Жоғары оқу орындарының Қауымдастығы

Д. Н. ШУКАЕВ

КОМПЬЮТЕРМЕН МОДЕЛЬДЕУ НЕГІЗДЕРІ

Алматы, 2011

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫНЫҢ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Д. Н. ШУКАЕВ

КОМПЬЮТЕРМЕН МОДЕЛЬДЕУ НЕГІЗДЕРІ

ОҚУЛЫҚ

Қазақстан Республикасының Білім және
ғылым министрлігі оқулық ретінде ұсынған

Алматы, 2011

УДК 004.4
ББК 32.973-018.2
Ш 19

Пікір берушілер:

ТУКЕЕВ У.А., әл-Фараби атындағы ҚазҰУ-ң «Ақпараттық жүйелер» кафедрасының меңгерушісі, техн. ғыл. д-ры., проф.

БИТТЕЕВ Ш.Б., М. ТЫНЫШПАЕВ атындағы ҚазККА-ң «Автоматизациялау және басқару» кафедрасының меңгерушісі, техн. ғыл. д-ры., проф.

ӨТЕПБЕРГЕНОВ И.Т., Халықаралық бизнес академиясының «Ақпараттық жүйелер» кафедрасының меңгерушісі, техн. ғыл. д-ры., проф.

Қазақстан Республикасының Білім және ғылым
Министрлігінің 2011 жылғы жоспары бойынша басылды

Шукаев Д.Н.

Ш 19 **Компьютермен модельдеу негіздері:** Оқулық.– Алматы: ЖШС РПБК «Дәуір», 2011. – 200 б.

ISBN 978-601-217-153-2

Ұсынылып отырған оқулық әртүрлі күрделі жүйелердегі процестерді компьютермен модельдеу және талдаудың негіздері мен әдістерін, математикалық аппаратын, типтік математикалық сұлбаларын оқып үйренуге және компьютермен модельдеу мен талдау нәтижелерін әртүрлі қызмет салаларында қолдану тәсілдерін игеруге арналған.

Оқулық “Ақпараттық жүйелері”, “Есептеу техникасы және бағдарламалық қамтамасы” мамандықтарының, ақпараттық технологияларды қолдану және әртүрлі процестерді компьютермен басқару салаларында мамандық алатын басқа да студенттер, магистранттар және докторанттарға бағытталған. Сонымен қатар, бұл кітап компьютермен модельдеуді өз жұмысында қолданатын инженерлерге және басқа мамандарға біраз жаңа ақпарат бере алады.

УДК 004.4
ББК 32.973-018.2

ISBN 978-601-217-153-2

АЛҒЫ СӨЗ

Қазіргі кезде компьютермен модельдеу және талдау имитациялық модельдерді қолдануға негізделген ақпараттанудың қарқынды дамып келе жатқан бағыты болып табылады және экономикада, өнеркәсіпте, экологияда, қойнауларды пайдалануда жәңе басқа да адам қызмет ететін салаларда кеңінен қолданылады.

Назарға ұсынылған оқулық күрделі жүйелерде өтетін процесстерді компьютермен модельдеу принциптерін және әдістерін, оның математикалық аппаратын және типтік математикалық сұлбаларын оқып үйренуге және накты мысалдарды іске асыруды игеруге арналған.

Бұл кітап екі бөлімге біріктірілген 13 тараудан тұрады және автордың күрделі жүйелердегі процесстерді модельдеу және оңтайландыру аясындағы ғылыми тәжірибесінің қорытындысы және Қ.И.Сәтбаев атындағы Қазақ Ұлттық техникалық университетінде жоғарғы курс студенттеріне көптеген жылдар бойы дәріс оқу нәтижесінде қалыптасты.

Бірінші бөлімде кездейсоқ оқиғаларды, шамаларды, процесстерді, ағындарды имитациялау әдістерінің математикалық аппаратының жүйеленген мәтіні және оларды іске асыру алгоритмдері берілген.

Екінші бөлімде компьютермен модельдеуді ұйымдастырудың әдістемелік принциптері, әр түрлі күрделі жүйелерді модельдеуде қолданылатын типтік сұлбалар, сонымен қатар автордың және оның шәкірттерінің ғылыми зерттеулеріне негізделген әртүрлі күрделі объектілерді компьютермен модельдеудің нәтижелері келтірілген.

Бұл кітап студенттерге, аспиранттарға және компьютерді ғылыми және қолданбалы зерттеулерге пайдаланатын мамандарға арналған.

Ұсынынылып отырған оқулық Қ.И.Сәтбаев атындағы Қазақ Ұлттық техникалық университетінің техникалық кибернетика кафедрасының оқытушылары көмегімен жазылды. Автор, солардың ішінде техн. ғыл. кандидаты Жаксыбаева А.К., инженер Құрманғазы Н.Б., магистр Ерғалиева Н. әріптестерінің көмегін ерекше атап, оларға өз алғысын білдіреді.

КІРІСПЕ

К.1. Модельдеу

Адамзаттың табиғатты тану қабілетінің дамуы барысында көптеген перспективті ғылыми жолдар пайда болды. Солардың негізгілерінің бірі – модельдеу. Модельдеу кәзіргі кезде құбылыстарды, процесстерді танудың адамзат қабылдаған құралы болып табылады. Модельдеу – күрделі процесстер мен құбылыстарды зерттеу үшін накты жүйелердің өздерін эксперименттеу орнына олардың модельдерін қарастыруға мүмкіншілік береді. Жүйелердің жұмысын ұйымдастырудың ақылға сыйымды шешімдерін қабылдау үшін жүйелердің барлық сипаттамаларын білудің қажеті жоқ, көбінісе оның қарапайым, жуықтатылған мүсінін білген жеткілікті. Мысалы, мұнай қабылдайтын порттың жұмысын талдағанда танкерлерді, тек одан белгілі мөлшерде мұнайды құйып алатын үлкен құмыра ретінде қарау қажет. Оның каюталары, экипажы, тағы басқа құрал-жабдықтары бар кеме екені еске алынбайды. Сондықтан накты объектілер, олардың қарапайымдалған, абстракцияландырылған көріністерімен алмастырылады. Бұл көріністер түпнұсқа объектілердегі құбылыстарды, олардың қойылған мәселелерді шешуге маңызды қасиеттерін көрсете алатындай болып таңдалады. Осындай қарапайымдалған объект – модель деп аталады.

Модель – нақтылы объекттің немесе объектті құрайтын бөлшектердің өзгеру заңдарын, олардың байланыстарын бейнелейтін құбылыстардың тұрпайланған аналогы болып саналады. Модельді құру және оны талдау – модельдеу деп аталады. Модельдеу барысында экономикадағы, өндірістегі, қаржы салаларындағы, қызмет көрсету жүйелеріндегі көптеген проблемалардың шешімдері табылады.

Модельдеуді мына жағдайларда қолдануға болады:

– әртүрлі процесстердің тиімділігін арттыру үшін олардың модельдерімен эксперименттеу немесе сандық бағалау жүргізу;

– жаңа жүйелерді зерттеу, оларды өзгерту немесе жетілдіру құралы ретінде;

– қолданысқа болашақта енгізілетін жүйелер немесе жұмыс шарттарымен персоналды таныстыру құралы ретінде;

– жаңа идеяларды, жүйелерді немесе тәсілдерді тексеру әлде сипаттау үшін;

– болашақтағы процестердің нәтижелерін болжау құралы ретінде.

Модельдеу арқылы жасалған жоспарларды, жобаларды, ұсыныстарды, оларды қолданар алдында тексеруге, өзгертуге болады.

К.2. Модельдеу әдістерін жіктеу

Ғылымда, техникада және экономикада қолданылатын модельдерді екі топқа, яғни физикалық және математикалық модельдер тобына, бөлуге болады.

Физикалық модельдер зерттеліп отырған процесстерді, оның физикалық мәнін сақтай отырып, бейнелейді. Сондықтан физикалық модель ретінде, қарастырылып отырған объекттің зерттеуге маңызды қасиеттерін сақтайтын, нақтылы жүйелер қолданылады. Физикалық модель өзінің түп нұсқасынан көбінесе өлшемімен ғана ерекшеленеді. Осындай модельдердің бірнеше мысалын келтірейік.

Планетарийлерде орнатылған күн жүйесінің моделі жыл мерзімдерінің өзгеруін, күн мен айдың тұтылуын және тағы басқа астрономиялық құбылыстарды бейнелейді. Белгілі бір өнімді шығаратын шағын лабораториялық қондырғы осы өнімді өндіретін өнеркәсіптің моделі ретінде қарастырыла алынады.

Осы мысалдардан физикалық модельдер нақтылы және арнайы болатыны, айқын және сенімді нәтиже беретіні көрініп тұр. Дегенмен физикалық модельдер эксперименттеуге икемсіздеу келеді, оларды жасау көбінесе қымбатқа түседі. Сондықтан бұл модельдерді қолданатын жағдай жиі кездеспейді.

Оған қарағанда математикалық модельдердің қолдану өрісі кеңірек. Алдымен математикалық модельдеу не деген сұраққа мына анықтамадан жауап алайық.

К.1-анықтама. Математикалық модельдеу деп, берілген процестерді зерттеу үшін физикалық тәні әртүрлі болса да, ұқсас математикалық өрнектермен бейнеленетін құбылыстарды қарастыру әдісі аталады.

Мысалы, сызықтық теңдеулер, немесе теңсіздіктер жүйелері кәсіпорынның әлде транспорт мекемесінің жұмысын жоспарлайтын модель ретінде қарастырыла алынады. Өзінің универсальдылығымен қолдануға біршама жеңілділігі арқасында математикалық модельдеу әртүрлі зерттеулерде кең пайдаланылады.

Дегенмен, соңғы жылдары өнеркәсіп басқару саласында өте күрделі мәселелер пайда болуына қарасты, математиканың классикалық сұлбаларына негізделген модельдер көбінесе дұрыс нәтиже бере алмай жүр. Бұл дағдарыстың мына себептерін келтіруге болады. Қазіргі заманда ғалымдар мен инженерлердің зерттейтін жүйелері күрделі ғана емес, сонымен қатар бірімен бірі тығыз байланысып жатқан көптеген объекттерден тұратыны мәлім. Ал осындай жүйелердің елеулі ерекшеліктері бар. Олар мыналар:

- жүйелерді құрайтын объекттердің қарым-қатынастары өте шиеленісті болуы;
- қойылған мәселелердің дұрыс шешімін табу үшін әртүрлі кездейсоқ ауытқулардың әсерлерін ескеру керектігі;
- осы жүйелерде өтетін процесстердің динамикалық қасиеттерінің маңыздылығы.

Осы аталған себептер математикалық модельдеудің жаңа бір бағытының пайда болуына әкелді. Бұл - имитациялық модельдеу бағыты.

К.2-анықтама. Имитациялық модельдеу деп, әртүрлі объекттер мен жүйелердегі процесстерді, олардың ықтималдылық қасиеттерін ескере отырып, компьютердің көмегімен бейнелейтін және керекті көрсеткіштерін анықтайтын әдісті атайды.

Соны мен, имитациялық модельдеу - күрделі және бірімен бірі тығыз байланысты бірнеше объекттерден тұратын жүйелерді зерттеуге бейімделген әдіс.

Қазіргі кезде осы әдіс көп салаларда әртүрлі ғылыми және қолданбалы зерттеулерде пайдаланылып жүр. Солардың ішінде мына салаларды атауға болады:

- кәсіпорындардың жұмыс барысының бағдарламасын жасау;

- автоматты телефон станцияларының қызмет көрсету жүйелерін жобалау;
- көше жүрісін реттеу;
- қойма қорын басқару;
- қару-жарақтың қолдану сапасын бағалау;
- көпшілікке қызмет көрсету жүйелерін жобалау және тағы басқалар.

К.2. Имитациялық модельдеудің мағынасы мен мүмкіншілігі

Имитациялық модельдеуге тағы бір анықтама келтірейік - бұл әртүрлі күрделі жүйелердің математикалық модельдері мен компьютерді пайдалану арқылы эксперимент жүргізуге бейімделген сандық әдіс [1].

Бұл әдісті қолданудың негізі ретінде компьютер арқылы іске асырылатын арнайы модельдеуші алгоритм пайдаланылады. Осы алгоритм, қарастырылып отырған күрделі жүйенің элементтерінің күйін, олардың бір-бірімен байланыстарын және әртүрлі кездейсоқ ауытқулардың әсерін ескере отырып, модельдеуге тиіс. Ал осы әртүрлі ауытқу факторларын бейнелеу үшін кездейсоқ сандар қолданылады.

Осы кездейсоқ сандардың көмегімен нешетүрлі ықтималдық заңдылықтарына бағынышты кездейсоқ шамалар, кездейсоқ процесстер, немесе кездейсоқ ағындарды компьютермен модельдеуге болады.

Айта кететін тағы бір жәй, осы модельдеуші алгоритм, зерттеліп отырған жүйелерде өтіп жатқан процесстерді сипаттаған кезде, олардың әрбір қарапайым қадамын оның логикалық сұлбасына және уақыт тізбегіне сәйкес бейнелеуі қажет.

Сонымен, модельдеуші алгоритм, алғашқы берілген деректерді пайдаланып, зерттеліп отырған процесстердің уақыттың әртүрлі мезгілдеріндегі жағдайын болжауға мүмкіншілік береді.

Осы келтірілген мәліметтерден имитациялық модельдеудің күрделі жүйелерді зерттеуге бейімделгенін және басқа модельдеу әдістеріне қарағанда біраз артықшылықтары бар екенін байқауға болады.

Имитациялық модельдеудің негізгі артықшылықтарының бірі, онымен зерттелетін күрделі жүйелер әр тәңді элементтерден тұра алатындығы. Мысалы, олардың бірі үздіксіз әрекетті болса, екіншісі дискретті бола алады. Екіншіден, бұл элементтер көптеген күрделі мәнді ауытқулардың әсеріне ұшырауы, немесе оларда өтіп жатқан процесстер өте күрделі және шиеленіскен өрнектермен бейнеленуі де мүмкін. Мұндай модельдеу ешқандай арнайы құралдар мен қондырғылар жасауды да қажет етпейді. Тағы бір айтып кететін жәй, ол имитациялық модельдеу кезінде зерттеліп отырған жүйелердің бастапқы шарттары мен әртүрлі параметрлерінің мәндерін оңай өзгертуге болатындығы.

Имитациялық модельдеу басқару жүйелерін автоматтандыру барысында да өте кең қолданылатынын атап өтпеуге болмайды. Осындай модельдеудің арқасында қаралып отырған процесстердің басқаруға ыңғайлы параметрлері мен айнымаларының мәндерін, немесе нұсқау ақпараттары ағынының ең тиімді бағыттарын анықтап, осы деректерді оптимальды басқару алгоритмдерін жасау үшін қолдануға болады.

Имитациялық модельдеу арқылы әртүрлі басқару принциптерін бағалауға да, бірнеше басқару жүйелерінің ішінен ең тиімдісін таңдауға да, осы жүйелердің болашақтағы жұмыс істеу қабілетін болжауға да болады.

Атап өтілген артықшылықтарымен қатар имитациялық модельдеудің, басқа да сандық әдістерге тән, елеулі кемшілігі де бар. Ол осы әдіспен алынған нәтижелердің бастапқы берілген шарттар мен параметрлердің мәніне тікелей байланыстылығы, яғни әр алынған нәтиже зерттеліп отырған процесстердің алдын-ала белгіленген бір ғана күйіне сәйкес келетіндігі.

Алайда, осы елеулі кемшілігіне қарамастан, имитациялық модельдеу кәзіргі кезде күрделі жүйелерді зерттейтін ең нәтижелі әдісі екені мәлім. Ал біраз жаңа жүйелерді жобалау кезінде имитациялық модельдеуден басқа ешқандай әдіс осы жүйелердің болашақ уақыттағы жәй-күйін болжай алмайды.

К.3. Имитациялық модельдеудің қарапайым мысалы

Имитациялық модельдеудің негізін дұрыс түсіну үшін мына қарапайым мысалды талқылайық. Жаз айларында көшенің бұрышында қарбыз-қауын сатушы қызмет көрсетіп отырсын. Оның бір сағат ішінде, мысалы 9.00 дан 10.00-ға дейінгі, жұмысын имитациялық модельдеу арқылы бейнелейік. Осы сатушыдан қарбыз-қауын алу ниеті бар адамдар келетін уақыт мезгілдерінің аралығын бірқалыпты үлестірімді кездейсоқ шама деп есептейік және осы аралық ретінде нольден он минутқа дейінгі уақыт мөлшерін тағайындайық. Яғни $\tau_{ap} \in [0,10]$ болсын.

Сатушының әрбір клиентке қызмет көрсету уақытын да кездейсоқ шама деп есептеп, оның шекті мәндерін бір мен алты минутқа теңейік - $\tau_{кк} \in [1,6]$.

Имитациялық модельдеудің нәтижесі ретінде клиенттердің қарбыз-қауын алуға жұмсаған уақытының орта шамасын (күту мен қызмет көрсету уақыттарын қоса) және сатушының жұмыссыз отыратын уақытының мөлшерін қарастырайық.

Енді осы қарапайым жүйенің жұмысын модельдеуге кірісейік. Ол үшін, клиенттердің келу мезгілдерінің тізбегін модельдеу әдісін таңдау керек. Әзірше, осы мезгілдерді бейнелеу үшін бірінші класс оқушысының оқу құралдары ішіндегі бір мен онға дейінгі сандар жазылған кішкентай тақташаларды алайық. Егер осы тақташаларды қораптың ішінен таңдамай бір-бірден алып отырса, сол тақташаларда жазылған сандарды клиенттердің аралығын бейнелейтін уақыт мөлшері деп есептеуге болады. Ал әрбір оқушы баланың қалтасынан табылатын кубикті жерге лақтырып, жоғарғы бетінде жазылған санды қарасақ бірден алтыға дейінгі цифрдің кездейсоқ бір мәнін көреміз. Осы цифр сатушының кезектегі клиентіне жұмсаған уақытын бейнелесін. Осы екі операцияны бірнеше рет қайталап, клиенттердің келетін мезгілінің аралығын және сол кісілерге жұмсалған уақыт мөлшерін сипаттайтын екі уақыт тізбегін анықтауға болады.

К.1-кестеде осы жүйенің бір сағат ішіндегі жұмыс барысын имитациялық модельдеу нәтижесі келтірілген. Осы деректерден бір клиентке қызмет көрсетуге сатушы жұмсайтын уақыттың орташа мөлшері

$$\tau = \frac{44+13}{12} = 4{,}83\, мин.$$

тең екені, ал сатушының бос отырған мерзімі бүкіл жұмыс мерзімінің 27%-ын құрайтыны көрініп тұр.

Осы қарапайым мысалдың өзінен әртүрлі кездейсоқ заңдылықтардың имитациялық модельдеуде орны ерекше зор екені айқындалып отыр. Сондықтан осы оқулықтың бірінші бөлімі әртүрлі кездейсоқ заңдылықтарды компьютермен модельдеу әдістерімен танысуға арналады.

К.1-кестесі

Клиент-тер	Клиент-тердің аралығы-ның мөлшері $\tau_{ар}$	Қызмет көрсетуге жұмсал-ған уақыт мөлшері $\tau_{кк}$	Клиент-тің келген мезгілі	Клиентке қызмет көрсете бастау мезгілі	Клиенттің кезекті күту уақыты	Клиентке қызмет көрсетіп болған мезгілі	Сатушы-ның бос отырған уақыты
1	0	2	9.00	9.00	0	9.02	0
2	8	3	9.08	9.08	0	9.11	6
3	1	6	9.09	9.11	2	9.17	0
4	6	4	9.15	9.17	2	9.21	0
5	3	6	9.18	9.21	3	9.27	0
6	9	1	9.27	9.27	0	9.28	0
7	8	3	9.35	9.35	0	9.38	7
8	2	5	9.37	9.38	1	9.43	0
9	1	2	9.38	9.43	5	9.45	0
10	7	4	9.45	9.45	0	9.49	0
11	3	2	9.48	9.49	1	9.51	0
12	6	6	9.54	9.54	0	10.00	3
Барлығы 44				14		16	

І-бөлім. КЕЗДЕЙСОҚ ЗАҢДЫЛЫҚТАРДЫ МОДЕЛЬДЕУ

1-тарау. ЖАЛҒАН КЕЗДЕЙСОҚ САНДАРДЫ МОДЕЛЬДЕУ

1.1. Жалған кездейсоқ сандар және оларды модельдеу принципі

Күрделі жүйелерді имитациялық модельдеу әдісімен зерттегенде, кездейсоқ оқиғалар, кездейсоқ шамалар және басқа әртүрлі кездейсоқ процесстер кең қолданылады. Осы кездейсоқ заңдылықтарды компьютермен имитациялаудың әдістері $[0;1]$ кесінді аралығында бірқалыпты үлестірім заңдылығы бар кездейсоқ сандардың тізбегін модельдеуге және осы тізбекті функционалдық түрлендіруге негізделген. Бастапқы, немесе базалық кездейсоқ сандардың тізбегі ретінде, $[0;1]$ кесінді аралығында бірқалыпты үлестірілген, ξ кездейсоқ шамасының (z_j) нақтыламаларының тізбегін таңдап алу, келесі екі факторға негізделеді:

1) бірқалыпты үлестірілген кездейсоқ сандарды модельдеу проблемасы ғалымдардың компьютер дамуының алғашқы күндірінен бастап назарын аударды да, олар кездейсоқ сандарды имитациялаудың көптеген тиімді әдістерін жасады;

2) бірқалыпты үлестірім кездейсоқ заңдылықтардың ең қарапайымы болғандықтан оны оңай математикалық түрлендіруге болады.

Кездейсоқ ξ шамасы $[a,b]$ аралығында бірқалыпты үлестірім заңына бағынады деп есептеу үшін, оның үлестірім тығыздығының функциясы $[a,b]$ аралығында тұрақты оң мәнге, ал одан тысқары жерде нөлге тең үздіксіз функциямен сипаттaлуы керек:

$$f(z)=\begin{cases}1/(b-a), & \text{егер} \quad z\in[a,b],\\ 0, & \text{егер} \quad z\notin[a,b],\end{cases}$$

Сонда ξ кездейсоқ шамасының тағы бір сипаттамасы болатын үлестірім функциясының түрі төмендегідей болады:

$$F(z) = \begin{cases} 0, & \text{егер } z < a; \\ (z-a)/(b-a), & \text{егер } a \le z \le b; \\ 1, & \text{егер } z > b. \end{cases}$$

Математикалық үміті, дисперсиясы және орта квадраттық ауытқуы сәйкесінше, мынаған тең:

$$m_Z = \int_a^b zf(z)dz = (a+b)/2$$

$$\sigma_Z^2 = \int_a^b (z - m_z)^2 f(z)dz = (b-a)^2/12;$$

$$\sigma_Z = (b-a)/2\sqrt{3}.$$

ξ шамасы $[0;1]$ аралығында бірқалыпты үлестірілген жекеленген жағдайда, жоғарыда келтірілген сипаттамалар мынадай болады:

$$f(z) = \begin{cases} 1, & \text{егер } z \in [0,1], \\ 0, & \text{егер } z \notin [0,1], \end{cases}$$

$$F(z) = \begin{cases} 0, & \text{егер } z < 0; \\ z, & \text{егер } 0 \le z \le 1; \\ 1, & \text{егер } z > 1. \end{cases}$$

$$m_z = 1/2; \qquad \sigma_z^2 = 1/12; \qquad \sigma_z = 1/2\sqrt{3}.$$

$[0;1]$ аралығында бірқалыпты үлестірілген ξ шамасының әртүрлі кездейсоқ заңдылықтарды модельдеудегі маңызды ролін ескере отырып, оны компьютермен имитациялау әдістерінің бірнешеуін қарастырайық. Бұл әдістердің барлығы рекуррентті қатынастарға негізделген және тек қана жалған кездейсоқ сандарды тудырады.

Анықтама. *Жалған кездейсоқ сандар деп кездейсоқ шаманың математикалық өрнектер көмегімен, дәлірек айтқанда ре-*

курренттік қатынастар арқылы, алынған нақтыламаларын айтады.

Жалған кездейсоқ сандардың ықтималдық қасиеттерінің нағыз кездейсоқ сандардың қасиеттерінен айырмашылығы болатыны айқын. Сондықтан, бұл сандарды модельдеу әдістерін жасағанда оларға қатаң талаптар қойылады. Жақсы әдістердің көмегімен алынған кездейсоқ сандар тізбегі бірқалыпты үлестірілген, статистикалық тәуелсіз және қайталанбайтын сандардан тұруы тиіс. Сонымен қатар, бұл әдістер тез жұмыс істеуі және компьютер зердесінің аз көлемін пайдалануы керек. Көрсетілген талаптар орындалған жағдайда ғана жалған кездейсоқ сандардың нағыз кездейсоқ сандардан ерекшелігін ескермеуге болады.

Жалған кездейсоқ сандарды моделдеудің іс жүзінде қолданылатын әдістерінің көбі, 1-ретті рекурренттік қатынастарға негізделген мына формуламен байланысты:

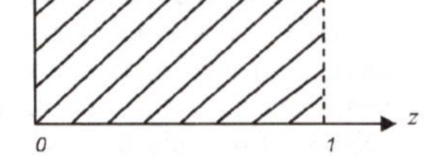
$$z_{i+1} = \Phi(z_i). \qquad (1.1)$$

Мұндағы z_0 - берілген шама. Бірақ бұл формулаға біраз талаптар қойылады. Шынымен, (1.1) рекурренттік қатынасы арқылы есептелген $\{z, \Phi(z)\}$ координатты нүктелер (1.1-сурет) тіктөртбұрыш жазықтығында бірқалыпты жатпай, тек қана $\Phi(z)$ қисығының үстіне орналасады.

Сондықтан, кез келген функцияны (1.1) формуласына қоя салып, жақсы нәтижеге жете алмаймыз. Демек, жалған кездейсоқ сандарының "жақсы" тізбегін, графигі шаршы жазықтығын тығыз толтыратын функция ғана, тудыра алады. Мысал ретінде мына функцияны келтіруге болады. (1.2-сурет):

$$z_{n+1} = D(gz_n).$$

1.1-*сурет*



1.2-*сурет*

Мұндағы D бөлшектің ажыратылу операциясы, ал g үлкен сан [2]. Көрсетілген шарт "жақсы" жалған кездейсоқ сандар тізбегін тудыру үшін (1.1) формула қажетті, бірақ жеткіліксіз. Шынында, алғашқы кезде $\varPhi(z)$ функциясының түрі күрделі және қиын түсіндірілетіндей етіп таңдалған, мысалы:

$$\varPhi(z) = 10^{-2k}\, Ц\left[10^{-2k} D\left(10^{k} z^{2}\right)\right]. \qquad (1.2)$$

Мұндағы $Ц$ бүтін бөлігін табу операциясы.

