau, 0 \leq m \leq M; N, M$  - бүтін оң сандар;  $h, \tau$  - сәйкесінше  $x$  кеңістік және  $t$  уақыт айнымалылары бойынша қадамдар (қарапайымдылық үшін оларды тұрақты етіп аламыз);  $Nh = L; M\tau = T$ . Мұндай тор *бірқалыпты* немесе *регуляр* деп аталады.

Тордың  $\{t = 0, 0 \leq x \leq L\}, \{x = 0, 0 \leq t \leq T\}, \{x = L, 0 \leq t \leq T\}, \{t = T, 0 \leq x \leq L\}$  аралықтарға тиісті түйіндері *шекаралық*, ал қалғандары - *ішкі* деп аталады.  $D_{h\tau}$  тордың нүктелерінде анықталған функцияларды *торлық функциялар* деп атайды.  $\{x_n, t_m\}, n = 0, \dots, N; m = \text{const}$  *қабат* деп



тордың сондай түйіндерінің жиынына айтылады, бұл түйіндердің барлығының уақыт бойынша координаталары бірдей болып, ол  $t_m$  - ге тең болса.

$[u]_h = \{u_n^m = u(x_n, t_m), 0 \leq n \leq N, 0 \leq t \leq T\}$  торлық функцияны енгіземіз.  $[u]_h$  - (21) дифференциалдық есептің шешімінің тор түйіндеріндегі мәндерін білдіреді. Амалда,  $[u]_h$  - ты есептеу мүмкін болмайды, сондықтан тордың түйіндерінде дәл шешімге «жуық» болған басқа  $u^h \cong [u]_h$  торлық функцияны табады. Бұл торлық функция қандайда бір мағынада (21) дифференциалдық есепке сәйкес келуші

$$L_h u^h = f^h \quad (22)$$

айырымдық схеманың шешімі ретінде есептелінеді. Мұнда  $L_h$  -  $L$  сызықтық дифференциалдық операторды аппроксимациялайтын айырымдық оператор ( $L_h$  оператор  $L$  - дегі дербес туындыларды ақырлы - айырымдық қатыстармен аппроксимациялау нәтижесінде түзіледі);  $f^h$  - (21) теңдеудің оң жағы  $f$  - ті тордың түйіндеріндегі мәндерімен алмастыру нәтижесінде алынған торлық функция.

Сонымен, **айырымдық схема** дегенде негізгі дифференциалдық есепті тордың барлық ішкі түйіндерінде, ал бастапқы және шеттік шарттарды тордың шекаралық түйіндерінде аппроксимациялайтын айырымдық теңдеулер жиынтығын түсінеміз. (22) айырымдық схеманы (21) дифференциалдық есепке ұқсастырып **айырымдық есеп** айтамыз.

$D_{h\tau}$  торда анықталған  $u^h$  функциялардың жиынтығы арқылы түзілген сызықтық кеңістікті  $U_h$  деп, ал  $f^h$  функциялар жиынтығы арқылы түзілген сызықтық кеңістікті  $F_h$  деп белгілейік. Осы кеңістіктерде сәйкесінше  $\|\cdot\|_{U_h}$ ,  $\|\cdot\|_{F_h}$  нормалар енгізілген болсын.

**Анықтама 1.** Егер  $h, \tau$  нөлге ұмтылғанда ( $h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0$ )

$$\|u^h - [u]_h\|_{U_h} \rightarrow 0 \quad (23)$$

шарты орындалатын болса, онда (22) айырымдық есептің шешімі  $u^h$  (21) дифференциалдық есептің  $u$  шешіміне **жинақталушы** деп айтылады. Егер  $h, \tau$  - ларға тәуелсіз сондай  $k > 0$ ,  $p > 0$ ,  $C > 0$  тұрақты сандар бар болып

$$\|u^h - [u]_h\|_{U_h} \leq C(h^k + \tau^p) \quad (24)$$

теңсіздік орындалатын болса, онда айырымдық схеманың **жинақталу реті** (**дәлдік реті**)  $h$  - қа қатысты  $k$  - ға тең,  $\tau$  - ға қатысты  $p$  - ға тең деп айтылады.

**Анықтама 2.**  $[u]_h$  функцияны  $L_h u^h = f^h$  айырымдық есептегі  $u^h$  функцияның орнына қою нәтижесінде пайда болатын

$$L_h[u]_h = f^h + \delta f^h \quad (25)$$

теңдіктегі  $\delta f^h$  функцияны **аппроксимациялау (жуықтау) қателігі** деп атайды.

**Анықтама 3.** (22) айырымдық схема (21) дифференциалдық есепті оның  $u(x, t)$  шешімінде **аппроксимациялайды** деп айтылады, егер  $h, \tau$  нөлге ұмтылғанда ( $h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0$ )  $\|\delta f^h\|_{F_h}$  нөлге ұмтылса, яғни

$$\|\delta f^h\|_{F_h} \rightarrow 0. \quad (26)$$

Егер  $h, \tau$  - ларға тәуелсіз сондай  $k > 0, p > 0, C > 0$  тұрақты сандар бар болып

$$\|\delta f^h\|_{F_h} \leq C(h^k + \tau^p) \quad (27)$$

теңсіздік орынды болса, онда айырымдық схеманың **аппроксимациялау реті**  $h$  - қа қатысты  $k$  - ға тең,  $\tau$  - ға қатысты  $p$  - ға тең деп айтылады.

**Анықтама 4.** Айырымдық схема **орнықты** деп айтылады, егер  $h, \tau$  - ларға тәуелсіз сондай  $C > 0$  тұрақты саны бар болып, кез келген  $f^h \in F_h$  үшін төмендегі шарттар орынды болса:

- 1) (22) айырымдық схема жалғыз шешімге ие болса;
- 2)  $\|u^h\|_{U_h} \leq C\|f^h\|_{F_h}$ .

#### 1.4.1 Туындыларды айырымдық қатынастармен алмастыру әдісі

Дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептерді аппроксимациялайтын айырымдық схемаларды құрудың қарапайым тәсілдерінің бірі - **туындыларды айырымдық қатынастармен алмастыру** болып табылады. Осындай тәсілді қолданудан алдын бірінші және екінші ретті дербес туындыларды аппроксимациялайтын кейбір айырымдық формулаларды алуды қарастырып өтейік.

$u(x, t)$  - барлық айнымалылары бойынша  $(k + 1)$  - ші ретке дейінгі үзіліссіз туындылары бар болған функция болсын.  $u(x, t)$  функцияның туындыларын жуықтап есептеуді қарастырайық.  $D_{h\tau}$  тордың  $(x_n, t_m)$  түйінін алып, алдымен  $x$  бағыты бойынша айырымдарды қарастырамыз.

Бір  $x$  айнымалылы  $u(x, t_m)$  функцияны таңдалған  $(x_n, t_m)$  түйін маңайында Тейлор формуласын қолданып жіктейміз.

$k = 1$  болғанда

$$u(x_n + h, t_m) = u(x_n, t_m) + \frac{h}{1!} u_x(x_n, t_m) + \frac{h^2}{2!} u_{xx}(\xi_1, t_m), \quad \xi_1 \in (x_n, x_n + h), \quad (28)$$

$$u(x_n - h, t_m) = u(x_n, t_m) - \frac{h}{1!} u_x(x_n, t_m) + \frac{h^2}{2!} u_{xx}(\xi_2, t_m), \quad \xi_2 \in (x_n - h, x_n). \quad (29)$$

(28) - ден

$$u_x(x_n, t_m) = \frac{u(x_n + h, t_m) - u(x_n, t_m)}{h} - \frac{h}{2} u_{xx}(\xi_1, t_m)$$

теңдік келіп шығады.  $u(x, t)$  функция үшін

$$\left| -\frac{h}{2} u_{xx}(\xi_1, t_m) \right| \leq \frac{h}{2} \max_{x \in [x_n, x_n + h]} |u_{xx}(x, t_m)| = \frac{h}{2} M_x^{(2)},$$

бағалау орынды болады, мұнда  $M_x^{(2)} = \max_{x \in [x_n, x_n + h]} |u_{xx}(x, t_m)|$ . Сонда мына формуланы аламыз:

$$u_{x,n}^m = \frac{u(x_n + h, t_m) - u(x_n, t_m)}{h}. \quad (30)$$

(30) формула  $u_x$  дербес туындыны екі нүктелік шаблонда бірінші ретпен аппроксимациялайды және оны **оңжақты айырымдық туынды** деп атайды, ал аппроксимациялау қателігі  $\frac{h}{2} M_x^{(2)}$  шамамен бағаланады.

Дәл осылай (29) - дан

$$u_{\bar{x},n}^m = \frac{u(x_n, t_m) - u(x_n - h, t_m)}{h} \quad (31)$$

формуланы аламыз. Бұл формула  $u_x$  дербес туындыны екі нүктелік шаблонда бірінші ретпен аппроксимациялайды және оны **солжақты айырымдық туынды** деп атайды.

$u_x$  дербес туындыны аппроксимациялайтын және бір формуланы алуды қарастырамыз.  $k = 2$  болғанда Тейлор формуласынан

$$u(x_n + h, t_m) = u(x_n, t_m) + \frac{h}{1!} u_x(x_n, t_m) + \frac{h^2}{2!} u_{xx}(x_n, t_m) + \frac{h^3}{3!} u_{xxx}(\xi_1, t_m),$$

$$u(x_n - h, t_m) = u(x_n, t_m) - \frac{h}{1!} u_x(x_n, t_m) + \frac{h^2}{2!} u_{xx}(x_n, t_m) - \frac{h^3}{3!} u_{xxx}(\xi_2, t_m),$$

жіктеулерді аламыз, мұнда  $\xi_1 \in (x_n, x_n + h)$ ,  $\xi_2 \in (x_n - h, x_n)$ . Жоғарыдағы теңдіктің біріншісінен екіншісін азайтамыз:

$$u(x_n + h, t_m) - u(x_n - h, t_m) = 2hu_x(x_n, t_m) + \frac{h^3}{6} [u_{xxx}(\xi_1, t_m) + u_{xxx}(\xi_2, t_m)].$$

$$\frac{u_{xxx}(\xi_1, t_m) + u_{xxx}(\xi_2, t_m)}{2} = u_{xxx}(\xi, t_m) \text{ теңдік орынды болатын}$$

$\xi \in (x_n - h, x_n + h)$  нүкте бар болатындығын есепке алатын болсақ, төмендегі өрнекті аламыз:

$$u_x(x_n, t_m) = \frac{u(x_n + h, t_m) - u(x_n - h, t_m)}{2h} - \frac{h^2}{6} u_{xxx}(\xi, t_m), \quad \xi \in (x_n - h, x_n + h).$$

Сонымен, осы теңдіктен  $u_x$  дербес туындыны екінші ретпен аппроксимациялайтын, **орталық айырымдық туынды** деп аталатын және

аппроксимациялау қателігі  $\frac{h^2}{6} M_x^{(3)}$  шамамен бағаланатын

$$u_{x,n}^m = \frac{u(x_n + h, t_m) - u(x_n - h, t_m)}{2h} \tag{32}$$

формуланы аламыз. Мұнда  $M_x^{(3)} = \max_{x \in [x_n - h, x_n + h]} |u_{xxx}(x, t_m)|$ .

$u(x_n, t_m) = u_n^m$ ,  $u(x_n + h, t_m) = u_{n+1}^m$ ,  $u(x_n - h, t_m) = u_{n-1}^m$  белгілеулерді енгізіп, (30) - (32) формулаларды мына түрде жазсақ болады:

$$u_{x,n}^m = \frac{u_{n+1}^m - u_n^m}{h} \tag{33}$$

$$u_{x,n}^m = \frac{u_n^m - u_{n-1}^m}{h}, \tag{34}$$

$$u_{x,n}^m = \frac{u_{n+1}^m - u_{n-1}^m}{2h} \quad (35)$$

Ал енді екінші ретті туындыларды аппроксимациялайтын формулаларды алуды қарастырамыз.  $k = 3$  болғанда Тейлор формуласынан

$$\begin{aligned} u(x_n + h, t_m) &= u(x_n, t_m) + \frac{h}{1!} u_x(x_n, t_m) + \frac{h^2}{2!} u_{xx}(x_n, t_m) + \frac{h^3}{3!} u_{xxx}(x_n, t_m) + \\ &+ \frac{h^4}{4!} u_{xxxx}(\xi_1, t_m), \quad \xi_1 \in (x_n, x_n + h), \\ u(x_n - h, t_m) &= u(x_n, t_m) - \frac{h}{1!} u_x(x_n, t_m) + \frac{h^2}{2!} u_{xx}(x_n, t_m) - \frac{h^3}{3!} u_{xxx}(x_n, t_m) + \\ &+ \frac{h^4}{4!} u_{xxxx}(\xi_2, t_m), \quad \xi_2 \in (x_n - h, x_n), \end{aligned}$$

жіктеулерді аламыз. Осы теңдіктерді қосамыз:

$$\begin{aligned} u(x_n + h, t_m) + u(x_n - h, t_m) &= 2hu(x_n, t_m) + h^2 u_{xx}(x_n, t_m) + \\ &+ \frac{h^4}{24} [u_{xxxx}(\xi_1, t_m) + u_{xxxx}(\xi_2, t_m)]. \end{aligned}$$

Егер  $\frac{u_{xxxx}(\xi_1, t_m) + u_{xxxx}(\xi_2, t_m)}{2} = u_{xxxx}(\xi, t_m)$  теңдік орынды болатын  $\xi \in (x_n - h, x_n + h)$  нүкте бар болатындығын есепке алатын болсақ, соңғы теңдіктен төмендегі өрнекті аламыз:

$$u_{xx}(x_n, t_m) = \frac{u(x_n + h, t_m) - 2u(x_n, t_m) + u(x_n - h, t_m)}{2h} - \frac{h^2}{12} u_{xxxx}(\xi, t_m),$$

мұнда  $\xi \in (x_n - h, x_n + h)$ .

Бұл теңдіктен

$$u_{xx,n}^m = \frac{u(x_n + h, t_m) - 2u(x_n, t_m) + u(x_n - h, t_m)}{h^2} \quad (36)$$

формуланы аламыз. (36) формула **екінші ретті орталық айырымдық туынды** деп аталып,  $u_{xx}$  туындыны екінші ретпен аппроксимациялайды, ал

аппроксимациялау қателігі  $\frac{h^2}{6} \cdot M_x^{(4)}$  шамамен бағаланады. Мұнда  $M_x^{(4)} = \max_{x \in [x_n - h, x_n + h]} |u_{xxxx}(x, t_m)|$ . (36) формуланы (33) - (35) формулаларға ұқсас

$$u_{\bar{x},n}^m = \frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{h^2} \quad (37)$$

түрде жазу мүмкін.

Дәл осылай  $t$  бағыты бойынша да  $(x_n, t_m)$  түйінде айырымдық туындылар үшін төмендегі формулалар алынады:

$$u_{t,n}^m = \frac{u(x_n, t_m + \tau) - u(x_n, t_m)}{\tau}, \quad u_{t,n}^m = \frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\tau}, \quad (38)$$

$$u_{\bar{t},n}^m = \frac{u(x_n, t_m) - u(x_n, t_m - \tau)}{\tau}, \quad u_{\bar{t},n}^m = \frac{u_n^m - u_n^{m-1}}{\tau}, \quad (39)$$

$$u_{\circ,t,n}^m = \frac{u(x_n, t_m + \tau) - u(x_n, t_m - \tau)}{2\tau}, \quad u_{\circ,t,n}^m = \frac{u_n^{m+1} - u_n^{m-1}}{2\tau}, \quad (40)$$

$$u_{\bar{t},n}^m = \frac{u(x_n, t_m + \tau) - 2u(x_n, t_m) + u(x_n, t_m - \tau)}{\tau^2}, \quad u_{\bar{t},n}^m = \frac{u_n^{m+1} - 2u_n^m + u_n^{m-1}}{\tau^2} \quad (41)$$

(38), (39) формулалар  $u_t$  туындыны бірінші ретпен аппроксимациялайды, ал (40), (41) формулалар сәйкес туындыларды екінші ретпен аппроксимациялайды. Жоғарыда келтірілген барлық формулалар  $m$ -ші уақыттық қабатта жазылған. Қажет болған жағдайда, мысалға, айқындалмаған схемаларды құруда,  $m$ -ші қабаттың орнына  $(m+1)$ -ші және  $(m-1)$ -ші уақыттық қабаттар пайдаланылуы мүмкін.

Ал енді аралас туындыларды аппроксимациялайтын формулаларды алуды қарастырамыз. Ол үшін (38)-ді (30)-шы формуламен берілген функцияға, ал (40) - ты (32) - ші формуламен берілген функцияға қолданамыз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u(x_n, t_m)}{\partial x} \right) &= \frac{\frac{u(x_n + h, t_m + \tau) - u(x_n, t_m + \tau)}{h} - \frac{u(x_n + h, t_m) - u(x_n, t_m)}{h}}{\tau} = \\ &= \frac{u(x_n + h, t_m + \tau) - u(x_n, t_m + \tau) - u(x_n + h, t_m) + u(x_n, t_m)}{h\tau}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u(x_n, t_m)}{\partial x} \right) = \frac{\frac{u(x_n + h, t_m + \tau) - u(x_n - h, t_m + \tau)}{2h} - \frac{u(x_n + h, t_m - \tau) - u(x_n - h, t_m - \tau)}{2h}}{2\tau} = \frac{u(x_n + h, t_m + \tau) - u(x_n - h, t_m + \tau) - u(x_n + h, t_m - \tau) + u(x_n - h, t_m - \tau)}{4h\tau}.$$

Осы теңдіктерден мына формулаларды аламыз:

$$u_{xt,n}^m = \frac{u_{n+1}^{m+1} - u_n^{m+1} - u_{n+1}^m + u_n^m}{h\tau}, \quad (42)$$

$$u_{\circ\circ}^m_{xt,n} = \frac{u_{n+1}^{m+1} - u_{n-1}^{m+1} - u_{n+1}^{m-1} + u_{n-1}^{m-1}}{4h\tau}. \quad (43)$$

(42) формула  $u_{xt}$  туындыны бірінші ретпен, ал (43) - формула екінші ретпен аппроксимациялайды.

## 2 ЭЛЛИПСТІК ЕСЕПТЕРДІ САНДЫҚ ШЕШУ ӘДІСТЕРІ

### 2.1 Бір өлшемді Пуассон теңдеуін сандық шешу

Эллипстік типті теңдеулер үшін шеттік есептерді шешу мәселесін қарастырайық. Бұл есептер стационар болады, себебі оларда уақыттық айнымалы болмайды. Мұнда кеңістіктің берілген аймағының шекарасында дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің шешімі немесе оның туындысы берілген болып, шешімді аймақта табу қажет болады. Туындыларды ақырлы - айырымдық қатынастармен алмастыру жолымен айырымдық схемаларды аламыз. Нәтижеде эллипстік есептерді шешу ізделінетін функцияның тордың ішкі түйіндеріндегі мәндері үшін жазылған сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешуге келтіріледі.

Жоғарыда айтылғандарды бір өлшемді Пуассон теңдеуін ақырлы айырымдар әдісімен сандық шешуден бастаймыз.

Төмендегі Пуассон теңдеуін қарастырамыз:

$$u_{xx} = f(x), \quad (44)$$

мұнда  $x$  – координата,  $x \in [a, b]$ ,  $u(x)$  – ізделінді функция,  $f(x)$  – берілген үзіліссіз функция.  $[a, b]$  аралықта  $\bar{\omega} = \{x_i | i = 1, 2, \dots, n\}$  қадамы  $h$  болған бірқалыпты торды құрамыз. Қарастырылып жатқан есеп үшін 1-ші текті шарттар (Дирихле шарты) мынадай болады:

$$u(a) = g_1, \quad (45)$$

$$u(b) = g_2. \quad (46)$$

2-ші текті шекаралық шарттар (Нейман шарты) мынадай қойылады:

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=a} = g_1, \quad (47)$$

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=b} = g_2. \quad (48)$$

Дирихле шарттарын ақырлы айырымдық қатынастармен дискреттеу арқылы аламыз:

$$u_1 = g_1, \quad (49)$$

$$u_n = g_2, \quad (50)$$

мұнда  $u_1, u_n - u(x)$  функцияның  $x = a$  және  $x = b$  нүктелердегі мәндері. Нейман шекаралық шарттарын  $\bar{\omega}$  торда жуықтап, аламыз:

$$\frac{u_2 - u_1}{h} = g_1, \quad (51)$$

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{h} = g_2. \quad (52)$$

(44) теңдеуді тордың ішкі нүктелерінде жуықтап, аламыз:

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = f_i, \quad i = 2, \dots, n-1, \quad (53)$$

мұнда  $f_i = f(x_i)$ .

Сонымен, жуықтау нәтижесінде өлшемі  $n$  болған сызықтық теңдеулер жүйесін аламыз, осы жүйенің  $n-2$  теңдеуі тордың ішкі нүктелері үшін (53) түрдегі теңдеулер болады, екі шекаралық нүктелер үшін (49) немесе (51) және (50) немесе (52) теңдеулер болады.