Бірақ (1.2) формуласындағы функцияның түрін таңдаудың нақтылы теориясы болмағандықтан бұл формула көбінесе қолайсыз кездейсоқ сандардың тізбегін туғызып жүрді. Мысалы, мұндай функцияның көмегімен алынған кезекті сан, ойламаған жерден, кейде нольге тең болуы мүмкін. Ал, бұлай болған жағдайда, келесі сандардың бәрі де нольге теңесетіні ақиқат. Осы принциппен туғызылған тізбектердің қайталану периоды да көбінесе кішігірім санмен сипатталатын еді. Сондықтан жиырмасыншы ғасырдың 40-шы жылдарының аяғынан бастап ғалымдар $\varPhi(z)$ функциясының түрін таңдауда сандар теориясы аппаратын қолдана бастады. Бұл аппарат жалған кездейсоқ тізбектерінің қайталану периодының ұзындығын алдын-ала білу мүмкіндігін берді және жаңаша алынған кездейсоқ сандардың қажетті сапаға ие болуын қамтамасыз етті.

Жалған кездейсоқ сандарды модельдеудің кең таралған белгілі бірнеше әдістерін қарастырайық. Және алдағы уақытта "жалған кездейсоқ сандар" деудің орнына "кездейсоқ сандар" терминін қолданамыз, себебі, төменде келтірілетін қолданбалы алгоритмдер жеткілікті статистикалық қасиеттері бар, сондықтан кездейсоқ сандар тізбегінен айырмашылығы іс жүзінде байқалмайтын, тізбектерді модельдейді.

1.2. Қиықтау әдісі

Бұл әдіс бір немесе бірнеше алдыңғы сандарды бейсызықты түрлендіру нәтижесінде табылған жаңа санның цифрларының бір бөлігін алып тастау, немесе қию жолымен алынған кезекті кездейсоқ сандарды табуға негізделген.

Қиықтау әдісінің идеясын қолданып, бірқалыпты үлестірілген кездейсоқ сандарды тудыратын алғашқы алгоритмді 1946 жылы Фон Нейман мен Метрополис ұсынған болатын. Бұл алгоритм "орта шаршы" деген атқа ие болды, және $2k$-орынды сандармен жұмыс істейді. Есептеу алгоритмі келесі қадамдардан тұрады:

1-қадам. $z_n = 0,a_1a_2...a_{2k}$ деп аламыз.

2-қадам. -ді шаршылаймыз: $z_n^2 = 0,b_1b_2...b_{4k}$

3-қадам. Алынған шаршының $2k$ орта цифрын алып, оларды тізбектің келесі санының разрядтары деп есептейміз:

$$z_{n+1} = 0,b_{k+1}b_{k+2}...b_{3k} .$$

Бұл алгоритм, бізге бұрыннан белгілі, (1.2) формуласына сәйкес келетініне оңай көз жеткізуге болады.

1.1 мысал, $z_0 = 0,1981$ болсын, сонда $k = 2$ болады. Шешуі:

$z_0 = 0,1981$ $z_0^2 = 0,03924361$

$z_1 = 0,9243$ $z_1^2 = 0,85433049$

$z_2 = 0,4330$ $z_2^2 = 0,18748900$

$z_3 = 0,7489$ және т. б.

Өкінішке орай, орта шаршы алгоритмі көп жағдайларда статистикалық қанағатты нәтижелер бермейді. Осы алгоритммен тізбектелген кездейсоқ сандардың арасында мәні кішірек, яғни математикалық үміті $m_z < 0,5$ сандар көбірек кездеседі. Сонымен қатар, тізбектің аяғы нольге айналуын, яғни тізбектің жұпындалуын жиі байқауға болады.

Жиырмасыншы ғасырдың 50-ші жылдарының бас кезінде американдық ғалым Дж. Форсайт жүргізген сынақтар мынандай нәтижелер берді. 16 бастапқы мәндердің 12-сі:

$$0,6100;\ 0,2100;\ 0,4100;\ 0,8100;\ 0,6100$$

циклмен аяқталатын тізбекке, ал екеуі тізбектің жұпындалуына алып келді.

Кейде орта шаршы алгоритммен жасалған тізбекте кездейсоқ сандар тіпті байқалмайды.

1.2 мысал [3] $z_0 = 0,4500$ тең болсын.

Шешімі:

$$z_0 = 0{,}45006 \qquad z_0^2 = 0{,}20250000$$

$$z_1 = 0{,}2500 \qquad z_1^2 = 0{,}06250000$$

$$z_2 = 0{,}2500 \qquad z_2^2 = 0{,}06250000$$

$$z_3 = 0{,}2500 \qquad \text{және т. б.}$$

Осы кемшіліктердің салдарынан қазіргі уақытта орта шаршы алгоритмі кең қолданылмайды және ол біз үшін тек тарихи көзқарас түрінде қалады. Оның бұрынғы кең қолданылуы қарапайымдылығы мен қызық ерекшелігі арқылы түсіндіріледі.

Дж. Фон Нейманның жолын қуушылар бұл алгоритмнің біраз модификациясын ұсынды. Мысалы, жақсы нәтижелерге

$$\varPhi(z_n, z_{n-1}) = 10^{-2k}\, Ц\left(10^{2k}\, D\left(10^{k}\, z_n z_{n-1}\right)\right) \qquad (1.3)$$

функциясына негізделген алгоритммен жетуге болады. Соған қарамастан, қазіргі кезде кездейсоқ сандар тізбегін тудыратын барлық қолданбалы бағдарламалар шегерінділер мен қосындылар әдістеріне негізделген.

1.3. Шегерінділер әдісі (конгруэнттік әдіс)

Бұл әдісті 1948 жылы Д.Леймар ұсынған болатын. Жалпы жағдайда шегерінді әдісі мына түрдегі сызықты формулаға негізделеді:

$$z_{n+1}^* = az_n^* + C(\operatorname{mod} m) \qquad (1.4)$$

Мұндағы z_0^*, a, c және m - теріс емес бүтін сандар.

(1.4) түріндегі жазу z_{n+1}^* саны $az_{n+1}^* + c$ өрнегін m-ге бөлгендегі қалдыққа тең екенін көрсетеді, басқаша айтқанда, z_{n+1}^* - бұл $az_{n+1}^* + c$-ң модулі бойынша алынған ең кіші оң шегеріндісі. Параметрлері қандай да мәнге ие болмасын (1.4) формуласымен тек қана ақырлы жиын құратын бүтін кездейсоқ сандар ғана алуға болады, содан кейін тізбектегі сандар қайталана бастайды. Бұл айқындығы күмәнсіз $P < m$ шектелуінен келіп шығады, мұндағы кездейсоқ тізбектің периоды.

1.3 мысал. $a = 7, \quad c = z_0^* = 5, \quad m = 9$ болсын.

Сонда $z_1^* = 5 \times 7 + 5(\mathrm{mod}9) = 4,$

$z_2^* = 4 \times 7 + 5(\mathrm{mod}9) = 6,$

$z_3^* = 6 \times 7 + 5(\mathrm{mod}9) = 2,$

$z_4^* = 2 \times 7 + 5(\mathrm{mod}9) = 1,$

$z_5^* = 1 \times 7 + 5(\mathrm{mod}9) = 3,$

$z_6^* = 3 \times 7 + 5(\mathrm{mod}9) = 8,$

$z_7^* = 8 \times 7 + 5(\mathrm{mod}9) = 7,$

$z_8^* = 7 \times 7 + 5(\mathrm{mod}9) = 0,$

$z_9^* = 0 \times 7 + 5(\mathrm{mod}9) = 5$ және т.б.

Енді (1.4) өрнегінің $c = 0$ болған жағдайдағы дербес түрін қарастырайық:

$$z_{n+1}^* = az_n^*(\mathrm{mod}\, m). \tag{1.5}$$

Бұл формула кездейсоқ тізбектерді біршама тез, бірақ (1.4) формуласына қарағанда азырақ периодпен модельдейді.

1.4 мысал. $a, \ m, \ z_0^*$ параметрлерінің мәндерін бұрынғыдай қалдырамыз.

Сонда: $z_1^* = 5 \times 7(\mathrm{mod}9) = 8, \quad z_3^* = 2 \times 7(\mathrm{mod}9) = 5,$

$z_2^* = 8 \times 7(\mathrm{mod}9) = 2, \quad z_4^* = 5 \times 7(\mathrm{mod}9) = 8.$

1.3.-мысал шегеріндiлер әдісінің бір артықшылығын жақсы бейнелейді. Ол (1.4) өрнегін қолданғанда кездейсоқ сандар тізбегінің ешқашан жұпыланбайтындығы. Сонымен бірге, бұл мысалдар (1.4) және (1.5) формулалардағы параметрлердің мәндерін ойламай таңдаса, яғни олардың орнына кез келген цифрларды қоя салса, ешқашан жақсы статистикалық қасиеттері бар кездейсоқ сандар тізбектері алынбайтындығын көрсетеді. Сондықтан, $a, \ c, \ m$ параметрлерін және кездейсоқ тізбектің бастапқы санын $\left(z_0^*\right)$ таңдағанда мынадай жағдайлар есте болуы керек: тізбектің периоды неғұрлым үлкен, тізбекті генерациялаудың жылдамдығы жоғары және кездейсоқ сандардың арасындағы арақатынасы (корреляциясы) неғұрлым кем болғаны жөн.

Қазіргі кезде компьютерде қолдануға шегеріндiлер әдісінің (1.5) формуласы ыңғайлы екені анықталған [4]. Ол үшін $m = 2^b$ болуы қажет. Мұндағы b машиналық сөздегі екілік цифрдың саны. Сонда кездейсоқ тізбектің $P = m/4$ тең максималды периодына мына шарттар орындалғанда жетуге болады:

1) z_0^* кез келген оң, тақ, бүтін сан;

2) $a = 8t \pm 3$, мұндағы t - кез келген оң бүтін сан.

Ал енді шегеріндiлер әдісінің (1.4) формуласына келсек, онымен кездейсоқ сандар тізбегін модельдегенде периодтың ең максималды $P = m$ мөлшеріне жетуге болады. Бұл нәтижені мына теорема дәлелдейді.

Теорема 1.1. Конгруэнттік әдістің (1.4) формуласы бойынша алынған кездейсоқ тізбек периодының ұзындығы m-ға тең болу үшін мынадай шарттар орындалуы керек:

а) c және m - өзара жай сандар;

б) $(a-1)$ саны r-ге еселі, егер жәй сан және санының бөлгіші болса;

в) $(a-1)$ саны 4-ке еселі, егер m саны да төртке еселі болса.

Бұл теореманың дәлелдемесін [5] табуға болады.

Кездейсоқ тізбек периодының ұзындығы дәл m болғандықтан, 0 мен $(m-1)$-дің арасындағы әр сан бұл тізбекте бір ақ рет кездеседі. Сондықтан z_0^*-ның мәні периодтың ұзындығына әсер етпейді. Айта кететін тағы да бір жәй, (1.4) және (1.5) формуларымен алынған кездейсоқ тізбектер мүшелерінің мәндері $[0; m]$ кесіндісіне бірқалыпты орналасады, ал $[0;1]$ аралығындағы сандарды алу үшін бұл формулаларды мына өрнекпен толтыру қажет:

$$z_{n+1} = m^{-1} z_{n+1}^* \tag{1.6}$$

1.4. Қосындылау әдісі

Ван Вейнгарден ұсынған қосындылау әдісі мына [6] жалпы мағыналы сызықтық формуланы қолданады:

$$z_{k+j} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i z_{j+i} + C(\bmod m), \qquad j = 1,2... \tag{1.7}$$

Бұл әдіспен алынған кездейсоқ тізбектердің периоды шегерінді әдісі қолданғандағы периодтан едәуір ұзын болады. Оның себебі, бұл тізбектерде период пайда болу үшін шегерінді әдісі сияқты оның екі ғана емес, бірнеше мүшесі сәйкес келуі керек. Сонымен қатар, қосындылау әдісімен алынған тізбек сандарының корреляциясы аз.

Қосындылау әдісінің ең қарапайым формуласын алу үшін (1.7) өрнегінің параметрлеріне мынадай мағына беру керек:

$$C = a_2 = a_3 = ... = a_{k-1} = 0, \qquad a_0 = a_1 = 1.$$

Сонда $$z_{i+1} = z_j + z_{j+1}(\bmod m).$$

Бұл өрнек Фибоначчи формуласы деген атқа ие болды және өткен ғасырдың елуінші жылдарының бас кезінде кең қолданыс тапты. Алайда, Фибоначчи формуласымен генерацияланған сандар жеткілікті кездейсоқ болған жоқ. Тек қана Дэвис деген ғалым осы формуламен, оның бастапқы және сандарын сәтті таңдап, статистикалық қасиеттері жақсы бірқалыпты кездейсоқ сандардың тізбегін алды.

Дэвистің алгоритмі [7] мына формуланы қолданады:

$$z_{j+1} = z_j + z_{j-1}(\bmod 4), \tag{1.8}$$

мұндағы $z_0 = \pi$, $z_1 = 5^{17} \times 2^{-42} = 0{,}542101887$.

Қазіргі уақытта қосындылау әдісі алгоритмдерінің арасында ең көп тарағаны аддитивті алгоритмдер болып отыр [8]. Ол алгоритмдер мына формуланы қолданады:

$$z_{j+1} = z_j + z_{j-k}(\bmod m).$$

Мұндағы k - үлкен және бүтін сан $(k \geq 16)$.

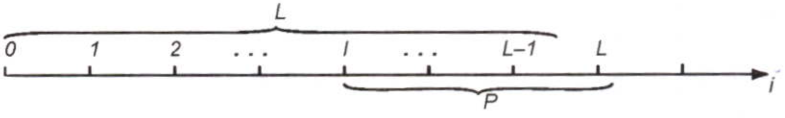
Бастапқы z_0, $z_1, ..., z_k$ сандарын ойлағандай таңдаған күнде, бұл алгоритмдер статистикалық қасиеттері жақсы кездейсоқ сандардың көзі бола алады.

1.5. Оралымның және кездейсоқ тізбектердің апериодтылығының ұзындықтарын сынақ арқылы анықтау

Жоғарыда келтірілген деректерден анық көрінетін бір ерекшелікті қарастырайық. Ол ерекшеліктің мәні мынада. Кездейсоқ сандар тудыратын әдістердің бәрі де, оларды компьютерде қолданғанда, периодикалық тізбек тудырады. Шынында, кез келген компьютердің кодында $[0;1]$ аралығында жататын әр түрлі сандардың тек шекті мөлшерін ғана жазуға болады, сондықтан ерте ме кеш пе z_L санының мәні алдындағы сандардың мәндерінің біреуімен, мысалы z_l -мен, сәйкес келеді. Онда келесі теңдік тура болады:

$$z_{L+i} = z_{l+i}, \qquad i = 1, 2 \ldots . \tag{1.9}$$

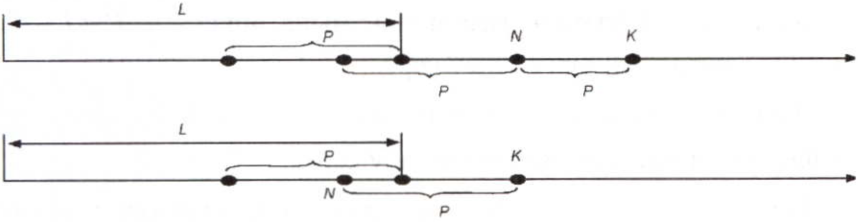
L - (1.9) шартын қанағаттандыратын, ең кіші сан болсын. Сонда $z_0, z_1, \ldots z_{L-1}$ сандар жиыны кездейсоқ тізбектің апериодты кесіндісі деп аталады (1.3-сурет). Ал, апериодтылық кесіндінің ұзындығы. $(L - l)$ мәні периодқа тең екені 1.3-суреттен айқын көрінеді, яғни $P = L - l$. Сонымен, тізбек тек кездейсоқ сандардан тұруы үшін оның ұзындығы апериодтық кесіндінің ұзындығынан аспауы керек. Сондықтан L мен P-ң нақты мәндерін таба білу қажет. L мен P-ң мәнін сынақ арқылы анықтаудың бір әдісіне тоқтайық [9, 10].



1.3 - *сурет*

$\{z_i\}$ - жоғарыда көрсетілген алгоритмдердің біреуінің көмегімен алынған кездейсоқ сандар тізбегі болсын. Осы тізбектің индексі *L-P* айырымынан біраз үлкен z_N мүшесін жадымызда сақтап қаламыз (1.4-сурет). Сонан соң z_{N+1}-ді z_{N+1}, $z_{N+2}, \ldots$ сандарының біреуімен сәйкес келгенше салыстырамыз. Ерте ме, кеш пе, осы салыстырудың нәтижесінде мына теңдікке жетеміз:

$$z_N = z_k \qquad (k > N).$$



1.4 - *сурет*

Демек, $k\text{-}N=P$ тізбек периодының ұзындығы. Содан соң, берілген алгоритммен келесі екі кездейсоқ тізбекті қатар генерациялаймыз:

$$z_0,\ z_1,\ z_2,\ z_3,... \tag{1.10}$$

$$z_p,\ z_{p+1},\ z_{p+2},\ z_{p+3},... \tag{1.11}$$

және осы тізбектердің қатар алынған мүшелерін, олар бір біріне теңелгенше, яғни мына теңдеу

$$z_{i^*} = z_{p+i^*}$$

орындалғанша салыстырамыз. Сонда (1.11) тізбегінің сәйкес келген мүшесінің номері $L = P + i^*$ апериодтылығының ұзындығын анықтайды. Айтылғандарды келесі алгоритм түріне келтірейік:

1-қадам. $i = 1,\ R = 0$ деп аламыз, мұндағы R тізбек периодының ұзындығы әлі табылмағандығының белгісі.

2-қадам. Кездейсоқ тізбектің кезекті z_i мүшесін генерациялау.

3-қадам. $i = i + 1$ болсын.

4-қадам. $R = 0$ шартын тексеру. Бұл шарт орындалмаса 7-қадамды орындау керек.

5-қадам. $i = N + 1$ шартын тексеріп, ол орындалмаған жағдайда 2-қадамға көшу керек.

6-қадам. $Y = z_N$ және $r = r+1$ деп алып, 2-қадамға көшу керек.

7-қадам. $z_i = Y$ шартын тексеріп, ол орындалмаған жағдайда 2-қадамға қайту керек.

8-қадам. Периодтың ұзындығын мына өрнектен $P = i - N$ анықтап алып, i-ді бірге теңеу керек: $i = 1$.

9-қадам. Зерттеліп отырған кездейсоқ тізбектің z_i және z_{i+1} мүшелерінің мәндерін қайтадан табу керек.

10-қадам. $z_i = z_{i+P}$ шартын тексеріп, ол орындалған жағдайда, 12-қадамға көшу.

11-қадам. $i = i+1$ деп алып, 9-қадамға қайтып бару.

12-қадам. Апериодтық кесіндінің ұзындығын мына өрнектен $L = P + i$ айқындау.

13-қадам. P мен L-дің мағынасын компьютердің экранына әлде принтерге шығару.

1.6. Қалыптан ауытқу әдісі

L мен P-ның мәндері өте үлкен бірқалыпты үлестірілген кездейсоқ сандардың тізбегін модельдеу үшін украин ғалымы Д.И.Голенко ұсынған қалыптан ауытқу әдісін қолдануға болады. Бұл әдістің идеясы бір кездейсоқ тізбекті модельдеу үшін қатарымен екі алгоритмді пайдалануға негізделген:

$$z_{j+1} = \begin{cases} \Phi(z_j), \text{ егер } j \neq k \times M, \\ \varphi(z_j), \text{ егер } j = k \times M. \end{cases} \tag{1.12}$$

M параметрі $M < L$ шартынан таңдалады және қалыптан ауытқу периоды деп аталады.

(1.12) өрнегінен көрініп тұрғандай, жоғарғы $\Phi(z)$ функциясы көмегімен z_0, z_1, z_2,..., z_{M-1} тізбегі модельденеді. Ал содан кейін

$$z_L = z_l \qquad (l < L)$$

сәйкестелуін болдырмау үшін, z_M кездейсоқ саны төмендегі $\varphi(z)$ функциясының көмегімен табылады. Осындай ауытқу одан әрі де, келесі $M-l$ кездейсоқ саннан асқан сайын, тізбектің берілген ұзындығына жеткенше қайталанып отырады.

Қалыптан ауытқу әдісін іске асыратын алгоритм 7 қадамнан тұрады.

1-қадам. $k=1$ және $j=0$ деп аламыз.

2-қадам. $j=k\times M$ шартын тексереміз. Бұл шарт орындалған жағдайда 4-қадамға көшеміз.

3-қадам. $z_{j+1}=\Phi(z_j)$ рекурренттік қатынасын іске асыру. Содан кейін 6-қадамды орындау керек.

4-қадам. $z_{j+1}=\Phi(z_j)$ рекурренттік қатынасын орындау және K параметрін бір санға көтеру: $k=k+1$.

5-қадам. $j=j+1$ деп аламыз.

6-қадам. $j>N$ шартын тексеру, мұндағы N -модельденетін тізбектің берілген ұзындығы. Бұл шарт орындалған жағдайда 2-қадамға көшеміз.

7-қадам. Модельдеу нәтижесін баспалау.

Д.И.Голенко өзінің ұсынған қалыптан ауытқу әдісі, кездейсоқ сандар тізбегінің ұзындығын $\sqrt{M}$ есе ұзартатынын көрсетті.

Осы тарауға қатысты бақылау сұрақтары

1. $z_{n+1}^{*}=az_n^{*}+C(\mathrm{mod}\,m)$ өрнегі бойынша алынған кездейсоқ сандар тізбегінің периоды $P=m$ болу үшін қандай шарттар орындалуы тиіс?

2. $z_{n+1}^{*}=az_n^{*}(\mathrm{mod}\,m)$ өрнегінің параметрлерін таңдау қандай шартпен анықталады?

3. Д.И. Голенконың “ауытқу” әдісі қандай заңдылықты модельдеу үшін қолданылады?

4. $z_{n+1} = 10^{-2k} \mathit{Ц}[10^{2k} \mathit{Д}[10^k \cdot z_n^2]]$ формуласы қандай аралықтағы сандарды модельдеуге қолданылады?

5. $z_{j+1} = z_j + z_{j-k} (\operatorname{mod} m)$. формуласы қандай әдіске жатады?

6. Базалық кездейсоқ сандар тізбегін модельдейтін бір және екі реттілік рекурренттік өрнектерді жазыңыз.

7. Периоды $P = 512$- ге тең кездейсоқ сандар тізбегін модельдейтін өрнекті келтіріңіз.

8. Мына тізбектің периоды P мен апериодтылығының L мәндерін анықтаңыз:

0.17; 0.31; 0.02; 0.94; 0.45; 0.27; 0.13; 0.78; 0.22; 0.45; 0.27.

9. Кездейсоқ сан z_0=0.221 тең болсын. Қиықтау әдісімен z_1 табыңыз.

10. Төмендегі тізбек қай әдіспен модельденген?

0.15; 0.97; 0.45; 0.36; 0.62........

2. КЕЗДЕЙСОҚ ОҚИҒАЛАРДЫ МОДЕЛЬДЕУ

2.1. Қарапайым оқиғаларды модельдеу

Бірінші тарауда аталғандай, кездейсоқ заңдылықтарды модельдеу үшін $[0;1]$ аралығында бірқалыпты үлестірілген базалық кездейсоқ сандардың тізбегін жасап алып, сол сандарды қажетке сәйкес түрлендіру керек.

Түрлендіру қолайлы болу үшін бірқалыпты үлестірілген кездейсоқ тізбектің сандарын ξ кездейсоқ шаманың тәуелсіз z нақтыламасы ретінде қарастырайық. Алдағы уақытта гректің ξ әріпін тек $[0;1]$ кесіндісінде бірқалыпты үлестірілген заңдылыққа бағынатын кездейсоқ шамаға бекітеміз.

Әртүрлі кездейсоқ заңдылықтарды модельдеу үшін базалық кездейсоқ сандарды қолдануды, ең қарапайым заңдылықтың бірін, яғни кездейсоқ қарапайым оқиғаны модельдеуден бастайық.

Кездейсоқ қарапайым оқиғалар табиғатта, өндірісте, экономикада жиі орын алады, мысалы күннің шуақ әлде жаңбырлы болуы, станоктың қалыпты істеп тұруы немесе істен шығып қалуы және тағы басқалар.

Кездейсоқ қарапайым оқиғаны латынның A әрпімен белгілейік. Бұл оқиға екі нақтыламамен бейнеленіледі. Біріншісі оқиғаның орындалуы (A), екіншісі – орындалмауы ($\overline{A}$). Ал оқиғаның қарапайымдылығының шарты (2.1) теңдігімен беріледі.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \tag{2.1}$$

Бұл шарт екі нақтылама өзара үйлесімсіз оқиғалар болатынын көрсетеді, яғни бір сынақта тек A немесе $\overline{A}$ нақтыламасы ғана орындалады.

Кездейсоқ қарапайым оқиғаның толық сипаттамасы – оның орындалу

$$p = P(A) = \frac{m}{n}$$

немесе орындалмау

$$q = P(\overline{A}) = 1 - p$$

ықтималдылығы. Бұл өрнектердегі n мен m, тиісінше, жалпы сынақтар санымен, сол сынақтарда A оқиғасының орындалған санын белгілейді.

Кездейсоқ қарапайым оқиғаның осы қысқаша сипаттамасынан кейін оны модельдеу әдісімен танысайық.

A оқиғасы $P(A) = p$ ықтималдығымен берілсін. Қарапайым оқиғаны модельдеудің негізі ретінде келесі теореманы тұжырымдайық.

2.1-теорема. Қарапайым оқиғасының берілген ықтималдылығы p, ал базалық ξ кездейсоқ шамасының тәуелсіз нақтыламасы z болсын. Сонда A оқиғасы пайда болу үшін $z \leq p$ шарты орындалуы керек.

Дәлелдемесі:

$$p = P(A) = P\{\xi \leq p\} = \int_0^p f(z)dz = \int_0^p 1 \cdot dz = p.$$

Бұл дәлелдеменің екінші теңдігі теореманың шарты бойынша жазылған. Келесі теңдік ықтималдық теориясындағы үлестірім және тығыздық функциялардың арасындағы байланысты сипаттайды. Төртінші теңдік базалық ξ кездейсоқ шамасының бірқалыпты заңдылығына сәйкес оның тығыздық функциясы бірге теңдігінен шығады. Демек, математиканың негізгі қағидалары бойынша екінші теңдіктің екі жағы да бірдей санға тең болса ол теңдік ақиқат деп саналады. Теорема дәлелденді.

Бұл теоремаға негізделіп құрылған қарапайым оқиғаны модельдейтін алгоритм жеті қадамнан тұрады:

1-қадам. $j = 1$ болсын;

2-қадам. ξ кездейсоқ шамасының z нақтыламасын алу;

3-қадам. $z \leq p$ шартын тексеру. Шарт орындалмаған жағдайда 5-қадамға көшу.

4-қадам. A оқиғасының орындалуын S санымен таңбалау.

5-қадам. $j = j + 1$ деп аламыз.

6-қадам. $j > n$ шартын тексеру, мұндағы n тәуелсіз сынақтар саны.

7-қадам. S мәнін баспалау.

2.2. Оқиғалардың толық тобын модельдеу

A_1, A_2, A_3, ..., A_n - үйлесімсіз оқиғалардың толық тобы болсын. Бұл оқиғалардың ықтималдылықтары (2.2) кестесімен берілген:

$$\begin{bmatrix} A_1 \; A_2 \; \dots \; A_n \\ p_1 \; p_2 \; \dots \; p_n \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

мұндағы $p_k = P(A_k)$, $\quad k = \overline{1,n}$, $\quad \sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$.

Оқиғалардың толық тобын модельдеу үшін, $z \in [0;1]$ кездейсоқ сандарын қолданамыз. Алдын-ала $[0;1]$ аралығын бірнеше кесіндіге бөліп алайық. Бұл кесінділердің мәндері мына шартпен алынсын (2.1-сурет): $\Delta_k = p_k$.

Үйлесімсіз оқиғалардың толық тобын модельдеуге негіз ретінде тағы бір теореманы тұжырымдайық:

2.1-*сурет*

2.2-теорема. Кездейсоқ сан z базалық ξ кездейсоқ шамасының тәуелсіз нақтыламасы болсын. Сонда оқиғалардың толық тобын құратын әрбір A_k оқиғасы, $z \in \Delta_k$ шарты орындалғанда ғана p_k ықтималдығымен табылады.

Дәлелдемесі:

$$p_k = P(A_k) = P\{z \in \Delta_k\} = \Delta_k = p_k \, .$$

Бұл дәлелдеменің де екінші теңдігі теореманың шарты бойынша жазылған. Үшінші теңдік базалық ξ кездейсоқ шамасының бірқалыпты заңдылығымен байланысты, себебі бірқалыпты заңдылықтың нақтыламаларының 0 мен 1 дің арасындағы қандай да болмасын интервалға түсу ықтималдығы сол интервалдың мәніне тең болатынынан шығады. Сондықтан бұл жолы да математиканың негізгі қағидаларына сәйкес екінші теңдіктің екі жағы да бірдей санға тең болғандықтан ол теңдікті ақиқат деп есептейміз. Теорема дәлелденді.

2.2 - Теоремаға негізделе отырып, оқиғалардың толық тобын модельдейтін алгоритм келесі қадамдарды қамтиды:

1-қадам. $j = 1$ болсын;

2-қадам. ξ кездейсоқ шамасының z нақтыламасын табу;

3-қадам. $k = 1$ деп алайық.

4-қадам. $z \in \Delta_k$ шартын тексеру. Шарт орындалған жағдайда 6-қадамға көшу;

5-қадам. $k = k + 1$ деп алайық. 4-қадамға қайту.

6-қадам. $z \in \Delta_k$ оқиғасының орындалу нәтижесін таңбалау: $(S_k = S_k + 1)$

7-қадам. $j = j + 1$ деп алайық;

8-қадам. $j > n$ шартын тексеру, n - сынақтың берілген саны. Бұл шарт орындалмаған жағдайда 2-қадамға көшу керек.

9-қадам. S_k -ның ақырғы мөлшерін баспалау.

4-ші қадамдағы $z \in \Delta_k$ шартын тексеру былайша іске асырылады. 2-қадамда алынған z кездейсоқ санын p_1 ықтималдылығымен салыстырамыз. Егер $z \le p_1$ болса, онда A_1 оқиғасы орындалғаны, ал $z > p_1$ болса санын-мен салыстырамыз. Егер шарты бұзылмаса, онда оқиғасы орындалғаны, ал керісінше жағдайда жаңа шартын тексереміз. Осы сұлба берілген сынақ мөлшері таусылғанша жалғаса береді. Мұндай салыстырулардың орташа саны мына формуламен анықталады [10]:

$$t = \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot p_k + (n-1) p_n \ .$$

Осы алгоритмнің жылдамдығын көтеру үшін -ның мөлшерін азайту керегі анық. Оның бірнеше тәсілдері белгілі. Соның біреуі оқиғаларын (2.3) шарты орындалатындай етіп қайта таңбалау:

$$p_1 \ge p_2 \ge \ldots \ge p_n . \tag{2.3}$$

2.3. Күрделі оқиғаларды модельдеу

Күрделі оқиға деп, нәтижесі екі, немесе одан да көп қарапайым оқиғалардың нәтижесіне байланысты оқиғаны айтады. Күрделі оқиғалар тәуелді және тәуелсіз болып бөлінеді. Егер күрделі оқиғаның құраушылары тәуелсіз қарапайым оқиғалар болса, оқиғаның өзі де тәуелсіз болады. Мысалы, жатақхананың бір бөлмесінде тұратын екі студенттің емтихан тапсыруы керек болсын. А оқиғасы 1-ші студенттің емтиханды ойдағыдай тапсыру оқиғасы, ал В оқиғасы 2-ші студенттің ойдағыдай тапсыруына сәйкес келсін. Бұл қарапайым оқиғаларды тәуелсіз деп санауға болатыны айқын.

Осы мысалдағы күрделі оқиғаның нақтыламалары мыналар:

$$AB,\ \bar{A}B,\ A\bar{B},\ \overline{AB}$$

Олардың ықтималдылықтары:

$$p_A p_B,\ (1-p_A)p_B,\ p_A(1-p_B),\ (1-p_A)(1-p_B).$$

Осындай күрделі оқиғаларды модельдеуге жоғарыда карастырылған 2.1 теоремасы негіз бола алады. Сол теоремаға сүйене отырып, тәуелсіз күрделі оқиғаларды модельдейтін алгоритммен танысайық:

1-қадам. $j=1$ деп алайық;

2-қадам. Базалық ξ кездейсоқ шамасының z_j, z_{j+1} тәуелсіз нақтыламаларын табайық.

3-қадам. $z_j \le p_A$ және $z_{j+1} \le p_B$ шартының іске асырылуын тексеру.

4-қадам. 3-ші қадамдағы салыстырудың нәтижесіне байланысты төрт санағыштың біреуіне бірді қосу керек:

$$S_{AB} = S_{AB} + 1;\ S_{\bar{A}B} = S_{\bar{A}B} + 1;\ S_{A\bar{B}} = S_{A\bar{B}} + 1;\ S_{\overline{AB}} = S_{\overline{AB}} + 1.$$

5-қадам. $j = j+2$ деп алайық.

6-қадам. $j < 2n$ шартын тексеру, мұндағы n сынақтардың берілген саны. Бұл шарт орындалса 2-ші қадамға көшу;

7-қадам. 4-ші қадамда анықталған санағыштардың қорытынды мөлшерін баспалау.

Енді A және B оқиғалары бірінен бірі тәуелді болатын жағдайды қарастырайық. Жоғарыда келтірілген мысалдағы екі студентті бұл жолы жас жұбайлар деп есептейік. Ендігі жерде ерлі-зайыпты студенттердің біреуі емтиханын тапсыра алмаса, ол жан - ұяның бюджетіне әдеуір нұқсан келтіреді. Сондықтан екінші студенттің емтихан тапсыру барысына өзінің әсерін тигізеді, яғни осы екі оқиғаны біріне бірін тәуелді қылады.

Бұл жағдайда p_A және p_B ықтималдығынан өзге $p_{B/A}$ шартты ықтималдық берілуі тиіс. Тәуелді күрделі оқиғаларды модельдеу үшін де 2.1-теоремасына негізделген қарапайым оқиғаларды модельдеу сұлбасын қолдануға болады.

Төменде келтірілген алгоритм екі оқиғадан тұратын күрделі тәуелді оқиғаны модельдейді.

1-қадам. $j = 1$ деп алайық.

2-қадам. $P(B/\overline{A}) = p_{B/\bar{A}}$ шартты ықтималдығын есептеу.

3-қадам. Базалық ξ кездейсоқ шамасының z_j нақтыламасын табу.

4-қадам. $z < p_A$ шартын тексеру. Бұл тексерудің нәтижесі келесі 2 санағыштың біреуінде сақталады:

$$S_A = S_A + 1; \qquad S_{\bar{A}} = S_{\bar{A}} + 1.$$

5-қадам. Базалық ξ кездейсоқ шамасының z_{j+1} нақтыламасын табу.

6-қадам. 4-ші қадамдағы салыстыру нәтижесіне қарай келесі екі шарттың біреуінің орындалуын тексеру:

$$z_{j+1} \le P_{B/A} \text{ немесе } z_{j+1} \le P_{B/\bar{A}}.$$

7-қадам. 6-шы қадамдағы салыстыру нәтижесіне қарай келесі төрт санағыштың біреуінің мәніне бір сан қосылады:

$$S_{AB} = S_{AB} + 1; \;\; S_{\bar{A}B} = S_{\bar{A}B} + 1; \;\; S_{A\bar{B}} = S_{A\bar{B}} + 1; \;\; S_{\overline{AB}} = S_{\overline{AB}} + 1;$$

8-қадам. $j = 2$ деп алайық.

9-қадам. $j \le 2n$ шартын тексеру. Бұл шарт орындалған жағдайда 3-ші қадамға көшу.

10-қадам. Барлық санағыштардың қорытынды мөлшерін баспалау. Екінші қадамда қаралатын $p_{B/A}$ шартты ықтималдылықты есептеу үшін толық ықтималдылықтың формуласы қолданылады:

$$p_{B/A} = (p_B - p_A p_{B/A})/(1 - p_A).$$

Бақылау сұрақтары

1. z = 0.14 болғанда $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_n \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{vmatrix}$-түрінде берілген толық топты оқиғаны модельдеудің нәтижесін табыңыз.

2. z = 0.714 болғанда $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$-түрінде берілген толық топты оқиғаны модельдеудің нәтижесін табыңыз.

3. Күрделі оқиға қарапайым *A* және *B* оқиғаларынан тұрсын. Сонда тәуелсіз күрделі оқиғаны модельдеу үшін қандай бастапқы деректер берілуі тиіс?

4. Күрделі оқиға қарапайым A және B оқиғаларынан тұрсын. Тәуелді күрделі оқиғаның 2 нақтыламасын модельдеңіз. Бастапқы деректер:

$$p_A = 0.4; \quad p_{\mathbf{B}} = 0.5; \quad p_{B/A} = 0.6;$$
$$z_1 = 0.7; \quad z_2 = 0.5; \quad z_3 = 0.25; \quad z_4 = 0.9$$

5. Модельдеу алгоритмінің тиімділігін арттыру үшін 1-ші бақылау сұрағының кестесін қалай өзгертуге болады?

3. ҮЗДІКСІЗ КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАРДЫ МОДЕЛЬДЕУ

3.1. Үздіксіз кездейсоқ шамаларды модельдеу әдістерін жіктеу

Берілген үлестірім заңына сай кездейсоқ шамаларды модельдеу үшін, кездейсоқ заңдарын модельдеудің жоғарыда қарастырылған негізгі принципі бойынша, ξ базалық кездейсоқ шамасын түрлендіру қажет. Мұндай түрлендірудің төрт бағытын атап көрсетуге болады: аналитикалық, таңдамалы, ықтималдылық және құрмаланған.

Кездейсоқ ξ шамасының z_i нақтыламасын аналитикалық түрлендіргенде, берілген үлестіру заңы бар η шамасының нақтыламасы деп қарастыруға болатын x санын анықтайтын операция орындалады. Бұл бағытта ең көп тараған әдістің бірі – кері функция әдісі. Алайда, үлестіру заңы қарапайым функциялармен бейнеленбейтін маңызды үлестірімдердің бір қатары үшін, бұл әдісті іс жүзінде қолдану мүмкін емес.

Келесі таңдамалы бағыттың негізі мынада – базалық кездейсоқ тізбектің кейбір сандарын, берілген үлестірім заңына бағынатын жаңа тізбек құратындай етіп, таңдап алуға болады.

Таңдамалы әдістердің арасында Джон фон Нейманның "шығарып тастау" әдісі кең таралған. Өкінішке орай, бұл әдісте универсалды емес. Онымен тек қана, нақтыламалары жабық $[a,b]$ кесіндісінде жататын кездейсоқ шамаларды модельдеуге болады және бұл әдіс "бос жүрістің" үлкен санымен сипатталады.

Үшінші бағыт, берілген үлестірім заңына, қолданбалы пайдалануға жеткілікті дәлдікпен, жақындауды қамтамасыз ететін, ықтималдықтар теориясының шектік теоремалар шарттарын модельдеумен байланысты. Бұл бағыттың қолдану аймағы шектік теоремалар санымен шектелетіні айқын.

Үлестірім заңы өте күрделі кездейсоқ шамаларды модельдеген кезде тек төртінші бағыттың әдістерін пайдалану арқылы оң нәтижеге жетуге болады. Бұл әдістердің негізінде, үлестірім заңы белгілі кездейсоқ шаманы модельдеу үшін, бір мезгілде бірнеше, жоғарыда қаралған әдістерді қолдану керек. Яғни, бұл бағыттың бір әдісі, оның атауына сәйкес, басқа бағыттардың бірнеше әдістерінен құрастырылады.

Төменде әр бағыттан бір-бір әдіс қарастырылған. Біздің ойымызша, бұл әдістер бір-бірін толықтыра отырып, кездейсоқ заңдылықтары үлестірім функциясымен, әлде графикпен, немесе кесте түрінде берілген, кезкелген, іс жүзінде мәні бар үздіксіз кездейсоқ шамаларды модельдеуді қаматамасыз етеді.

3.2. Кері функция әдісі

Кездейсоқ η шамасы (a,b) интервалында анықталған, тығыздық функциясы $f(x)>0,\ a<x<b$ берілген шама болсын және $a=-\infty$, $b=\infty$ болатын жағдай шектелмесін. Сонда бұл шаманың үлестірім функциясы

$$F(x)=\int_a^x f(x)dx$$

болады.

Кері функция әдісінің теориялық негізін мына теорема түрінде тұжырымдайық.

Теорема 3.1. Кездейсоқ сан z бірқалыпты үлестірімді базалық ξ кездейсоқ шамасының нақтыламасы болсын. Сонда

$$F(x)=z \quad \text{немесе} \quad x=F^{-1}(z) \tag{3.1}$$

өрнегінен табылған x саны, алдын ала берілген, $f(x)$ тығыздығымен сипатталатын η кездейсоқ шамасының нақтыламасы болады.

Дәлелдеу: Кездейсоқ ξ шамасының $[0,\ z]$ кесіндісіне түсу ықтималдылығын анықтайық:

$$P\{\xi \le z\} = P\{F(\eta) \le F(x)\} = P\{\eta \le x\} = F(x) = z. \tag{3.2}$$

Осы өрнектің бірінші тендігі теореманың (3.1) шартынан алынып жазылған. Екінші теңдіктің туралығы, үлестірім функциясының мөлшері нольден бірге дейін бірсарынды өсуінен шығады.

Төртінші теңдік “айдан да айқын”, себебі ол үлестірім функциясының екі түрлі жазылуынан шығады. Соңғы теңдік бірқалыпты үлестірімді базалық кездейсоқ шаманың [0;1] интервалының кез келген ішкі интервалына түсу ықтималдылығы осы аралықтың ұзындығына әр уақытта тең болатын негізгі қасиетін, яғни

$$P\{\xi < z\} = z$$

екенін көрсетеді.

Кері функция әдісін іс жүзінде қолдану үшін x нақтыламасын мына интегралдық теңдеуді шешіп табу қажет:

$$\int_{a}^{x_j} f(x)dx = z_j. \qquad (3.3)$$

3.1-мысал. Тығыздық функциясы $f(x) = x^{-2}$ болатын η кездейсоқ шамасы $[1, \infty)$ интервалында анықталған.

Шешуі. Осы кездейсоқ шаманың x нақтыламасын табу үшін (3.3) қатынасын қолданайық:

$$\int_{1}^{x_j} x^{-2}dx = 1 - 1/x_j = z_j \quad \text{сонда} \quad x_j = F^{-1}(z_j) = 1/(1 - z_j).$$

Кері функция әдісінің алгоритмі келесі қадамдардан тұрады.

1-қадам. $j = 1$ болсын.

2-қадам. Кездейсоқ ξ шамасының z нақтыламасын модельдеу.

3-қадам. Кездейсоқ η шамасының x_j нақтыламасын есептеу:

$$x_j = F^{-1}(z_j).$$

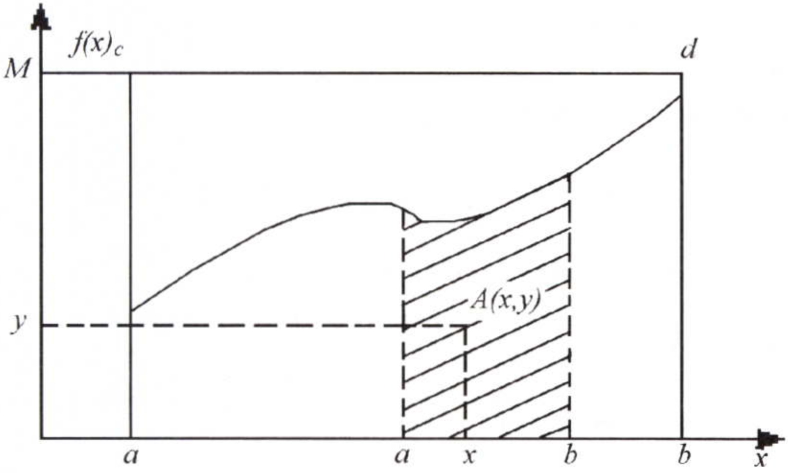
4-қадам. $j = j + 1$ болсын.

5-қадам. $j > n$ шартын тексеру. Мұндағы n саны x нақтыламаларының алдын ала тағайындалған қажетті мөлшері. Бұл шарт орындалған жағдайда 2-ші қадамға оралу керек.

6-қадам. (x_j) мәндерін баспалау.

3.3. Нейманның “шығарып тастау” әдісі

Джон Фон Нейманның “шығарып тастау” әдісі, бірқалыпты үлестірімді базалық тізбектің кездейсоқ сандарының кейбіреулерін алып тастағанда, қалғандарын берілген үлестірім заңына сәйкес келтіруге негізделген. Кездейсоқ η шамасы $[a,b]$ аралығында жоғарыдан шектелген (3.1-сурет) тығыздық функциясымен берілсін:



3.1-*сурет*

$$f(x) < M, \quad a \le x \le b.$$

Шығарып тастау әдісіне негіз болатын 3.2-теоремасын тұжырымдайық: z_1 және z_2 базалық ξ кездейсоқ шамасының тәуелсіз нақтыламалары болсын, ал x пен y-ті мына өрнектерден алайық:

$$x = a + z_1(b-a), \quad y = Mz_2 \tag{3.4}$$

Сонда $$\eta = x \text{ егер } y < f(x) \tag{3.5}$$

шартымен табылған η кездейсоқ шаманың үлестірім заңы $f(x)$ тығыздық функциясымен анықталады.

Дәлелдеу [2]. Координаттары (3.4) формулаларымен есептелген кездейсоқ $A(x,\ \ y)$ нүктелері, ауданы $B = M(b-a)$ тең $abcd$ тіктөртбұрышында бірқалыпты таралатыны айқын. Осыны еске ала отырып нүктесінің қисығының астында жату ықтималдығын табайық:

$$P\{y < f(x)\} = \int_a^b f(x)dx[M(b-a)]^{-1} = [M(b-a)]^{-1}.$$

$A\,(x, y)$ нүктесінің $y = f(x)$ функциясының астындағы $[a',b']$ аралығында жату ықтималдылығын да аудандардың қатынасы арқылы табуға болады:

$$P\{a' \le x \le b' / y < f(x)\} = (\int_{a'}^{b'} f(x)dx)/(M(b-a)).$$

Енді шартты ықтималдылығын есептейік:

$$P\{ a' \le x \le b', y < f(x)\} = \frac{P\{ a' \le x \le b', y < f(x)\}}{P\{ y < f(x)\}} = \int_{a'}^{b'} f(x)dx.$$

Дәлелдеу керегінің өзі де осы.

Шығарып тастау әдісінің алгоритмі:

1-қадам. $i = 1,\quad j = 1$ деп алайық.

2-қадам. ξ кездейсоқ шамасының z_{2j-1} және z_{2j} тәуелсіз нақтыламаларын табу.

3-қадам. $x_j = a + z_{2j-1}(b-a)$ және $y_j = M \times z_{2j}$ координаттарын есептеу.

4-қадам. $y_j < f(x_j)$ шартын тексеру. Бұл шарт орындалмаған жағдайда 6-шы қадамға көшу.

5-қадам. $x_i = x_j$ және $i = i + 1$ деп алайық.

6-қадам. $j = j + 1$ болсын.

7-қадам. Есептеудің аяқталу, яғни $i < n$ шартын тексеру. Шарт орындалмаған жағдайда 2-ші қадамға көшу.

8-қадам. (x_j) нақтыламаларын баспалау.

Нейманның “шығарып тастау” әдісінің әсерлілігі $A(x, \ y)$ нүктесінің $y = f(x)$ қисығының астында жату ықтималдығына тура пропорционалды, яғни

$$P\{y < f(x)\} = [M(b-a)]^{-1}$$

Демек, бұл әдістің әсерлілігі үлкен болу үшін M -нің мәнін мүмкүншілігінше кішірек қылып алу керек, яғни

$$M = \sup f(x)$$
$$a \le x \le b$$

3.2. Мысал. $f(x) = 2x + x^2, \quad x \in [1,5]$ болсын.

Шешуі: M параметрін табамыз:

$$M = \sup f(x) = \sup(2x + x^2) = 35.$$
$$a \le x \le b$$

2-ші қадамда $z_1 = 0{,}75; \ z_2 = 0{,}2$ екенін таптық деп ұйғарайық. Сонда

$$x_1 = 1 + 0{,}75 \times 4 = 4$$
$$y_1 = 35 \times 0{,}2 = 7$$
$$f(x_1) = 2 \times 4 + 16 = 24$$
$$y_1 = 7 < f(x) = 24$$

Демек $\eta = x_1 = 4$.

Нейман әдісінің маңызды артықшылығы кездейсоқ шаманың үлестірім заңын аналитикалық түрде де, график түрінде де беруге болатын мүмкүншілігінде жатыр.

3.4. Шектік теоремалар әдісі

Кездейсоқ шамаларды модельдеудің бұл әдісі ықтималдықтар теориясының белгілі шектік теоремаларының кейбір шарттарын жуықтап елестетуге негізделген. Мысалы, ықтималдықтар теориясының орталық шектік теоремасы қалыпты үлестірім заңына бағынатын кездейсоқ шаманы модельдеуге мүмкіндік береді. Бұл теореманы алғаш рет Лаплас тұжырымдаған. Оны толықтырып, жетілдіруге көптеген атақты математиктер ат салысты, солардың ішінде П.Чебышев, А.А.Марков және А.М.Ляпуновтар да бар.

Орталық шектік теоремасының келесі тұжырымын келтірейік.

3.3-теорема. $\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n$ - бір ғана үлестірім заңына бағынған, өзара тәуелсіз және мөлшерленген кездейсоқ шамалар болсын. Сонда $n \to \infty$ жағдайында, (3.6) формула арқылы табылған мөлшерленген $\eta^{н}$ шамасының

$$\eta^{\acute{\iota}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \zeta i_i \tag{3.6}$$

үлестірім заңы, ықтималдық тығыздығы

$$f(x) = \left(1 \big/ \sqrt{2\pi} \right) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

болатын мөлшерленген қалыпты үлестірім заңына жақындайды. Бұл теореманың дәлелдемесін ықтималдықтар теориясы оқулықтарынан (мысалы[12]) табуға болады. Егер (3.6) формуласында ζ кездейсоқ шамасының орнына математикалық үміті $m_z = 1/2$ және дисперсиясы $\sigma_z^2 = 1/12$-ге тең, ξ базалық кездейсоқ шамасын қолданса, формуланы мына түрге келтіруге болады:

$$\eta^{\acute{\iota}} = \sqrt{\frac{3}{n}} \sum_{i=1}^{n} (2\xi_i - 1). \tag{3.7}$$

Демек, (3.7) формуласымен, үлкен n-нің мөлшерін алған жағдайда, параметрлері $m_x = 0$ және $\sigma_x^2 = 1$ болатын, қалыпты үлестірімді кездейсоқ шаманың нақтыламаларын табуға болады. Жүргізілген зерттеулер $n = 12$-ге тең болғанның өзінде (3.7) қосындысының қатесі $9 \cdot 10^{-3}$-тен аспайтынын дәлелдеді. Сондықтан, іс жүзінде m_x және σ_x^2 параметрлері берілген қалыпты үлестірім заңын модельдеу үшін мына формула жиі қолданылады:

$$x = m_x + \sigma_x \left(\sum_{i=1}^{12} z_i - 6 \right) \tag{3.8}$$

Мұндағы z және x базалық ξ және модельденетін η кездейсоқ шамалардың нақтыламалары.