Төменде (44) теңдеуді (45)-(48) шарттармен  $\bar{\omega}$  торда сандық шешудің бір нұсқасы келтірілген (сурет 3).



```

1   % Дирихле және/немесе Неймана шарттарымен бір олшемді
2   % Пуассон теңдеуін сандық шешу
3   function[x,u]=Puasson_dim1(x0,xn,n,f,v1,g1,v2,g2)
4   % Кіріс параметрлері:
5   % x0 - шешім аймағының бастапқы координатасы;
6   % xn - шешім аймағының соңғы координатасы;
7   % n - тор нүктелерінің саны;
8   % f - Пуассона теңдеуінің оң жағы;
9   % v1 - параметр, ол сол жақ x = x(1) шекарадағы шекаралық шарт түрін
10  % анықтайды (1 - Дирихле шарты, 2 - Нейман шарты);
11  % g1 - 1-ші шекарадағы шекаралық шарт, жақшадағы түрде, мысалға, '0';
12  % v2 - параметр, ол оң жақ x = x(n) шекарадағы шекаралық шарт түрін
13  % анықтайды (1 - Дирихле шарты, 2 - Нейман шарты);
14  % g2 - 2-ші шекарадағы шекаралық шарт, жақшадағы түрде.
15  % Шығыс параметрлері:
16  % x - вектор-жол, олшемі n;
17  % U - U функция мандері матрицасы.
18  - if exist('x0')==0
19  - x0=0;
20  - end
21  - if exist('xn')==0
22  - xn=5;
23  - end
24  - if exist('n')==0
25  - n=50;
26  - end
27  - if exist('f')==0
28  - f='2*sin(x^2)+10*cos(x^2)';
29  - end
30  - if exist('v1')==0
31  - v1=1;
32  - end
33  - if exist('g1')==0
34  - g1='0';
35  - end
36  - if exist('v2')==0
37  - v2=2;
38  - end
39  - if exist('g2')==0
40  - g2='-0.5';
41  - end

```

```

42 % Біркалыпты торды беру
43 x=x0:(xn-x0)/(n-1):xn; dx=x(2)-x(1);
44 % Символдық берілген функция мандерін тор туйіндерінде есептеу
45 F=inline(f,'x');
46 G1=inline(g1,'x');
47 G2=inline(g2,'x');
48 % Барлық элементтері 0 болған n x n олшемді тендеулер жүйесі
49 % коэффициенттері матрицасын беру
50 a=zeros(n,n);
51 % Барлық элементтері 0 болған 1 x n олшемді бос муше матрица-жолды беру
52 b=zeros(1,n);
53 % Шекаралық шарттарға сәйкес келетін тендеулер жүйесінің коэффициенттері
54 % мен бос мушелерін беру және v1, v2 параметрлердің дурыстығын тексеру
55 b(1)=G1(x(1));
56 if v1==1
57 a(1,1)=1;
58 elseif v1==2
59 a(1,1)=-1/dx;
60 a(1,2)=1/dx;
61 else
62 error('Parameter v1 have incorrect value');
63 end
64 b(n)=G2(x(n));
65 if v2==1
66 a(n,n)=1;
67 elseif v2==2
68 a(n,n)=1/dx;
69 a(n,n-1)=-1/dx;
70 else
71 error('Parameter v2 have incorrect value');
72 end
73 % Тордың ішкі нуектелерінде тендеулер жүйесінің коэффициенттері мен бос
74 % мушелерді анықтау
75 for i=2:n-1
76 a(i,i)=-2/dx^2;
77 a(i,i+1)=1/dx^2;
78 a(i,i-1)=1/dx^2;
79 b(i)=F(x(i));
80 end
81 % Тендеулер жүйесін шешу

```

```

81 % теңдеулер жүйесін шешу
82 u=b/a';
83 % Изделип жатқан u(x,y) функция графигін куру
84 plot(x,u)
85 xlabel('x')
86 ylabel('u')
87 grid on
88

```

3 Сурет – Бағдарламалық код

Puasson\_dim1 функциясы төмендегі бұйрықтардың бірі арқылы шақырылуы мүмкін:

- Puasson\_dim1;
- x= Puasson\_dim1;
- [x,u]= Puasson\_dim1;
- [x,u]= Puasson\_dim1(x0, xn, n, f, v1, g1, v2, g2).

Мысалға, мынадай шақырғанда

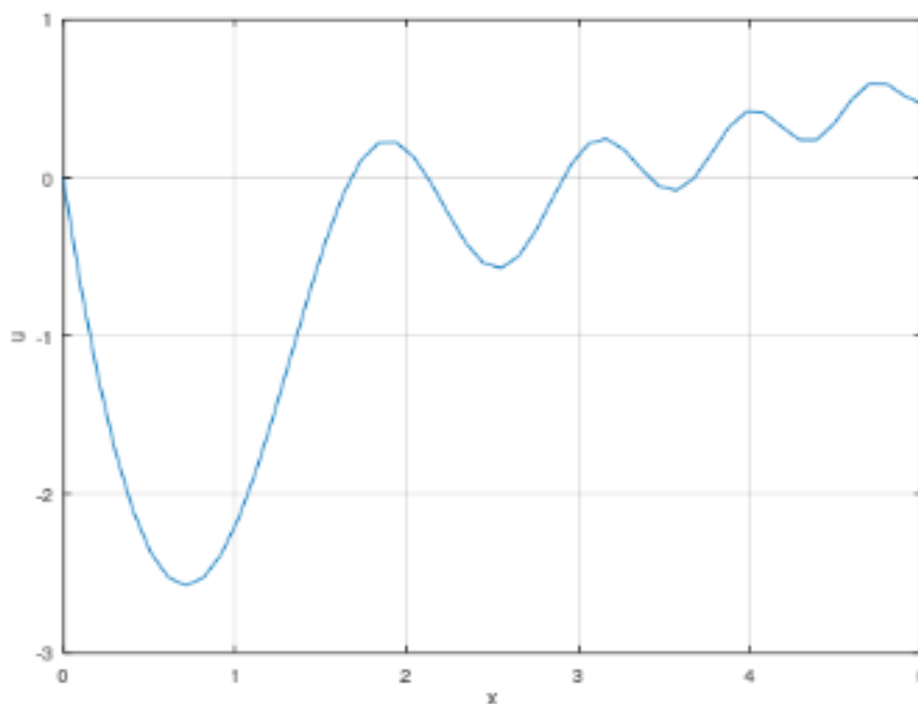
Puasson\_dim1;

Матлабта теңдеудің оң жағы  $f(x) = 2\sin(x^2) + 10\cos(x^2)$  түрінде, ал шекаралық шарттар мынадай болған

$$u(a) = 0,$$

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=b} = -0.5$$

сандық шешім графигі құрылып көрінеді (сурет 4), ал  $n = 50$ .



4 Сурет – Бір өлшемді Пуассон теңдеуінің жуық шешімі

## 2.2 Екі өлшемді Пуассон теңдеуін жуық шешу

Қарастыратын теңдеу мынадай:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

$(x, y) \in \Omega = [a, b] \times [c, d] \subset R^2$ ,  $u(x, y)$  – табу керек функция,  $f(x, y)$  – теңдеудің оң жағы.

$[a, b]$  аралықта  $h_x$  қадаммен

$$\omega_h = \{x_i \mid i = 1, 2, \dots, n\},$$

$[c, d]$  аралықта  $h_y$  қадаммен

$$\omega_h = \{y_j \mid j = 1, 2, \dots, m\}$$

бірқалыпты торларды құрамыз.

Осы торлар арқылы  $\Omega = [a, b] \times [c, d]$  -ны торлық облыспен алмастырамыз:

$$\Omega_{h_x h_y} = \{(x_i = ih_x, y_j = jh_y), \mid i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m\}.$$

1-ші текті шекаралық шарттар мынадай болуы мүмкін:

$$u(a, y) = g_1(y), \tag{54}$$

$$u(b, y) = g_2(y), \tag{55}$$

$$u(x, c) = g_3(x), \tag{56}$$

$$u(x, d) = g_4(x), \tag{57}$$

2-ші текті шекаралық шарттар мынадай болуы мүмкін:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(a,y)} = g_1(y), \tag{58}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(b,y)} = g_2(y), \tag{59}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(x,c)} = g_3(x), \tag{60}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(x,d)} = g_4(x), \quad (61)$$

Шекаралық шарттарды ақырлы айырымдық қатынастармен жуықтап аламыз:

$$u_{1,j} = g_1(y_j), \quad (62)$$

$$u_{n,j} = g_2(y_j), \quad (63)$$

$$u_{i,1} = g_3(x_i), \quad (64)$$

$$u_{i,m} = g_4(x_i), \quad (65)$$

2-ші текті шекаралық шарттарды ақырлы айырымдық қатынастармен жуықтап аламыз:

$$\frac{u_{2,j} - u_{1,j}}{h_x} = g_1(y_j), \quad (66)$$

$$\frac{u_{n,j} - u_{n-1,j}}{h_x} = g_2(y_j), \quad (67)$$

$$\frac{u_{i,2} - u_{i,1}}{h_y} = g_3(x_i), \quad (68)$$

$$\frac{u_{i,m} - u_{i,m-1}}{h_y} = g_4(x_i). \quad (69)$$

Бастапқы теңдеуді жуықтасақ аламыз:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2} = f_{i,j}, \quad (70)$$

$$i = 2, \dots, n-1; \quad j = 2, \dots, m-1, \quad f_{i,j} = f(x_i, y_j).$$

Нәтижеде облыстың ішкі нүктелері үшін  $(n-2) \times (m-2)$  және шекаралық нүктелер үшін  $2n + 2(m-2)$  теңдеулерді, жалпы өлшемі  $n \times m$  болған теңдеулер жүйесін аламыз.

Төменде теңдеуді (70) сұлбамен (62)-(69) шарттармен шығарудың бір нұсқасы келтірілген (сурет 5).

```

1 function[x,y,U]=...
2 puass_2d(x0,xn,n,y0,ym,m,f,v1,g1,v2,g2,v3,g3,v4,g4)
3 % Екі олшемді Пуассона тендеуін  $d^2u/dx^2+d^2u/dy^2=f(x,y)$ 
4 % функция көмегімен тік тортбұрышты облыста Дирихле және/немесе Нейман
5 % шарттарымен шешу
6
7 % Кіріс параметрлері:
8 % x0 - x осі бойынша шешім облысының бастапқы координатасы;
9 % xn - x осі бойынша шешім облысының соңғы координатасы;
10 % y0 - y осі бойынша шешім облысының бастапқы координатасы;
11 % ym - y осі бойынша шешім облысының соңғы координатасы;
12 % n - x осі бойынша тор нүктелерінің саны;
13 % m - y осі бойынша тор нүктелерінің саны;
14 % f - Пуассон тендеуінің оң жағы
15 % v1 - параметр, ол сол жақ шекаралық шарт түрін анықтайды
16 % x = x(1) (1 - Дирихле шарты, 2 - Нейман шарты);
17 % g1 - сол жақ шекаралық шарттағы функцияны анықтайды;
18 % v2 - параметр, оң жақ шекаралық шарт түрін анықтайды
19 % x = x(n) (1 - Дирихле шарты, 2 - Нейман шарты);
20 % g2 - оң жақ шекаралық шарттағы функцияны анықтайды;
21 % v3 - параметр, 3-ші шекарадағы шарт түрін анықтайды
22 % y = y(1) (1 - Дирихле шарты, 2 - Нейман шарты);
23 % g3 - 3-ші шекарадағы шекаралық шартты анықтайды;
24 % v4 - параметр, ол 4-ші шекарадағы шекаралық шартты анықтайды
25 % y = y(m) (1 - Дирихле шарты, 2 - Нейман шарты);
26 % g4 - 4-ші шекарадағы шекаралық шарттағы функция.
27 % Шығыс параметрлері:
28 % x - x осі бойынша тордағы олшемі 1 x n вектор-жол;
29 % y - y осі бойынша тордағы олшемі 1 x m вектор-жол;
30 % U - олшемі n x m болған нәтижелік матрица.
31 - if exist('x0')==0
32 - x0=0;
33 - end
34 - if exist('xn')==0
35 - xn=1;
36 - end
37 - if exist('n')==0
38 - n=10;
39 - end
40 - if exist('y0')==0

```

```

41 - y0=0;
42 - end
43 - if exist('ym')==0
44 - ym=2;
45 - end
46 - if exist('m')==0
47 - m=20;
48 - end
49 - if exist('f')==0
50 - f='exp(-x)+exp(-y)';
51 - end
52 - if exist('v1')==0
53 - v1=1;
54 - end
55 - if exist('g1')==0
56 - g1='sin(y^2)';
57 - end
58 - if exist('v2')==0
59 - v2=1;
60 - end
61 - if exist('g2')==0
62 - g2='cos(3*y)';
63 - end
64 - if exist('v3')==0
65 - v3=2;
66 - end
67 - if exist('g3')==0
68 - g3='10*sin(x^2)';
69 - end
70 - if exist('v4')==0
71 - v4=2;
72 - end
73 - if exist('g4')==0
74 - g4='10*sin(6*x)';
75 - end
76 - % Біркалыпты торды беру
77 - n=10; m=20;
78 - x=x0:(xn-x0)/(n-1):xn;
79 - dx=x(2)-x(1);

```

```

80 - y=y0:(ym-y0)/(m-1):ym;
81 - dy=y(2)-y(1);
82 - % Символдық түрде берілген функция мандерін торда есептеу
83 - F=inline(f,'x','y');
84 - G1=inline(g1,'y');
85 - G2=inline(g2,'y');
86 - G3=inline(g3,'x');
87 - G4=inline(g4,'x');
88 - % Тендеулер жүйесінің олшемін анықтау
89 - N=n*m;
90 - % Барлық элементтері ноль болған жүйе коэффициенттерін беру;
91 - a=zeros(N,N);
92 - % Он жақты беру, олшемі 1 x N, барлық элементтері 0
93 - b=zeros(1,N);
94 - % Тендеулер жүйесінің коэффициенттері мен бос мүшелерін анықтау және
95 - % сәйкес шекаралық шарттарды, v1, v2, v3, v4 параметрлер
96 - % мандерінің дұрысығын анықтау
97 - for j=1:m
98 -     b(j)=G1(y(j));
99 -     if v1==1
100 -        a(j,j)=1;
101 -     elseif v1==2
102 -        a(j,j)=-1/dx;
103 -        a(j,m+j)=1/dx;
104 -     else
105 -        error('Parameter v1 have incorrect value');
106 -     end
107 -     b(m*(n-1)+j)=G2(y(j));
108 -     v2=1;
109 -     if v2==1
110 -        a(m*(n-1)+j,m*(n-1)+j)=1;
111 -     elseif v2==2
112 -        a(m*(n-1)+j,m*(n-1)+j)=1/dx;
113 -        a(m*(n-1)+j,m*(n-2)+j)=-1/dx;
114 -     else
115 -        error('Parameter v2 have incorrect value');
116 -     end
117 - end
118 - v3=1;

```



```

119 - for i=2:n-1
120 -     b(m*(i-1)+1)=G3(x(i));
121 -     if v3==1
122 -         a(m*(i-1)+1,m*(i-1)+1)=1;
123 -     elseif v3==2
124 -         a(m*(i-1)+1,m*(i-1)+1)=-1/dy;
125 -         a(m*(i-1)+1,m*(i-1)+2)=1/dy;
126 -     else
127 -         error('Parameter v3 have incorrect value');
128 -     end
129 -     b(m*(i-1)+m)=G4(x(i));
130 -     if v4==1
131 -         a(m*(i-1)+m,m*(i-1)+m)=1;
132 -     elseif v4==2
133 -         a(m*(i-1)+m,m*(i-1)+m)=1/dy;
134 -         a(m*(i-1)+m,m*(i-1)+m-1)=-1/dy;
135 -     else
136 -         error('Parameter v4 have incorrect value');
137 -     end
138 - end
139 % Аймақтың ішкі нүктелерінде теңдеулер жүйесінің коэффициенттері
140 % мен бос мүшелерін анықтау
141 - for i=2:n-1
142 -     for j=2:m-1
143 -         a(m*(i-1)+j,m*(i-1)+j)=-2/dx^2-2/dy^2;
144 -         a(m*(i-1)+j,m*(i)+j)=1/dx^2;
145 -         a(m*(i-1)+j,m*(i-2)+j)=1/dx^2;
146 -         a(m*(i-1)+j,m*(i-1)+j+1)=1/dy^2;
147 -         a(m*(i-1)+j,m*(i-1)+j-1)=1/dy^2;
148 -         b(m*(i-1)+j)=F(x(i),y(j));
149 -     end
150 - end
151 % Теңдеулер жүйесін шешу
152 - u=b/a';
153 % Нәтижелерді ыңғайлы бейнелеу үшін ізделінді функцияның тор түйіндеріндегі
154 % мәндерінің вектора-жолын n x m өлшемді матрицалық түрге келтіру
155 - for i=1:n
156 -     for j=1:m
157 -         U(i,j)=u(m*(i-1)+j);

```

```

158 - end
159 - end
160 - % U(x,y) ізделінді функция графигін куру
161 - surf(y,x,U)
162 - xlabel('y')
163 - ylabel('x')
164 - zlabel('U')
165 - grid on
166 - end
167
168

```

5 Сурет – Бағдарламалық код

Осы құрылған функцияны мына бұйрықтардың бірі арқылы шақыруға болады:  
 Puasson\_dim2;

x= Puasson\_dim2;

[x,y]= Puasson\_dim2;

[x,y,U]= Puasson\_dim2;

Мысал үшін,

x= Puasson\_dim2;

бұйрықпен функцияны шақырғанда экранда теңдеудің оң жағы  
 $f(x, y) = e^{-x} + e^{-y}$ , функция болғандағы, ал шекаралық шарттар

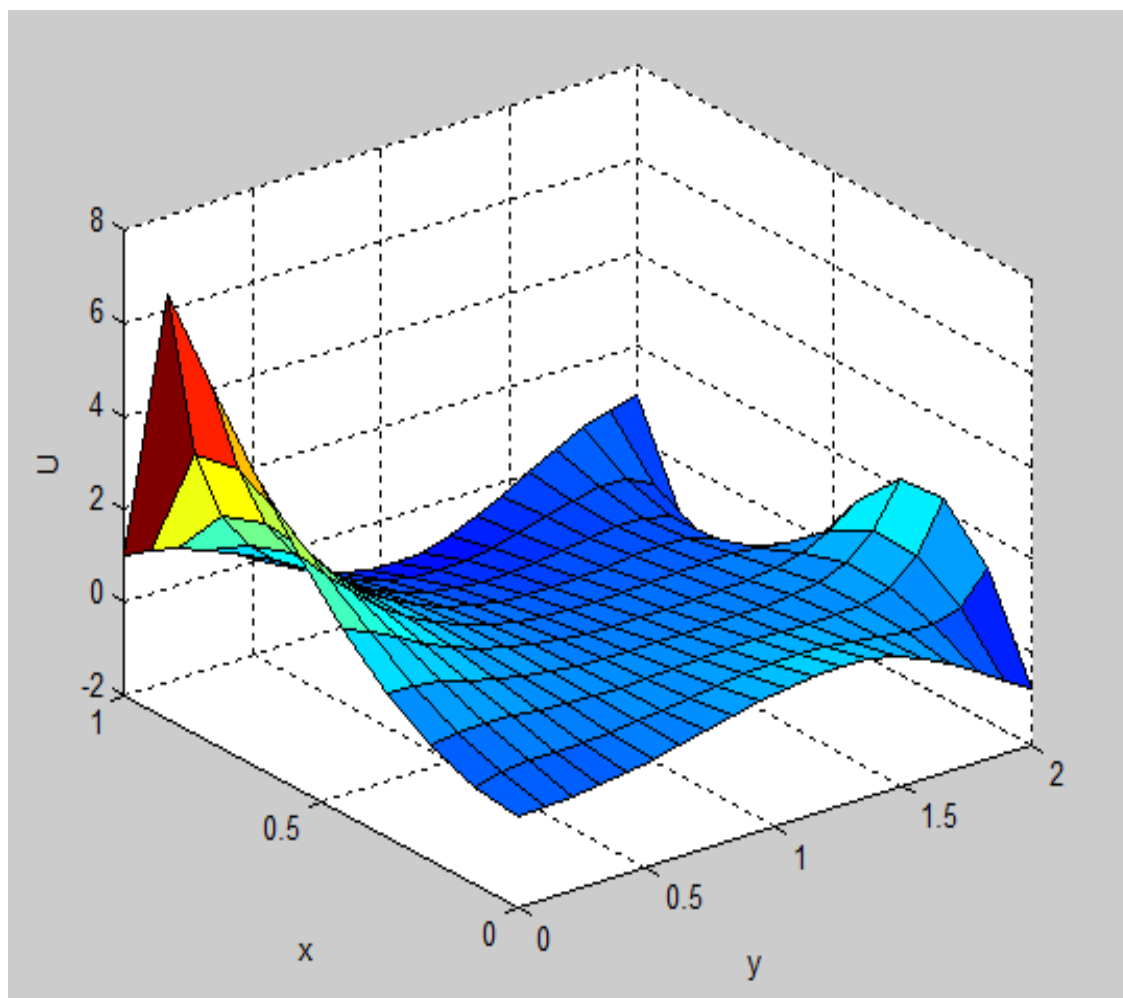
$$u(a, y) = \sin(y^2); \quad (71)$$

$$u(b, y) = \cos(3y); \quad (72)$$

$$\left. \frac{du}{dy} \right|_{(x,c)} = 10\sin(x^2); \quad (73)$$

$$\left. \frac{du}{dy} \right|_{(x,d)} = 10\sin(6x), \quad (74)$$

болған шешім графигі көрінеді.