Осы әдістің алгоритмі мына қадамдардан тұрады:

1-қадам. $j = 1$ болсын;

2-қадам. $S = 0$ және $i = 1$ деп алайық;

3-қадам. ξ кездейсоқ шамасының z нақтыламасын алу;

4-қадам. $S = S + z$ және $i = i + 1$ болсын;

5-қадам. $i < 12$ шартын тексеріп, орындалса 3-ші қадамға көшу;

6-қадам. Кездейсоқ η шамасының кезекті x_j нақтыламасын есептеу:

$$x_j = m_x + \sigma_x (S - 6);$$

7-қадам. $j = j = 1$ болсын;

8-қадам. Еспетеудің аяқталу, яғни, $j > n$ шартын тексеру.

Мүнда n -алдын ала берілген қалыпты үлестірім заңының нақтыламаларының керекті саны. Бұл шарт орындалмаған жағдайда 2-ші қадамға көшу.

9-қадам. $\{x_j\}$ нақтыламаларын баспалау.

3.5. Композиция әдісі

Егер кездейсоқ η шамасының үлестірім функциясының түрі күрделі болса, оны көп жағдайларда бірнеше қарапайым үлестірімдердің композициясы ретінде қарастыруға болады:

$$F(x) = \sum_{k=1}^{m} C_k F_k(x) \tag{3.9}$$

мұндағы $C_k > 0$. (3.9) формуласынан $k \to \infty$ ұмтылғанда мына теңдікті аламыз: $\sum_{k=1}^{m} C_k = 1$

Демек, (A_k) оқиғаларының толық тобын құруға болады:

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ C_1 & C_2 & \dots & C_m \end{pmatrix}$$

мұндағы $C_k = P(A_k)$.

Бұл әдіске негіз бола алатын мына теореманы тұжырымдайық.

3.4-теорема. z_1 және z_2 базалық ξ кездейсоқ шаманың тәуелсіз нақтыламалары болсын. Егер z_1-ң көмегімен, оқиғалардың толық тобын модельдеу арқылы табылған, A_k оқиғасының номерін анықтасақ, сонан соң $F_k(x) = z_2$ теңдеуінен x санын тапсақ, бұл сан берілген $F(x)$ үлестірім функциясымен сипатталатын η кездейсоқ шамасының нақтыламасы болады.

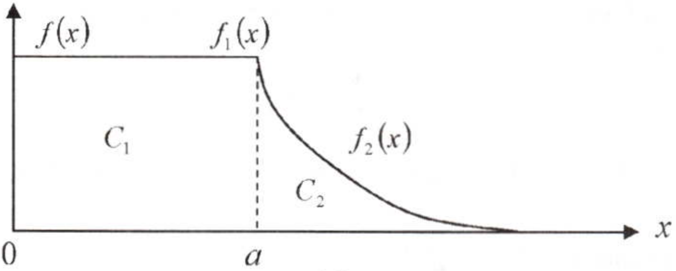
Дәлелдеуі: Белгілі толық ықтималдық теоремасын қолданып η кездейсоқ шамасының үлестірім функциясын есептейік:

$$F(x) = P(\eta < x) = \sum_{k=1}^{m} P\{\eta < x / A_k\} \times P(A_k) = \sum_{k=1}^{m} F_k(x) \times C_k = F(x).$$

Осы өрнектен теореманың дәлелдемесі анық көрініп тұр. Композиция әдісін іс жүзінде қолданғанда үлестірім фунциясының орнына модельденетін кездейсоқ шамасының тығыздық функциясымен жұмыс істеген қолайлы. Бұл жағдайда

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} C_k f_k(x) \tag{3.10}$$

қосындысының C_k коэффициенттерін $f(x)$ функциясының ас-



3.2-*сурет*

тындағы (3.2.сурет), мөлшері бірге тең ауданның бөліктері ретінде қарауға болады.

3.4. теоремасының шартын орындайтын алгоритм келесі қадамдардан тұрады [13]:

1-қадам. $j = 1$ болсын;

2-қадам. ξ кездейсоқ шамасының z_{2j-1} және z_{2j} нақтыламасын алу керек;

3-қадам. z_{2j-1}-ң көмегімен A_k оқиғасын шығару;

4-қадам. $f_k(x)$ тығыздық функциясына сәйкес x_j нақтыламасын модельдеу;

5-қадам. $j = j+1$ болсын;

6-қадам. $j > n$ шартының орындалуын тексеру, мұндағы n - берілген η кездейсоқ шамасының нақтыламаларының керекті саны;

7-қадам. алынған нақтыламаны баспалау.

3.6. Арнаулы үлестірімдерді модельдеу

Жиі кездесетін қалыпты, логарифмді-қалыпты, бірқалыпты, экспоненциялды, сызықты және гамма үздіксіз үлестірім заңдарын модельдеу әдістерімен танысайық.

3.6.1. Қалыпты үлестірім

Қалыпты немесе Гаусс үлестірімі маңызды және жиі қолданылатын үздіксіз үлестірімдердің бірі.

Қалыпты үлестірімнің тығыздық функциясы:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Математикалық үміті: $M(\eta) = m_x$.

Дисперсиясы: $D(\eta) = \sigma_x^2$.

Қалыпты үлестірімді кездейсоқ η шаманы модельдеу үшін бірнеше алгоритмдер қолдануға болады. Солардың бірі, шектік теоремаларын қолдану әдісіне байланысты. 3.4 тарауында қарастырылған.

Басқа бір әдісті американдықтар Т.Бокс пен М.Мюллер ұсынды [3,5]. Бұл әдіс орайлық координаттар әдісі деп аталады. Енді осы әдіспен танысайық.

η және ζ - мөлшерленген қалыпты үлестірім заңы бар екі тәуелсіз кездейсоқ шама болсын. Олардың нақтыламаларын сәйкесінше x және y деп белгілейік. мен кездейсоқ шамаларын нүктесінің декарт жазықтығындағы координаттары ретінде бейнелейік. Сонда нүктесінің орайлық координаттарын мына өрнектерден табамыз:

$$R = \sqrt{\eta^2 + \zeta^2} \quad \text{және} \quad \theta = arctg\frac{\zeta}{\eta}.$$

Бұл екі жаңа кездейсоқ шамаларының тығыздық функцияларын келтірейік [2]:

$$f(r) = re^{-r^2/2} \text{ және } f(\varphi) = \frac{1}{2\pi}.$$

мұндағы r мен φ - R және θ кездейсоқ шамаларының нақтыламалары.

Енді, кездейсоқ шамаларын модельдеу әдістерінің бірімен, мысалы, кері функция әдісімен r және φ нақтыламаларын модельдеп, солар арқылы A нүктесінің декарт координаттарының нақтыламалары x пен y-ті табуға болады:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi = \sqrt{-2\ln z_1}\cos 2\pi z_2; \\ y &= r\sin\varphi = \sqrt{-2\ln z_1}\sin 2\pi z_2. \end{aligned} \qquad (3.11)$$

Қалыпты заңдылығы бар кездейсоқ шаманың нақтыламасын модельдеу үшін (3.11) формулаларының кез келгенін қолдана аламыз, мысалы, олардың біріншісін:

$$x_j = m_x + \sigma_x\sqrt{-2\ln z_{2j-1}}\cos 2\pi z_{2j}.$$

(3.11) формуламен есептеу көп уақытты талап ететіндіктен американ ғалымы Г.Марсалья орайлық координаттар әдісінің келесі алгоритмін ұсынды.

Марсалья алгоритмі.

1-қадам. $j = 1, \quad i = 1$ деп алайық.

2-қадам. Базалық ξ кездейсоқ шамасының z_{2j-1} және z_{2j} нақтыламаларын модельдеу.

3-қадам. $V_1 = 2z_{2j-1}, V_2 = 2z_{2j} - 1, S = V_1^2 + V_2^2$ және $j = j + 1$ деп алайық.

4-қадам. $S \leq 1$ шартын тексерейік. Бұл шарт орындалмаған жағдайда 2-ші қадамға көшу.

5-қадам. x_i және y_i нақтыламаларын

$$x_i = m_x + \sigma_x V_1 \sqrt{-\frac{2\ln S}{S}},$$
$$y_i = m_x + \sigma_x V_2 \sqrt{-\frac{2\ln S}{S}} \qquad (3.12)$$

формулаларымен есептеу керек.

6-қадам. $i = i + 1$ болсын.

7-қадам. $i < n$ шартын тексеру керек, мұнда n-нақтыламалардың керекті саны. Бұл шарт орындалмаған жағдайда 2-ші қадамға көшу.

8-қадам. x_i және y_i сандарын баспалау.

Бір кездейсоқ шамасын модельдеу үшін, бұл алгоритмнің 5-ші қадамында (3.12) формулалардың біреуін ғана пайдалану жеткілікті.

3.6.2. Логарифмді-қалыпты үлестірім

Логарифмді-қалыпты әлде логқалыпты үлестірім деп, логарифмі қалыпты заңдылыққа бағынатын кездейсоқ шаманың үлестірімі аталады. Кездейсоқ шаманың логарифмдік түрлендірілуі ассимметриялық үлестірімдерді қалыпты заңдылыққа жақындату үшін қолданылады [Мартин]. Ассимметриялық үлестірім, кездейсоқ шамалардың тек оң мәндерімен бейнеленетін құбылыстарға ғана тән болады. Мысалы, биологиялық өмірдің ұзақтығы, құрал-жабдықтардың істен шығу мерзімдері, табыстардың үлестірімдері және т.б.

Егер х – логқалыпты заңдылықпен сипатталатын кездейсоқ шама болса, ал $y = \ln x$ тең болса, осы у-тің тығыздық функциясы мына өрнекпен бейнеленеді:

$$f(y) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}$$

m_y пен σ_y^2 - тиісінше $\ln x$ шамасының математикалық үміті мен дисперсиясы.

Сонда логқалыпты заңдылықтың үлестірім функциясын мына өрнекпен жазуға болады:

$$F(y) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \int_0^y \exp\left[\frac{-(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right] dy$$

Бұл заңдылықты модельдеу алгоритмі мына қадамдардан тұрады:

Бастапқы қадам. $\ln x$ кездейсоқ шамасының математикалық үміті m_y және дисперсиясы σ_y^2 берілсін.

1-ші қадам. Мөлшерленген және орташаландырылған, яғни үлестірім функциясы

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-r^2}{2}}$$

тең қалыпты заңдылықтың r нақтыламасы моделденеді.

2-ші қадам. $y = \ln x + r\sigma_y$ өрнегінен y-тің мәні табылады.

3-ші қадам. Логарифмді-қалыпты заңдылықтың нақтыламасы $x = e^y$ тең болады.

4-ші қадам. x-тің мәні баспаланылады.

3.6.3. Бірқалыпты үлестірім

Қолдану жиілігі қалыпты заңына парапар бірқалыпты үлестірім заңы мына тығыздық функциясымен сипатталады:

$$f(x) = 1/(b-a), \quad x \in [a,b].$$

Математикалық үміті: $M(\eta) = (a+b)/2.$

Дисперсия: $D(\eta) = (a+b)^2/12.$

Бірқалыпты үлестірімді η кездейсоқ шамасын модельдеу үшін кері функция әдісімен табылған мына формуланы қолдануға болады:

$$x = a + z(b - a) \tag{3.13}$$

Алгоритмі:

1-қадам. $j = 1$ деп алайық.

2-қадам. Базалық ξ кездейсоқ шаманың z нақтыламасын табайық.

3-қадам. $x_j = a + z_j(b - a)$ деп есептейік.

4-қадам. $j = j + 1$ болсын.

5-қадам. $j > n$ шартын тексерейік, мұндағы n -кездейсоқ шама нақтыламасының керекті мөлшері. Бұл шарт орындалмаған жағдайда 2-ші қадамға көшу.

6-қадам. Алынған нақтыламаларды баспалау.

3.6.4. Экспоненциалдық үлестірім

Экспоненциалдық үлестірім "пайда болу уақытымен" сипатталатын біраз нақтылы процесстерді бейнелейді. Мысалы, электрон аппараттарының істен шықпай жұмыс істеу ұзақтығы, телефон шылдырының арасындағы уақыт аралығы, немесе ірі жер сілкіністер арасы және т.б.

Экспоненциалдық үлестірімнің тығыздық функциясы:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \ x \geq 0.$$

Математикалық үміті: $M(\eta) = m_x = 1/\lambda$.

Дисперсиясы: $D\{\eta\} = \sigma_x^2 = 1/\lambda^2$.

Бұл үлестірімді модельдеу үшін кері функция әдісін қолданамыз:

$$f(x) = \lambda \int_0^{x_j} e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x}\Big|_0^{x_j} = z_j$$

Демек кері функция

$$x_j = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - z_j) \tag{3.14}$$

тең болады. ξ мен $\xi_1 = 1 - \xi$ кездейсоқ шамаларының екеуі де $[0,1]$ арасында бірқалыпты үлестірілгенін ескере отырып, (3.14) формуланың орнына есептеуге тиімдірек

$$x_j = -\frac{1}{\lambda}\ln z_j \qquad (3.15)$$

формуласын келтірейік.

Экспоненциалдық үлестірімді η кездейсоқ шамасын модельдейтін алгоритм келесі қадамдардан тұрады.

1-қадам. $j = 1$ болсын.

2-қадам. Базалық ξ кездейсоқ шаманың z нақтыламаларын табайық.

3-қадам. (3.15) формула бойынша η кездейсоқ шамасының x_j нақтыламасын есептеу керек және $j = j + 1$ болсын.

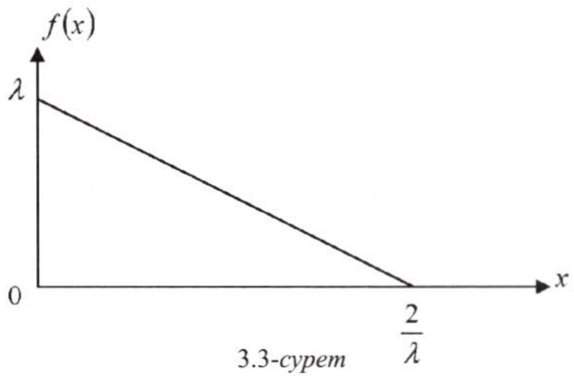
4-қадам. Алгоритмнің аяқталу шартын $j > n$ тексеріп, ол орындалмаған жағдайда 2-ші қадамға көшу керек.

5-қадам. $\{x_j\}$ баспалау.

3.6.5. Сызықтық үлестірім

Сызықтық заңның үлестірім тығыздығы мына формуламен беріледі:

$$f(x) = \lambda(1 - \frac{\lambda}{2}x), x \in \left(0;\ \frac{2}{\lambda}\right]$$



3.3-*сурет*

Бұл кездейсоқ шаманың үлестірім тығыздығының графигі 3.3-суретте көрсетілген.

Математикалық үміті $M(\eta) = m_x = \frac{2}{3\lambda}$

Дисперсиясы $D(\eta) = \sigma_x^2 = \frac{2}{9\lambda^2}$

Сызықтық үлестірім нақтыламаларын есептейтін формуланы кері функция әдісімен алуға болады:

$$F(x) = \lambda \int_0^{x_j} \left(1 - \frac{\lambda}{2} x \right) dx = \lambda \left(x_j - \frac{\lambda}{4} x^2 \right) = z_j,$$

Сонда кері функция

$$x_j = \frac{2}{\lambda}(1 - \sqrt{z_j}) \tag{3.16}$$

тең. Осы формулаға негізделген алгоритм бес қадамнан тұрады.

1-қадам. $j = 1$ болсын.

2-қадам. Базалық ξ кездейсоқ шаманың z_j нақтыламасын модельдеу.

3-қадам. x_j -ді (3.16) формуласымен есептейміз және $j = j + 1$ деп аламыз.

4-қадам. Модельдеудің аяқталу, яғни $j > n$ шартын тексеру. Бұл шарт орындалмаған жағдайда 2-ші қадамға қайта оралу қажет.

5-қадам. $\{x_j\}$ баспалау.

3.6.6. Гамма-үлестірімі

Тығыздық функциясы (3.17) өрнегімен берілген және барлық

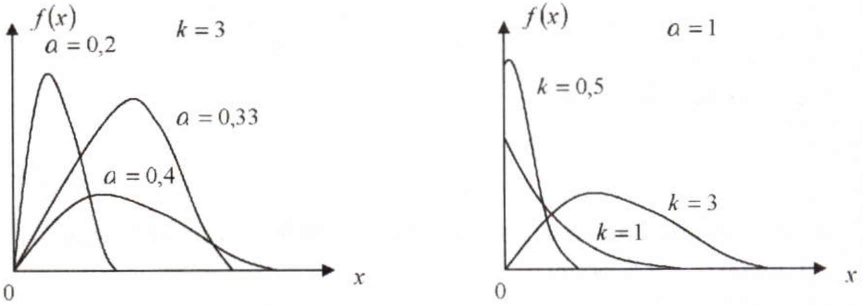
$$f(x) = \frac{\alpha^k}{k-1)!} x^{(k-1)} e^{-\alpha x} \tag{3.17}$$

параметрлері оң, яғни $\alpha > 0$, $k > 0$, $x \geq 0$ η кездейсоқ шамасы гамма үлестіріміне бағынады. Бұл кездейсоқ шаманың математикалық үміті мен дисперсиясын келтірейік:

$$M[\eta] = m_x = k/\alpha, D[\eta] == k/\alpha^2$$

Әртүрлі кездейсоқ құбылыстарды бейнелейтін көптеген теріс емес кездейсоқ шамаларды гамма үлестірімінің көмегімен сипаттауға болады.

Шынымен, α мен k параметрлері гамма үлестірімі заңының сұлбасы мен масштабын анықтайтын болғандықтан, бұл параметрлердің мөлшерлерін таңдау арқылы тығыздық функциясының түрін күрделі (3.4. сурет) өзгертуге болады. Сондықтан бұл заң, көптеген қолданбалы зерттеулерде пайдалана алатын, универсальды үлестірім ретінде танымалы.



3.4-*сурет*

Гамма - үлестірімі параметрлерінің мәнін анықтау үшін мына өрнектерді қолдануға болады:

$$k = \frac{m_x^2}{\sigma_x^2} \quad \text{және} \quad \alpha = \frac{m_x}{\sigma_x^2}.$$

Гамма үлестірімінің тағы бір ерекшелігі, параметрлерінің мәнін өзгерту арқылы осы үлестірімнің жекеленген жағдайы ретінде бірнеше пайдалы басқа үлестірім заңдарын алуға болады. Мысалы, $k = 1$ тең, ал α - тұрақты сан болса, гамма үлестірімінің көмегімен экспоненциялдық заңға бағынышты кездейсоқ шама модельденеді. Егер k -ң бүтін санды мәні болса, онда гамма үлестірімі k -ретті Эрланг үлестірімі деп аталады. Әрі қарай, егер $\alpha = 1$ болса, онда өскен сайын гамма үлестірімі қалыпты үлестірімге жақындайды. Ал $k = 1/2$ және i=2 (i-еркіндік дәрежесінің саны) деп алып, үлестірімді кездейсоқ шаманы модельдеуге болады.

Гамма үлестірімімен сипатталатын η кездейсоқ шамасының нақтыламалары

$$x = -(1/\alpha)\ln(z_1 \times z_2 \times ... \quad \times z_k).$$

формуласымен есептеледі. Бұл формула, гамма тығыздық функциясының k параметрін бірге тең деп қарастырғанда, кері функция әдісі арқылы алынған

$$x = -(1/\alpha)\ln(z_1)$$

форуласының $k > 1$ болғандағы толықтырылмасы болады. Гамма-үлестірімін модельдейтін алгоритм келесі қадамдардан тұрады.

1-қадам. $i = 1$ болсын.

2-қадам. $S = 1, \quad j = 1$ болсын.

3-қадам. Базалық ξ кездейсоқ шамасының z_j нақтыламасын табу.

4-қадам. $S = S \times z$ және $j = j + 1$ екенін тағайындау керек.

5-қадам. $j > k$ екенін тексеру керек. Бұл шарт орындалмаған жағдайда 3-і қадамға қайтамыз.

6-қадам. x_i нақтыламасын есептеу.

7-қадам. Есептеудің аяқталу, яғни $j > n$ шартын тексеру. Бұл шарт орындалмаған жағдайда 2-ші қадамға оралу.

8-қадам. $\{x_j\}$ баспалау.

Үздіксіз кездейсоқ шамаларын модельдеу тақырыбына қатысты бақылау сұрақтары

1. Мына формула: $x = m_x + \sigma_x(\sum_{i=1}^{12} z_1 - 6)$ қандай кездейсоқ заңдылықты модельдеу үшін қолданылады?

2. Мына формула: $x = r\cos\varphi = \sqrt{-21nz_1}\cos 2\pi z_2$ қандай кездейсоқ заңдылықты модельдеу үшін қолданылады және оның артықшылықтары қандай?

3. Мына формула: $x_j = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - z_j)$ қандай кездейсоқ заңдылықты модельдеу үшін қолданылады және оның кемшілігі неде?

4. Мына формула: $x_1 = m_x + \sigma_x V_1 \sqrt{(-21nS/S)}$ қандай кездейсоқ заңдылықты модельдеу үшін қолданылады және оның $x = r\cos\varphi = \sqrt{-21nz_1}\cos 2\pi z_2$ өрнегімен байланысы неде?

5. Мына формула: $x_i = a + z(b - a)$ қандай кездейсоқ заңдылықты модельдеу үшін қолданылады?

6. Мына формула: $x_i = -\frac{1}{\alpha}\ln(z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_k)$ қандай кездейсоқ заңдылықты модельдеу үшін қолданылады және қай әдіспен табылған?

7. Кері функция әдісі қандай кездейсоқ заңдылықтарды модельдеу үшін қолданылады және оның қолдану аумағы қандай?

8. Шектік теоремалар әдісі қандай кездейсоқ заңдылықтарды модельдеу үшін қолданылады?

9. Дж. Нейманның шығарып тастау әдісі қандай кездейсоқ заңдылықтарды модельдеу үшін қолданылады және оның қолдану аумағы қандай?

10. Берілген z = 0,6 бойынша $P\{\eta \le x\} = (2x - 3)/5$ үлестірім заңдылығына бағынышты кездейсоқ шаманың нақтыламасын табыңыз.

11. Берілген z = 0,6 бойынша $F(x) = x - 4$ үлестірім заңдылығына бағынышты кездейсоқ шаманың нақтыламасын табыңыз.

4. ДИСКРЕТТІ КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАРДЫ МОДЕЛЬДЕУ

4.1. Дискретті кездейсоқ шамаларды модельдеудің негізгі әдісі

Дискретті кездейсоқ шамасын гректің ν әрпімен белгілеп, оның үлестірім заңын келесі үлестірім кестесімен сипаттайық:

$$\nu = \begin{bmatrix} x_1 \; x_2 & \dots \; x_m \\ p_1 \; p_2 & \dots \; p_m \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

Мұндағы $p_k = P\{\nu = x_k\}$.

Дискретті ν кездейсоқ шамасының сипаттамасы жоғарыда қаралған үйлесімсіз оқиғалардың толық тобының (2.1) сипаттамасына ұқсас екені анық көрініп тұр. Айырмашылығы - үлестірім кестесінің жоғарғы жолында A_k оқиғаларының орнына x_k нақтыламалары орналасқан. Сондықтан, дискреттік кездейсоқ шамасын модельдеу үшін 2.2 теоремасына негізделген 2.2. параграфта қаралған алгоритмді қолдануға болады. Ол үшін, тек оқиғаларын кездейсоқ шамасының нақтыламаларымен алмастыру керек.

Дискретті кездейсоқ шамаларды модельдеудің бұл әдісі универсалды болғанымен, компьютер уақытының елеулі шығындалуына әкеледі. Сондықтан, белгілі дискретті үлестірім заңдарын модельдеу үшін, есептеуге тиімді басқа әдістерді қарастырайық.

4.2. Геометриялық үлестірім

Егер кейбір оқиға p ықтималдылығымен орындалатын болса, онда осы оқиғаның пайда болуына дейінгі бірінен бірі тәуелсіз сынақтардың ν кездейсоқ саны, геометриялық үлестіріммен сипатталады. Демек, p ықтималдығымен $\nu = 1$ *-ге.* $(1-p)p$ ықтималдығымен $\nu = 2$ -ге, ал жалпы алғанда

$$P\{v = k\} = (1-p)^{k-1} p = p_k \qquad (4.2)$$

ықтималдығымен $v = k$ -ға тең болады.

Геометриялық үлестірімнің математикалық үміті: $M[v] = m_x = (1-p)/p$, ал диперсиясы $D[v] = (1-p)/p^2$ -ге тең.

Геометриялық үлестірімді v кездейсоқ шамасын модельдеу үшін:

$$v = [\ln\xi / \ln(1-p)]. \qquad (4.3)$$

формуласын қолдануға болады.

Мұндағы v -квадрат жақшаның ішіндегі өрнекке тең немесе одан артық бүтін сан. Бұл формула геометриялық үлестірімі бар кездейсоқ шаманың нақтыламасын тудыратынын көрсетейік [14]:

$$p_k = P\{v = k\} = P\{k-1 \le \ln\xi / \ln(1-p) \le k\} =$$

$$= P\{-(k-1)\ln(1-p) \le -\ln\xi \le -k\ln(1-p)\} =$$

$$= P\{(1-p)^k \le \xi \le (1-p)^{k-1}\} = (1-p)^{k-1} - (1-p)^k =$$

$$= p(1-p)^{k-1} = p_k.$$

Геометриялық үлестірімді модельдейтін алгоритмді мына түрде келтіруге болады.

1-қадам. $j = 1$ деп аламыз.

2-қадам. Базалық ξ кездейсоқ шамасының z нақтыламасын табу.

3-қадам. v кездейсоқ шамасының x_j нақтыламасын есептеу. $x_j = Ц[\ln z / \ln(1-p)] + 1$ және $j = j + 1$ деп алу керек.

4-қадам. Есептеудің аяқталу, яғни $j > n$, шартын тексеру. Бұл шарт орындалмаған жағдайда 2-ші қадамға көшу.

5-қадам. $\{x_j\}$ нақтыламаларын баспалау.

4.3. Биномиалдық үлестірім

Атақты ғалым Бернулли ұсынған биномиалдық заңдылық дискреттік үлестіріммен сипатталады және қарапайым оқиғаның екі нәтижесін: орындалу және орындалмау нәтижелерін белгілейді.

Кез келген қарапайым A оқиғасы

$$p = P(A)$$

ықтималдылығымен берілсін, ал A оқиғасының орындалмау ықтималдылығы

$$q = 1 - p$$

тең болсын. Сонда n сынақта A оқиғасының орындалуын сипаттайтын

ν кездейсоқ шамасының нақтыламалары

$$0, 1, \dots k, \dots, n$$

сандарына тең болса және ықтималдылықтары

$$p_k = P\{\nu = k\} = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (4.4)$$

өрнегімен анықталса, осы заңдылық биномиалдық үлестірім деп аталады.