6 Сурет – Пуассон теңдеуінің сандық шешім графигі

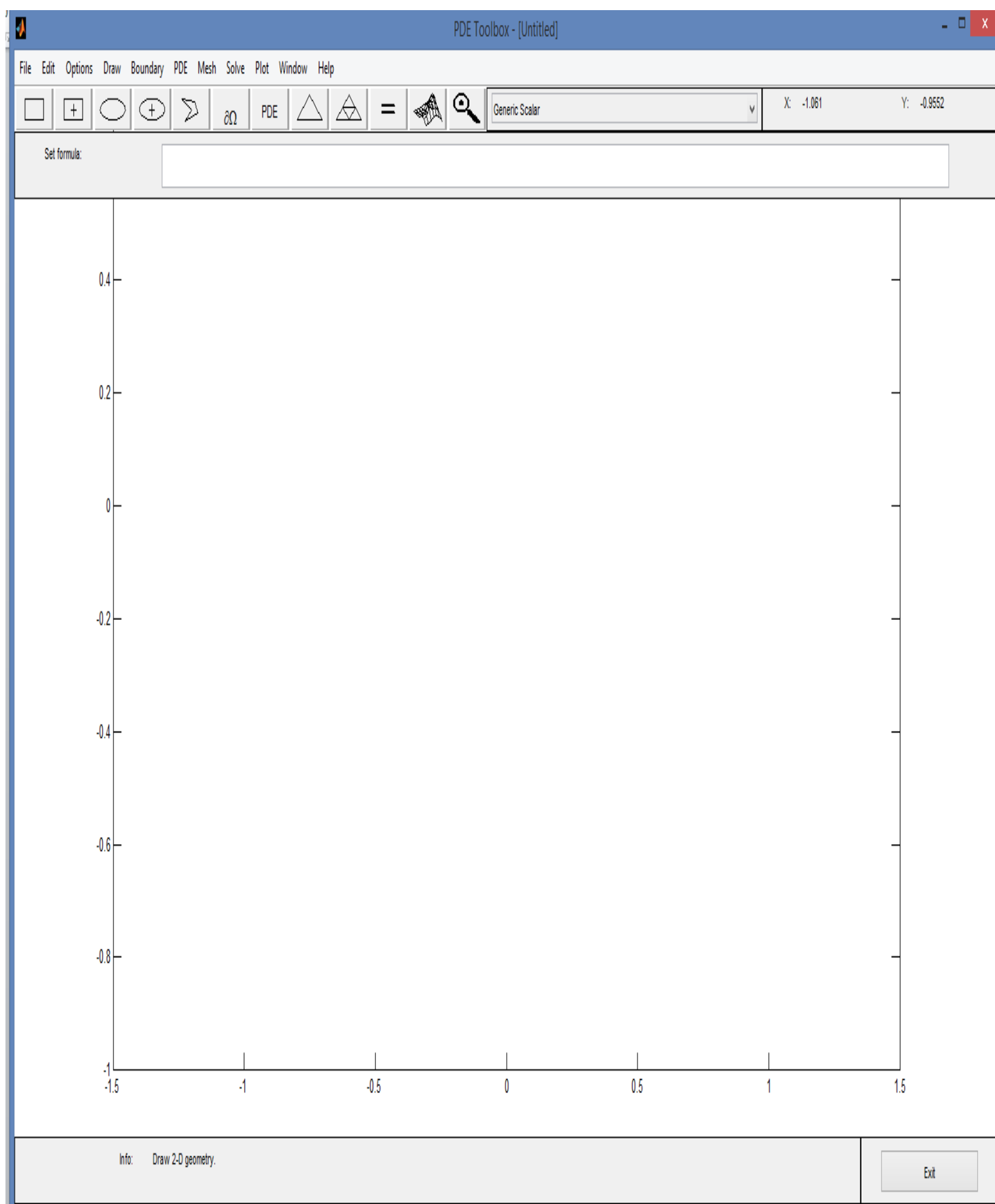
### 2.3 Пуассон теңдеуін ақырлы элементтер әдісімен шешу

Біз мұнда  $(x, y) \in [0, 2] \times [0, 1]$  тік бұрышты облыста Пуассон теңдеуін

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= x^2 + y^2 \\ u(x, 0) &= x, \quad u(x, 1) = 1, \\ u(0, y) &= y, \quad u(2, y) = 1, \end{aligned}$$

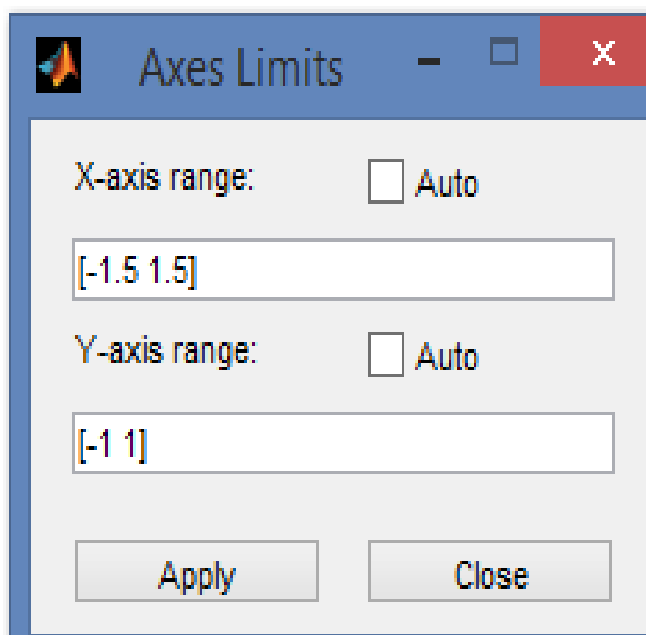
сандық шешуді қарастырамыз. Оны Матлаб ортасының мүмкіндіктерін пайдалану жолымен жүзеге асырамыз.

Теңдеуді шешу үшін алдымен Матлаб ортасын қосамыз, ортаның бұйрықтық терезесінде `pdetool` сөйлемін тереміз. Сонда төмендегі (сурет 7) қолданушының графиктік интерфейсінің экраны пайда болады және онда біз тіктөртбұрышты аймағымызды сыза аламыз.



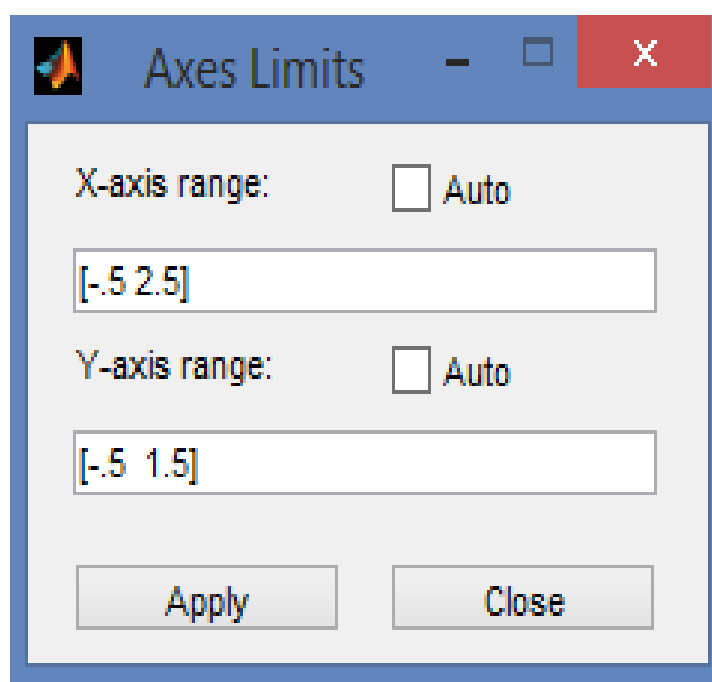
7 Сурет – Матлабта аймақты сызу

Осы терезеде Параметрлер (Options), Тор (Grid) таңдап торды іске қосамыз. Матлабтың қабылданғаны бойынша терезеде  $(x, y) \in [-1.5, 1.5] \times [-1, 1]$ , бұл біз анықтағымыз келген тіктөртбұрышты өз ішіне алмайды. Біз терезе өлшемдерін арттыра аламыз, таңдау арқылы: Options, Axes Limits (сурет 8).



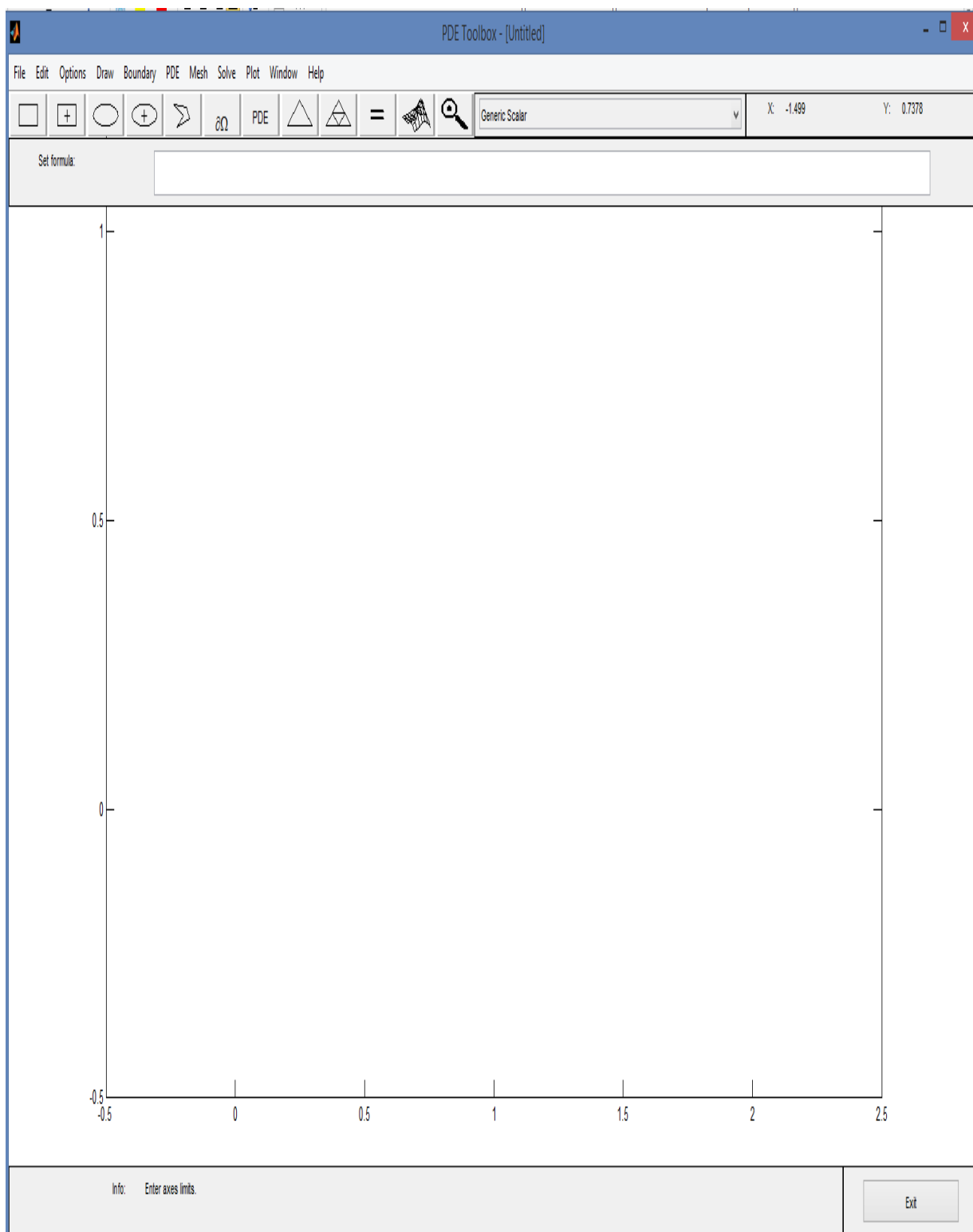
8 Сурет – Координаталарды беру

Бұл жағдайда  $x$  осі бойынша шектік мәндерді  $[-1.5, 1.5]$  –ді  $[-0,5, 1.5]$ , ал  $y$  осі бойынша шектік мәндерді  $[-1, 1]$  – ді  $[-0,5, 1.5]$  – ке өзгертуімізге болады және Қолдану (Apply) және Жабу (Close ) (сурет 9).



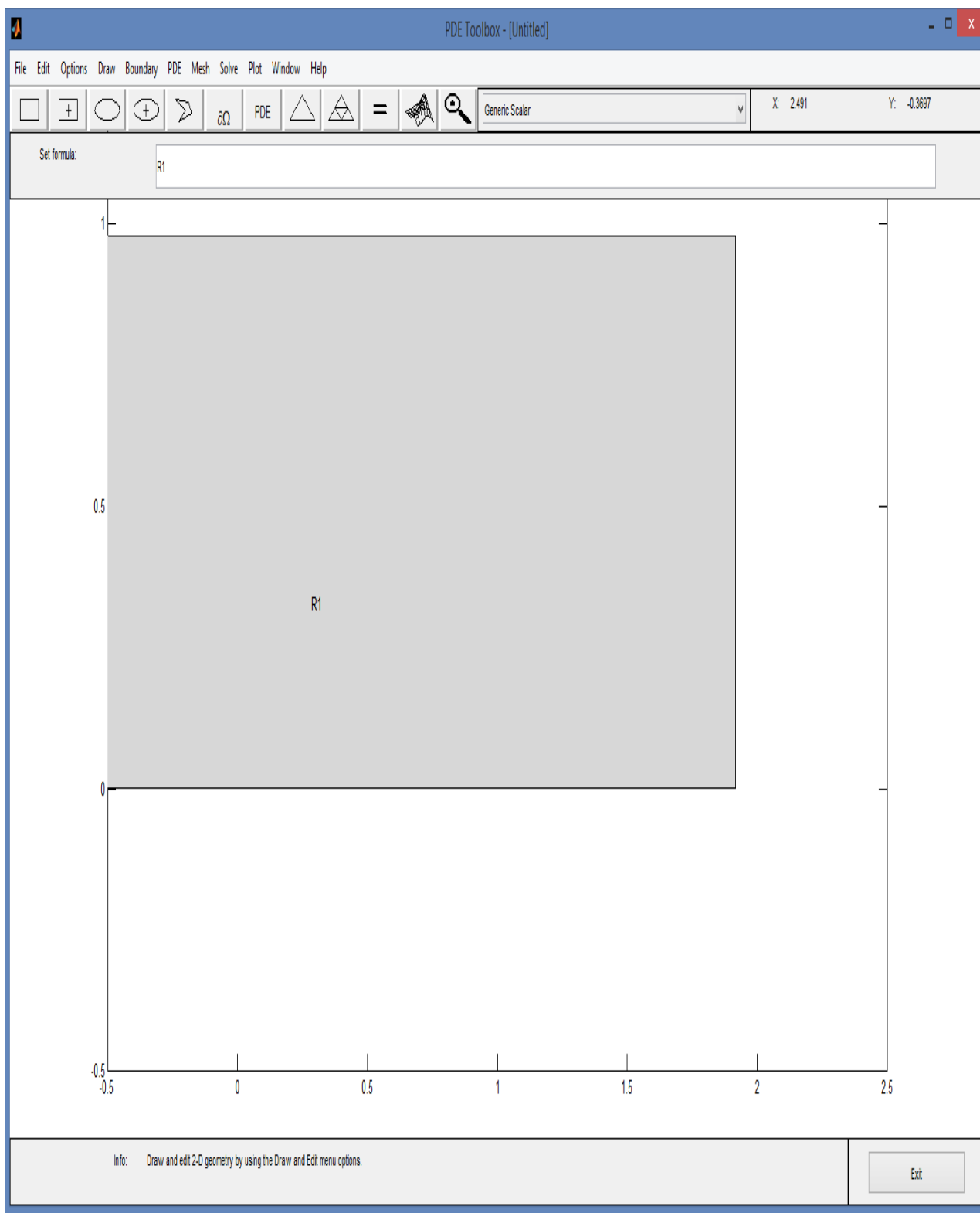
9 Сурет – Координатларды беру

Сонда терезе мынадай көрініс табады (сурет 10)



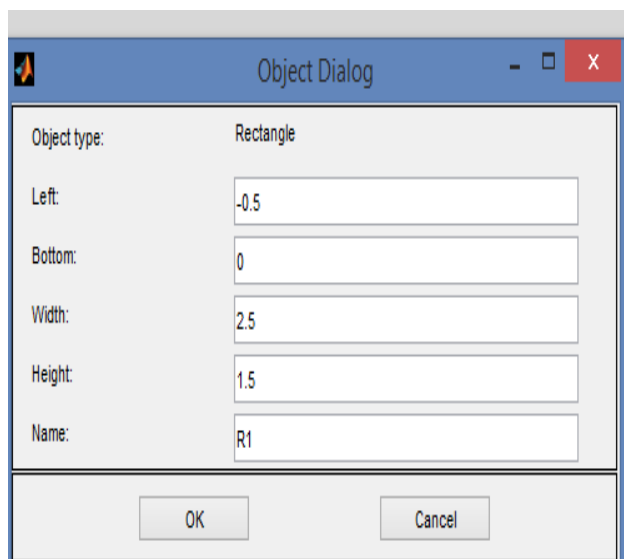
10 Сурет – Аймақты нақтылау

Тіктөртбұрыштық аймақты сызу үшін терезенің сол жақ төбесіндегі мәзір қатарынан тіктөртбұрышты шертеміз. Тышқанның сол жағымен (0,0) нүктені шертеміз және тышқанның сол жағын баса тұра (2,1) нүктеге дейін тіктөртбұрышты созамыз (сурет 11).



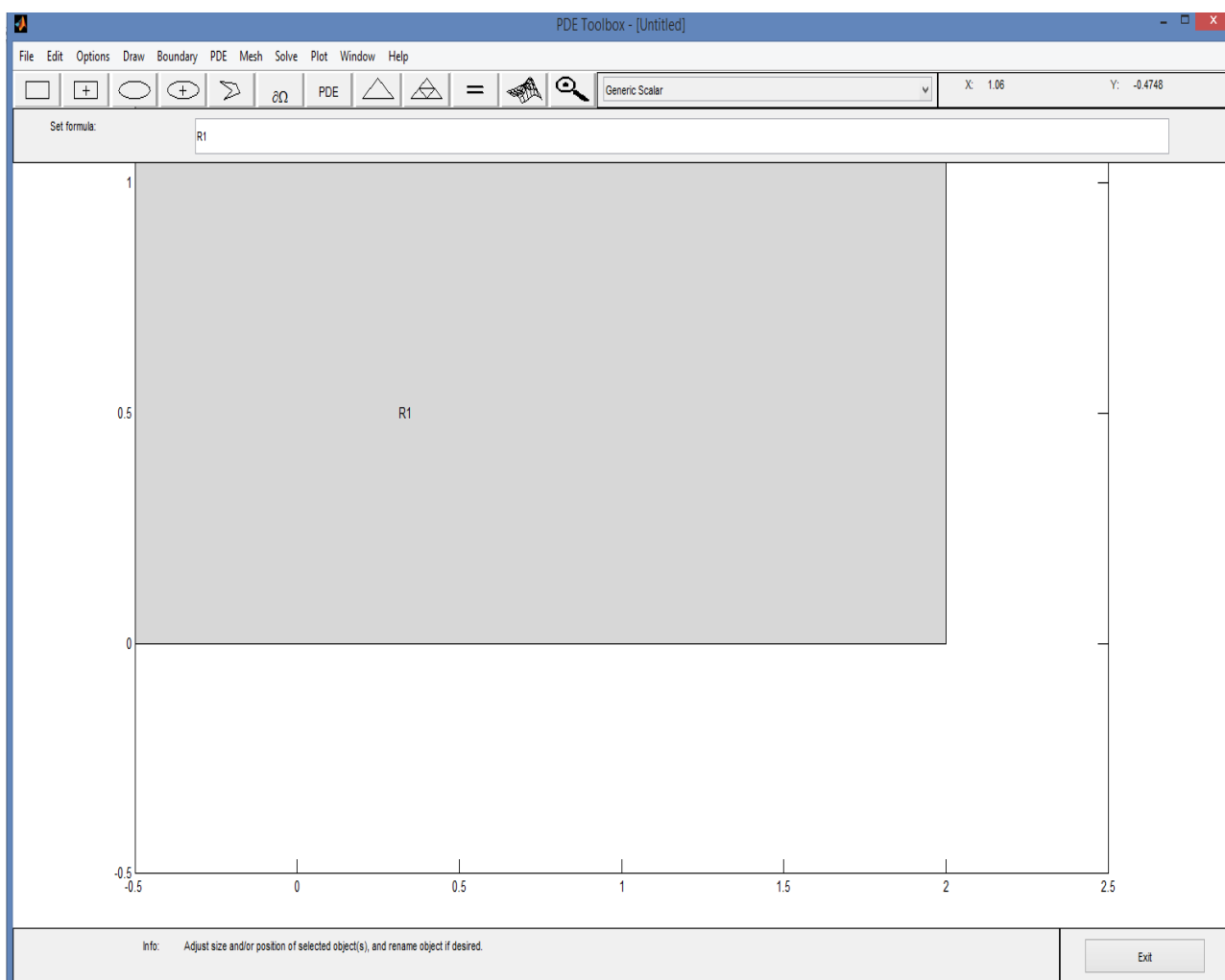
11 Сурет – Аймақты сызу және нақтылау

Мәндерді дәл орнату үшін тіктөртбұрышты екі шертіп, төменгі сол жақ бұрыш, тіктөртбұрыштың ені мен биіктігін енгіземіз (сурет 12)



12 Сурет— Ендіру үшін Сұхбаттық терезе

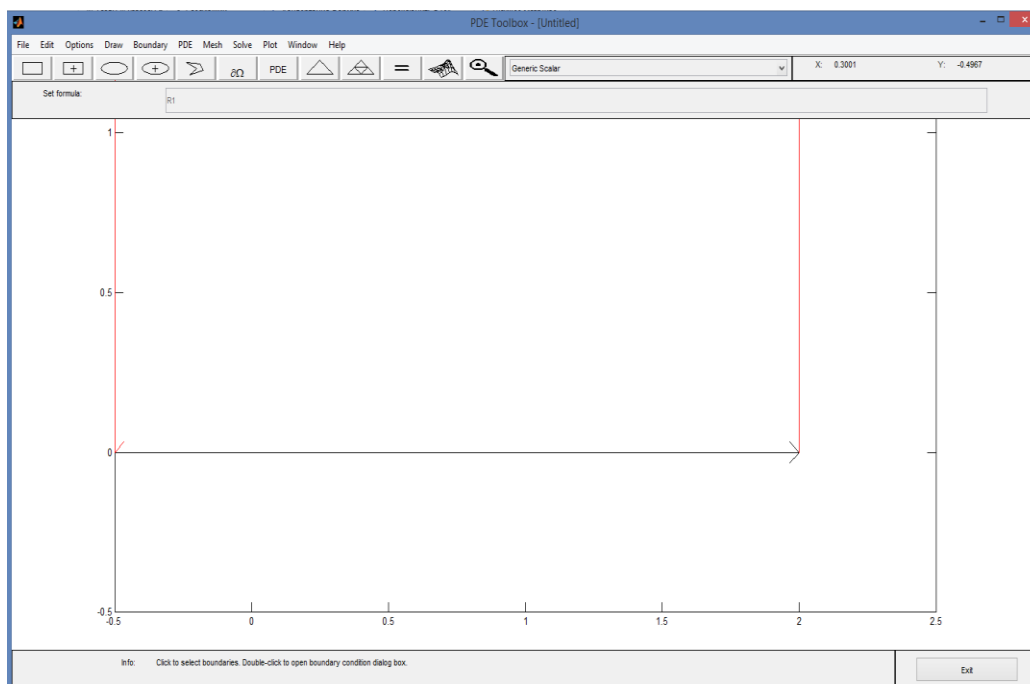
Сонда аламыз (сурет 13)



13 Сурет – Нақтыланған аймақ

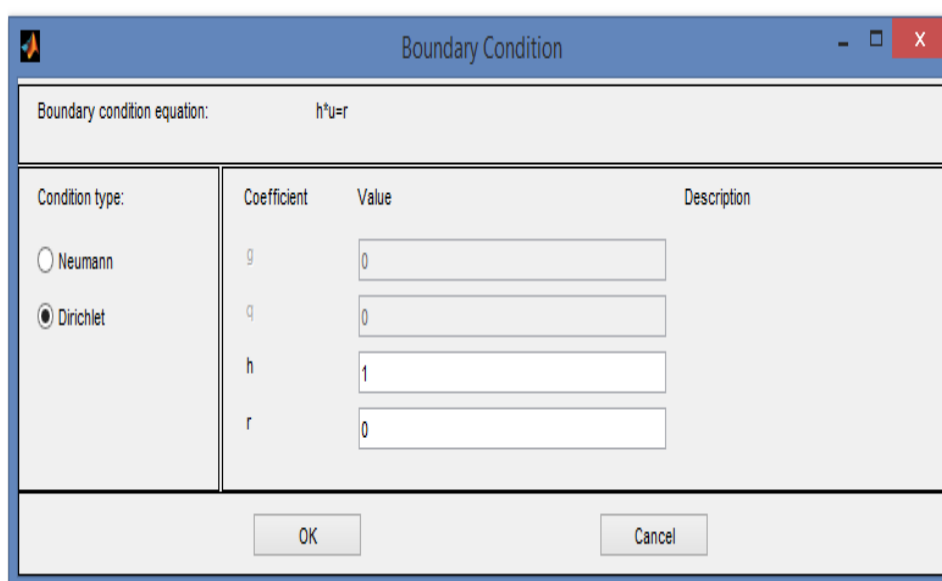


Әрі қарай шекаралық шарттарды анықтаймыз. Ол үшін Матлабтың шекаралық режиміне өтеміз.  $\partial$  символды (немесе Boundary, Boundary mode таңдау арқылы) шертеміз. Шекаралық режим таңдалғаннан соң, әрбір шекара қызыл нұсқағышпен боялып көрінеді (сурет 14).



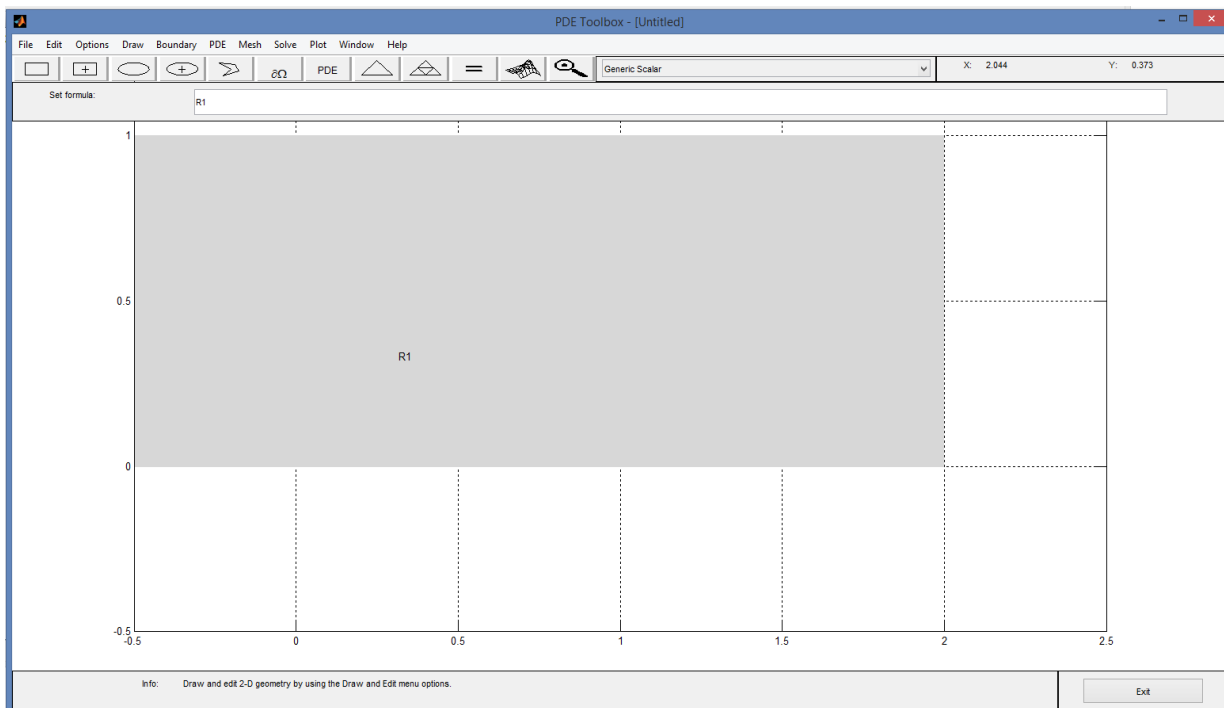
14 Сурет – Аймақ шекарасы

Айта кететін жағдай: қызыл түс Дирихле шартын, ал жасыл түс Нейман шартын білдіреді.  $u(x,0)$  үшін шекаралық шартты орнату үшін төменгі горизонталь сызықты екі рет шертеміз, терезе пайда болады (сурет 15).

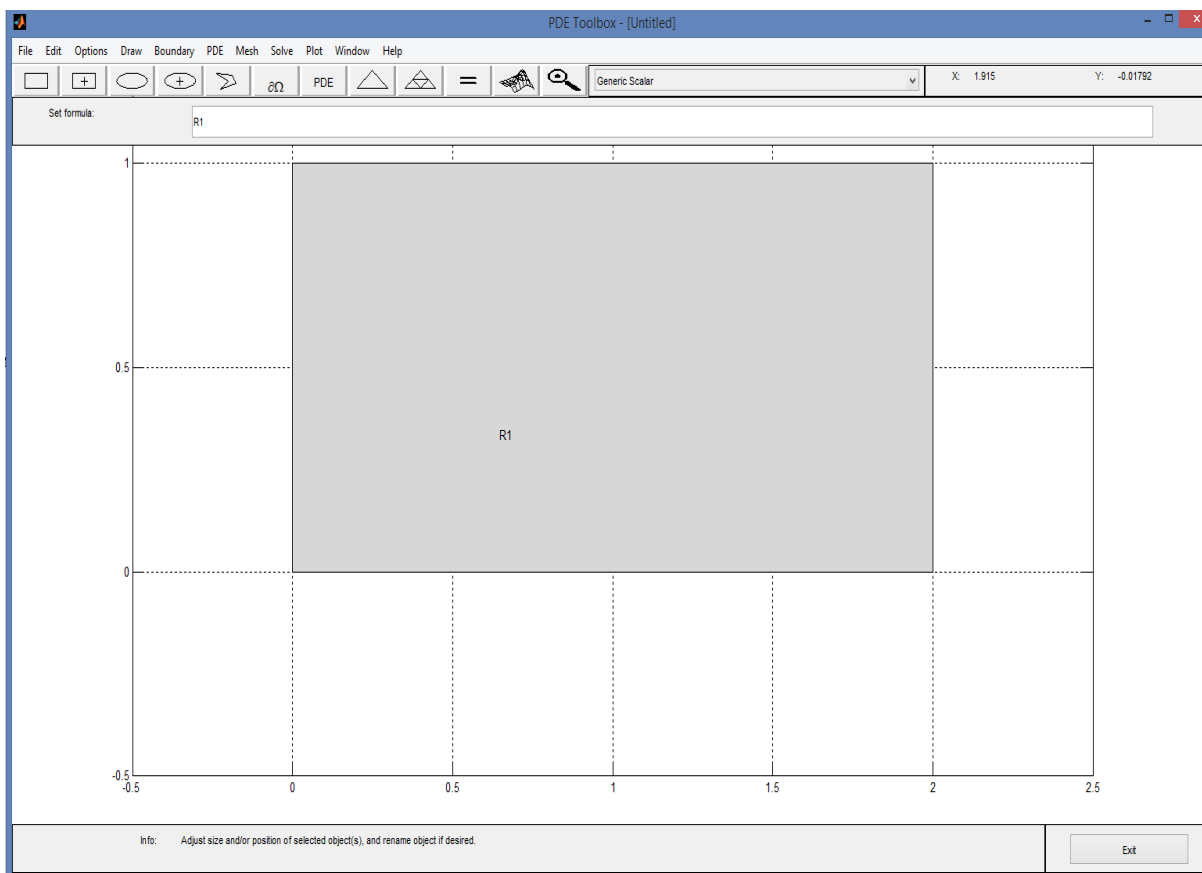


15 Сурет – Шекаралық шарттарды орнықтыру терезесі

Осы терезеде  $r$  жанындағы ұяшыққа  $x$  жазамыз. Қалғандарын да осылай қоямыз (суреттер 16, 17).

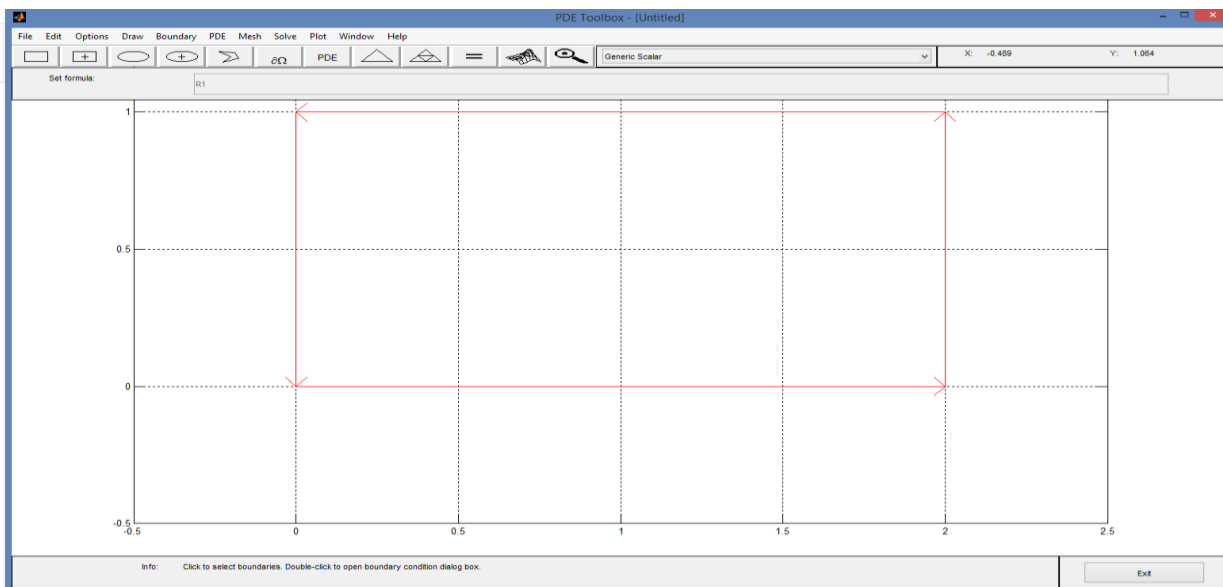


16 Сурет – Шекаралық мәндерді орнату

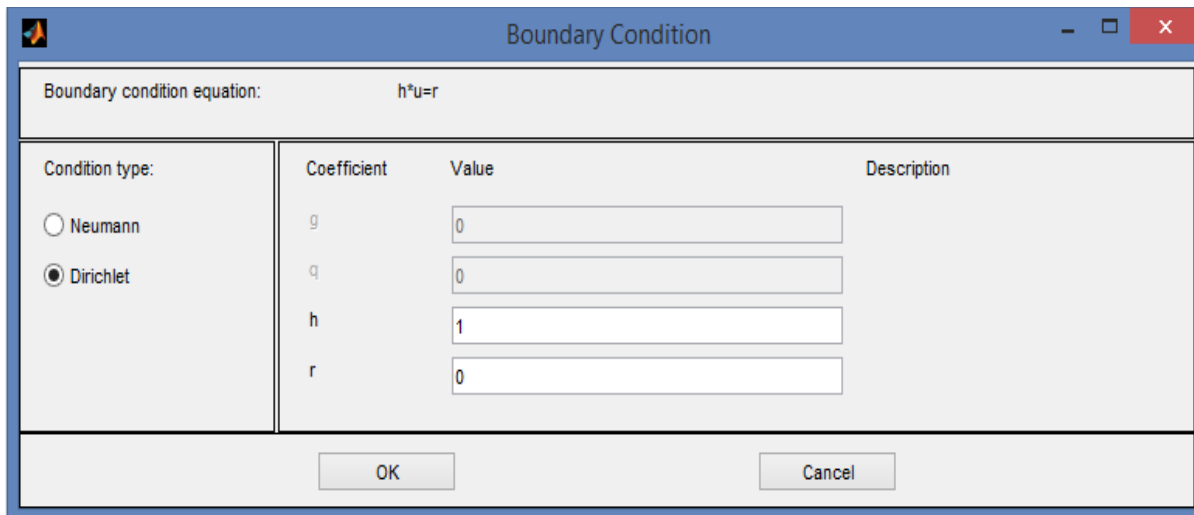


17 Сурет – Аймақты орталыққа орналастыру

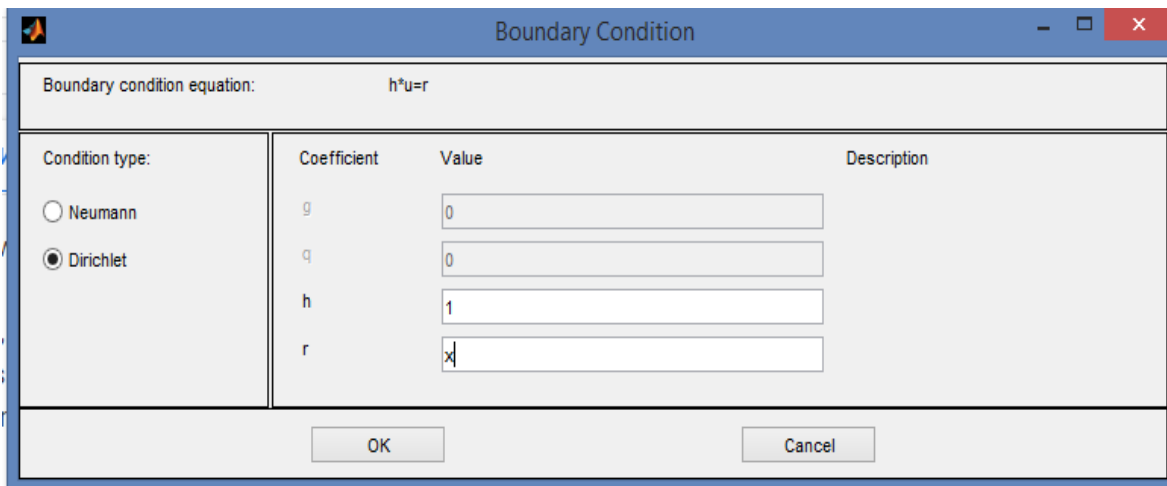
Шекаралық шарттарды да осылай орнатамыз (суреттер 18, 19, 20).



18 Сурет – Аймақ үшін шеттік шарттарды орнату

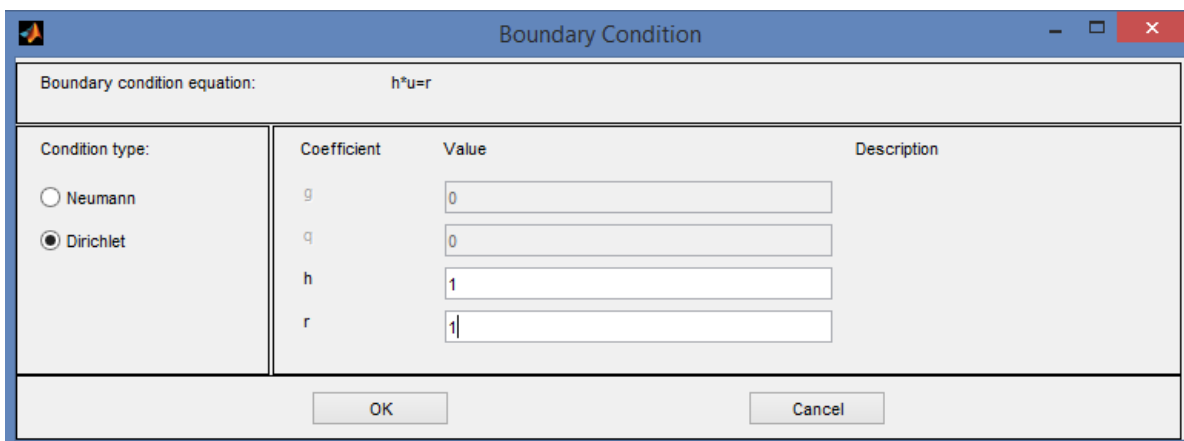


19 Сурет – Шекаралық шарттарды орнату терезесі

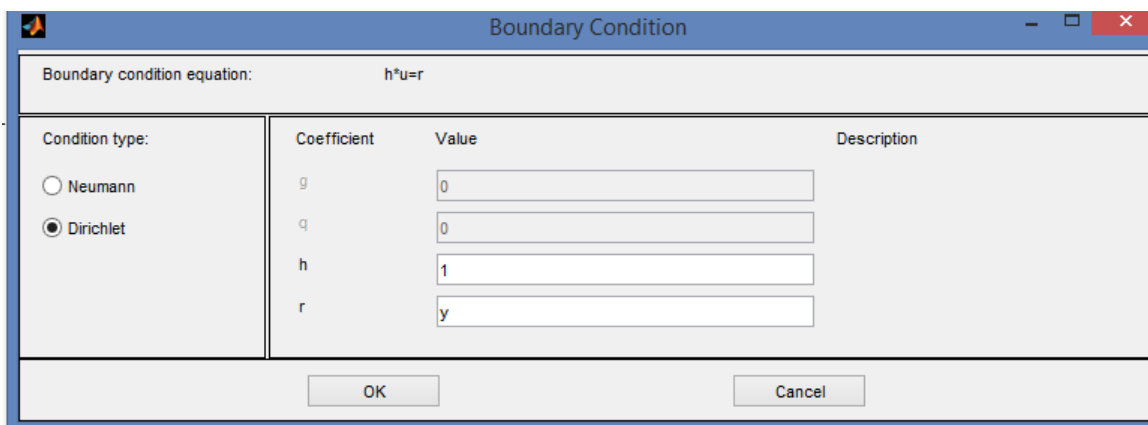


20 Сурет – Шекаралық шарттарды енгізу терезесі

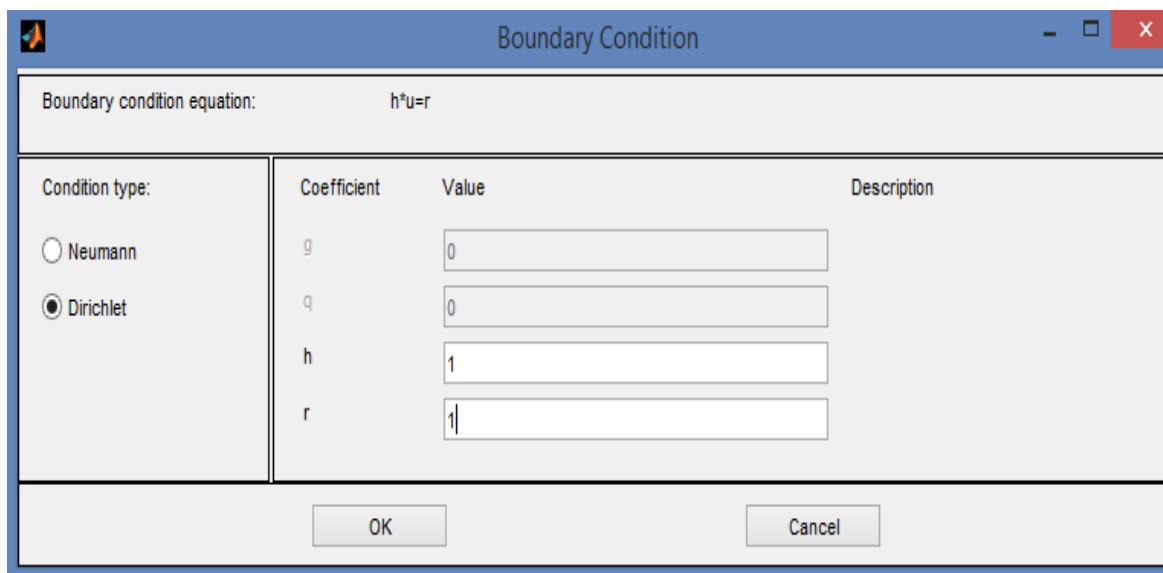
Осылайша басқа қабырғалар үшін шекаралық шарттарды орнатамыз (суреттер 21, 22, 23).