Осы өрнектен биномиалдық үлестірім екі: p және n параметрлерімен бейнелетінін байқаймыз.

Бұл үлестірімнің математикалық үміті

$$m = np,$$

ал дисперсиясы

$$D = np\,(1 - p)$$

тең болады.

А қарапайым оқиға болғандықтан, бұл үлестірімді модельдеу үшін екінші тараудағы 2.1 теоремасын негізге ала аламыз. Сонда биномиалдық үлестірімді модельдейтін алгоритм келесі қадамдардан тұрады:

1-ші қадам. Бастапқы деректер: n және p берілсін.

2-ші қадам. Базалық ξ кездейсоқ шамасының n рет тәуелсіз $z_j, j = 1, n$ нақтыламалары алынсын.

3-ші қадам. 2.1 теоремасына сәйкес $z_j \le p, \ j = \overline{1, n}$ шарты тексеріліп, осы шарттың орындалған k саны есептелсін.

4-ші қадам. Биномиалды үлестірімнің кезекті нақтыламасы белгіленсін $\nu = k$.

Бұл алгоритм n-параметрлерінің кішігірім мәндеріне қолданылады.

4.4. Пуассон үлестірімі

Пуассон үлестірімін сирек оқиғалар пайда болу заңы деп атайды және ол әр қайсысы кезкелген мезгілде орындалатын оқиғалар санымен сипатталады. Мысалы, бір жылда болатын қатты жер сілкінісінің әлде басқа бір үлкен апаттың саны.

Осы үлестірімге бағынышты ν кездейсоқ шамасының бүтін санды k мәнін қабылдау ықтималдығы (4.5) Пуассон формуласымен анықталады:

$$P\{\nu = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \tag{4.5}$$

Мұндағы λ - уақыт бірлігінде орын алатын оқиғалардың орта саны. Математикалық үміті мен дисперсиясы сәйкесінше мынаған тең:

$$M[\nu] = m_x = \lambda, \quad D[\nu] = \sigma_x^2 = \lambda.$$

Пуассон заңына сәйкес кездейсоқ шаманы модельдеу үшін Пуассонның шектік теоремасын қолданамыз.

4.1. теоремасы. Егер p -бір сынақ кезіндегі A оқиғасының пайда болу ықтималдылығы болса, онда n тәуелсіз сынақтар кезінде $n \to \infty$ және $p \to 0$ ұмтылған жағдайда k оқиғалар пайда болуының ықтималдылығы (4.5) формуласымен табылады.

Пуассон теоремасына сәйкес дискреттік ν кездейсоқ шамасын модельдеуді сұлбасы жоғарыда биномиалдық үлестірімге келтірілген сұлбаға негізделе алынады. Алайда Пуассон теоремасының

$$n \to \infty \text{ және } p \to 0$$

шарттарын ескере отырып, сынақтардың саны келесі

$$n = \lambda / p$$

өрнегінен анықталады

Осы сұлбаны арқау етіп алынған, мына нақтылы алгоритммен танысайық.

1-ші қадам. Бастапқы деректер: n және p беріледі.

2-ші қадам. e^{-np} мәні есептеледі.

3-ші қадам. Кездейсоқ ν шамасының бастапқы нақтыламасы тағайындалады $k = 0$.

4-ші қадам. Базалық ξ кездейсоқ шамасының z нақтыламасы алынады.

5-ші қадам. Базалық ξ кездейсоқ шамасының z_j нақтыламаларының $k+1$ көбейтіндісі есептеледі - $\prod_{j=1}^{k+1} z_j$.

6-шы қадам. $\prod_{j=1}^{k+1} z_j < e^{-np}$ шарты анықталады. Осы шарт орындалмаса $k = k + 1$ мәні анықталып, 5 және 6 қадамдар қайталанады. Шарт орындалған жағдайда Пуассон заңдылығының келесі нақтыламасы $\nu = k$ тең деп есептеледі.

Осы тарауға қатысты бақылау сұрақтары

1. Мына формула: $x_i = Ц[\ln(z)/\ln(1-p)]+1$ қандай заңдылықты модельдеу үшін қолданылады?

2. Қатал оқытушыға сынақ тапсыру ықтималдылығы p-ға тең. Сынақ тапсырғанға дейінгі ұмтылыс санының сипаттамасының шамасы қай заңға бағынады?

3. Аялдамаға келген автобус сіз күткен маршруттікі болу ықтималдылығы p = 0,4. Егер z = 0,60 болса сіздің автобусыңыз нешінші болатынын анықтаңыз.

4. Пуассон заңдылығын модельдегенде n параметрі қалай есептеледі?

5. КӨП ӨЛШЕМДІ КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАРДЫ МОДЕЛЬДЕУ

5.1. Тізбектеп модельдеу әдісі

$f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ тығыздық функциясымен берілген n-өлшемді $\eta = (\eta_1,\ \eta_2,\ ...,\ \eta_n)$ кездейсоқ шаманы модельдеу, осы векторлық шаманы құраушы скалярлы η_i, $i = 1,...,n$ кездейсоқ шамалардың бірінен соң бірінің нақтыламалырын табуға әкеледі.

Алдымен, осы көпөлшемді кездейсоқ шаманы құраушы барлық скалярлық кездейсоқ шамалар, бірінен бірі тәуелсіз болсын, сонда:

$$f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \cdot ... \cdot f_n(x_n). \qquad (5.1)$$

Демек, әрбір η_i кездейсоқ шамасын бір-біріне тәуелсіз модельдеуге болады, мысалы, кері функция әдісімен:

$$\eta_i = F^{-1}(\xi_i), \qquad i = 1,2,...,n \qquad (5.2)$$

Егер бұл кездейсоқ шамалар біріне бірі тәуелді болса, онда ықтималдық теориясына сәйкес, (5.3) өрнегін жазуға болады.

$$f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2 / x_1) \cdot ... \cdot f_n(x_n / x_1..x_{n-1}) \qquad (5.3)$$

Ал бұл өрнектің оң жағындағы шартты тығыздық функциялары келесі теңдеулер жүйесінен анықталады:

$$\begin{array}{l} f_1(x_1) = \int ... \int f(x_1,...,x_n) dx_2 ... dx_n, \\ f_2(x_2 / x_1) = \int ... \int f(x_1,...,x_n) dx_3 ... dx_n [f_1(x_1)]^{-1}, \\ .... \\ f_n(x_n / x_1 ... x_{n-1}) = \dfrac{f(x_1,...,x_n)}{f_1(x_1)...f_{n-1} \cdot (x_{n-1} / x_1 ... x_{n-2})} \end{array} \qquad (5.4)$$

Тізбектеп модельдеу әдісінің негізі ретінде келесі теореманы тұжырымдайық.

Теорема 5.1. [2]. $\xi_1,...,\xi_n$ - тәуелсіз базалық кездейсоқ шамалар болсын. Сонда (5.5) теңдеулер жүйесін біртіндеп

$$\begin{aligned} &F_1(\eta_1)=\xi_1, \\ &F_2(\eta_2 / x_1)=\xi_{2,} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &F_n(\eta_n / x_1...x_{n-1})=\xi_n. \end{aligned} \tag{5.5}$$

шығарғанда алынған $\eta_1,...,\eta_n$ кездейсоқ шамалар жиыны, көпөлшемді $f(x_1,...,x_n)$ тығыздық функциясымен сипатталады.

Дәлелдеуі: Егер $\eta_1 = x_1,...,\eta_{i-1} = x_{i-1}$ мәндері белгілі болса, онда $F_i(x / x_1...x_{i-1})$ үлестірім функциясы бар η_i кездейсоқ шамасын мына қатынастан табуға болады:

$$F_i(\eta_i / x_1,...,x_{i-1})= z_i.$$

Сонда $x_i < \eta_i < x_i + \Delta x_i$ теңсіздігінің ықтималдығы келесі өрнекпен бейнеленеді:

$$P\{x_i < \eta_i < x_i + \Delta x_i / x_1...x_{i-1}\}= f_i(x_i / x_1...x_{i-1})\Delta x_i.$$

Демек, шексіз азаятын шамалардың жоғары реттерінің дәлдігімен алғанда, мына n теңсіздіктің бірге орындалу ықтималдығы келесі өрнекпен табылады:

$$\begin{aligned} &P\{x_1 < \eta_1 < x_1 + \Delta x_1,...,x_n < \eta_n < x_n + \Delta x_n\}= P\{x_1 < \eta_1 < x_1 + \Delta x_1\}\times... \\ &\times P\{x_n < \eta_n < x_n + \Delta x / x_1...x_{n-1}\}= f_1(x_1)\Delta x_1 \ ... \ f_n(x_n / x_1...x_{n-1})\Delta x_n = \\ &f(x_1,...,x_n)\Delta x_1...\Delta x_n \end{aligned}$$

Теорема дәлелденді.

5.1-мысал. $f(x_1,x_2)=6x_2{}^2$ тығыздық функциясы бар, $x_1 + x_2 < 1,\ x_2 > 0,\ x_1 > 0$ үш бұрышында мәндер қабылдай алатын, $\eta = (\eta_1,\eta_2)$ екі өлшемді кездейсоқ шамасын қарастырайық.

Алдымен $f_1(x_1)$ және $f_2(x_2 / x_1)$ -ні табайық.

$$f_1(x_1)=6\int_0^{1-x_1} x_2dx_2=3(1-x_1)^2,$$

$$f_2(x_2/x_1)=(f(x_1,x_2))/f_1(x_1)=6x_2/3(1-x_1)^2=2x_2(1-x_1)^{-2}.$$

Сонда кері функция әдісіндегі теңдеуден

$$F_1(x_1)=3\int_0^{x_{1i}}(1-x_1)^2dx_1=1-(1-x_{1i})^3=z_{1i},$$

$$F_1(x_2/x_1)=2\int_0^{x_{2i}}x_2(1-x_1)^{-2}dx_2=x_{2i}^2(1-x_i)^{-2}=z_{2i}$$

$$x_{1i}=1-\sqrt[3]{z_{1i}},$$

$$x_{2i}=(1-x_{1i})\sqrt{z_{2i}}$$

табамыз.

Тізбектеп модельдеу алгоритмі екі сатыдан тұрады: алдын-ала модельдеу және негізгі.

Алдын-ала модельдеу сатысы.

1-қадам. $f_1(x_1)$, $f_2(x_2/x_1),\dots,f_n(x_n/x_1\dots x_{n-1})$ шартты тығыздық функцияларын (5.4) формулаларымен табу.

2-қадам. Мына интегралдық теңдеулерден

$$\int_0^{x_k} f_k(x_k/x_1\dots x_{k-1})dx_k=z_k,\qquad k=1,2,\dots,n,$$

x_k, $k=1,\dots,n$ нақтыламаларын есептейтін тәуелділіктерді анықтау:

$$x_k=F^{-1}(z_k,\ x_1,\dots,x_{k-1}),\qquad k=1,2,3,\dots,n$$

Негізгі саты.

3-қадам. $i=1$ болсын.

4-қадам. $k=1$ болсын.

5-қадам. ξ кездейсоқ шамасының z нақтыламасын модельдеу.

6-қадам. шартының орындалуын тексеру керек. Бұл шарт орындалмаған жағдайда 8-ші қадамға көшу.

6-қадам. $k = 1$ шартының орындалуын тексеру керек. Бұл шарт орындалмаған жағдайда 8-ші қадамға көшу.

7-қадам. $x_1 = F_1^{-1}(z)$ есептеп, 9-шы қадамға көшу.

8-қадам. $x_k = F_k^{-1}(z_k,\ x_1,...,x_{k-1})$ есептеу.

9-қадам. $k = k + 1$ деп аламыз.

10-қадам. $k > n$ шартының орындалуын тексеру. Бұл шарт орындалмаған жағдайда 5-ші қадамға қайтамыз.

11-қадам. $x[i] = (x_1, x_2, ..., x_n)$ баспалау.

12-қадам. $i = i + 1$ деп алайық.

13-қадам. Есептеудің аяқталу, яғни $i > n$ шартын тексеру. Бұл шарт орындалмаған жағдайда 4-ші қадамға қайтамыз.

14-қадам. Соңы.

Өкінішке орай, тізбектеп модельдеу әдісі өте күрделі математикалық түрлендіруге әкеліп соғады, сондықтан көбінесе іс жүзінде қолданыла алмайды.

5.2. Нейманның жалпылама "шығарып тастау" әдісі

Көпөлшемді $\eta = (\eta_1,...,\eta_n)$ кездейсоқ шама біріккен тығыздық функциясымен берілсін және бұл функция жоғарыдан шектелген болсын

$$f_\eta(x_1,...,x_n) \le f_{m.}$$

Сонымен қатар, скалярлы η_i шамаларының әрқайсысы $[a_i,\ b_i]$ $\quad i = \overline{1,n}$ аралығында анықталсын. Сонда кездейсоқ векторлық шамаларды модельдеуді, Нейманның "шығарып тастау" әдісінің мына жалпыланған алгоритмімен жүзеге асыруға болады:

1-қадам. $j = 1$ болсын.

2-қадам. Базалық ξ кездейсоқ шамасының $z_1, z_2, ..., z_n, z_{n+1}$ нақтыламаларын табу.

3-қадам. $x_i = a_i + z_i(b_i - a_i)$, $\quad i = \overline{1,n}$ мәндерін есептеу.

4-қадам. $f_m z_{n+1} \le f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ шартының орындалуын тексеру керек. Бұл шарт орындалмаған жағдайда 6-шы қадамға көшеміз.

5-қадам. Кездейсоқ векторлың кезекті $x[j] = [x_1, x_2, ..., x_n]$ нақтыламасын тұжырымдау және 7-ші қадамға көшу.

6-қадам. $j = j+1$ болсын.

7-қадам. $z_0 = z_{n+1}$ деп алайық.

8-қадам. $j = j+1$ деп алайық.

9-қадам. $j > n$ шартын тексеру. Бұл шарт орындалмаған жағдайда 2-ші қадамға оралу.

10-қадам. Модельдеу нәтижелерін баспалау.

Бұл әдістің тиімділік коэффициенті мына теңдеумен есептеледі:

$$Э = \left[f_m \prod_{i=1}^{n} \left(b_i - a_i\right) \right]^{-1}$$

және вектордың көлемі ұлғайған сайын кішірейе береді.

5.3. Моменттер әдісі

Көпөлшемді кездейсоқ шаманың біріккен үлестірім заңы осы кездейсоқ векторды толық және нақтылы сипаттайды. Алайда іс жүзінде векторлық кездейсоқ шамалардың адекватты үлестірім заңын табу оңай емес. Сондықтан векторлық кездейсоқ шама көбінесе өзін құраушы кездейсоқ шамалардың математикалық үміті

$$M[\eta] = m_i, \quad i = \overline{1, n},$$

Дисперсиясы

$$D[\eta] = \sigma_i^2, \quad i = \overline{1, n}$$

және корреляциялық коэффициенттерімен

$$R_{ij} = M\left[\left(\eta_i - m_i\right)\left(\eta_j - m_j\right)\right] = r_{ij}, \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, n}$$

беріледі.

Моменттік әдіс, осы үш сипаттамалармен берілген векторлық кездейсоқ шамаларды модельдеуге арналған.

Сонымен, көпөлшемді $\eta = (\eta_1,...,\eta_n)$ кездейсоқ шамасы математикалық үміт векторымен

$$m = (m_1, m_2,..., m_n)$$

және корреляциялық матрицамен:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

берілсін.

Сонда η кездейсоқ векторын $\eta = m + A\tau$ түрлендіруімен алуға болады. Мұндағы τ - құраушылары (τ_i) мөлшерленген қалыпты үлестірім заңына бағынышты векторлық кездейсоқ шама.

A матрицасы ретінде үш бұрышты матрицаны аламыз:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Сонда, η және τ кездейсоқ шамаларының нақтыламаларын сәйкесінше x және y арқылы белгілеп, $\eta = (\eta_1,...,\eta_n)$ векторлық кездейсоқ шамаларды модельдейтін нақты формулаларды жазуға болады:

$$\begin{gathered} x_1 = m_1 + a_{11} y_1, \\ x_2 = m_2 + a_{21} y_1 + a_{22} y_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = m_n + a_{n1} y_1 + \dots + a_{nn} y_n \end{gathered}$$

Бұл формулаларды қолдану үшін, ең бірінші $\{a_{ij}\}$ коэффициенттерін анықтау керек. Ол үшін корреляциялық матрицаның мүшелерін пайдаланамыз:

$$r_{ij} = M\left[\left(x_i - m_i\right)\left(x_j - m_j\right)\right] = M\left[x_i x_j\right] - m_i m_j =$$

$$= M\left[\left(a_{i1}y_1 + \ldots + n_{ii}y_i\right)\cdot\left(a_{j1}y_1 + \ldots + a_{jj}y_j\right)\right]. \quad (5.6)$$

Корреляцияланбаған кездейсоқ шамалар үшін:

$$M\left[y_i y_j\right] = 0 \quad (i\# j), \quad M\left[y_j\right] = 0 \text{ және } M\left[y_i^2\right] = 1$$

екенін ескере отырып, (5.6) өрнегінен шығатын (5.7)

$$r_{ij} = a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \ldots + a_{ii}a_{ji} \quad (5.7)$$

қатысынан A матрицасының барлық мүшелерін табуға болады.

Моменттер әдісін іс жүзінде қолданғанда, бұл әдіс векторлық кездейсоқ шаманы тек қана берілген корреляциялық моменттеріне сәйкес модельдейді. Сондықтан осы әдіспен алынған векторлық кездейсоқ шаманың нақтыламаларының жиыны оның біріккен үлестірім заңына адекватты болмауы да мүмкін [15, 16]. Моменттер әдісінің алгоритмі екі сатыдан тұрады.

Алдын-ала модельдеу сатысы.

1-қадам. (5.7) қатысынан A матрицасының элементтерін анықтау.

Негізгі модельдеу сатысы.

2-қадам. $k = 1$ болсын.

3-қадам. $i = 1$ деп алайық.

4-қадам. Мөлшерленген τ кездейсоқ шамасының y_i нақтыламасын модельдеу.

5-қадам. $x_i = m_i + \sum_{j=1}^{i} a_{ij} y_i$ формуласымен кездейсоқ $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ векторының i-құраушысының x_i нақтыламасын есептеу.

6-қадам. $i = i + 1$ деп алайық.

7-қадам. $i > n$ шартын тексеру. Бұл шарт орындалмаған жағдайда 4-ші қадамға оралу.

8-қадам. Кездейсоқ вектордың кезекті $x[k]=(x_1, x_2, ..., x_n)$ нақтыламасын баспалау.

9-қадам. $k=k+1$ болсын.

10-қадам. Есептеудің аяқталу, яғни $k>n$ шартын тексеру. Бұл шарт орындалмаған жағдайда 3-ші қадамға оралу.

11-қадам. Соңы.

Осы тарауға қатысты бақылау сұрақтары

1. Моменттер әдісі қандай заңдылықтарды модельдеу үшін қолданылады?

2. Дж. Нейманның жалпыланған шығарып тастау әдісі қандай заңдылықтарды модельдеу үшін қолданылады?

3. Тығыздық функциясы $f(x)=2x_1e^{-\lambda x_2}$, болатын көпөлшемді шаманы модельдеу үшін қай әдісті қолдану керек?

4. Тығыздық функциясы $f(x)=2x_1+x_2{}^2$, $1<x_1<5$, $0<x_2<3$ болатын көп өлшемді шаманы модельдеу үшін қай әдісті қолдану керек?

6. КЕЗДЕЙСОҚ ПРОЦЕССТЕРДІ МОДЕЛЬДЕУ

Жалпы жағдайда, кездейсоқ процесстердің математикалық моделі ретінде кездейсоқ уақыт *фун*кциясы $\eta(t)$ қолданылады. Бұл кездейсоқ функция математикалық үміт $m_x(t)=M[\eta(t)]$, дисперсия $D[\eta(t)]$ және корреляциялық функциямен $R_x(t_i,t_j)$ бейнеленеді. Бұл үш сипаттамалардың бәрі де кездейсоқ емес уақыт функциялары болып табылады және оларды, тәжірибе бақылауынан алынған деректерді математикалық статистика әдістерімен өңдеу арқылы, оңай табуға болады.

6.1. Стационарлық емес кездейсоқ процесстерді модельдеу

Стационарлық емес кездейсоқ процесстерді модельдеу үшін академик В.С. Пугачев канoникалық жіктеу әдісін ұсынды [17, 18]. Кездейсоқ функция $\eta(t)$ өзінің корреляциялық функциясымен $R_x(t_i,t_j)$ және математикалық үмітімен $m_x(t)$ берілсін. Сондай ақ уақыт осінде орналасқан t_1, t_2, ..., t_n мезгілдері белгілі болсын (бұл мезгілдер бір-бірінен бірдей қашықтықта тұруы міндетті емес). Енді кездейсоқ процессінің нақтыламаларын модельдеу керек. Ол үшін кездейсоқ процессті каноникалық жіктейік:

$$\eta(t)=m_x(t)+\sum_{i=1}^{m}v_i\varphi_i(t). \qquad (6.1)$$

Мұндағы v_i - үлестірім заңы белгілі, корреляцияланбаған және орталандырылған кездейсоқ шамасы, $\varphi_i(t)$ – координаттық функциясы деп аталатын кездейсоқ емес уақыт функциясы.

Сонымен, кездейсоқ процесстерді каноникалық жіктеу әдісімен модельдеу үшін, алдын-ала координаттық функцияларды және v кездейсоқ шамасының дисперсиясын анықтап алу керек.

Корреляциялық функция мен дисперсияның каноникалық жіктеуін мына түрде жазайық:

$$R_X\left(t_i,t_j\right)=\sum_{k=1}^{i}\varphi_k\left(t_i\right)\varphi_k\left(t_j\right)D_k \tag{6.2}$$

$$D_x\left(t_i\right)=R_X\left(t_i,t_i\right)=\sum_{k=1}^{i}\left[\varphi_k(t)\right]^2 D_k \tag{6.3}$$

Осы екі өрнектен, $i > j$ болғанда $\varphi(t_j)=0,$ ал $\varphi(t_i)=1$ екенін ескере отырып, координаттық функциялар мен v_i кездейсоқ шамасының D_i дисперсиясын анықтайтын формулаларды шығаруға болады:

$$\varphi_i\left(t_j\right)=\left[R_X\left(t_i,t_j\right)-\sum_{k=1}^{i-1}D_k\left(t_i\right)\varphi_k\left(t_j\right)\right]\Big/D_i \tag{6.4}$$

$$D_i=R_X\left(t_i,t_j\right)-\sum_{k=1}^{i-1}\left[\varphi_k\left(t_j\right)\right]^2 D_k \tag{6.5}$$

Енді $\eta(t)$ кездейсоқ процессінің $x(t)$ нақтыламаларын есептейтін формуланы келтіретін уақыт жетті:

$$x\left(t_j\right)=m_X\left(t_j\right)+\sum_{i=1}^{j}y_i\varphi_i\left(t_j\right), \quad j=\overline{1,n}\,. \tag{6.6}$$

Мұндағы y_i – кездейсоқ v шамасының нақтыламасы. Осы кездейсоқ шамасының үлестірім заңын өз еркімізбен таңдауға болады, мысалы, ол бірқалыпты заң болуы мүмкін. Тек, осы тәсілмен гаусс процесстерін модельдегенде ғана v_i кездейсоқ шамасы қалыпты үлестірімге бағынышты болуы керек.

6.1-мысал. $m_X(t)=a+bt$ математикалық үмітімен және мына корреляциялық матрицасымен:

$$R_X\left(t_i,t_j\right)=\begin{bmatrix} 0.35 & 0.26 & 0.20 \\ 0 & 0.30 & 0.24 \\ 0 & 0 & 0.26 \end{bmatrix}$$

берілген қалыпты үлестірімді стационарлық емес кездейсоқ процессті модельдеу қажет болсын.

Алдын-ала (6.4) және (6.5) формулаларымен координаттық функцияларды және дисперсияларды есептеп алайық:

$$D_1 = R_X\left(t_1,t_2\right) = 0{,}35;$$

$$\varphi_1\left(t_1\right) = R_X\left(t_1,t_1\right)/D_1 = 0{,}35/0{,}35 = 1;$$

$$\varphi_1\left(t_2\right) = R_X\left(t_1,t_2\right)/D_1 = 0{,}26/0{,}35 = 0{,}743;$$

$$\varphi_1\left(t_3\right) = R_X\left(t_1,t_3\right)/D_1 = 0{,}2/0{,}35 = 0{,}571;$$

$$D_2 = R_X\left(t_2,\, t_2\right) - \left[\varphi_1\left(t_2\right)\right]^2 D_1 = 0{,}1068;$$

$$\varphi_2\left(t_1\right) = 0;$$

$$\varphi_2\left(t_2\right) = 1;$$

$$\varphi_2\left(t_3\right) = \left[R_X\left(t_2,t_3\right) - D_i \cdot \varphi_1\left(t_2\right)\cdot \varphi_1\left(t_3\right)\right]/D_2 = 0{,}8568;$$

$$D_3 = R_X(t_2,t_3) - [\varphi_1(t_3)]^2 D_1 - [\varphi_2(t_3)]^2 D_2 = 0{,}0675;$$

$$\varphi_3(t_1) = 0;$$

$$\varphi_3(t_2) = 0;$$

$$\varphi_3(t_3) = 1.$$

Енді кездейсоқ $\eta(t)$ процессінің $x\ (t_j)$ нақтыламаларын есептеуге болады:

$$x\ (t_1) = a + bt_1 + y_1;$$

$$x\ (t_2) = a + bt_2 + 0{,}743 y_1 + y_2;$$

$$x\ (t_3) = a + bt_3 + 0{,}571 y_1 + 0{,}8568 y_2 + y_3.$$

Каноникалық жіктеу әдісінің алгоритмі алдын-ала және негізгі модельдеу сатыларынан тұрады.

Алдын-ала модельдеу сатысы:

1-қадам. (6.5) және (6.4) формулалары бойынша D_i, $i = \overline{1,n}$ дисперсияларын және $\varphi_i(t_j)$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$ есептеу.