21 Сурет – Шекаралық шарттарды енгізу терезесі

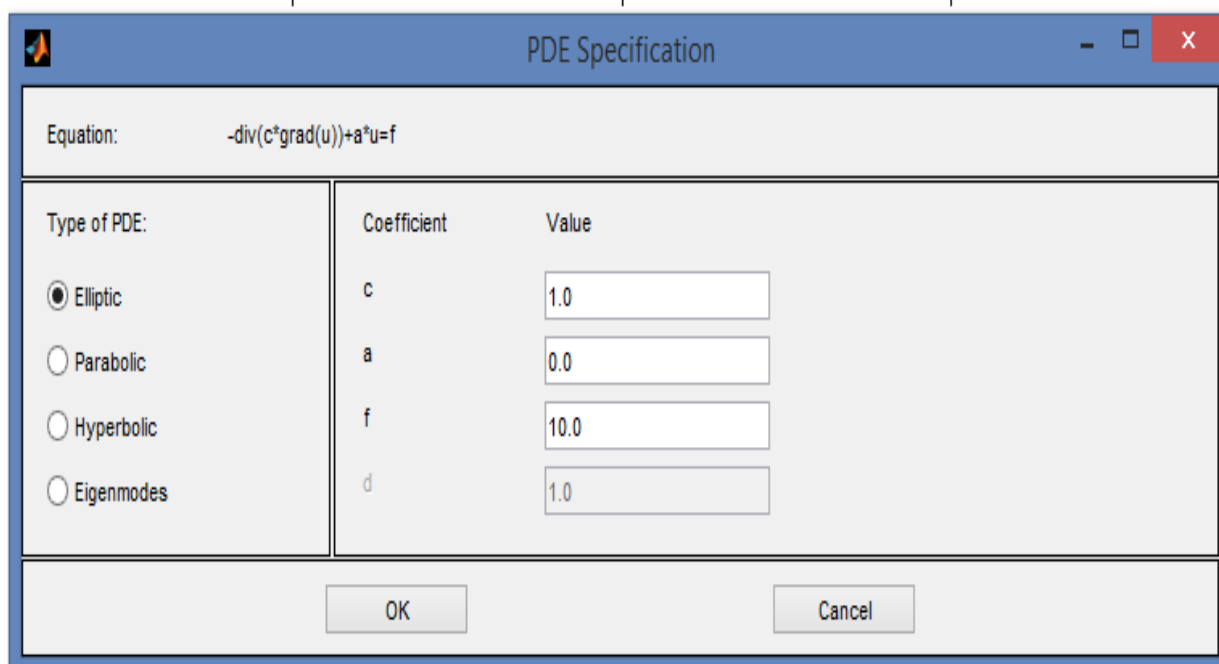


22 Сурет – Шекаралық шарттарды енгізу терезесі

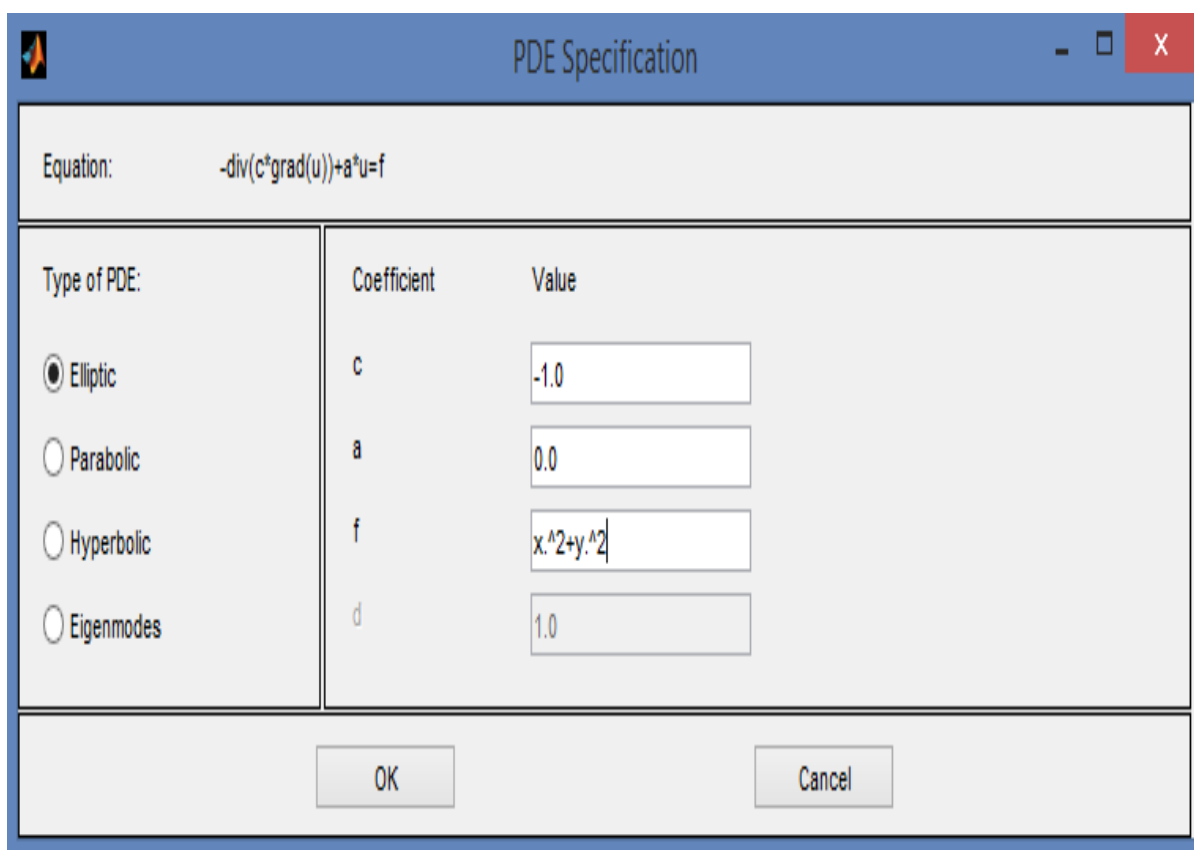


23 Сурет – Шекаралық шарттарды енгізу терезесі

Ал енді соңғы қабырға үшін де шекаралық шартты орнатамыз (суреттер 24, 25).

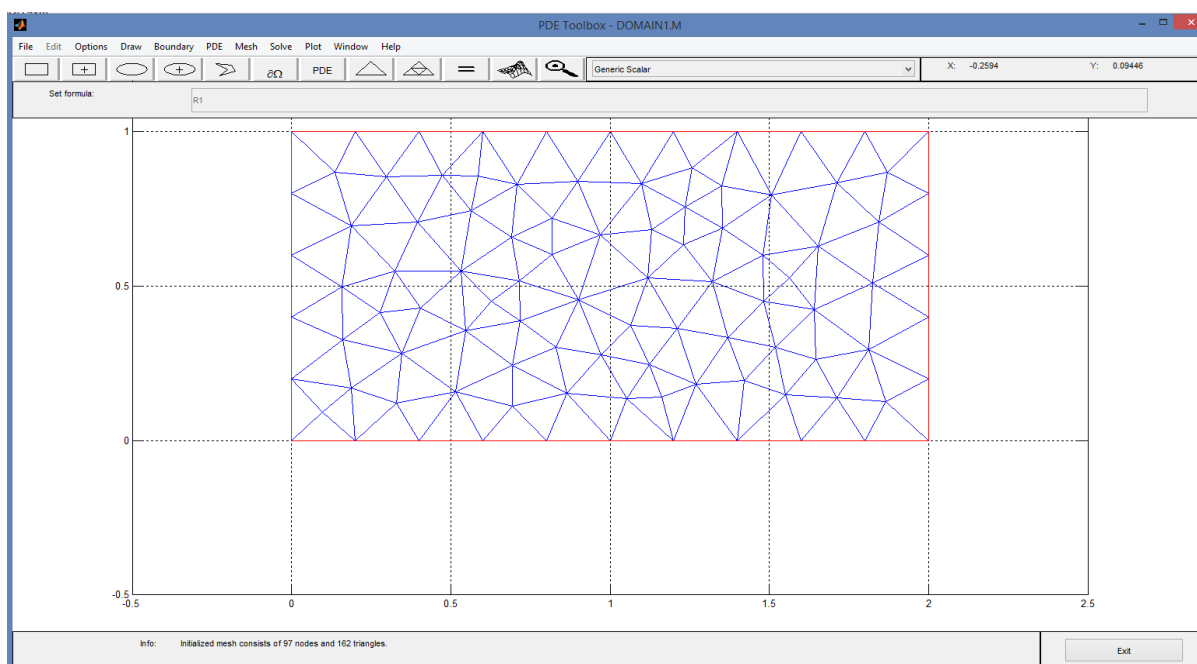


24 Сурет – Шекаралық шарттарды енгізу терезесі



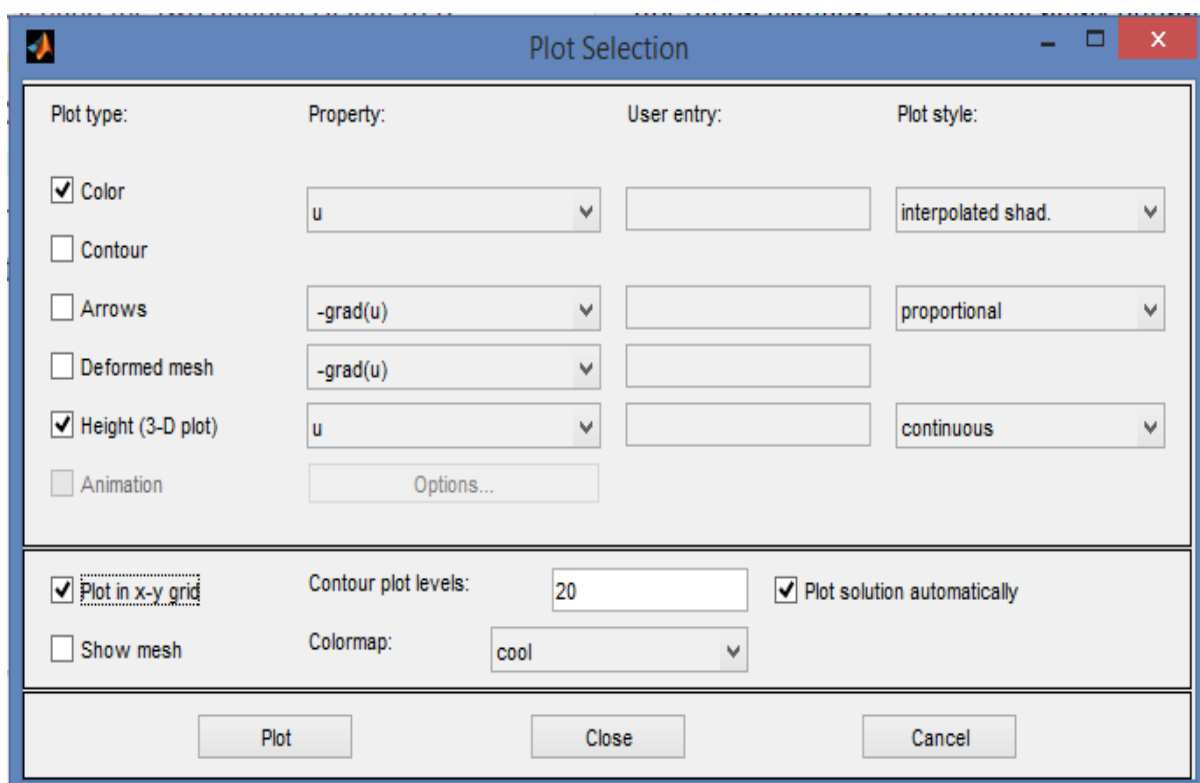
25 Сурет – Шекаралық шарттарды енгізу терезесі

Нәтижеде төменде келтірілген торлық ақырлы элементті аймақты (торды) аламыз (сурет 26).

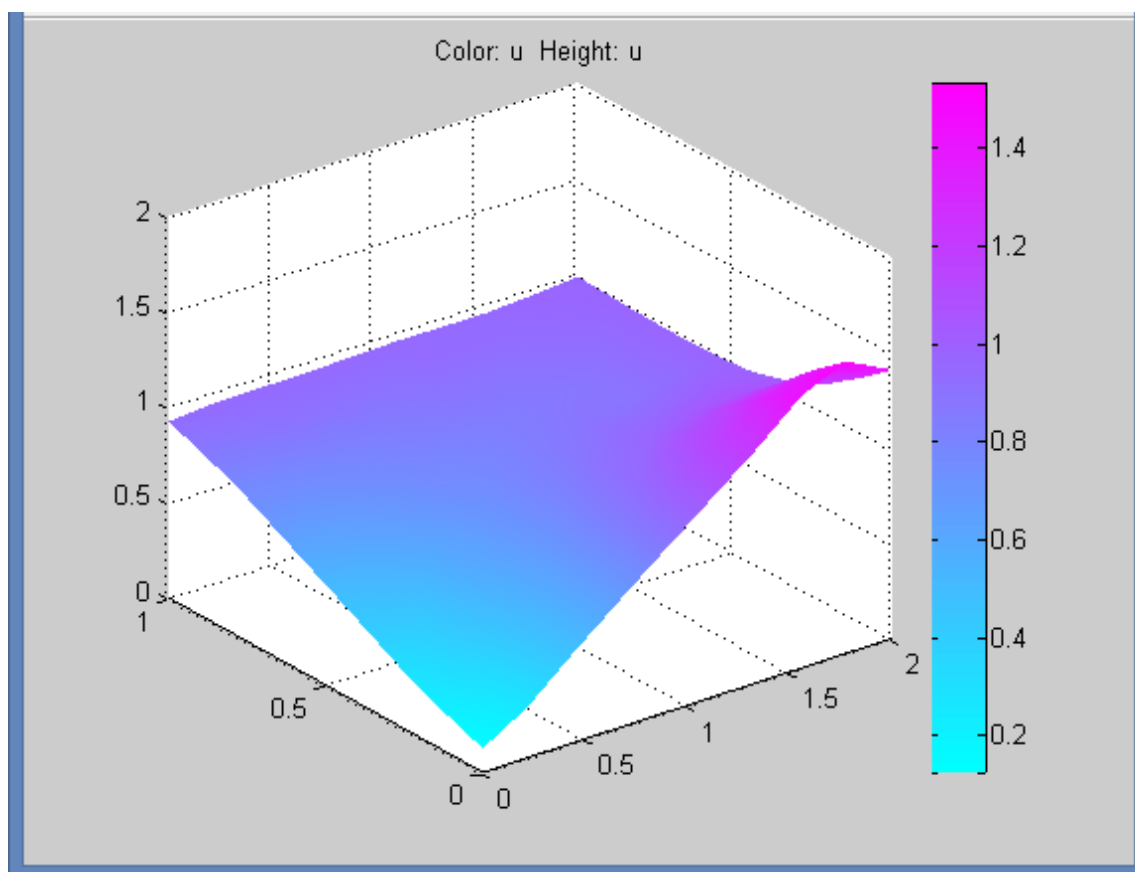


26 Сурет– Құрылған тор

Графикті таңдау терезесі көрінеді (сурет 27).



27 Сурет – Графикті таңдау терезесі



## 28 Сурет – Пуассон теңдеуінің ақырлы элементтер әдісімен табылған сандық шешмінің графигі

### 2.4 Пуассон теңдеуін Якоби итерациялық әдісімен сандық шешу

Стационар теңдеулерге қойылатын шеттік есептер үшін құрылатын айырымдық  $Au = -f$  схемалар әдетте итерациялық әдістермен шешіледі. Осындай әдістердің бірі – Якоби итерациялық әдісін Пуассон теңдеуі үшін Дирихле есебін шешу мысалында көріп шығамыз. Якоби әдісімен шешу алгоритмінің мынадай жазсақ болады:

$$\left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}\right) y_{n,m}^{(s)} = \frac{1}{h_1^2} (y_{n-1,m}^{(s-1)} + y_{n+1,m}^{(s-1)}) + \frac{1}{h_2^2} (y_{n,m-1}^{(s-1)} + y_{n,m+1}^{(s-1)}) + f_{n,m}. \quad (75)$$

мұнда  $s$  – итерация нөмері. (75) теңдеуді мына түрде жазамыз

$$E \frac{y^{(s)} - y^{(s-1)}}{\tau_s} + (\Lambda_1 + \Lambda_2) y^{(s-1)} = -f, \quad \tau = \left(\frac{2}{h_1^2 + h_2^2}\right)^{-1}.$$

(76)

Якоби әдісін басқа да көптеген итерациялық әдістер секілді мына түрде жазсақ болады:

$$B_{it} \frac{y^{(s)} - y^{(s-1)}}{\tau_s} + Ay^{(s-1)} = -f. \quad (77)$$

Итерациялық Якоби әдісін төмендегі Пуассон теңдеуін сандық шығаруда қолданатын боламыз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 4, \quad (x_1, x_2) \in [0, a] \times [0, b], \quad (78)$$

Осы теңдеудің аналитикалық (яғни дәл) шешімі сәйкес шекаралық шарттарда төмендегідей болатындығын көру қиынға соқпайды

$$u(x_1, x_2) = (x_1 - a/2)^2 + (x_2 - b/2)^2. \quad (79)$$

Төменде (78) теңдеуді Якоби итерациялық әдісімен сандық шешу алгоритмінің МАТЛАБ ортасындағы script файлының коды келтірілген (сурет 29).



```
1   % Пуассон тендеуін итерациялық Якоби әдісімен сандық шешу
2 - clear all
3   % Максимальды итерациялар санын береміз
4 - itermax=300;
5   % x1,x2 бағыттар бойынша аймақтың өлшемдерін анықтаймыз
6 - a=1; b=1;
7   % x1 және x2 координаталар бойынша тор түйіндерінің санын анықтаймыз,
8   % сондай-ақ, h1 және h2 қадамдарды және қосалқы r1, r2, r3 шамаларды
9   % анықтаймыз
10 - N=51; M=51;
11 - h1=a/(N-1); h2=b/(M-1);
12 - r1=0.5/(1+(h1/h2)^2);
13 - r2=0.5/(1+(h2/h1)^2);
14 - r3=0.5/(h1^(-2)+h2^(-2));
15 - x1=0:h1:a; x2=0:h2:b;
```

```

16     % Аналитикалык шешімді аныктаймыз
17 -   for n=1:N
18 -       for m=1:M
19 -           u(n,m)=(x1(n)-0.5*a)^2+(x2(m)-0.5*b)^2;
20 -       end
21 -   end
22     % Алгашкы итерацияны аныктаймыз
23 -   for n=1:N
24 -       for m=1:M
25 -           y(1,n,m)=0;
26 -       end
27 -   end
28     % x2=0 және x2=b болгандагы шекаралык шарттарды аныктаймыз
29 -   for s=1:itermax
30 -       for n=1:N
31 -           y(s,n,1)=(x1(n)-0.5*a)^2+(x2(1)-0.5*b)^2;
32 -           y(s,n,M)=(x1(n)-0.5*a)^2+(x2(M)-0.5*b)^2;
33 -       end
34 -   end
35     % x1=0 және x1=a болгандагы шекаралык шарттарды аныктаймыз
36 -   for s=1:itermax
37 -       for m=1:M
38 -           y(s,1,m)=(x1(1)-0.5*a)^2+(x2(m)-0.5*b)^2;
39 -           y(s,N,m)=(x1(N)-0.5*a)^2+(x2(m)-0.5*b)^2;
40 -       end
41 -   end
42     % Алгашкы жуыктаудын кателігін сандык және аналитикалык шешімдердін
43     % айырмасынын C нормасымен аныктаймыз
44 -   for n=1:N
45 -       for m=1:M
46 -           z(n,m)=abs(y(1,n,m)-u(n,m));
47 -       end
48 -   end
49     error(1)=max(max(z));
50     % Якоби адісіндегі негізгі итерациялык процесстін циклін уйымдастырамыз
51 -   for s=2:itermax
52 -       for n=2:(N-1)
53 -           for m=2:(M-1)
54 -               y(s,n,m)=r1*(y(s-1,n-1,m)+...
55 -                   y(s-1,n+1,m))+r2*(y(s-1,n,m-1)+...
56 -                   y(s-1,n,m+1))-4*r3;
57 -           end
58 -       end
59     % Сандык және аналитикалык шешімдерін айырмасынын C нормасы ретінде
60     % кателікті аныктаймыз
61 -   for n=1:N
62 -       for m=1:M
63 -           z(n,m)=abs(y(s,n,m)-u(n,m));
64 -       end