Негізгі саты:

2-қадам. Математикалық үміті $m_y = 0$, дисперсиясы D_i, $i = \overline{1,n}$ белгілі v кездейсоқ шамасының y_i, $i = \overline{1,n}$ нақтыламаларын модельдеу.

3-қадам. (6.6) формула бойынша $x\ (t_j)$ іске асырылуын есептеу керек.

4-қадам. $j = j+1$ деп алайық.

5-қадам. $j > n$ шартын тексеру, n – уақыт бөлігінде берілген нүктелер саны. Бұл шарт орындалмаған жағдайда 3-ші қадамға қайтамыз.

6-қадам. $x\ (t_j)$ нақтыламаларын баспалау.

6.2. Стационарлық кездейсоқ процесстерді модельдеу

Стационарлық кездейсоқ процесстерді модельдеу үшін оның корреляциялық функциясы $R(\tau)$, математикалық үміті m және дисперсиясы σ^2 берілуі қажет. Сонда стационарлы кездейсоқ процесстерінің $t_1, t_2, ..., t_n$ нүктелеріндегі нақтыламаларын есептеу формуласының түрі мынадай болады:

$$x\left(t_j\right) = m + \sum_{i=1}^{n} a_i y_{i+j-1} \quad j = \overline{1,n}. \tag{6.7}$$

Мұндағы y - дисперсиясы σ^2 және математикалық үміті нольге тең корреляцияланбаған кездейсоқ шаманың нақтыламасы.

Бұл формуладағы a_i, $i = \overline{1,n}$ коэффициенттері мына қатынастан табылады:

$$R\left(t_k - t_1\right) = \left(a_1 a_k + a_2 a_{k+1} + \ldots + a_{n-k+1} a_n\right)\sigma^2. \tag{6.8}$$

Егер стационарлық кездейсоқ процесстер қалыпты үлестірімді болса, онда (6.7) және (6.8) қатынастарын мына түрде жазуға болады:

$$x\left(t_j\right) = m + \sum_{j=1}^{n} a_i u_{i+j-1}, \quad j = \overline{1,n} \tag{6.9}$$

$$R\left(t_k - t_1\right) = a_1 a_k + a_2 a_{k+1} + \ldots + a_{n-k+1} a_n. \tag{6.10}$$

Мұндағы u – қалыпты үлестірілген кездейсоқ шаманың мөлшерленген нақтыламасы.

6.2-мысал. Корреляциялық функциясы $R(\tau) = 0{,}2e^{-k\tau}$ (мұндағы $\tau = t_{j-1} - t_j$) және математикалық үміті m-ге тең қалыпты стационарлық процесстің $t_j = \{0,1,2,3\}$, $j = 1,2,3,4$ нүктелеріндегі нақтыламаларын модельдеу керек болсын.

Шешуі: $\{a_i\}$ коэффициентерін анықтау үшін (6.10) формуласын пайдаланайық:

$$R(t_1 - t_2) = 0,2e^0 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2;$$
$$R(t_2 - t_1) = 0,2e^{-2\tau_1} = a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4;$$
$$R(t_3 - t_1) = 0,2e^{-3\tau_1} = a_1 a_3 + a_2 a_4;$$
$$R(t_4 - t_1) = 0,2e^{-4\tau_1} = a_1 a_4.$$

$k > 2$ болғанда $0,2e^{-k\tau} \cong 0$ екенін ескере отырып, мына теңдеулер жүйесін жазуға болады:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 0,2;$$
$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 = 0,0271;$$
$$a_1 a_3 + a_2 a_4 = 0;$$
$$a_1 a_4 = 0;$$

Соңғы теңдеуді былай нақтылайық: a_4=0, $a_1 \neq 0$ болсын.

Сонда үшінші теңдеуден: $a_1 a_3$=0, яғни a_3=0 екенін табамыз. Енді теңдеулер жүйесінің түрі мынадай болады:

$$a_1^2 + a_2^2 = 0,2;$$
$$a_1 a_2 = 0,0271.$$

Оны шеше отырып, $a_1 = 0,06$, $a_2 = 0,44$ екенін анықтаймыз. Енді берілген $\eta(t)$ кездейсоқ процессінің $x(t)$ нақтыламасын модельдейтін (6.9) формуласының түбегейлі түрін жазуға болады:

$$x(t_j) = m + 0,06u_j + 0,44u_{j+1}, \; j = 1,2,3,4.$$

Стационарлы процесстерді модельдеу алгоритмі екі сатыдан тұрады.

Алдын-ала даярлану сатысы:

1-қадам. (6.8) қатынасымен a_i, $i = \overline{1,n}$ параметрлерін есептеу.

Негізгі саты:

2-қадам. Дисперсиясы σ^2 және математикалық үміті нольге тең v кездейсоқ шамасының $y_1, y_2, ..., y_{2n-1}$ нақтыламаларын модельдеу.

3-қадам. $j = 1$ деп алайық.

4-қадам. (6.7) формуласы бойынша $x(t_j)$ нақтыламасын есептеу.

5-қадам. $j = j + 1$ болсын.

6-қадам. $j > n$ шартының орындалуын тексеру. Бұл шарт орындалмаған жағдайда 4-ші қадамға қайта оралу.

7-қадам. $\{x(t_j)\}$ нақтыламаларын баспалау.

6.3. Марков процесстерін модельдеу

Марков процесстері деп [19,20], олардың алдағы уақыттағы ықтималдылық сипаттамаларын болжау үшін, бұл процесстердің қазіргі уақыттағы сипаттамаларын білу жеткілікті болатын, кездейсоқ процесстерді айтады.

Саналымды ғана күйлері S_i, $i = \overline{1,n}$ бар және осы күйлері бір-біріне дискретті мезгілдерде ғана көше алатын біртекті марков процесстерін қарастырайық.

Марков процесстерін толық анықтау үшін бастапқы $P_i(0)$, $i = \overline{1,n}$ ықтималдылықтарын және өту ықтималдылығы матрицасын беру қажетті:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (6.11)$$

Мұндағы $p_{ij} = P\left(S_j / S_i\right)$ - алдағы қадамда процесс S_i күйінде болса, келесі қадамда S_j күйіне көшудің шартты ықтималдылығы.

Марков тізбегіндегі кездейсоқ процесс, алдын-ала белгіленген $t_1, t_2, ..., t_n$ моменттерінде кездейсоқ жағдайда, өзінің бір күйінен екінші күйіне көшуін бейнелейді, мысалы,

$$S_1 \Rightarrow S_3 \Rightarrow S_2 \Rightarrow S_1 \Rightarrow S_4 \Rightarrow ... \tag{6.12}$$

Демек, марков процесстерін модельдеу (6.12) сипатты тізбектерді анықтаудан тұрады және келесі сұлба бойынша орындалады [21,22].

Ең бірінші, $P_i(0) = p_{0i}, \quad i = \overline{1,n}$ ықтималдылықтарының көмегімен марков тізбегінің бастапқы күйі таңдалып алынады. Ол үшін (6.13) ықтималдықтар кестесімен берілген оқиғалардың толық тобын модельдеу әдісін қолданып, марков тізбегінің бастапқы күйін, мысалы, S_m-ді табу керек.

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \cdots & S_n \\ p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0n} \end{vmatrix} \tag{6.13}$$

Сол сияқты бұл тізбектің келесі мүшесін де табуға болады. Алайда, бұл жерде (6.13) кестесінің төменгі жол элементтері ретінде (6.11) матрицасының *m*-ші жолының элементтері пайдалынады. Осы көрсетілген әдісті бірнеше рет қайталау нәтижесінде марков процессінің мүмкін болатын бір нақтыламасын аламыз:

$$S_m \rightarrow S_K \rightarrow \ldots \rightarrow S_i.$$

Осы сұлба бойынша күрделі марков процесстерін, мысалы, біртекті емес марков процесстерін де модельдеуге болады.

Дискретті n күйі бар біртекті марков процесстерін модельдейтін нақтылы алгоритмді келтірейік:

1-қадам. $i = 1$ және $k = 0$ деп алайық. Мұндағы i – марков тізбегінің қадамының номері, k – марков процессінің күйлерінің индексі.

2-қадам. $p_j = p_{kj}$, $j = \overline{1,n}$ болсын.

3-қадам. Базалық ξ кездейсоқ шамасының z нақтыламасын табу керек.

4-қадам. $k = 1$, $R = p_k$ деп алайық.

5-қадам. $z \le R$ шартын тексеру. Бұл шарт орындалса, 7-ші қадамға көшу.

6-қадам. $k = k + 1$ және $R = R + p_k$ болсын. 5-ші қадамға оралу.

7-қадам. $S_i = S_k$ және $i = i + 1$ деп алайық.

8-қадам. Марков тізбегінің барлық қадамы модельденгенін $i > n$ шарт арқылы тексеру керек. Шарт орындалмаса 2-ші қадамға қайта оралу.

9-қадам. Алынған нәтижелерді баспалау.

Бақылау сұрақтары

1. Каноникалық жіктеу әдісі қандай заңдылықтарды модельдеу үшін қолданылады:

2. Таксидің жұмыс күнінің аяғында дұрыс (жақсы) қалыпта болу ықтималдылығы p=0.7, ұсақ жөндеуді талап ету ықтималдылығы p=0.2, күрделі жөндеуді талап ету ықтималдылығы p=0.1, ұсақ жөндеуден кейін дұрыс (жақсы) қалыпқа келу ықтималдылығы p=0.65, ал күрделі жөндеуден кейінгі дұрыс (жақсы) қалыпқа келу ықтималдылығы p=0.4. Сонда ықтималдылықтардың өтпелі матрицасы қандай түрде болады?

3. Байланыс каналы екі қалыпта бола алады: S_0-бос, S_1-бос емес. Келесі мәліметтер бойынша Марков тізбегін табыңыз:

$$\begin{array}{c|cc|} & S_0 & S_1 \\ S_0 & 0.2 & 0.8 \\ S_1 & 0.3 & 0.7 \end{array}, \quad S(t_0) = S_0, \ z_1 = 0.75, \quad z_2 = 0.54, \quad z_3 = 0.25.$$

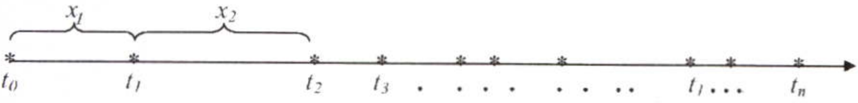
7. ОҚИҒАЛАР АҒЫНЫН МОДЕЛЬДЕУ

7.1. Оқиғалар ағынының қасиеттері

Көптеген нақтылы жүйелер мен объектілерді иммитациялау әдісімен зерттегенде, әр түрлі кездейсоқ оқиғалар ағындарын жиі модельдеуге тура келеді. Мұндай кездейсоқ ағын ретінде, мысалы, ұшақтардың әуежайға келіп қону мезгілдері, немесе күрделі электрон аппараттарының істен шығу кезеңдері және т.б. қарастыруға болады.

Келесі анықтаманы келтірейік. Оқиғалар ағыны деп кездейсоқ уақыт моменттерінде бірінен кейін бірі пайда болатын оқиғалар тізбегін атайды.

Оқиғалар ағынын $(0,\ t)$ уақыт осінде $t_1, t_2, \ldots$ уақыт моменттерінің тізбегі ретінде кескіндеуге болады (7.1-сурет).



7.1-*сурет*

Оқиғалардың арасындағы уақыт интервалдары (x_j), жалпы жағдайда, көп өлшемді

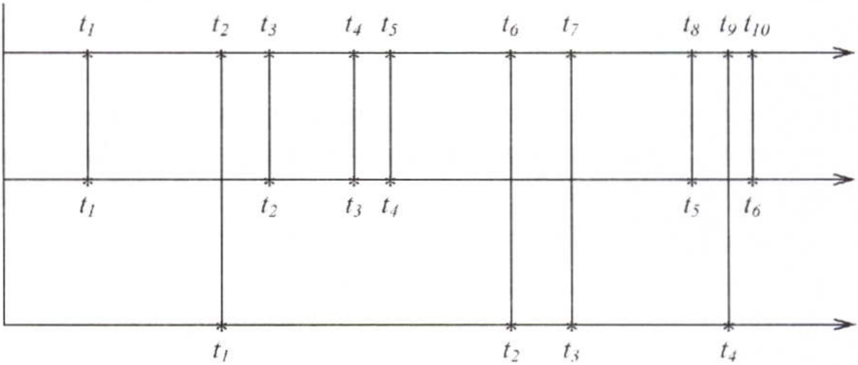
$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\{\eta_1 < x_1, \eta_2 < x_2, \ldots, \eta_n < x_n\}$$

үлестіру заңымен берілген векторлық $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ кездейсоқ шаманың құраушыларының нақтыламалары болып табылады.

Кездейсоқ оқиға ағындары, осы ағындарды түр-түрге бөлуге көмектесетін, бірнеше қасиеттерімен сипатталады.

7.1.1. Біртектілік қасиеті

Ағындар біртекті және біртекті емес болуы мүмкін. Мысалы, азаматтардан қабылданатын телеграммалар ағыны біртекті емес, себебі «жедел» грифі бар телеграммалар аппаратқа кезексіз беріледі. Алайда, көптеген жағдайларда, біртекті емес ағындарды қабаттастырылған бірнеше біртекті ағындар түрінде көрсетуге болады (7.2-сурет).



7.2-сурет

7.1.2. Сыңарлылық қасиеті

Оқиғалар ағынының сыңарлық қасиеті болу үшін, Δt элементарлы уақыт интервалында екі, немесе одан да көп оқиғалардың болу ықтималдылығы, осы интервалда бір оқиғаның пайда болу ықтималдығынан көп есе аз болуы керек, яғни:

$$p_1(t,t+\Delta t) >> p_k(t,t+\Delta t),\ k = 2,3,... \tag{7.1}$$

Ал, кез келген Δt интервалы үшін мына:

$$p_0(t,t+\Delta t)+p_1(t,t+\Delta t)+p_k(t,t+\Delta t)=1, \qquad k>1,$$

теңдікті жазуға болатыны белгілі. Сондықтан, сыңарлық қасиеті бар оқиғалар ағыны үшін, (7.1) теңсіздікті ескере отырып, мына өрнектерді жазуға болады:

$$p_0(t,t+\Delta t)+p_1(t,t+\Delta t)\approx 1 \tag{7.2}$$

және $$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_k(t, t+\Delta t)}{\Delta t} = 0.$$

Сыңарлық ағындарға әуежайға келген ұшақтардың ағыны, нысанаға бағытталған оқтардың ағыны және т.б. мысал бола алады. Сыңар емес оқиғалар ағыны ретінде троллейбустан аялдамада түскен жолаушылар ағынын келтіруге болады. Себебі троллейбустан бір мезгілде бірнеше жолаушы түсуі мүмкін.

7.1.3. Стационарлық қасиеті

Егер белгіленген уақыт аралығында пайда болатын оқиғалардың нақтылы санының ықтималдығы тек осы интервалдың ұзақтығына тәуелді, ал бұл интервалдың уақыт осінің қай жерінде орналасқанына тәуелді болмаса, осы оқиғалар ағыны *стационарлық* қасиетіне ие болады.

Уақыт осіндегі сыңар оқиғалар ағынын қарастырайық және Δt уақыт интервалында пайда болатын оқиғалардың орта санын табайық. (7.1) өрнегіне сәйкес сыңар оқиғалардың орта саны:

$$0 \cdot p_0(t, t+\Delta t) + 1 \cdot p_1(t, t+\Delta t) = p_1(t, t+\Delta t)$$

тең.

Сонда уақыт бірлігінде пайда болатын оқиғалардың орташа саны

$$\frac{p_1(t, t+\Delta t)}{\Delta t}$$

болады.

Осы өрнектің $\Delta t \to 0$ ұмтылғандағы шегін қарастырайық. Егер ондай шек бар болса, онда ол ағынның *қарқындылығы* деп аталады:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_1(t, t+\Delta t)}{\Delta t}.$$

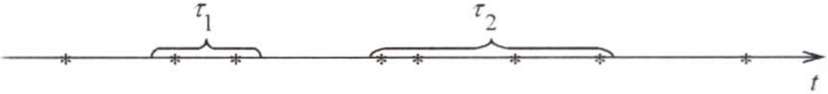
$\lambda(t)$ - қарқындылығының өлшемі уақытқа кері шама.

Стационарлық ағынның, стационарлық емес ағыннан айырмашылығы, оның қарқындылығы уақытқа тәуелді еместігі, яғни:

$$\lambda(t) = \lambda = const .$$

7.1.4. Соңәрекетсіздік қасиеті

Оқиғалар ағыны соңәрекетсіздік қасиетке ие болу үшін, бірімен-бірі қиылыспайтын кез-келген екі уақыт интервалдарының біреуіне түскен оқиғалар саны екіншісіне түскен оқиғалар санынан тәуелсіз болуы керек. Оның мағынасы мынада. Ағынды құрайтын оқиғалар бірінен-бірі тәуелсіз және әр қайсысы өз себебімен өз мезгілінде пайда болады.



7.3-*сурет*

Мысалы, анықтама бюросына келе жатқан адамдар ағынының іс жүзінде соңәрекеті жоқ, себебі олардың әр қайсысының бюроға келу себептерінің арасында тәуелділік жоқ. Ал анықтама алған адамдар ағынының соңәрекеті бар, себебі әр келушіге қызмет ету үшін, ең аз дегенде анықтаманы толтыратындай уақыт интервалы қажет болады.

7.1.5. Шектеулі соңәрекет қасиетті

Оқиғалар ағыны шектеулі соңәрекет қасиетті ағын болу үшін, олардың оқиғаларының пайда болатын моменттерінің $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ аралықтары бірінен бірі тәуелсіз кездейсоқ шамалар болуы керек. Сондықтан осы n кездейсоқ шамалардың біріккен тығыздық функциясын

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = f_1\left(x_1\right) \cdot f_2\left(x_2\right) \cdot \ldots \cdot f_n\left(x_n\right) \tag{7.2}$$

түрінде жазуға болады.

Ал, шектеулі соңәрекетті стационарлық оқиғалар ағыны үшін тағы да бір қатынас келтіре аламыз:

$$f_1(x_1) \neq f_2(x_2) = f_3(x_3) = \ldots = f_n(x_n) = f(x). \qquad (7.3)$$

Соңәрекеттің шектелуінің мәні мынада.

$f_j(x_j)$ тығыздық функциясы $j > 1$ болған жағдайда η_j интервалының шартты тығыздық үлестірімін бейнелейді. Себебі бұл интервалдар алдыңғы оқиғаның, яғни шарттың пайда болған мезгілінен басталады. Тек $f_1(x_1)$ тығыздық функциясы ғана шартсыз үлестірімін сипаттайды. Оның себебі де анық – кездейсоқ оқиғалар ағыны осінің басында оқиғаның болған әлде болмағаны туралы ешқандай болжам жасалмайды.

7.2. Қарапайым ағынды модельдеу

Қарапайым ағын деп – сыңарлық, соңәрекетсіздік және стационарлық қасиеттерімен сипатталатын пуассон ағынын айтады.

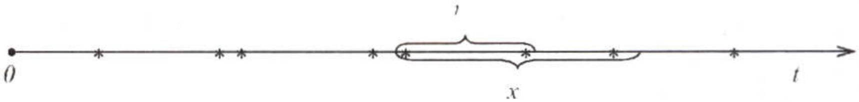
Қарапайым ағын, басқа ағындардың арасында ерекше орын алады, себебі қарқындылықтарының мәні жақын бірнеше басқа ағындарды біріне-бірін қосса, қарапайым ағынға жақын ағын алынады.

Анықтамадан шығатындай, қарапайым ағын оқиғаларының саны дискретті кездейсоқ шама болып табылады және пуассон үлестіріміне бағынады. Демек, уақыттың қайсыбір τ интервалында оқиғалардың нақтылы, мысалы, k санының пайда болу ықтималдылығы пуассон формуласымен анықталады

$$p_k(\tau) = \left(\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}\right) e^{-\lambda\tau} = \left(\frac{a^k}{k!}\right) e^{-a}. \qquad (7.4)$$

Мұндағы $a = \lambda\tau$ берілген τ уақыт аралығындағы оқиғалардың орта саны.

Қарапайым ағын оқиғаларының аралығын сипаттайтын η кездейсоқ шамасының үлестірім заңын анықтайық



7.4 -*сурет*

$$F(x) = P\{\eta < x\}.$$

7.4-суретте көрсетілгендей, $P\{\eta < x\}$ ықтималдылығына, x интервалына ең болмағанда қарапайым ағынның бір оқиғасы түсетіндей жағдай сәйкес келеді, демек:

$$F(x) = P\{\eta < x\} = 1 - P\{\eta > x\} = 1 - P_0(x) = 1 - e^{-\lambda x}. \quad (7.5)$$

$F(x)$ функциясын дифференциалдай отырып, η кездейсоқ шамасының үлестірім тығыздығын табамыз:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x > 0) \quad (7.6)$$

Сонымен, қарапайым ағынның, екі кез келген көршілес оқиғаларының арасындағы интервалы, экспоненциалдық заң үлестіріміне сәйкестігін көріп отырмыз.

Алынған нәтижелер, жалғыз қарапайым ағынды ғана емес, кез келген басқа ағындарды да модельдеу үшін, жоғарыда қаралған кездейсоқ шамаларды модельдеу аппаратын қолдануға болатындығын көрсетіп отыр. Шынымен, 7.1-суреттен кездейсоқ ағын оқиғаларының пайда болу моменттерін (7.7) өрнегінен табуға болатыны анық көрініп тұр.

$$t_j = t_{j-1} + x_j. \quad (7.7)$$

Мұндағы x_j – үлестірім тығыздығы (7.6) формуласымен берілген η кездейсоқ шамасының нақтыламасы.

Қарапайым ағындарды модельдеу алгоритміне мына қадамдар кіреді:

1-қадам. $j = 1$ болсын.

2-қадам. Базалық ξ кездейсоқ шамасының z нақтыламасын модельдеу.

3-қадам. Қарапайым ағынның көршілес екі оқиғасы аралығының мөлшерін есептеу:

$$x = -\left(1/\lambda\right)\ln z .$$

4-қадам. Оқиғаның пайда болу моментін есептеу:

$$t_j = t_{j-1} + x .$$

5-қадам. $j = j+1$ деп алайық.

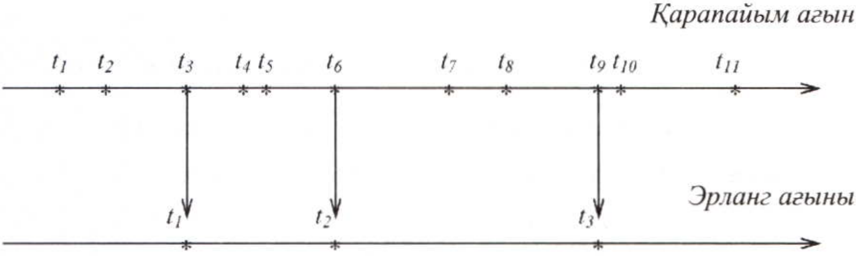
6-қадам. $j > n$ шартын тексеру. Бұл шарт орындалмаса 2-ші қадамға оралу.

7-қадам. $\{t_j\}$ модельдеу нәтижесін баспалау.

7.3. Эрланг ағындарын модельдеу

Бұл ағындардың атауы, телефон жүйесін зерттеу кезінде оларды ең бірінші қолданған дат ғалымының есімімен аталған.

Эрланг ағындарының сыңарлық, стационарлық, шектелген соңәрекет қасиеттері бар және бұл ағындар қарапайым ағынды «сирету» жолымен алынады. Яғни, қарапайым ағынның әрбір екінші оқиғасын сақтап қалып, қалғандарын алып тастаса, онда екінші ретті Эрланг ағыны пайда болады, ал егер әрбір k-шы оқиғаны сақтап қалса, онда k-ретті Эрланг ағыны (7.5-сурет) алынады.



7.5 -сурет

Қарапайым ағын Эрланг ағынының $k = 1$ болғандағы жекеленген түрі болып табылатыны айқын.

Эрлангтың k-ретті ағынының көршілес оқиғаларының арасындағы η интервалы, экспоненциалды заң бойынша үлестірілген тәуелсіз η_i кездейсоқ шамаларының қосындысы болып табылады:

$$\eta = \sum_{i=1}^{k} \eta_i \ . \qquad (7.8)$$

Кездейсоқ η шамасының тығыздық функциясы мына формуламен анықталады [19]:

$$f_k(x) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\lambda x}, \quad x>0\,, \qquad (7.9)$$

Мұндағы λ - қарапайым ағынның қарқындылығы. Кездейсоқ η шамасының математикалық үміті, дисперсиясы және орта шаршы ауытқуы сәйкесінше мыналарға тең:

$$M[\eta] = M\left[\sum_{i=1}^{k} \eta_i\right] = k/\lambda;$$

$$D[\eta] = D\left[\sum_{i=1}^{k} \eta_i\right] = k/\lambda^2; \qquad (7.10)$$

$$\sigma_\eta = \sqrt{k}\,/\,\lambda$$

Эралангтың k-ретті ағынының қарқындылығы математикалық үмітке кері шама екенін $\Lambda_k = 1/M[\eta] = \lambda/k$ ескере отырып, (7.9) және (7.10) өрнектерін мына түрде жазуға болады:

$$f_k(x) = \frac{(k\Lambda_k)^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-k\Lambda_k}, \qquad x > 0,, \qquad (7.11)$$

$$M[\eta] = 1/\Lambda_k\,; \;\; D[\eta] = 1/k\Lambda_k^2\,; \;\; \sigma\eta = \frac{1}{\Lambda_k \sqrt{k}}\,. \qquad (7.12)$$

Ағынның реттілігін шексіз ұлғайтқан ($k \to \infty$), ал қарқындылығы өзгеріссіз қалдырылған ($\Lambda_k = const$) жағдайда Эрланг ағыны қалай өзгеретінін анықтайық. (7.12) формуладан, бұл жағдайда оқиғалар аралығының математикалық үміті өзгеріссіз қалатыны, ал дисперсиясы мен орта шаршылығы нольге ұмтылатыны байқалады. Яғни, Эрланг ағыны, оқиғаларының арасы дәл $1/\Lambda_k$ -ге тең, регулярлы ағынға ауысатыны көрініп тұр.

Эрланг ағындарының бұл қасиетінің іс жүзінде үлкен маңызы бар. Мысалы, k -реттілігінің мәнін өзгерту арқылы ағынның соңәрекетінің әр түрлі дәрежесін алуға болады: $k = 1$ болғанда соңәрекеттің мүлде болмауынан, $k \to \infty$ ұмтылғанда оқиғалардың пайда болу моменттерінің арасында қатаң байланыс тууына дейін. Демек, іс жүзінде кездесетін көптеген кездейсоқ ағындарды Эрланг ағынымен бейнелеуге болады. Ол үшін тек – реттілігінің мөлшерін өзгерту арқылы іс жүзіндегі ағын мен Эрланг ағынының математикалық үміттері мен дисперсияларын теңестіру керек.

Практикалық мақсаттарды толық қанағаттандыратын Эрланг ағынын модельдеу келесі алгоритм бойынша іске асырылады:

1-қадам. $j = 1$ болсын.

2-қадам. $i = 1$, $S = 1$ болсын.

3-қадам. Базалық ξ кездейсоқ шамасының z нақтыламасын табу керек.

4-қадам. $i = i + 1$ және $S = S \times z$ деп алайық.

5-қадам. $i > k$ шартын тексеру. Бұл шарт орындалмаған жағдайда 3- ші қадамға оралу.

6-қадам. Оқиғалар ағынының арасындағы интервал ұзындығын және оқиғаның пайда болуы моментін есептеу:

$$x_j = -(1/\lambda)\ln S, \quad t_j = t_{j-1} + x_j.$$

7-қадам. $j = j + 1$ болсын.

8-қадам. Модельдеу процессінің аяқталу, яғни $j > n$ шартын тексеру. Бұл шарт орындалмаған жағдайда 2- ші қадамға оралу керек.

9-қадам. $\{t_j\}$ моменттерінің мәндерін баспалау.

7.4. Пальм ағындарын модельдеу

Пальм ағындары деп, оқиғаларының аралығы тәуелсіз η_j, $j=\overline{1,n}$, кездейсоқ шамалармен бейнеленетін, яғни шектелген соң әрекет қасиетіне ие, сыңар оқиғалар ағынын айтады. Демек, бұл ағын үшін мына қатынас орындалады:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=f_1(x_1)\cdot f_2(x_2)\cdot\ldots f_n(x_n),$$

және осы қатынас Пальм ағынын модельдеудің негізі бола алады.

Осы формуланың оң жағындағы $f_j\left(x_j\right)$, $j=\overline{1,n}$ тығыздық функцияларының көмегімен Пальм ағынының оқиғалары арасындағы барлық интервалдарды тауып алуға болады. Сонда, оқиғалардың пайда болатын моменттері мына формуладан анықталады:

$$t_j=t_{j-1}+x_j.$$

Іс жүзінде кездесетін Пальм ағындары көбінесе стационар қасиетімен сипатталады. Осыны ескере отырып, оқиғалар арасындағы интервалдардың тығыздық функцияларын мына қатынаспен бейнелей аламыз:

$$f_1(x_1)\neq f_2(x_2)=f_3(x_3)=\ldots f_n(x_n)=f(x).$$

Егер біріншіден басқа интервалдарды сипаттайтын тығыздық функциясы $f(x)$ берілген болса, бірінші интервалдың белгісіз $f_1(x_1)$ тығыздық функциясын Пальм формуласымен анықтауға болады:

$$f_1(x_1)=\lambda\left(1-\int_0^{x_1}f(x)dx\right). \qquad (7.13)$$

Мұндағы $\lambda=1/M[\eta]$.

Сонымен стационарлық Пальм ағынын жалғыз $f(x)$ тығыздық функциясымен сипаттауға болады. Осы функциясы ретінде, әр түрлі үлестірім заңдарын бейнелейтін (соның ішінде Эрланг және экспоненциялды заңдылықтар да болуы мүмкін) тығыздық функциялар қолданыла алады.

Демек, Эрланг ағыны, қарапайым ағынды қоса алғанда, Пальм ағынының жекеленген түрлері болып табылады.

Соңғы тұжырым біраз күмән туғызуы мүмкін, себебі, соңәрекетсіздік қасиетіне сәйкес қарапайым ағынның барлық интервалдары, соның ішінде бірінші интервалы да, бір ғана үлестірім заңына бағынады. Бұл қарама-қайшылық Пальм формуласымен оңай шешілетінін төменгі түрлендіруден анық байқауға болады:

$$f_1(x_1) = \lambda\left(1 - \lambda\int_0^{x_1} e^{-\lambda x}dx\right) = \lambda e^{-\lambda x}.$$

Стационарлы Пальма ағындарын модельдеу алгоритмі екі сатыдан тұрады [23]:

Алдын-ала модельдеу сатысы.

1-қадам. Берілген $f(x)$ тығыздық функциясы бойынша математикалық үмітті есептеу және Пальм ағынының интенсивтілігін анықтау:

$$\lambda = 1/M[\eta].$$

2-қадам. Пальм ағынының формуласы бойынша бірінші интервалдың үлестірім заңын табу.

3-қадам. Кездейсоқ шамаларды түрлендіру әдістерін қолдана отырып, мысалы кері функция әдісін, мына тәуелділіктерді табу:

$$x_1 = F_1^{-1}(z_1) \text{ және } x_j = F^{-1}(z_j) \quad j > 1.$$

Негізгі саты.

1-қадам. $j = 1$ болсын.

2-қадам. Базалық ξ кездейсоқ шамасының z нақтыламасын есептеу.

3-қадам. $j = 1$ шартын тексеру. Бұл шарт бұзылса, 5- ші қадамға көшу.

4-қадам. Бірінші интервалдың мәнін есептеп $x_1 = F_1^{-1}(z_1)$, 6-шы қадамға көшу.

5-қадам. $x_j = F^{-1}(z_j)$, $j \neq 1$ формуласымен басқа интервалдардың ұзындығын табу.

6-қадам. Пальм ағыны оқиғаларының пайда болу моменттерін анықтау:

$$t_j = t_{j-1} + x_j .$$

7-қадам. $j = j+1$ болсын.

8-қадам. Модельдеу процесінің аяқталу, яғни $j > n$ шартын тексеру. Бұл шарт орындалмаған жағдайда 2- ші қадамға оралу.

9-қадам. $\{t_j\}$ баспалау.

7.5. Сыңар емес оқиғалар ағынын модельдеу

Оқиғалар ағыны енді сыңар емес қасиетіне ие болсын және t_j уақыт моменттерінде пайда болатын оқиғалар саны, үлестірім заңы (7.14) кестесімен берілген дискретті кездейсоқ шама болсын

$$\nu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n \end{pmatrix}. \tag{7.14}$$

Сонда, әрбір t_j моментінде түсетін оқиғалар санын модельдеу үшін, бұрын көрсетілген дискретті кездейсоқ шамаларды модельдеу әдісін қолдануға болады. Ал t_j моменттері, осы тарауда қарастырылған сыңар ағындар сияқты модельденеді.

Сыңар емес стационарлы Пальм ағындарын модельдеу алгоритмін құрастырайық.

Модельдеуге алдын - ала даярлану сатысы үш қадамнан тұрады.

1-қадам. Берілген $f(x)$ тығыздық фугкциясы бойынша η_j $(j>1)$ интервалының математикалық үмітін және Пальм ағынының қарқындылығын анықтау.

2-қадам. Пальм формуласымен $f_1(x_1)$ тығыздық функциясын есептеу.

3-қадам. Оқиғалар аралығын есептейтін $x_1 = F_1^{-1}(z)$ және $x = F^{-1}(z)$ тәуелділіктерін анықтау.

Негізгі саты.

4-қадам. $j = 1$ болсын.

5-қадам. Базалық ξ кездейсоқ шамасының z нақтыламасын модельдеу.

6-қадам. $k = 1$ деп алайық.

7-қадам. $z \leq \sum_{i=1}^{k} p_i$ шартын тексеру. Бұл шарт орындалмаған жағдайда 9-шы қадамға көшу.

8-қадам. $k = k + 1$ деп алып, 4- ші қадамға оралу керек.

9-қадам. Кездейсоқ шамасының кезекті нақтыламасы ретінде k мәнін аламыз, яғни $\nu = k$.

10-қадам. $j = 1$ шартын тексеру. Бұл шарт орындалмаса 12-ші қадамға көшу.

11-қадам. Ағынның бірінші оқиғаға дейінгі аралығын анықтау $x_1 = F_1^{-1}(z)$.

12-қадам. Қалған аралықтарды есептеу $x_j = F^{-1}(z_j)$, $j \neq 1$.

13-қадам. Пальм ағынының оқиғаларының пайда болу моменттерін анықтау: $t_j = t_{j-1} + x_j$.

14-қадам. $j = j + 1$ деп алайық.

15-қадам. Модельдеу процесінің аяқталу, яғни $j > n$ шартын тексеру. Бұл шарт орындалмаған жағдайда 2- ші қадамға оралу.

Бақылау сұрақтары

1. Қарапайым пуассон ағынының оқиғалар аралығы қайдай үлестіріммен сипатталады?

2. Эрланг ағынының оқиғалар аралығы қайдай үлестіріммен сипатталады?

3. Пальм ағынының оқиғалар аралығы қайдай үлестіріммен сипатталады?

4. Шаштаразға клиенттер келген моменттері аралығының тығыздық функциясы $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$. Бұл ағын қалай аталады?

5. Анықтама бюросына клиенттер келген моменттері аралығының тығыздық функциясы $f(x) = \alpha^k [(k-1)!]^{-1} x^{(k-1)} e^{-\alpha x}$. Бұл ағын қалай аталады?

6. АЗС-қа келген клиенттер моменттері аралығының тығыздық функциясы мынандай $f(x) = \dfrac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$, $-\infty < x < \infty$. Бұл ағын қалай аталады?

7. Клиенттердің шеберханаға келу моменттерінің аралығының ұзақтығы (минут бойынша) *[6 16]* аралығында бірқалыпты үлестірілген. $t_1 = 8^{20}$ және z=0,20 болған жағдайда екінші клиенттің келу моменті t_2 анықтаңдар.

8. Клиенттердің шаштаразға келу моменттерінің аралығының ұзақтығы (минутпен) $f(x) = \lambda(1-(\lambda/2)\cdot x)$, $x \in (0{,}2/\lambda)$, тығыздық функциясы арқылы берілген және λ =0,1, t_1=8^{20} , z=0,25 болған жағдайда екінші клиенттің келу моментін t_2 анықтаңыз.

9.Тығыздық функциясы $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ оқиғалар ағыны қалай аталады?

10. Тығыздық функциясы $f(x) = \lambda(1 - \dfrac{\lambda}{2}x)$ оқиғалар ағыны қалай аталады?

11. Тығыздық функциясы $f(x) = 2x$ өрнегімен бейнеленген кездейсоқ шама қай оқиғалар ағынын сипаттайды?

8. ҮЛЕСТІРІМ ЗАҢДАРЫН ҰҚСАСТЫРУ

Бұл оқулықтың алдыңғы тарауларының бәрі кездейсоқ заңдылықтары белгілі әртүрлі кездейсоқтықтарды модельдеу әдістеріне арналған болатын. Алайда, іс жүзінде кездесетін әртүрлі мәселелерді шешкенде, статистикалық сипатты және зерттелетін объектердің жұмысына елеулі әсерін тигізетін кездейсоқтықтардың үлестірім заңдарын өзіміз анықтап алуымыз керек.

Бұл кітаптың кездейсоқ заңдылықтарды модельдеу проблемасын шешуге бағытталғандығын ескере отырып, үлестірім заңын ұқсастыру сұрақтарын жеткілікті түрде қысқа және өте қатаң математикалық негізделусіз сипаттап, назарымыздың көбін осы ұқсастыру әдістерін іс жүзінде қолдануға бағыттаймыз. Үлестірім заңдарын ұқсастыру әдістерін қолдану үшін бастапқы деректер ретінде әртүрлі эксперименттерден алынған деректер пайдаланылады.

8.1. Таңдаманың сандық сипаттамаларын ұқсастыру (идентификациялау)

Арифметикалық орташа немесе жай ғана орташа, таңдамалылардың негізгі сипаттамаларының бірі және оның көмегімен математикалық үмітті ұқсастыруға болады. Арифметикалық орташа, таңдаманың басқа сан сипаттамалары сияқты, алдын-ала топталған деректерден табылады. Өңделмеген деректермен алынған нәтижелердің дәлдігі әр қашан жоғары, бірақ есептеу процесі, әсіресе таңдаманың көлемі үлкен болса, көп еңбектенуді талап етеді.

Топталмаған нәтижелер үшін арифметикалық орташа мына төменгі формуламен анықталады:

$$\bar{x} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{8.1}$$

Мұндағы n – таңдама көлемі, x_i – таңдама элементтері.

Егер берілген мәндер топталған болса, онда

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i \ldots, \tag{8.2}$$

тең. Мұндағы n_i – i интервалының жиілігі, k – топтау интервалдарының саны, x_i – интервалының орта мәні.

(8.2) формуласымен есептелген арифметикалық орташаны көбінесе зілдеме орта мән деп атайды. Себебі x_i $i = \overline{1,n}$ қосындыларының әр қайсысы осы формулаға, өзіне сәйкес номерлі топталу интервалына түсу жиілігіне тең, салмақпен қосындалады.

Дисперсияны ұқсастыру үшін (8.3) және (8.4) формулаларымен табылатын таңдама дисперсиясы қолданылады

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2, \tag{8.3}$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} n_i\left(x_i - \bar{x}\right)^2. \tag{8.4}$$

(8.3) формуласы топталмай берілген, ал (8.4) алдын - ала топталған мәндерді есептеуге лайықталған. Дегенмен, бұл формулалар есептеуге қолайсыз, сондықтан, іс жүзінде, қолдан есептеуге де, компьютермен есептеуге де қолайлы келесі формулаларды пайдаланамыз:

топталмаған деректер үшін:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right), \tag{8.5}$$

немесе

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}\right]. \tag{8.6}$$

формулалары, ал алдын ала топталған деректер үшін

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2 - n\bar{x}_i^{2}\right), \tag{8.7}$$

немесе

$$s^2 = \left(\frac{1}{n-1}\right)\left[\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} n_i x_i\right)^2 \Big/ n\right], \tag{8.8}$$

формулалары.

(8.5) және (8.7) формулалары арифметикалық орташа алдын-ала есептелген жағдайда, ал (8.6) және (8.8) формулалары $\bar{x}$ пен s^2 бір мезгілде есептелінетін болса ғана қолданылады.

Кездейсоқ шамалардың жұптарының арасындағы корреляция коэффициенттерін ұқсастыру үшін Бравайс–Пирсонның таңдама корреляция коэффициенттері қолданылады:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right)}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2\right]}}.$$

Ал, компьютермен есетеуге мына формула тиімдірек:

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{\left[n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]\left[n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right]}}.$$

Бұл формула бойынша алынған корреляция коэффициентінің мәні $-1 < r < +1$ аралығында жатады.

8.2. Үздіксіз кездейсоқ шамалардың тығыздық функциясын ұқсастыру

Тығыздық функциясын ұқсастыру процесін шамамен алты сатыға бөлуге болады.

Олардың біріншісінде, берілген n – көлемді таңдаманың элементтері топталады. Ол үшін осы элементтерінің мәндері айқындалған сан кесіндісін бірімен бірі қиылыспайтын бірнеше интервалға бөлу керек. Осы топтау нәтижесінде алынған интервалдардың k саны, берілген деректер таңдамасының көлеміне (n) байланысты.

Осы k санын таңдаудың бірнеше тәсілдерін келтірейік [25, 26]. Алдын-ала келесі жағдайды ескере отыру керек. Егер k санының мәнін үлкен етіп алса, онда әрбір топтың үлесіне өте аз деректер келеді. Сондықтан үлестірудің көрінісі осы аз деректердің кездейсоқ бұлталағының әсерінен едәуір бұрмалануы мүмкін. Ал k санының өте кіші мәні таңдалса, онда үлестірудің көрінісі өте тегістеліп, өзіне тән ерекшеліктерінен айырылуы мүмкін. Сондықтан интервалдардың әртүрлі сандары таңдалатын көп вариантты есептеулер қолдану қажетті.

Мына өрнектерді k санын анықтау үшін қолдануға болады:

1) $k = 1 + 3{,}32\lg n$, (Стерджес формуласы);

2) $k = 5\lg n$ және мына теңсіздік орындалуы керек $6 < k < 20$;

3) $n/k = (50/8;\ 100/13;\ 500/13;\ 1000/15;\ 10000/20)$;

4) $k = \min(\sqrt{n}, 30)$

Келесі саты топтау интервалының шектері мен ұзындығын анықтау. Егер топтаудың интервалдары бірдей етіп алынса, онда олардың ұзындығы:

$$d = 1{,}02(x_{\max} - x_{\min})/k$$

формуласымен анықталады.

Мұндағы $x_{\max} - x_{\min}$ – таңдаманың максималды және минималды мәндері. Жеке интервалдардың шекарасы мына түрде анықталады:

$$\left[x_{\min} - (j-1)d - \Lambda, x_{\min} + jd - \Lambda\right] \quad j = \overline{1,k}.$$

Мұндағы j - интервал номері, ал $\Lambda = 0{,}001d$.

Топтау интервалының ұзындығын басқаша, яғни кездейсоқ шаманың нақтыламаларының барлық интервалдарға түсуінің ықтималдылықтары біріне-бірі тең болу шартынан да табуға болады. Тағы бір ескеретін жәй, алдын-ала болжамаланған заңдылықты ұқсастыру үшін, топтау интервалдарын анықтаған кезде, берілген таңдаманың мәндер ауданы емес, күтілген үлестіру заңдылығы бар кездейсоқ шаманың теориялық ауданын қарастыру керек.

Ұқсастырудың үшінші сатысында барлық интервалдарға түскен нақтыламалардың салыстырмалы жиіліктері:

$$\nu_i = n_i / n, \ i = \overline{1,k}.$$

саналады және осы салыстырмалы жиіліктердің үлестірімі, яғни гистограммасы салынады.

Төртінші саты ең жауапты болып табылады. Бұл жерде салынған гистограмманың түріне қарай, берілген деректерге сай біреу әлде бірнеше теориялық үлестірімдер таңдалады.

Бесінші сатыда, берілген таңдаманың сандық сипаттамаларын, яғни арифметикалық орташа және таңдамалы дисперсияларын осы сипаттамалардың теориялық мәндерімен салыстыра отырып, бір ғана үлестірім қалдырылады.

Алайда, үлестіру заңын ұқсастырудың нәтижесін, келісім критерийлерінің біреуімен, алтыншы сатыда тексергеннен кейін ғана, ақырғы нәтиже деп есептеуге болады.

8.3. Дискретті кездейсоқ шамалардың үлестірім заңдарын ұқсастыру

Дискретті кездейсоқ шамалардың үлестірім заңдарын ұқсастыру сұлбасының, жоғарыда үздіксіз шамалар үшін келтірілген сұлбадан елеулі айырмашылығы жоқ. Бұл сұлбалардың елеусіз айырмашылықтарына мыналарды жатқызуға болады.

1. Топтаулардың саны (k), бұл жерде, кездейсоқ дискретті шаманың мүмкін болатын барлық мәнінің санына тең, сондықтан ұқсастыру сұлбасы үшінші сатыдан басталады.

2. Берілген деректерге сәйкес теориялық үлестірім заңдылығы болмаған жағдайда, дискретті кездейсоқ шамасының үлестірім заңы ретінде ықтималдылықтың кесте арқылы берілген түрін қолдануға болады. Ал осы кестеде берілген ықтималдылықтарды ұқсастыру үшін кездейсоқ дискретті шаманың әрбір мүмкін мәнінің салыстырмалы жиілігі қолданылады.

8.4. Ұқсастыру нәтижелерін бағалау

Жоғарыда аталғандай, ұқсастыру сұлбасының алтыншы сатысында алынған нәтижелер бағалануы тиіс, яғни берілген деректердің үлестірімі, таңдап алынған теориялық белгілі үлестірімінен айырмашылығы аз болуын тексеру керек. Осындай бағалау жүргізу үшін көбінесе Пирсон, Колмогоров-Смирнов әлде Мизес келісім критерийлері қолданылады. Бұл критерийлердің әр қайсысының ұтымды да, ұтымсыз да жақтары бар. Сондықтан олардың қайсысын қолдану керек деген сұраққа мынадай жалпы сипаттама ғана бере аламыз.

Пирсон критерийін деректер таңдамасының көлемі үлкен болғанда ғана $(n > 100)$ қолдануға болады. Таңдаманың көлемі $10 < n < 100$ аралығында жатса, жақсы нәтижені Колмогоров-Смирнов критерийі бере алады. Таңдаманың көлемі 10-нан кем болған жағдайда қанағаттандырарлық нәтижелерді, тек қана Мизес критерийінің көмегімен алуға болады. Пирсон мен Колмогоров-Смирнов критерийлерін қолданғанда топтау интервалының санын беру қажетті. Пирсон критерийін қолданғанда бұл сан, әрбір интервалға бестен кем емес деректер түсетіндей болуы керек деген шарттан анықталады. Ал Колмогоров-Смирнов критерийін қолданғанда деректерді топтауға да, әлде әрбір дерекке бөлек интервал тағайындауға да болады.

Іс жүзінде ең көп таралған Пирсон (χ^2) критерийі екенін ескере отырып, оны кеңірек қарастырайық.

Ұзындығы n кездейсоқ деректер таңдамасы берілсін және осы деректерді кездейсоқ η шамасының x_i $i = \overline{1, n}$ нақтыламалары деп есептейік. Осы берілген деректердің кездейсоқ заңдылығын ұқсастыру, яғни η кездейсоқ шамасының үлестірім заңын табу қажет болсын.

Жоғарыда келтірілген ұқсастыру сұлбасының алғашқы сатыларына сәйкес жүргізілген топтаудың нәтижесінде барлық k интервалдарына түскен деректердің салыстырмалы $\nu_j \;\; j=\overline{1,n}$ жиіліктері және таңдап алған теориялық үлестірім заңының осы жиіліктерге парапар $p_j, \;\; j=\overline{1,n}$ ықтималдылықтары белгілі болсын. Енді кездейсоқ η шамасы, берілген деректерді ұқсастыру нәтижесінде алынған үлестірім заңына бағынышты деген жұмыс гипотезасын енгізейік. Осы гипотезаны тексеру үшін деректердің статистикалық түрде алынған үлестірімі мен ұқсастыру арқылы табылған теориялық үлестірімнің айырмашылығының өлшемін таңдайық.

Пирсон критерийін қолданғанда, осындай өлшем ретінде, статистикалық $\nu_i, \;\; i=\overline{1,k}$ жиіліктерінің $p_i, \;\; i=\overline{1,k}$ теориялық ықтималдылықтар мәнінен ауытқуының орта квадраттарының қосындысын алуға болады [27]:

$$R=\sum_{j=1}^{k} C_j\left(\nu_j-p_j\right)^2. \tag{8.9}$$

Ауытқудың орта шаршысының мәні p_i-дің жеке мөлшеріне тәуелділігін ескере отырып, C_j, $j=\overline{1,k}$ салмақ коэффициенттерін p_i ықтималдылығына кері пропорционалды етіп алу қажетті.

Пирсонның дәлелдеуінше бұл коэффициенттердің мәні:

$$C_j = n/p_j;$$

өрнегінен алынса, онда n сынақтарының үлкен мөлшерлері үшін R кездейсоқ шамасының үлестірім заңы мына қасиеттермен сипатталады.

Бұл заң іс жүзінде η кездейсоқ шамасының үлестірім заңынан тәуелсіз, ал сынақтың n санының әсері көп емес. Сондықтан

$n \to \infty$ ұмтылғанда қарастырылып отырған R өлшемінің үлестірім заңы мына тығыздық функциясымен бейнеленіп:

$$f_k(r) = \left[2^{k/2}\Gamma(k/2)\right]^{-1} r^{(k/2)-1} e^{k/2},$$

χ^2 үлестіріміне жақындайды.

Осы келтірілген жайларды ескере отырып, R өлшемін мына формуламен бейнелеуге болады:

$$R = \chi^2 = n\sum_{j=1}^{k} \left(v_j - p_j\right)^2 / p,$$

немесе, $v_j = n_j / n$ екенін ескере отырып, есептеуге ыңғайлырақ формуланы келтірейік:

$$R = \chi^2 = \sum_{j=1}^{k} \left(n_j - nP_j\right)^2 / \left(nP_j\right). \qquad (8.10)$$

χ^2 үлестірімі, өзімізге белгілі *еркіндік дәрежесінің саны* деп аталатын l параметрінен тәуелді. Пирсон критерийін қолданғанда, еркіндік дәрежесінің мөлшерін табу үшін, топтау интервалдарының k мәнінен, v_j жиіліктеріне қойылған тәуелсіз шарттардың санын алып тастау қажет.

Мұндай шарттардың мысалдары мыналар:

$$\sum_{j=1}^{k} x_j v_j = m_x,$$

егер статистикалық орташаның теориялық математикалық үмітпен сәйкестелуі қажет болса, немесе:

$$\sum_{j=1}^{k} v_j = 1,$$

егер жиіліктің қосындысы бірге тең болса (бұл теңдік барлық жағдайда орындалуы керек) және т.б.

Пирсонның x^2 критерийінің көмегімен үлестірім заңын ұқсастыру нәтижелерін бағалаудың принципі мына теоремаға негізделген.

8.1-теорема. η кездейсоқ шамасы мен топтаудың таңдалған k саны қандай болмасын, әрбір $r>0$ үшін мына шектіктің дұрыстығына күмән тумайды:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\chi_n^2 \geq r\right\} = \int_r^\infty f_{k-1}(u)du.$$

Осы теореманың дәлелдеуін [28] кітабынан табуға болады.

Егер α, ықтималдылығы α тең болатын оқиғалар мүмкін емес деп есептелетін мәнділіктің деңгейі болса, онда мына теңдеуді:

$$\int_r^\infty f_{k-1}(u)du = \alpha \tag{8.11}$$

шеше отырып, осы мәнділікке сәйкес $r = \chi_\alpha^2$ мәнін табамыз. Сонда $R = \chi^2 < \chi_\alpha^2$ шарты орындалған жағдайда, η кездейсоқ шамасының үлестірім заңын ұқсастыру нәтижесін қабылдаймыз, ал егер

$$R = \chi^2 \geq \chi_\alpha^2 \tag{8.12}$$

болса, бұл нәтижені қабылдамаймыз.

Ұқсастыру нәтижесін қабылдау әлде қабылдамау α- ның мәніне тәуелді екені көрініп тұр. α-ның мәні ретінде көбінесе мына сандар алынады:

0,1; 0,05; 0,01; 0,005.