```

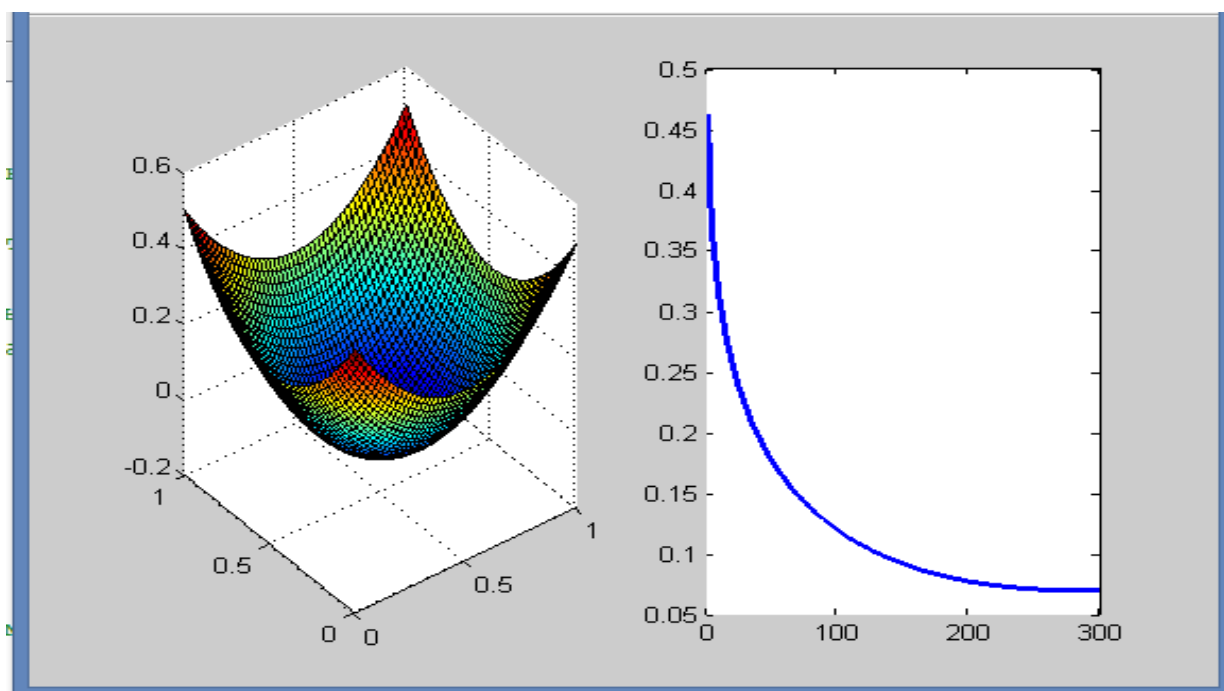
```

65 - end
66 - error(s)=max(max(z));
67 - end
68 - for n=1:N
69 -     for m=1:M
70 -         z(n,m)=y(itermax,n,m);
71 -     end
72 - end
73 - % Сонгы итерацияда сандық шешім графигін саламыз
74 - subplot(1,2,1), surf(x2,x1,z)
75 - % Сандық шешім қателегінің итерация номерінен тауелділігі қисығын сызамыз
76 - subplot(1,2,2), plot(1:itermax,error, 'LineWidth', 2.5)
77

```

29 Сурет – Якоби итерациялық әдісінің МАТЛАБ ортасындағы script файлының коды

Төмендегі 30 суретте Пуассон теңдеуі үшін Дирихле есебін Якоби итерациялық әдісімен алынған сандық шешім графигі (сол жақта) келтірілген. Графиктен сандық шешім дәл шешімге жақын екендігі көрініп тұр. Оң жақта сандық шешім мен дәл шешім айырмаларының  $\|\bullet\|$  нормадағы, яғни  $\|y^{(s)} - u\|_C$ , қателіктерінің тәуелделігі қисығы келтірілген. Суреттен көрініп тұрғандай, қателік итерация саны артуымен азаяды, бірақ баяу.



30 Сурет – Пуассон теңдеуін Якоби әдісімен сандық шешу және итерацияға тәуелді қателік қисығы

## 2.5 Орнатуға арналған есептеулер әдісімен Дирихле есебін сандық шешу

Эллипстік типті теңдеулер математикалық физикада маңызды теңдеулер класына жатады. Эллипстік типті теңдеулерге ғылым мен техникадағы көптеген қолданбалы есептердің математикалық модельдері келтірілетіндігі белгілі. Математикалық модельдері осындай эллипстік типті теңдеулермен сипатталатын физикалық процесстерге жүктелген мембрананың иілуін анықтау есебін, түрлі құрылыс нысандарындағы балкалардың иілуін табу есептері, түрлі қатты денелерде уақытқа тәуелсіз, яғни стационар, температураның үлестірімін анықтау есептері, құбырлардағы мұнай секілді сұйықтықтардың және газдардың стационар ағындары есептерін және т.б. салалардағы көптеген есептерді келтіруге болады. Осы түрдегі барлық есептерге тән ортақ қасиет мынадай: сыртқы әсерлер уақытта тәуелді емес, ал бастапқы берілгендер соншалықты алдын берілген, физикалық жүйе бұл әсерлер жайлы ұмытқан болып есептеледі және шешім стационар болып уақытқа тәуелді болмайды, яғни  $u = u(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Осы себепке байланысты эллипстік теңдеулерді эволюциондық есептердің стационар шешімдері ретінде қарастыруға болады.

Мұнда біз эллипстік теңдеу үшін Дирихле есебін орнатуға арналған есептеулер әдісімен сандық шешу мәселесін қарастыратын боламыз. Жалпы, эллипстік теңдеулер үшін қойылатын шекаралық есептерді сандық шешуде көптеген әдістер қолданылады. Солардың ішінен жиі қолданылатындары тікелей итерациялық әдістер, шекаралық интегралдар әдісі, Фурье әдісі, ауыспалы-үшбұрыш әдісі және т.б.

### Стационар және эволюциондық есептер арасындағы байланыс

Бірінші текті шекаралық шартты эллипстік типті теңдеу үшін Дирихле есебі қойылымы мынадай:

$$\begin{aligned} \Delta u(\mathbf{x}) &= -f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ u|_{\Gamma} &= g(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{79}$$

мұнда  $\Delta = \partial^2 / \partial x_1^2 + \dots + \partial^2 / \partial x_n^2$ ,  $\Omega - R^n$  кеңістіктегі шекарасы  $\Gamma$  сыптығыр болған тұйық облыс. (79) есептің жалпылануы ретінде стационар жылуөткізгіштік теңдеуін қарастыруымызға болады:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[k(\mathbf{x})\operatorname{grad}u(\mathbf{x})] &= -f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ u|_{\Gamma} &= g(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (80)$$

(80) есепті төмендегі параболалық типті эволюциондық теңдеуі үшін қойылған бастапқы- шеттік есепке қатысты стационар есеп деп атайды:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(t, \mathbf{x})}{\partial t} &= \operatorname{div}[k(\mathbf{x})\operatorname{grad}v(\mathbf{x})] + f(\mathbf{x}), \quad (t, \mathbf{x}) \in [0, +\infty) \times \Omega, \\ u(t, \mathbf{x})|_{\Gamma} &= g(\mathbf{x}), \quad v(0, \mathbf{x}) = v_0(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (81)$$

Эволюциондық есептің  $v(t, \mathbf{x})$  шешімі мен стационар есептің  $u(\mathbf{x})$  шешімі арасындағы айырмашылықты зерттейміз. Ол үшін (80) теңдеуден (81) азайтамыз және  $w(t, \mathbf{x}) = v(t, \mathbf{x}) - u(\mathbf{x})$  белгілеуді енгіземіз. Нәтижеде төмендегі есепті аламыз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(t, \mathbf{x})}{\partial t} &= \operatorname{div}[k(\mathbf{x})\operatorname{grad}w(\mathbf{x})] + f(\mathbf{x}), \quad (t, \mathbf{x}) \in [0, +\infty) \times \Omega, \\ u(t, \mathbf{x})|_{\Gamma} &= 0, \quad w(0, \mathbf{x}) = w_0(\mathbf{x}) = v_0(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (82)$$

Осы (82) эволюциондық есепте шекаралық шарттар біртекті (яғни нөлге тең) және бастапқы берілгендер кез келген функция болады, себебі  $v_0(\mathbf{x})$  функция (бастапқы температура) кез келген функция деп алынған.

(82) есептің шешімін Фурье әдісімен (айнымалыларды бөлектеу әдісі) тауыға болатындығы белгілі:

$$w(t, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{-\lambda_i t} w_i(\mathbf{x}), \quad (83)$$

мұнда  $\lambda_i, w_i(\mathbf{x})$  – төмендегі көпөлшемді Штурм-Лиувиль спектральды есебінің өзіндік мәндері мен өзіндік функциялары:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[k(\mathbf{x})\operatorname{grad}w_i(\mathbf{x})] + \lambda_i w_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ w_i(\mathbf{x})|_{\Gamma} = 0. \end{aligned} \quad (84)$$

Сонда, (84) есепке алып, (83) формуладағы  $c_i$  коэффициенттерді (82) есептің бастапқы берілгендерінің  $w_i(\mathbf{x})$  өзіндік функциялар бойынша Фурье коэффициенттері деп атасақ болады, яғни

$$c_i = \int_{\Omega} w_0(\mathbf{x}) w_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} .$$

Жоғарыда келтірілген (84) есептің  $\lambda_i$  өзіндік мәндері оң және кемімейтін тізбек құрайтындығы белгілі

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \quad (85)$$

ал  $w_i(\mathbf{x})$  өзіндік функциялары  $\Omega$  - да толық ортонормаланған жүйе құрайды. (83), (85) сәйкес, (82) теңдеудің  $w(t, \mathbf{x})$  шешімінің нормасы үшін төменде келтірілген бағалауды аламыз:

$$\|w(t, \mathbf{x})\|_{L_2} \leq \left( \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 e^{-2\lambda_i t} \right)^{1/2} \leq e^{-\lambda_1 t} \left( \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \right)^{1/2} = e^{-\lambda_1 t} \|w_0(\mathbf{x})\|_{L_2}. \quad (86)$$

Осы (86) теңсіздік  $t \rightarrow \infty$  ұмтылғанда  $w(t, \mathbf{x}) = v(t, \mathbf{x}) - u(\mathbf{x}) \rightarrow 0$  айырым  $\|\square\|_{L_2}$  нормада экспоненциальды түрде жинақталатындығын білдіреді. Басқаша айтқанда, (81) эволюциондық есептің  $v(t, \mathbf{x})$  шешімі (80) стационар есептің  $u(\mathbf{x})$  шешіміне орташа квадраттық жинақталады.

Жоғарыда айтылғандардан, (80) эллипстік есептің орнына (81) эволюциондық есепті (кеңістік операторлары бірдей болған) шығарсақ болады, яғни бастапқы берілгендерді кез келген деп тандап алу керек және  $t$  уақыттың жеткілікті үлкен мәнінде  $v(t, \mathbf{x})$  шешімді есептеу керек.  $t \rightarrow \infty$  ұмтылғандағы  $v(t, \mathbf{x})$  ұмтылатын стационар  $u(\mathbf{x})$  шек (80) стационар есептің шешімі болады.

Жинақтылық экспоненциальды (жылдам жинақтылық) болғандықтан, дәлдік  $\varepsilon$  бере отырып, орнатуға арналған есептеулер әдісінде қажет дәлдікке жету үшін мындай бағалауды алсақ болады:

$$T \approx \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad (87)$$

мұнда  $\lambda_1$  – (84) Штурм-Лиувилль есебінің ең кіші өзіндік мәні.

Қарастырылып жатқан әдіспен екі өлшемді эллипстік теңдеу үшін біртекті шекаралық шарттармен тіктөртбұрышты аймақта сандық шешуді қарастырамыз. Сәйкес есепті мына түрде жазамыз:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, & (x_1, x_2) \in \Omega = (0, a) \times (0, b), \\ u(0, x_2) = u(a, x_2) = u(x_1, 0) = u(x_1, b). \end{cases} \quad (88)$$

$u(x_1, x_2) = 0$  функция (88) есептің шешімі болатындығын көру қиынға соқпайды. Ал енді сәйкес эволюциондық есепті құрамыз:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = k \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + k \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}, & (t, x_1, x_2) \in \Omega_T = (0, T) \times (0, a) \times (0, b), \\ v(t, 0, x_2) = v(t, a, x_2) = v(t, x_1, 0) = v(t, x_1, b) = 0 \end{cases} \quad (89)$$

және оған кез келген бастапқы шартты қосамыз

$$v(0, x_1, x_2) = v_0(x_1, x_2). \quad (90)$$

(89) теңдеуге сәйкес келетін Штурм-Лиувилль есебін айнымалыларды бөлектеу әдісімен шешіп табамыз:

$$\lambda_{i,j} = k\pi^2 \left( \frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right), \quad w_{i,j}(x_1, x_2) = \sin \frac{\pi i x_1}{a} + \sin \frac{\pi j x_2}{b}, \quad (91)$$

мұнда  $i, j = 1, 2, \dots$  (91) –тен өзіндік мәндердің ең кішісін табамыз:

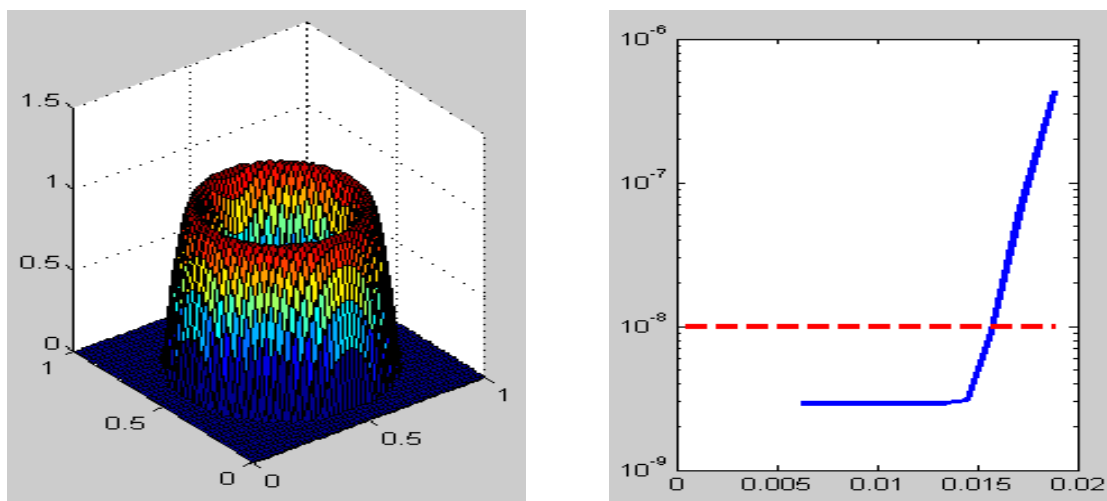
$$\lambda_{\min} = k\pi^2 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right).$$

Осы ең кіші өзіндік мән арқылы берілген  $\varepsilon$  дәлдікпен әдіс уақыты бағалауын аламыз:

$$T = \frac{1}{\lambda_{\min}} \ln \varepsilon^{-1} = \frac{a^2 b^2 \ln \varepsilon^{-1}}{k\pi^2 (a^2 + b^2)} \quad (92)$$

### Сандық есептеулер нәтижелері

(89) есепті  $[0, T]$  уақыт аралығында бойлық-көлденең әдісімен сандық шешеміз. Анықтық үшін дәлдікті  $\varepsilon = 10^{-8}$  деп аламыз. Есептеулер нәжижесі төменде 31 суретте келтірілген.



31 Сурет – Эволюциондық есептің эллипстік есеп шешіміне шығатын орнату есептеулері

Суреттің сол жағыда (89) есептің бастапқы үлестірімінің үш өлшемді графигі келтірілген. Оң жақта шешім нормасының  $\|v(T, x_1, x_2)\|_{L_2}$   $t = T$  нүктедегі уақыт бойынша  $\tau$  қадамнан тәуелділігі графигі келтірілген. Графиктегі қызыл пунктир сызық таңдалған  $\varepsilon = 10^{-8}$  дәлдік деңгейін білдіреді. Суреттен көрініп тұрғандай, тор қадамы  $\tau$  - дың қандайда бір шекті мәнінен бастап, тор қадамының барлық кішірейген мәндерінде (89) эволюциондық есеп шешімінің (88) эллипстік есеп шешіміне жинақтылық дәлдігінің берілген деңгейіне жетуі байқалады.

### 3 ЭЛЛИПСТІК ТЕНДЕУДІҢ ОҢ ЖАҒЫН АНЫҚТАУ КЕРІ ЕСЕБІ

Мұнда біз екі өлшемді Пуассон теңдеуі үшін белгісіз оң жақты анықтау кері есебін жуықтап шешу алгоритмін құру мәселесін қарастыратын боламыз. Кері есеп үшін қосымша шарт ретінде тура есеп шешімінің аймақтың шекарасындағы мәні алынатын болады. Алдымен тура есептің қойылымын қарастырайық. Бірінші текті шекаралық шарт қойылған Пуассон теңдеуін қарастырайық:

$$-\Delta \equiv -\sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (93)$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (94)$$

мұнда  $u(x)$ ,  $x = (x_1, x_2)$ ,  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ .  $f(x)$  функция белгілі болған жағдайда  $u(x)$  функцияны табу (93), (94) есебі тура есеп болады. Кері есепте  $f(x)$  функцияны табу қажет және қосымша шарт мынадай берілген болсын деп есептейміз:



$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \mu(x), \quad x \in \partial\Omega \quad (95)$$

мұнда  $n$  –  $\Omega$  аймақтың  $\partial\Omega$  шекарасына қатысты сыртқы нормаль. Біз (93) теңдеудің оң жағы төменде келтірілген түрде берілген деп есептейміз:

$$f(x) = \varphi_1(x_2) + x_1\varphi_2(x_2). \quad (96)$$

(93)-(95) кері есепке қатысты біз қарастырып жатқан жағдайда жақын болған бірқатар нәтижелерді келтіріп өтеміз. Жалпы жағдайда, қисынсыз болған кері есептерді дәл немесе жуықтап шешуде коррект емес есептерді шешу теориясындағы негізгі әдістер, мысалға, А.Н.Тихоновтың регуляризация әдісі, итерациялық әдістер, сингуляр жіктеу және т.б әдістерге жүгінеді [1,2,3]. Есептің шешімінің жалғыздығы жайлы теоремалар есепті құрама типті теңдеулерге келтіру жолымен [4] жұмыста дәлелденген. Теңдеудегі айнымалылар өзгертін аймақтар тіктөртбұрыш, дөңгелек және осы сияқты басқа да қарапайым геометриялық формада болған жағдайда біз қарастырып жатқан кері есепті шешу үшін математикалық физика есептерін шешуде кеңінен қолданылатын танымал Фурье әдісін пайдалансақ болады. Сондай-ақ, бұл әдісті қолданып тиімді есептеулерді жүргізетін алгоритмдерді де құруға болады.

### 3.1 Айырымдық есепті құру

Әрі қарай біз айнымалылар өзгеру аймағы төмендегідей болсын деп есептейміз:

$$\Omega = \{x \mid x = (x_1, x_2), 0 < x_k < l_k, k = 1, 2\}.$$

$\Omega$  аймақтың шекаралары үшін мынадай белгілеу енгіземіз:

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4.$$

(96) түрде берілген ізделінді функция үшін мынадай қосымша шарттар қоямыз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1}(0, x_2) &= \mu_1(x_2), \\ \frac{\partial u}{\partial x_1}(l_1, x_2) &= \mu_2(x_2). \end{aligned} \quad (97)$$

(97) шарттарды қою арқылы біз қосымша шарттарды арттырдық, яғни есеп қайта анықталған есеп болды. Ал енді айнымалылардың әрбірінің бағыттары бойынша торларды құрамыз:

$$\begin{aligned}\bar{w}_k &= \{x_k | x_k = i_k h_k, i_k = 0, 1, \dots, N_k, N_k h_k = l_k\}, \\ w_k &= \{x_k | x_k = i_k h_k, i_k = 1, 2, \dots, N_k - 1, N_k h_k = l_k\}, \\ \partial w_k &= \{x_k | x_k = 0, l_k\}, \quad k = 1, 2.\end{aligned}$$

Сонымен қатар,  $\Omega$  аймақта төмендегі белгілеуді енгіземіз:

$$\begin{aligned}\bar{w} &= \bar{w}_1 \times \bar{w}_2 = \{x | x = (x_1, x_2), x_1 \in \bar{w}_1, x_2 \in \bar{w}_2\}, \\ w &= w_1 \times w_2.\end{aligned}$$

Құрылған тордың ішкі нүктелерінде айырымдық Лаплас операторын төмендегідей анықтаймыз:

$$\Delta y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2}, \quad x \in w,$$

мұнда біз екінші ретті айырымдық туындыларды айырымдық сұлбаларда қолданылатын әдеттегі белгілерді пайдаланып жаздық [23].

Сонымен, (93)-(94) тура есепке біз төмендегі айырымдық есепті сәйкестендірдік деп айта аламыз:

$$\Delta y = f(x), \quad x \in w, \tag{98}$$

$$y(x) = 0, \quad x \in \partial w. \tag{99}$$

Ал енді (93), (94), (95), (96) кері есеппен байланысты айырымдық есепті жазуымыз үшін тордың шекаралық нүктелерінде де анықталған болатын  $v = -\Delta y$  функцияны қарастыруымызға тура келеді. Ол үшін торды  $k_1 = -1, k_1 = N_1 + 1$  ( $x_1$  бойынша) кеңейткен жөн болады. Осы торда (97) шекаралық шарттарды жуықтаймыз. Сонда жуықтау қателігі шамамен  $O(h_1^2)$  болған мына қатынасты аламыз:

$$\frac{y(h_1, x_2) - y(-h_1, x_2)}{2h_1} = \mu_1(x_2), \tag{100}$$

$$\frac{y(l_1 + h_1, x_2) - y(l_1 - h_1, x_2)}{2h_1} = \mu_2(x_2), \tag{101}$$

(94) шартты есепке алып, төмендегі теңдікті аламыз:

$$v(0, x_2) = -\Delta y(0, x_2) = -\frac{y(h_1, x_2) - 2y(0, x_2) + y(-h_1, x_2)}{h_1^2}. \quad (102)$$

Ал енді (100) шартты ескеретін болсақ, келесі қатынасты алуға болатындығына көз жеткізуімізге болады:

$$v(0, x_2) = -\frac{2}{h_1^2} y(h_1, x_2) + \frac{2}{h_1} \mu_1(x_2). \quad (103)$$

Осы сияқты, төмендегі теңдікті алсақ болады:

$$v(l_1, x_2) = -\frac{2}{h_1^2} y(l_1 - h_1, x_2) - \frac{2}{h_1} \mu_1(x_2). \quad (104)$$

Енді біз (98) теңдеуді екі рет айырымдық туынды алу формуласы бойынша туынды аламыз, сонда

$$v_{\bar{x}_1 x_1} = 0, \quad \mathbf{x} \in w. \quad (105)$$

(105) теңдеу үшін шекаралық шарттар (103), (104) болады. Егер  $v$  функция белгілі болған жағдайда  $y$  мына төмендегі қатынастар арқылы анықталады:

$$-\Delta y = v(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in w, \quad (106)$$

$$y(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial w. \quad (107)$$

Әдетте, біртекті емес шекаралық шарттардан біртекті шарттарға өтіп алу есептеулер үшін тиімдірек болатындығы белгілі. Сондықтан біз де (105), (104) және (103) есептегі біртекті емес шарттардан біртекті шартты есепке өтеміз. Ол үшін (103) сай аламыз

$$\frac{2v(h_1, x_2) - v(2h_1, x_2)}{h_1^2} = \frac{v(0, x_2)}{h_1^2} = -\frac{2}{h_1^4} y(h_1, x_2) + \frac{2}{h_1^3} \mu_1(x_2).$$

(104) сай, аламыз

$$\frac{2v(l_1 - h_1, x_2) - v(l_1 - 2h_1, x_2)}{h_1^2} = -\frac{2}{h_1^4} y(l_1 - h_1, x_2) - \frac{2}{h_1^3} \mu_2(x_2).$$

Келесі кезеңде  $A_k, k = 1, 2$  операторларды мынадай анықтаймыз:

$$A_k y = -y_{\bar{x}_k, x_k}, \quad \mathbf{x} \in W.$$

Бұл операторлар біздің алдын құрған торда анықталған торлық функцияларда анықталған болып, тор шекарасында нольге айналады деп қабылдаймыз. Осы айтылғандарды ескеретін болсақ, (103)-(13-105) есеп мынадай жазуға болады:

$$A_1 v = -A_0 y + \eta, \quad \mathbf{x} \in W. \quad (108)$$

(108) –дегі  $A_0$  оператор мына түрде болады:

$$A_0 y = \begin{cases} \frac{2}{h_1^4} y(h_1, x_2), & x_1 = h_1, \\ 0, & h_1 < x_1 < l_1 - h_1, \\ \frac{2}{h_1^4} y(l_1 - h_1, x_2), & x_1 = l_1 - h_1. \end{cases}$$

Айта кететін жағдай (108) теңдеудің оң жағындағы функция  $\eta$  мына түрде болады:

$$\eta = \begin{cases} -\frac{2}{h_1^3} \mu_1(x_2), & x_1 = h_1, \\ 0, & h_1 < x_1 < l_1 - h_1, \\ -\frac{2}{h_1^3} \mu_2(x_2), & x_1 = l_1 - h_1. \end{cases}$$

Жоғарыдағыларды есепке аласақ, біздің (106), (107) есепті мынадай түрде жазсақ болады:

$$(A_1 + A_2) y = v, \quad \mathbf{x} \in W. \quad (109)$$

Сонымен, біз (103)-(107) есептен (108), (109) есепке өттік. Осы есепті мына түрде жазсақ болады:

$$A y = \eta, \quad (110)$$

бұл жердегі

$$A = (A_1 + A_2) A_1 + A_0. \quad (111)$$

Сондай-ақ,  $H = L_2(w)$  кеңістіктегі скаляр көбейтінді мен норма төмендегідей енгізіледі:

$$(y, u) = \sum_{x \in w} y(x)u(x)h_1h_2, \quad \|y\|^2 \equiv (y, y).$$

$H = L_2(w)$  кеңістікте төмендегілер орынды болады:

$$A_k = A_k^* > 0, \quad A_0 = A_0^* \geq 0,$$

сол себепті келіп шығады  $A = A^* > 0$ . Ал бұл қасиеттен (110) есептің шешімі жалғыз болатындығын аламыз. Біздің жағдайымызда ерекшелік біз (105) есептің шешімін дәл таба алатындығымызда болып тұр. Ол шешімі мынадай болады:

$$v(x_1, x_2) = \left(1 - \frac{x_1}{l_1}\right)v(0, x_2) + \frac{x_1}{l_1}v(l_1, x_2).$$

(103), (104) шарттарға сай, мына теңдікті алуымызға болады:

$$v(x_1, x_2) = -\left(1 - \frac{x_1}{l_1}\right)\frac{2}{h_1^2}y(h_1, x_2) - \frac{x_1}{l_1}\frac{2}{h_1^2}y(l_1 - h_1, x_2) + \psi(x_1, x_2), \quad (112)$$

осы жердегі

$$\psi(x_1, x_2) = \left(1 - \frac{x_1}{l_1}\right)\frac{2}{h_1}\mu_1(x_2) - \frac{x_1}{l_1}\frac{2}{h_1}\mu_2(x_2).$$

Сонымен, (112) өрнекті (98) теңдеуге қоятын болсақ, төмендегі теңдеуді аламыз:

$$-\Delta y + \left(1 - \frac{x_1}{l_1}\right)\frac{2}{h_1^2}y(h_1, x_2) + \frac{x_1}{l_1}\frac{2}{h_1^2}y(l_1 - h_1, x_2) = \psi(x), \quad x \in w. \quad (113)$$

### 3.2 Есепті шешу алгоритмі

Мұнда біз есепті шешу алгоритмін құрумен айналысамыз. Айта кететін жағдай, жоғарыда айтып кеткеніміздей, қарапайым аймақтар үшін кері есепті жуықтап шешуде айнымалыларды бөлектеу әдісін, яғни Фурье әдісін, қолдануға болады. (113) теңдеу жүктелген теңдеу екендігін де айта кету қажет. Осы теңдеуді шешу алгоритмін құрамыз. Ол үшін (99), (113) есепті төмендегідей етіп жазып аламыз:

$$(A_1 + A_2)y + b_1(x_1)y(h_1, x_2) + b_2(x_1)y(l_1 - h_1, x_2) = \psi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{W}, \quad (114)$$

бұл жерде біз мына шарт орынды деп қарастырамыз,  $b_k \geq 0, k = 1, 2$ .  
 $A_2$  айырымдық оператор үшін спектралдық есепті қарастырамыз:

$$A_2 v = \lambda v.$$

$\lambda_k, v_k(x_2), k = 1, 2, \dots, N_2 - 1$  осы спектралды есептің меншікті мәндері мен меншікті функциялары болсын деп есептейміз. Олар мынадай болады [24]:

$$\lambda_k = \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{\pi k h_2}{2l_2}, \quad v_k(x_2) = \sqrt{\frac{2}{l_2}} \sin \frac{\pi k x_2}{l_2}.$$

(114) есептің шешімін мына түрде іздейтін боламыз:

$$y(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{N_2-1} c_k v_k(x_2).$$

Осы өрнекті (114) қойып аламыз:

$$(A_1 + \lambda_k)c_k(x_1) + b_1(x_1)c_k(h_1) + b_2(x_1)c_k(l_1 - h_1) = \psi_k(x_1), \quad (115)$$

бұл жерде

$$\psi_k(x_1) = (\psi, v_k), \quad k = 1, 2, \dots, N_2 - 1.$$

(114) есеп үшін аламыз:

$$-w_{\bar{x}_1 x_1} + \lambda w + b_1(x_1)w(h_1) + b_2(x_1)w(l_1 - h_1) = r(x_1), \quad (116)$$

$$w(0) = 0, \quad w(l_1) = 0. \quad (117)$$

(116), (117) есептің шешімін мына түрде іздейміз:

$$w(x_1) = \sigma(x_1) + \sigma^{(1)}(x_1)w(h_1) + \sigma^{(2)}(x_1)w(l_1 - h_1). \quad (118)$$

Сонда біз төмендегі айырымдық есептерді аламыз:

$$-\sigma_{\bar{x}_1 x} + \lambda \sigma = r(x_1), \quad (119)$$

$$\sigma(0) = 0, \quad \sigma(l_1) = 0, \quad (120)$$

$$-\sigma_{\bar{x}_1 x_1}^{(1)} + \lambda \sigma^{(1)} = -b_1(x_1), \quad (121)$$

$$\sigma^{(1)}(0) = 0, \quad \sigma^{(1)}(l_1) = 0, \quad (122)$$

$$-\sigma_{\bar{x}_1 x_1}^{(2)} + \lambda \sigma^{(2)} = -b_2(x_1), \quad (123)$$

$$\sigma^{(2)}(0) = 0, \quad \sigma^{(2)}(l_1) = 0. \quad (124)$$

(118) қатынастан аламыз:

$$w(h_1) = \sigma(h_1) + \sigma^{(1)}(h_1)w(h_1) + \sigma^{(2)}(h_1)w(l_1 - h_1), \quad (125)$$

$$w(l_1 - h_1) = \sigma(l_1 - h_1) + \sigma^{(1)}(l_1 - h_1)w(h_1) + \sigma^{(2)}(l_1 - h_1)w(l_1 - h_1). \quad (126)$$

Сонымен, кері есептің жуық шешімінің алгоритмін қорытындылай келе аламыз:  $\sigma(x_1), \sigma^{(1)}(x_1), \sigma^{(2)}(x_1)$  функцияларды (119)-(124) – тен, ал  $w(h_1), w(l_1 - h_1)$  - лерді (125), (126)-дан тапқаннан соң, (116), (117) есептің шешімі (118) түрде табылады.

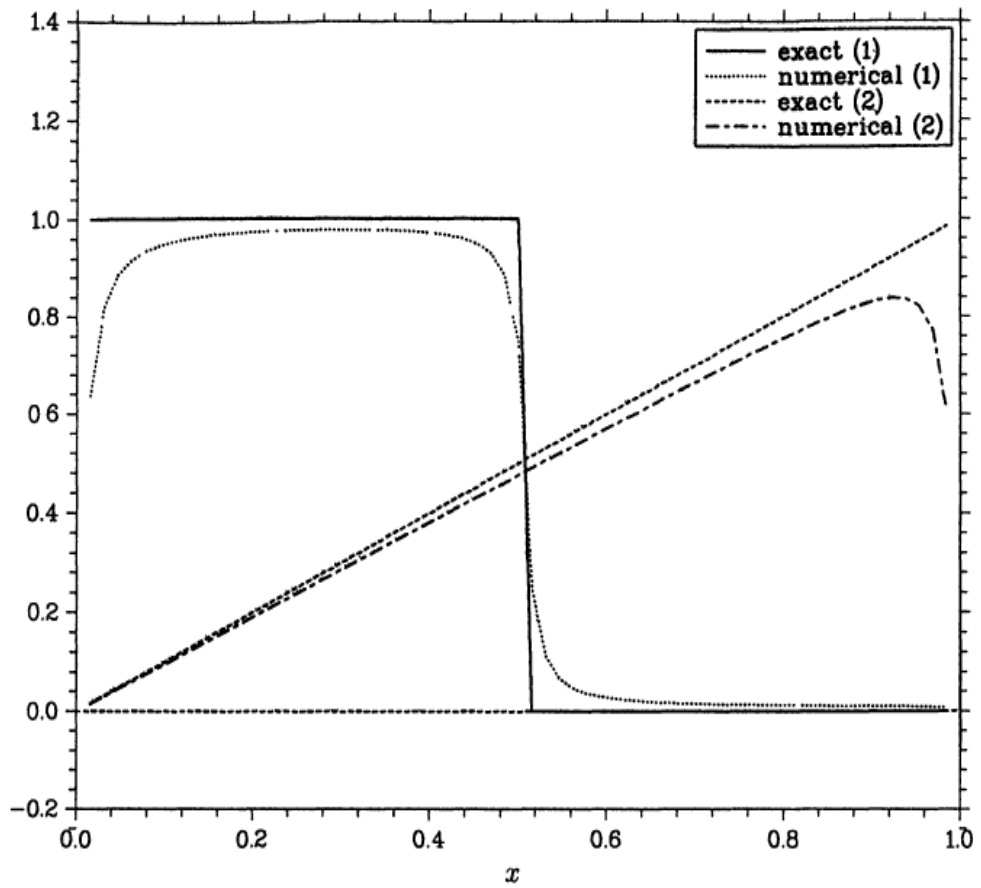
### 3.3 Компьютерлік есептеулер нәтижелері

Біз (93), (94), (97) есепте теңдеудің оң жағы (96) төмендегідей берілген жағдай үшін сандық есептеу жүргіздік:

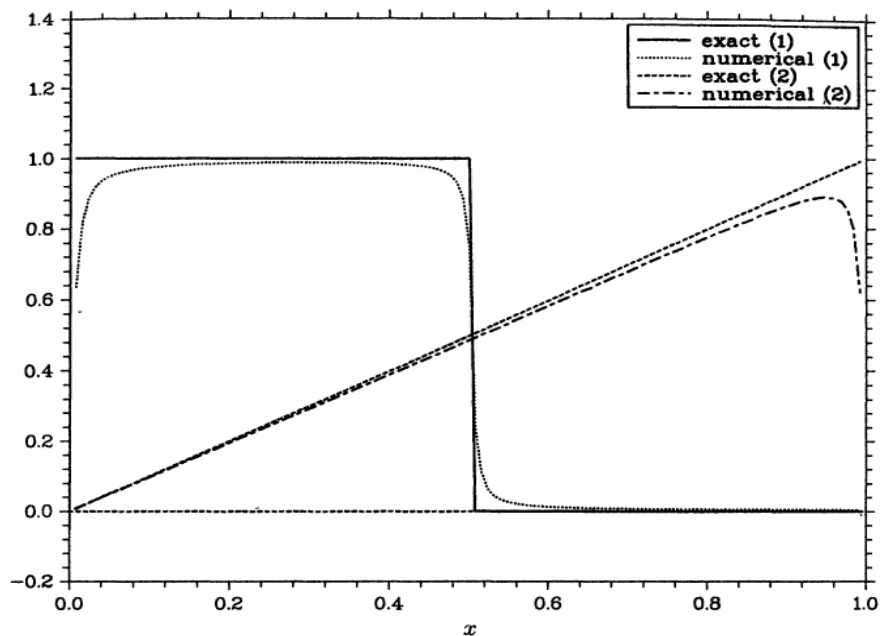
$$\varphi_1(x_2) = \begin{cases} 1, & 0 < x_2 < 0.5, \\ 0, & 0.5 < x_2 < 1, \end{cases} \quad \varphi_1(x_2) = x_2.$$

Қарастырылып жатқан есебімізді бірлік квадратта шешеміз, кері есеп үшін кіріс берілгендері, яғни (93), (94) тура есептің шешімі берілген оң жақ үшін оны шешу арқылы табылады.

Алдымен, кері есептің шешімін бастапқы берілгендерде қобалжыту болмаған жағдай үшін келтіреміз. Төменде кері есепті түрлі қадам қадамдармен шешу нәтижелері келтірілген (суреттер 32, 33 ).



32 Сурет – Есепті  $N_1 = N_2 = 65$  торда шешу



33 Сурет – Есепті  $N_1 = N_2 = 125$  торда шешу

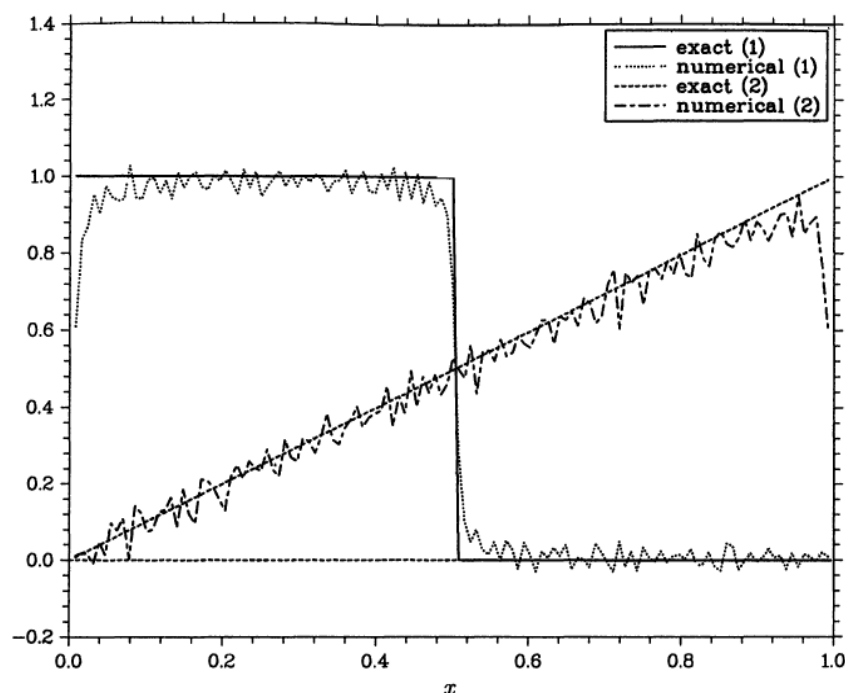
Келтірілген суреттерден сандық шешімнің дәл шешімге жинақталатындығы байқалады.



Бастапқы берілгендердің қателіктеріне сезімталдық (97) шекаралық шарттарадағы қобалжытулардың түрлі деңгейлері үшін жүргізілген есептеулер нәтижесі көрсетті. Қателік төмендегі формула арқылы жүргізілді:

$$\tilde{\mu}_1(x_2) = \mu_1(x_2) + 2\delta \left( \sigma(x_2) - \frac{1}{2} \right), \quad x_2 \in \omega_2,$$

мұнда  $\sigma(x_2) - [0,1]$  аралықта нормаль үлестірілген кездейсоқ функция, ал  $\delta$  қателік деңгейін береді. Төменде кері есептің сандық шешімі  $\delta = 0,003$  болғандағы шешімі келтірілген.



34 Сурет – Қателік деңгейі  $\delta = 0,003$  болғандағы сандық шешім ( $N_1 = N_2 = 125$ )

### 3.4 Итерациялық әдістерге сипаттама

Сызықтық теңдеулер жүйелерін шешудің итерациялық әдістерінің белгілі бір тобын проекциялық әдістер құрайды. Проекциялық әдістердің маңызы – жүйенің шешімі  $R^n$  кеңістіктің қандайда бір ішкеңістіктерінде итерациялық әдіспен табылатындығында. Бұл әдістердің қасиеті мынадай: жуық шешім ізделінетін ішкеңістік қаншалықты кең болса, жуық шешім дәл шешімге әр итерацияда соншалықты жақын болады.

$Ax = b$  жүйені шешуді қарастырайық, мұнда  $A$  ерекше емес матрица ( $\det A \neq 0$ ),  $b \neq 0$  - вектор.  $K \subset R^n$  және  $L \subset R^n$  ішкеңістіктер берілген болсын. Есеп мынадай қойылады:  $x \in K$  векторды табуымыз керек, ол жүйе шешімінің  $L$  ішкеңістікке қатысты оптималдығын қамтамасыз ететін болсын. Басқаша айтқанда, Петров-Галеркин шартының орындалуы талап етіледі:

$$(Ax, z) = (b, z), \quad \forall z \in L, \quad (3.1)$$

мұнда  $(\cdot, \cdot)$  – скаляр көбейтінді.

(3.1) шартты қанағаттандыратын  $x$  векторды  $Ax = b$  жүйенің жалпыланған шешімі деп атайды.

$r = b - Ax$  векторды алшақтық векторы деп атайды. Сонда (3.1) шартты мынадай жазсақ болады:

$$(b - Ax, z) = (r, z) = 0, \quad \forall z \in L. \quad (3.2)$$

(3.2) өрнек  $r = b - Ax$  алшақтық векторының  $L \subset \mathbb{R}^n$  ішкілікке ортогональ екендігін білдіреді:  $r \perp L$  ( $\perp$  – перпендикуляр белгісі). Сонымен сондай  $x \in K$  векторды табуымыз керек, ол үшін  $r = b - Ax \perp L$  шарты орындалуы қажет. Яғни біз қарастырып жатқан теңдеулер жүйесін шешу есебі шешімді  $L \subset \mathbb{R}^n$  ішкілікке ортогональ (перпендикуляр) болған  $K \subset \mathbb{R}^n$  ішкілікке проекциялау есебі болады.

$x^0$   $Ax = b$  жүйенің  $x^*$  дәл шешіміне бастапқы жуықтау болсын. Осы жуықтауды  $\delta \in K$  түзетумен сондай нақтылау керек, осы нақтыланған шешім алшақтығы  $L \subset \mathbb{R}^n$  ішкілікке ортогональ болсын:  $b - A(x^0 + \delta) \perp L$ .

Нақтыланған шешімнің алшақтығы мынадай болады:

$$r_{\text{жана}} = b - A(x^0 + \delta) = r^0 - A\delta, \quad \forall z \in L$$

мұнда  $r^0 = b - Ax^0$  бастапқы алшақтық. Сонда Петров-Галеркин шартын мынадай жазуымызға болады:

$$(r_{\text{жана}}, z) = (z^0 - A\delta, z), \quad \forall z \in L. \quad (3.3)$$

$V = v_1, \dots, v_n$  –  $n \times m$  өлшемді матрица, осы матрицаның бағандары  $K \subset \mathbb{R}^n$  ішкіліктің базисін, ал  $W = w_1, \dots, w_n$  – өлшемі  $n \times m$ , бағандары  $L \subset \mathbb{R}^n$  ішкіліктің базисін құрайтын матрица болсын. Жаңа жуықтауды мына түрде жазамыз:

$$x^1 = x^0 + \delta = x^0 + Vy,$$

мұнда  $y$   $\delta$  векторды  $V: \delta = Vy$  базис бойынша жіктеу коэффициенттері векторы.  $z \in L$  векторды да базис бойынша жіктейміз:  $z = Wq$ . Сонда (3.3) ортогональдық шартынан аламыз:

$$(r^0 - AVy, Wq) = (W^T r^0 - AVy, q) = 0.$$

$q \neq 0$  болғандықтан,  $y$  вектор үшін теңдеулер жүйесін аламыз:

$$W^T A V y = W^T r^0.$$

$W^T A V$  матрица ерекше емес матрица деп есептейік ( $\det W^T A V \neq 0$ ). Сонда аламыз

$$y = (W^T A V)^{-1} W^T r^0. \quad (3.4)$$

$$x^1 = x^0 + V (W^T A V)^{-1} W^T r^0. \quad (3.5)$$

(3.5) шарттан  $K \subset \mathbb{R}^n$  және  $L \subset \mathbb{R}^n$  ішкенеістіктері, сондай-ақ, олардың базистері  $W^T A V$  матрица ерекше емес матрица болатындай етіп таңдап алу керектігі шығады. Ал осы айтылғандарға  $A$  матрица ерекше емес матрица болғанның өзінде де кепілдік беру мүмкін емес. Екі маңызды жағдайда  $W^T A V$  матрица ерекше емес матрица болуын қамтамасыз ету мүмкін. Ол мынадай жағдайлар: егер  $A$  матрица және  $K \subset \mathbb{R}^n$  және  $L \subset \mathbb{R}^n$  ішкенеістіктер төменде келтірілген екі шарттың кез келген біреуін қанағаттандыратын болса:

- 1)  $A$  матрица оң анықталған және  $L = K$  болса;
- 2)  $A$  кез келген ерекше емес матрица және  $L = AK$  болса.

Қажет анықтамаларды қысқа еске түсіре кетеміз.

$A$  квадрат матрица *симметриялы матрица* деп айтылады, егер  $A^T = A$  болса.  $A$  симметриялы матрица *оң анықталған* деп айтылады, егер кез келген нөлге тең емес  $x$  вектор үшін скаляр көбейтінді  $(Ax, x) > 0$  болса. Сонда  $B = W^T A V$  матрица  $K \subset \mathbb{R}^n$  және  $L \subset \mathbb{R}^n$  ішкенеістіктердің  $V$  және  $W$  базистерінің кез келген матрицалары үшін ерекше емес матрица болады.

Бірінші жағдайды қарастырайық.  $V$   $K \subset \mathbb{R}^n$  ішкенеістіктің, ал  $W$   $L \subset \mathbb{R}^n$  ішкенеістіктің кез келген базисі болсын.  $K$  және  $L$  ішкенеістіктер бірдей болғандықтан,  $W$  - ны  $W = VG$  түрінде өрнектесек болады, мұнда  $G$  - өлшемі  $m \times m$  болған ерекше емес базистерді түрлендіру матрицасы. Сонда

$$B = W^T A V = G^T V^T A V.$$

$A$  матрица оң анықталғандықтан, ол ерекше емес матрица болады [3]. Сонда  $V^T A V$  матрица  $A$  матрицаға ұқсас матрица болып, ерекше емес матрица болады. Сонда  $B$  матрица ерекше емес матрицалардың көбейтіндісі ретінде ерекше емес матрица болады.

Матрицалардың ұқсастығы анықтамасын келтіре кетеміз.

Өлшемдері бірдей болған екі  $A$  және  $B$  матрицалар ұқсас деп айтылады, егер ерекше емес сондай  $C$  матрица бар болып,  $B = CAC^{-1}$  болса.

Ал енді екінші жағдайды қарастырып өтеміз.  $V$   $K$  ішкеністіктің, ал  $W$   $L$  ішкеністіктің кез келген базисі болсын.  $L = AK$  болғандықтан,  $W$  - ны  $W = AVG$  түрінде жазсақ болады, мұнда  $G$  өлшемі  $m \times m$  болған базисті түрлендірудің ерекше емес матрицасы. Сонда

$$B = W^T AV = G^T (AV)^T AV.$$

$A$  өлшемі  $m \times m$  болған ерекше емес матрица болғандықтан,  $AV$  матрицаның рангі толық, яғни  $(AV)^T AV$  ерекше емес матрица. Осыдан  $B$  матрицаның ерекше емес матрица екендігі келіп шығады.

Жалпы жағдайда проекциялық итерациялық әдіс алгоритмі мынадай:

1.  $K$  және  $L$  ішкеністіктерді таңдап алу керек.
2.  $K$  және  $L$  ішкеністіктер үшін  $V = v_1, \dots, v_m$ ,  $W = w_1, \dots, w_n$  базистерді табу керек.
3.  $r = b - Ax$  алшақтықты есептеу керек.
4.  $y = (W^T AV)^{-1} W^T r$  табу керек.
5.  $x = x + Vy$  деп аламыз.
6. Егер жинақталу шартына жетпеген болсақ, 1-ші пункттен бастап қайталау керек.

Айта кететін жәйт, нақты жағдайдарда  $(W^T AV)^{-1}$  матрицаны қалыптастырудың қажеті болмайды.

### 3.5 Сызықтық теңдеулер жүйелерін шешудің түйіндес градиенттер әдісі

Есептеулерде тиімді болатын проекциялық итерациялық әдістерді құрудың бір жолы – ішкеністіктер ретінде Крылов ішкеністіктерін алу болып табылады. Сызықтық теңдеулер жүйесін шешуде ішкеністіктерді пайдалану жолын алғаш болып 1931 жылы орыстың математика және механика ғылымдары саласындағы белгілі ғалымы А.Н.Крылов ұсынған. Ол негізінен кеме құру саласының жетекші маман-ғалымы болған.

**Анықтама.** Берілген оң бүтін  $m$  саны,  $v$  вектор және  $A$  матрица үшін Крыловтың ішкеністігі мынадай анықталады:

$$K_m, A, v = \text{span } v, Av, A^2v, \dots, A^{m-1}v.$$

Мұндағы белгілеу  $\text{span}$  - берілген векторлардың сызықтық қабықшасын білдіреді. Осы анықтамаға сай Крыловтың ішкеністігі -  $v, Av, A^2v, \dots, A^{m-1}v$  векторлардың мүмкін болған барлық сызықтық комбинацияларының жиыны (сызықтық қабықша).

Енді біз Крылов ішкеністігін пайдалануға қалай келсе болатындығын қарастырып кетеміз. Мынадай итерациялық процессті қарастырайық:

$$\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^{k-1} + \mathbf{r}^{k-1}, \quad (3.6)$$

бұл жерде  $\mathbf{r}^{k-1} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{k-1}$  алшақтық. (3.6) итерациялық процессті Ричардсон итерациялық процесі деп атайды. (3.6) формуланы мынадай жазсақ болады:

$$\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^0 + \mathbf{r}^0 + \mathbf{r}^1 + \dots + \mathbf{r}^{k-1}. \quad (3.7)$$

(3.6) теңдіктің екі жағында  $-\mathbf{A}$  көбейтіп және  $\mathbf{b}$  - ны қосып, аламыз:

$$\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^k = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{A}\mathbf{r}^{k-1} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{r}^{k-1},$$

мұнда  $\mathbf{I}$  - бірлік матрица. Яғни  $k$ -ші итерациядағы алшақтықты бастапқы жуықтаудағы алшақтықпен өрнектесек болады:

$$\mathbf{r}^k = (\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{r}^{k-1} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^k \mathbf{r}^0. \quad (3.8)$$

(3.8) – ды (3.76) – ға қойып, аламыз

$$\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^0 + \left( \sum_{j=0}^{k-1} (\mathbf{E} - \mathbf{A})^j \right) \mathbf{r}^0. \quad (3.9)$$

Осы формулаға қарап,  $\mathbf{x}^k$  жуықтау  $\mathbf{x}^0$  бастапқы жуықтаудан  $\delta$  түзетуді қосу арқылы табылады деп айтуымызға болады.

$$\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^0 + \delta^k$$

(3.9) – дан көрініп тұрғандай

$$\delta^k \in \text{span } \mathbf{r}^0, \mathbf{A}\mathbf{r}^0, \mathbf{A}^2\mathbf{r}^0, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{r}^0 = K_k \mathbf{A}, \mathbf{r}^0,$$

яғни түзету Крыловтың ішкеністігінен ізделетіндігі келіп шығады.

Жоғарыда айтып өткеніміздей, проекциялық итерациялық әдістер сызықтық теңдеулер жүйелерін шешуде кеңінен қолданылады. Осы класстағы әдістердің коэффициенттері матрицасы  $\mathbf{A}$  ерекше емес матрица болған жағдай үшін  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  жүйені шешудегі мағынасы мынадай: екі  $K$  және  $L$  ішкеністіктер берілген болып,  $L$  ішкеністікке оптималь болған  $\mathbf{x} \in K$  шешімді табу керек болады. Осы айтылған шешім алшақтығы  $L$  ішкеністікке ортогональ болуы керектігін білдіреді:  $L: \mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x} \perp L$ . Егер  $V$  және  $W$  арқылы  $K$  және  $L$  ішкеністіктердің базис векторларынан құралған матрицаларды белгілесек, онда

жуық шешімді табудың итерациялық процессін мынадай формуламен жазуымызға болады:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{V}(\mathbf{W}^T \mathbf{A} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{r}^k. \quad (3.10)$$

Осы формуланы біз жоғарыда келтіріп шығарған болатынбыз.

Сызықтық жүйелерді шешуде қолданылатын проекциялық әдістерде Крылов ішкеністігі (өлшемі бірден үлкен) қолданылады. Мұндай әдістерді *Крылов ішкеністігі әдістері* деп атайды. Крылов ішкеністігі әдістерінің есептеу алгоритмі екі кезеңнен тұрады:

1. Крылов ішкеністігінде базисті құру.
2. Түзетуші түзетуді есептеу.

Түзетуші түзетуді есептеудің үш жандасуы бар:

1. *Рунц-Галёркин* жандасуы. Бұл жандасуда алшақтық Крылов ішкеністігіне ортогональ болып құрылады. Бұл жандасу түйіндес градиенттер әдісінде (ТГӘ) және толық ортогональдау (ТОӘ) әдісінде қолданылады.
2. *Алшақтықты минимумдау* жандасуы. Әрбір итерацияда алшақтық векторының нормасы минимумдалады. Бұл жандасу Крылов ішкеністігіндегі минималь алшақтықтар әдісі және жалпыланған минималь алшақтықтар әдісінде қолданылады.
3. *Петров-Галёркин* жандасуы. Осы топтағы әдістер биортогональ базисті құруға негізделген. Бұл топтағы әдістерге битүйіндес градиенттер әдісі, битүйіндес градиенттердің стабилизацияланған әдісі және квазиминималь алшақтық әдістері жатады.

Крылов ішкеністігі әдістері маңызды қасиеттерге ие, сондықтан олар сызықтық теңдеулер жүйелерін шешуде кеңінен қолданылады. Осы топтағы әдістердің маңызды қасиеттері мынадай:

1. Бұл әдістер ортогональдау тәсілін қолданғандықтан орнықты болады.
2. Бұл әдістер үлкен өлшемдегі сиретілген матрицалары бар жүйелер үшін тиімді, өйткені осы әдістердің ең көп есептеулерді қажет ететін амалы матрицаны векторға көбейту болып табылады. Матрица элементтері өзгермейді.
3. Бұл әдістерді коэффициенттер матрицасы  $A$  симметриялы болмаған жүйелерді де шешуде қолдануға болады.

Ал енді Крыловтың ішкеністігі әдістері топтарына жататын әдістердің ішінен түйіндес градиенттер әдісін қарастырамыз. Бұл әдістің жинақтылық жылдамдығы жоғары болып келеді, сондықтан ол дәлдік кіші берілген есептерді жуықтап шешуде кеңінен қолданылады. Әдістің ағылшынша аталуы CG - Conjugate Gradient Method.

Әдістің түйіндес градиенттер әдісі деп аталуы себебі мынадай: энергетикалық скаляр көбейтінді мағынасында ортогональ болған векторлар түйіндес векторлар деп аталады. Сондықтан бағыттаушы векторлар түйіндес

векторлар болады. Ал «градиент» сөзінің мағынасы осы векторлар функционал минимумын іздеуде бағыт ретінде пайдаланатын болғандықтан келіп шыққан.

Түйіндес градиенттер әдісінің алгоритмі төменде келтірілген.

Алдымен «нөльдік» итерацияда дайындық істер орындалады:

1.  $k = 0$  деп аламыз.
2.  $v^{(0)}$  берілген бастапқы жуықтау бойынша (әдетте,  $v^{(0)} = 0$ )  $r^{(0)} = f - Av^{(0)}$  алшақтықты есептейміз.
3. Қозғалыс бағыты ретінде  $p_1 = r^{(0)}$  аламыз.
4. Алғашқы және келесі итерацияларда ( $k = 1, 2, \dots$ ) төмендегі іс-әрекеттер орындаймыз:
5. Ағымдық итерация нөмерін есептейміз  $k = k + 1$ .
6. Коэффициентті есептейміз:
- 7.

$$\alpha_k = \langle r^{(k-1)}, r^{(k-1)} \rangle / \langle Ap_k, p_k \rangle.$$

( $\langle \cdot, \cdot \rangle - H_h$  кеңістіктегі скаляркөбейтінді)

8. Шешімге жаңа жуықтауды табамыз

$$v^{(k)} = v^{(k-1)} + \alpha_k p_k.$$

9. Жаңа алшақтықты есептейміз

$$r^{(k)} = r^{(k-1)} - \alpha_k Ap_k.$$

10. Итерациялық процесстің аяқталуы шартын тексереміз, мысалға,

$$\|r^{(k)}\| / \|b\|. \quad (\|\cdot\| - \text{норма, } \varepsilon - \text{шешім дәлдігі})$$

Егер шарт орындалса, онда алгоритм аяқталады.

11. Коэффициентті есептейміз

$$\beta_k = \langle r^{(k)}, r^{(k)} \rangle / \langle r^{(k-1)}, r^{(k-1)} \rangle.$$

12. Қозғалыстың жаңа бағытын анықтаймыз

$$p_{k+1} = r^{(k)} + \beta_k p_k.$$

13. 4 қадамға өтеміз.
14. Алгоритм соңы.

## ҚОРЫТЫНДЫ

Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер физика, химия, биология, техника және басқа да көптеген салалардағы процесстер мен құбылыстардың математикалық модельдері болып, осы процесстерді сипаттайды. Эллипстік типті теңдеулер стационар, яғни уақытта тәуелді болмаған көптеген физикалық, химиялық процесстерді сипаттайды. Оларға электр зарядтарының электр өрісіндегі үлестірімі, сұйықтықтың потенциал ағысы, кеуек денелердегі фильтрация есептері, денеде температураның стационар үлестірімі, сызықтық серпімділік теориясындағы кернеудің үлестірімі есептері және т.б. Көптеген физикалық есептер салдар-себеп сипатында болып, салдар белгілі болғанда себепті анықтау қажет болады. Мұндай жағдайда біз кері есепке келеміз. Ал бүгінгі таңда кері есептер ғылымның барлық салаларында көптеп кездеседі. Сонымен қатар, кері есептер қисынсыз есептер қатарына жатады, яғни есеп корректілігінің Адамар қойған үш шартының (есептің шешімі бар, есептің шешімі жалғыз, есептің шешімі орнықты) кемінде біреуі орындалмайды. Көптеген практикалық маңызды қолданбалы есептер қисынсыз есептер болып келеді және мұнадай есептер ғылым мен техниканың көптеген салаларында кездесетін болғандықтан оларды зерттеу және шешу әдістерін құрудың маңызы үлкен.

Диссертациялық жұмыста екі өлшемді эллипстік теңдеудің белгісіз оң жағын тіктеу кері есебін шешудің сандық алгоритмдерін құру мәселесіне арналған. Қарастырылған кері есеп сызықтық кері есеп болып, теңдеудің белгісіз оң жағы екі айнымалылардың бірінен тәуелді екі белгісіз функциялардың сызықтық комбинациясы болған жағдай үшін қарастырылған. Кері есеп үшін қосымша шарт айнымалылардың өзгеру аймағының шекарасында екінші текті шартпен берілген (Нейман шарты). Жұмыста зерттелген кері есеп шешімі екі белгісіз функциялар жұптығын анықтау үшін екі торлық Пуассон теңдеулері үшін жүйеге келтірілген. Осы екі теңдеулер шекаралық шарттар арқылы байланыстырылған. Қарастырылған кері есеп классикалық емес есеп болатындығын айта кеткен жөн. Осы алынған есепте шекаралық шарттар біртекті болмағандықтан, есепті әрі қарай шешуді жеңілдету үшін есеп біртекті шекаралық шарттармен қайта сипаталған. Классикалық емес шеттік есепті дискреттеу жалпы схема бойынша жүргізілген, бұл құрылған схеманы басқа да күрделі есептерге қолдануға мүмкіндік береді. Торлық есептің жалпы шешімін құру жолымен эллипстік теңдеудің белгісіз оң жағын тіктеу кері есебі жүктелген эллипстік теңдеу үшін шеттік есепті шешуге келтірілген. Осы жүктелген эллипстік теңдеу үшін шеттік есепті шешу



алгоритмі Фурье әдісін қолдану жолымен құрылған. Матлаб қолданбалы математикалық жүйесінде құрылған кері есепті сандық шешу алгоритмінің жұмысы үлгілік берілгендермен есептеу тәжірибелері жүргізілген және олар есептеу алгоритмінің жоғары деңгейде жарамдылығын көрсетті.

Кіші тор қадамдарында сандық шешімнің дәл шешімге жинақталуы жақсы байқалады. Ал шекаралық шарттарда (Нейман шарттары) қобалжыту болғанда есептеу нәтижелерінің сезімталдығы артатындығы көрінді, яғни бұл жағдайда сандық шешімде дәл шешімнен ауытқулар сезіле бастайды.

## ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Алифанов О.М., Артуяхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1984.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1979.
3. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. - М.: Наука, 1966.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.- М.: Наука, 1977.
5. Самарский А. А., Андреев В. Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. - М.: Наука, 1976.
6. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. - М.: Наука, 1978.
7. Prilepko A. I., Orlovsky D.G., Vasin I. A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. - N.Y.: Marcel Dekker, 2000.
8. М.М.Лаврентьев, В.Г.Романов, С.П.Шишатский. Некорректные задачи математической физики и анализа. – М.: Наука, 1980.
9. Соловьев В. В. Обратные задачи для уравнений эллиптического и параболического типов в пространствах Гельдера // Дис. докт. физ.-мат.наук: 01.01.02. М., 2014.
10. Rundell W. An Inverse Problem for an Elliptic Partial Differential Equation // J. Math. Anall. Appl. 1987. Vol. 126. P. 329–340.
11. Хайдаров А.Один класс обратных задач для эллиптических уравнений // Сиб. мат.журн. 1990. Т. 31, №4. С. 149–159.
12. Isakov V.M. Inverse Problems for Partial Differential Equations. N.Y.: Springer, 2006.
13. Соловьев В. В. Разрешимость обратных задач для эллиптического уравнения в цилиндре // Вестник МГОУ. Сер. Физика – Математика. 2012. № 1. С. 27–38.
14. Костин А. Б. Контрпримеры в обратных задачах для параболических, эллиптических и гиперболических уравнений //Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 2014. Т. 54, № 5. С. 779–792.
15. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. – М.: Едиториал УРСС, 2004.
16. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач.-М.: Наука,1990.
17. Вабищевич П. Н. Обратная задача восстановления правой части эллиптического уравнения и ее численное решение // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 2. С. 277–284.
18. С. Б. Сорокин, Экономичный алгоритм для численного решения задачи идентификации правой части уравнения Пуассона, Сиб. журн. индустр. матем., 2018, том 21, номер 2, 101–107. DOI: <https://doi.org/10.17377/sibjim.2018.21.209>
19. Вержбицкий В.М Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2002.

20. С.И. Кабанихин. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск.: Сибирское научное издательство, 2009.
21. A.Kirsch. An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems. – Springer, 2011.
22. П. Н. Вабищевич, О единственности решения обратной задачи определения правой части эллиптического уравнения // Дифференц. уравнения, 1982, том 18, №8, с. 1450–1453.
23. А.А Самарский. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. - 616 с.
24. А.А Самарский , А.В Гулин. Численные методы математической физики. 2-е изд. - М.: Научный мир, 2003.