Іс жүзінде, R өлшемін анықтау үшін, α мен l-дың мүмкін болатын біраз дискреттік мәндеріне сәйкес (8.1) интегралдық теңдеудің шешімдері келтірілген кесте қолданылады. Бұл кестені ықтималдықтар теориясы мен статистика оқулықтарының кез келгенінен табуға болады.

Ұқсастыру нәтижелерін бағалау сұлбасын мына түрдегі алгоритм ретінде көрсетуге болады:

1-қадам. p_i- ықтималдылықтарын есептеу, $i = 0, 1, ..., k$.

2-қадам. R өлшемін есептеу.

3-қадам. Мәнділік деңгейінің шамасын таңдау:

$$\alpha_m = \max(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_L)$$

4-қадам. $\alpha_m > 0$ шартын тексеру. Бұл шарт орындалмаса 9-шы қадамға көшу.

5-қадам. χ_α^2 - ны кестеден анықтау, яғни $\chi_\alpha^2 = R(l, \alpha)$.

6-қадам. $\chi^2 < \chi_\alpha^2$ шартын тексеру. Бұл шарт орындалмаса 8-ші қадамға көшу.

7-қадам. $\alpha_m = 0$ болсын. 3- ші қадамға оралу.

8-қадам. «α_m үшін таңдалған үлестіру заңы қабылданады» деген мәтінді шығару.

9-қадам. «Таңдалынған үлестіру заңы қабылданбайды» деген мәтінді шығару.

10- қадам. Соңы.

8.5. Үлестірім заңын ұқсастыру мысалы

Вокзалдың маңында орналасқан адрес бюросының жұмысын қарастырайық.

Осы бюроның 500 жұмыс сағатын бақылаудың нәтижесінде алынған деректер 8.1-кетесінде келтірілген.

8.1 *кесте*

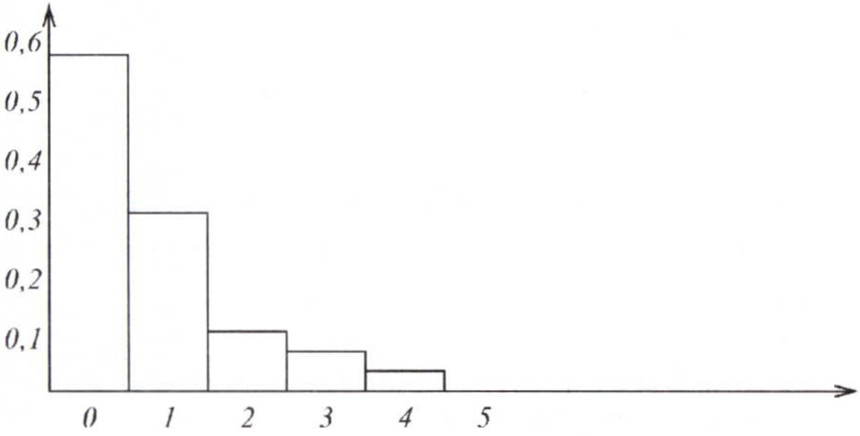
бір сағат ішінде түскен сұраныстар саны - x_i	сұраныстар жиілігі - n_j	салыстырмалы жиілік ν_j
0	307	0,614
1	145	0,290
2	37	0,074
3	8	0,016
4	2	0,004
5	1	0,002
	500	1,000

(8.2) және (8.7) формулаларымен математикалық үміт пен дисперсияның статистикалық бағаламасын табайық:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = 256/500 = 0{,}512;$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - n\bar{x}^2\right) = \frac{422 - 500 \cdot 0{,}512}{499} = 0{,}583.$$

Енді (8.1) кесте бойынша гистограмма салайық (8.1-сурет).



8.1- *сурет*

Белгілі теориялық үлестірімдердің тығыздық функциялары графиктерімен бұл гистограмманы салыстыра отырып, оның Пуассон үлестіріміне ұқсас екенін көруге болады. Алайда, (4.5) формула бойынша, бұл үлестірімнің математикалық үміті мен дисперсиясы біріне бірі тең болуы керек. Осы шарт, өкінішке орай, орындалмай тұр:

$$0{,}512 \neq 0{,}583.$$

Сондықтан бұл мәлімет Пуассон үлестірімінің дұрыс таңдалғанына күмән келтіреді. Алайда, осы жеке жағдайда 8.1 кестесімен берілген мәндер Пуассон заңының маңызды қасиеттерін, соның ішінде, оқиғаның нольдік санының пайда болу ықтималдылығының үлкен екенін және соңәрекеттің болмауын қамтамасыз ететінін ескере отырып, және алдын ала орташаланған қарқындылықты есептеп:

$$\lambda = (0{,}512 + 0{,}583)/2 = 0{,}5475,$$

ұқсастырудың нәтижесіне күмәнданудан бас тартамыз. Яғни, берілген деректер Пуассон үлестіріміне жатады деген гипотеза қабылдаймыз.

Бұл гипотезаның дұрыстығын Пирсон критерийі бойынша тексерейік. Нақтылық үшін α мәндік деңгейін 0,05- ке тең деп алайық.

Енді 8.4 тармақта берілген (4.4) Пирсон формуласы бойынша p_i ықтималдығының теориялық мәндерін есептейік:

$$p_0 = 0.577, \quad p_1 = 0.317, \quad p_2 = 0.087,$$

$$p_3 = 0.016, \quad p_4 = 0.002, \quad p_5 = 0.001.$$

Содан кейін x^2 өлшемінің шамасын табайық: x^2=3.52.

Алгоритмнің келесі қадамында, еркіндік дәрежәсінің саны l және мәнділік деңгейі α -ға сәйкес x^2 өлшемінің күдікті χ^2_α мәнін табамыз.

Енді еркіндік дәрежесін анықтайық. Пирсон критерийінің жұмысы тиімді болу үшін, берілген деректерді топтағанда, әр топқа бестен кем емес дерек мүшелері түсуі қажетті. 8.1 - кестесінен көрініп тұрғандай, соңғы екі топта бұл шарт бұзылған, сондықтан берілген деректердің топ санын алтыдан төртке дейін қысқартамыз. Енді бұл топтарға ықтималдылықтың келесі мәндері сәйкес келеді:

$$p_0 = 0.577, \quad p_1 = 0.317, \quad p_2 = 0.087,$$

$$p_3 = 0.016 + 0.002 + 0.001 = 0.019, \ \sum_{i=0}^{3} p_i = 1.$$

Онда еркіндік дәрежесінің саны: $l = 4 - 1 - 1 = 2$ болады, себебі теориялық ықтималдылықтарды есептегенде, берілген деректер арқылы табылған λ параметрін қолданған үшін, еркіндік дәрежесін тағы бір санға кемітуге тура келеді [4]. Мәнділік деңгейі $\alpha = 0.05$ болғанда және еркіндік дәрежесі $l=2$ тең болғанда Пирсон критерийінің мәні $\chi_{\alpha}^{2} = 5.99$ тең (8.2 кестені қараңыз). Демек, $\chi^{2} < \chi_{\alpha}^{2}$. Сондықтан, таңдап алынған Пирсон үлестірімі мен берілген деректердің үлестірімінің арасында айтарлықтай айырмашылық жоқ деген гипотеза теріске шығарылмайды.

8.2 - *кесте*

l/α	0.1	0.05	0.01	0.005
1	2.71	3.84	6.53	7.88
2	4.61	5.99	9.21	10.60
3	6.25	7.81	11.34	12.84
4	7.78	9.49	13.28	14.86
5	9.24	11.07	15.09	16.75
6	10.64	12.59	16.81	18.55
7	12.02	14.07	18.48	20.28
8	13.36	15.51	20.09	21.96
9	14.69	16.92	21.67	23.59
10	15.99	18.31	23.21	25.19
15	22.31	25.50	30.58	32.80
20	28.41	31.41	37.57	40.00

ІІ - бөлім. ИМИТАЦИЯЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ

9. ИМИТАЦИЯЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУДІ ҰЙЫМДАСТЫРУ

9.1. Имитациялық модельдеудің кезеңдері

Зерттелетін жүйелер мен объектердің әралуан болуына қарамастан оларды имитациялық модельдеу үшін көбінесе мына алты кезеңді бірінен соң бірін орындау қажет:

- мәселені қою;
- математикалық модельдер құру;
- компьютерге арналған программа жасау;
- модельдің түпнұсқаға сәйкестігін бағалау;
- эксперименттердің жоспарын жасау;
- модельдеудің нәтижелерін өңдеу.

Осы кезеңдердің әркайсысына жеке тоқталайық.

9.1.1. Мәселені қою

Имитациялық модельдеу, басқа да зерттеу әдістері сияқты, мәселені қоюдан, яғни модельдеудің мақсатын және осы модельдерді құру кезінде ескеретін әртүрлі шектеулерді сипаттаудан басталады.

Имитациялық модельдеудің мақсаты ретінде жауабы ізделіп отырған маңызды сұрақ, әлде тексеруді қажет ететін жорамал, немесе ықпалын бағалайтын әсер бола алады [1].

Мысалы, имитациялық модельдеуді мына сұрақтарға жауап іздеу үшін пайдалануға болады: датчиктерден жауап алатын жаңа алгоритм күрделі қондырғылардың жұмысына қандай әсер тигізеді, немесе оперативті жоспарлаудың нақтылы әдістері өндіріске жұмсалатын қаржыны қанша өнімдейді?

Имитациялық модельдеудің мақсаты ретінде, жоғарыда айтылғандай, әртүрлі жорамалдардың ақиқаттығын тексеру де бола алады. Мысалы, кейбір күрделі жүйелердің болашақтағы жағдайы туралы жасалған жорамалды тексеру, немесе автобус маршрутының өзгеруі, оның салонының толуын қамтамасыз етеді деген болжамды тексеру, әлде мемлекеттік қорыққа шеттен әкелген жануарлардың жаңа түрі оның экологиялық тепе-теңдігін бұзады деген жорамалдарды тексеру болуы мүмкін. Енді имитациялық модельдеудің мақсаты ретінде әртүрлі әсерлердің ықпалын тексерудің де бір мысалын келтіре кетейік.

Металлургиялық пештерде металды қорыту процесінің нәтижесіне, осы пешке үрлеп тұратын ауаға қосылатын таза оттегінің әсері зор. Сондықтан осы процессті имитациялық модельдеудің мақсаты ретінде байытылған ауадағы оттегі мөлшерінің металл шығымына әсерін анықтау бола алады.

Енді осы имитациялық модельдеу кезінде ескеретін шектеулерді бейнелеу туралы бір-екі сөз айту қажет. Бұл жұмыс зерттеліп отырған объектің немесе жүйенің сипаттамаларын анықтаудан басталады. Осы бағыттағы бірінші қадам қаралып отырған объект қандай бөлшектерден тұратынын анықтауы керек. Келесі қадам, осы объектің елеулі параметрлері мен айнымаларын айқындау және солардың мөлшерлеріне қойылатын шектеулерді табу. Үшінші қадамда осы елеулі параметрлер мен айнымалардың біріне бірінің әсерін талдай отырып, олардың имитациялық модельдеу нәтижесіне ықпалын табу қажет.

9.1.3. Программа жасау

Имитациялық модельдеудің бұл кезеңінде зерттеушінің алдында оны қай алгоритмдік тілде жазу керек деген сұрақ туады. Соңғы жылдары компьютермен модельдеудің тез дамуына байланысты имитациялық модельдеуге арналып жасалған көптеген алгоритмдік тілдер пайда болды. Бірақ осы тілдердің көбісі белгілі бір математикалық сұлбамен бейнеленген объектерді модельдеуге ғана бағытталған. Мысалы, GPSS деген тіл көпшілікке қызмет көрсету жүйелерінің жұмысын модельдеуге бейімделсе, SIMULA тілі арнайы көп мөлшерлі теңдеулермен бейнеленетін экономика жүйелерін имитациялауға арналған.

Универсалды тілдерге қарағанда бұл арнайы тілдердің программасын тезірек құрастыруға болады және осы арнайы имитациялық тілдердің құрамында программаны құрасытырғанда жіберілетін қателерді тез табу амалдары ескерілген.

Дегенмен, имитациялық модельдеу кезінде универсальды тілдер де (Паскаль, Си және т.б.) жиі қолданылады. Бұл тілдердің де имитациялық модельдеуге тиімді біраз қасиеттері бар. Мысалы, біраз күрделі жүйелерді (автоматтандырылған басқару жүйелерін, ақпаратты іздеу жүйелерін) модельдеген кезде осы модельдеуден алған нәтижелерді көрсету түрінің мағнасы зор. Ал программа арқылы алынған нәтижелерді әртүрлі сұлбада басып шығару тәсілдеріне универсалды тілдер өте бай келеді. Сондықтан зерттеушінің алдында программалау тілін таңдау мәселесі тұра қалса, ол өзі жақсы меңгеретін тілге тоқтауы дұрыс деп есептейміз. Қанша тиімді болғанымен өзің дұрыс игермеген тілді пайдаланғанша, білетін программалау тілін қолдану тез де және сенімді де болады.

9.1.4. Модельдеудің сәйкестігін (адекваттылығын) бағалау

Өте күрделі жүйелерді зерттегенде кездесетін проблемалардың бірі, ол бұл жүйелердің модельдерінің қандайы болмасын, осы жүйеге тән процесстерді толық сипаттай алмайтындығы.

Сондықтан жақсы модель деп, осы жүйедегі өзгерістердің, оның негізгі көрсеткіштеріне әсерін дұрыс білдіретін модельдерді айтады.

Алынған модельмен, осы модель бейнелейтін процесстердің сәйкестігін тексеру әлде, басқаша айтқанда, құрастырылған модельді бағалау қажет.

Математикалық модельдерді бағалау көбінесе үш сатыдан тұрады.

Бірінші сатыда зерттелетін процесспен оның моделінің түрпайы сәйкестігі тексеріледі. Түрпайы модель мынандай сұраққа болымды жауап беруі керек. Егер осы модельге, қарастырылып отырған жүйенің маңызды параметрлері мен айнымаларының шектік мағналарын қойғанда, абсурдты нәтижелерге әкеліп соқпай ма?

Тексерудің екінші сатысында модель жасау алдындағы бастапқы болжамдарды тексеру керек. Яғни, модельденетін жүйенің қандай параметрлері мен айнымаларын маңызды деуге болады және құрылған модельде елеулі параметрлердің бәрі ескерілген бе?

Елеулі айнымаларды анықтау үшін, олардың жүйе жұмысының баламасына әсерін білу қажет. Ал, модельде барлық елеулі параметрлер мен айнымалардың қамтылғанын анықтау үшін статистикалық анализ әдістерін, мысалы тиімділік көрсеткішінің дисперсиясын пайдалануға болады.

Модельдің сәйкестігін бағалаудың үшінші сатысында жүйенің кіріс айнымаларын түрлендіру тәсілдері тексеріледі. Осындай тексерудің негізі ретінде дисперсиялық, регрессиялық, факторлық, спектральдық талдамалар, автокорреляция, келісім баламасымен тексеру, статистикалық талдамалардың математикалық үміті мен дисперсиясын бағалау әдістері қолданылады.

Жасалған модельдерді бағалағанда, олардыЈ іс жүзінде қолданушыларға қолайлығын естен шығармау қажет.

Осы айтылған жағдайларды қорыта келіп, жасалған модельді жақсы модель деп санау үшін ол:

– іс жүзінде қолданушыға қолайлы және анық;

– басқаруға жеңіл;

– ол арқылы алынған нәтижелер дұрыс және толық;

– жаңа талаптар бойынша өзгертулер енгізуге бейімделген болуы қажет екенін анықтаймыз.

9.1.5. Эксперименттерді жоспарлау

Жасалған модельдің зерттелетін жүйеге немесе объектке сәйкес екенін дәлелдегеннен кейін оны имитациялық модельдеуге кірісу керек. Яғни зерттеліп отырған объекттің, берілген уақыт аралығындағы жұмысын, осы мерзімнің басынан аяғына дейін бейнелеп шығу қажет. Осындай бейнелеуді келешекте имитациялық модельдеудің бір нақтыламасы деп атаймыз.

Осы бір нақтыламаның арқасында анықталған көрсеткіштердің мәні, әрине, қарастырылып отырған объекттердегі процесстің объективті сипаттамасы бола алмайды. Себебі имитациялық модельдеу әдісі, іс жүзінде кездесетін әртүрлі (станоктың сынып қалуы, жұмысшының жұмысқа кешігуі, шикі заттың жетіспеуі және т.б.) кездейсоқтықтардың бұл процесске әсерін бейнелей алатындығынан, осы көрсеткіштердің мәні де кездейсоқ шама болады. Сондықтан имитациялық модельдеудің нәтижесінде анықталатын көрсеткіштердің мағынасын бірнеше нақтыламалардың орта саны ретінде ғана қарастыру керек. Егер осы нақтыламалардың санын (n) жеткілікті мөлшерде тағайындасақ, үлкен сандар заңына сәйкес, көрсеткіштің мағнасы тұрақты болып, оның іс жүзіндегі мәнін дәлірек сипаттайды.

Кейде имитациялық модельдеудің бір нақтыламасының нәтижесі де дәл сипаттама бере алады. Ол үшін модельденіп отырған объектегі процесстер эргодикалық қасиетке ие болуы керек.

9.1.6. Модельдеудің нәтижелерін өңдеу

Имитациялық модельдеу нақтыламаларын жүзеге асырғаннан кейін оның нәтижелерін өңдеу қажет. Жоғарыда айтылғандай имитациялық модельдеу көбінесе өте күрделі жүйелерді зерттеуге қолданылады және модельдеу кезінде бір емес бірнеше нақтыламалар алынады.

Сондықтан осы жүйелердегі процесстерді толық сипаттау үшін модельдеу барысында көптеген параметрлер мен айнымалардың мағнасын қадағалап компьютердің жадында ұстау қажет. Ал осы көп деректерді өңдеу үшін біраз уақыт және күш салу керек. Өте күрделі жүйелерді модельдегенде осынша деректермен жұмыс істеу қазіргі компьютерлердің де қолынан келмейтіні анық.

Сондықтан имитациялық модельдеу барысында осы көп деректерді компьютердің жадында сақтау және өңдеу әдістерінің біраз ерекшеліктері болуы қажет.

Ең басты ерекшелік - имитациялық модельдеудің нәтижелері ең аяғында ғана емес, осы модельдеудің басынан бастап біртіндеп анықтала басталуы керек және әр көрсеткіш компьютердің жадының бір ғана бөлшегін алып, оның жаңа мәні бұрынғы мөлшерін түрлендіру арқылы қайтадан осы бөлшекте сақталуы тиісті.

Имитациялық модельдеу кезінде көптеген кездейсоқтықтардың әсерін ескергендіктен оның біраз көрсеткіштері де кездейсоқ шамалармен бейнеленуі мүмкін. Сондықтан, осы кездейсоқ шамалардың мағнасы ретінде математикалық үміттер, дисперсиялар және тағы басқа ықтималдылық сипаттамалары қолданылады.

Осы алты саты, әрине, жалғыз имитациялық модельдеу кезінде ғана емес, басқа да зерттеулерде кездеседі. Алайда, имитациялық модельдеудің кейбір сатылары басқа зерттеулердің осындай сатыларынан біраз айырмашылығымен танылады.

Осындай сатыларға математикалық модель құру, эксперименттерді жоспарлау және оның нәтижелерін өңдеу сатылары жатады. Сондықтан имитациялық модельдеудің осы айырмашылықтарымен танысуды математикалық модель құру сатысының ең басты, яғни бұл модельдерді түрлендіру арқылы модельдеуші алгоритмдерді құру ерекшелігінен бастайық.

9.2. Модельдеуші алгоритм құру принциптері

Күрделі жүйелерді имитациялық модельдеу кезінде оның математикалық моделін түрлендіру арқылы модельдеуші алгоритм құрылады. Содан кейін осы алгоритм, қарастырылып отырған процесстердің әр қадамын компьютер арқылы қадағалап бейнелеуге, яғни имитациялауға, қолданылады. Имитациялау барысында осы процессті сипаттайтын ақпараттың логикалық құрылымы, түрі мен құрамы және түрлену мезгіл тізбегі бұзылмауы қажет.

Енді осы модельдеуші алгоритмдерді құрудың негізгі принциптерімен танысайық [21].

9.2.1. Δt принципі

Күрделі жүйелердің жұмыс барысын бейнелеу үшін мынадай сипаттамаларды қолданайық

$$Z(t) = \{Z_1(t),\ Z_2(t),\ \dots\ , Z_n(t)\}$$

Сонда, осы жүйелерде өтіп жатқан процесстерді модельдеу үшін $Z(t)$ функциясын табу қажет және осы функция бойынша керекті көрсеткіштердің мөлшерлерін есептеу керек. Ол үшін, ең бірінші, математикалық модельдің қатынастарын $Z(\tau)$ $(\tau \le t\ \textit{болсын})$ функциясы бойынша $Z(t+\Delta t)$ анықтауға ыңғайландырып түрлендіру керек. Детерминді сипаттамаларын таба алатындай қылып өзгерту керек.процесстерде $Z(t)$ функциясының t_0, $t_1 = t_0 + \Delta t$, ... ,$t_n = t_{n-1} + \Delta t$. мезгілдердегі мәндерін рекуррентті қатыстар арқылы табуға болады. Яғни $Z(t_0)$ бойынша $Z(t_1)$ функциясын, $Z(t_0)$ және $Z(t_1)$ бойынша $Z(t_2)$ функциясын табуға, ал жалпы алғанда

$$Z(t_i) = \varphi[Z(t_0), \ \dots \ , Z(t_{i-1})] \tag{9.1}$$

тәуелділігін қолдануға болады.

Кездейсоқ (стохастикалық) процесстерді сипаттаудың сәл өзгешелігі бар. Бұл жағдайда процесстердің $Z(t_i)$ сипаттамалары тікелей (9.1) тәуелділігінен табылмайды. Бұл тәуелділік тек қана осы $Z(t_i)$ кездейсоқ функциясының үлестірім заңын анықтайды. Содан кейін осы заңға сәйкес кездейсоқ $Z(t_i)$ функциясының бір мәні алынады. Осындай операцияны бірнеше рет қайталап, модельденіп отырған процесстің [t_0, T] аралығындағы бір нақтыламасын бейнелеуге болады.

Δt принципі іс жүзінде кездесетін әртүрлі жүйелерді қамтитын көптеген модельдеуші алгоритмдерді құрастыруға негіз бола алатын универсальды принцип. Алайда, бұл принцип компьютерді қолданғанда ең көп есептеуді талап етеді.

9.2.2. Ерекше жағдай принципі

Әртүрлі күрделі жүйелерді зерттегенде олардың көбінесе екі күйде болатыны анық байқалады: әдеттегі және ерекше күйлері.

Жүйе көбінесе әдеттегі күйінде болады, тек қана оған сырттан жаңа ақпарат, әлде әртүрлі әсер келіп түссе, немесе осы жүйенің кейбір көрсеткіштері өзінің шектік мәндерінен асып кетсе, аз уақыт аралығында бұл жүйе ерекше күйде болады.

Осы ерекше жағдайға сәйкес уақыт мезгілдерінде жүйелерді сипаттайтын $Z_i(t)$ функциялары өздерінің мәнін күрт өзгертеді.

Сондықтан зерттеліп отырған жүйелердің әртүрлі қасиеттері осы ерекше жағдай кезінде мәліметтермен айқындалуы тиіс.

Осындай қасиеттермен сипатталатын жүйелердің модельдеуші алгоритмдерін құрастыру ерекше жағдай принципіне негізделген.

Осы принципті қолдану үшін, ең бірінші, математикалық модельдің қатынастарын, бір әлде бірнеше бұрынғы ерекше жағдайлар арқылы жаңа ерекше жағдайды табуға икемдей түрлендіру керек. Екіншіден бұл принципті пайдаланғанда ерекше жағдай туатын уақыт мезгілдерін алдын ала анықтау қажет. Содықтан бұл принципті қолданғанда Δt принципі сияқты алгоритмнің "бос жүрісі" болмайды.

9.2.3. "Жетектеп өткізу" принципі

Бұл принцип көбінесе көпшілікке қызмет көрсету жүйелерін модельдегенде қолданылады. Оның негізі - жүйеге келіп түскен әрбір өтінішті басынан бастап қызмет көрсетіп болғанша бақылап отыру болады. Яғни, әрбір өтініштің қызмет көрсетудің барлық сатыларынан біртіндеп өтуі қамтамасыз етіледі.

Басында ол кезекке тұруы, немесе қызмет көрсетуге алынуы мүмкін. Қызмет көрсететін канал жұмыстан шығып қалса, өтініш оның жөндеуден шығуын тосу және тағы басқа кезеңдерден өтуі қажет. Яғни бұл өтінішке қызмет көрсетіліп болғанша, немесе әрі қарай қызмет көрсете алмайтын жағдайға кездескенше ол көзден таса болмауы тиіс.

"Жетектеп өткізу" принципі өте тиімді модельдеуші алгоритмдер құрастыруға мүмкіншілік береді, бірақ олардың логикалық құрылымы өте күрделі және кейде шиеленісті болуы мүмкін.

Айтып кететін тағы бір жәй, іс жүзінде модельдеуші алгоритмдерді құрастырғанда бірнеше принцип қатар қолданылуы да ықтимал. Мысалы, модельдеуші алгоритмнің жалпы құрылымы "ерекше жағдай" принципіне негізделсе, ал осы ерекше жағдайлардың аралығында "Жетектеп өткізу" принципі тиімдірек болуы мүмкін.

9.3. Модельдеуші алгоритмнің жалпы құрылымы

Модельдеуші алгоритмнің жалпы құрылымы имитациялық модельдеудің негізгі мақсатын, яғни зерттелетін жүйенің жұмысын, немесе маңызды көрсеткіштерін жақсартуға себепкер болуы қажет.[8].

Ал осы мақсатты жүзеге асыру үшін, ең бірінші қарастырылып отырған обьект әлде жүйедегі процесстердің, белгіленген уақыт аралығындағы хал-күйін модельдей білу керек. Екіншіден, модельдеу кезінде алынған көрсеткіштердің ақиқаттығын және дәлдігін қамтамасыз ету қажет. Үшіншіден, модельдеу арқасында, зерттеліп отырған объекттің жұмысын жақсарту бағыттарын айқындау керек.

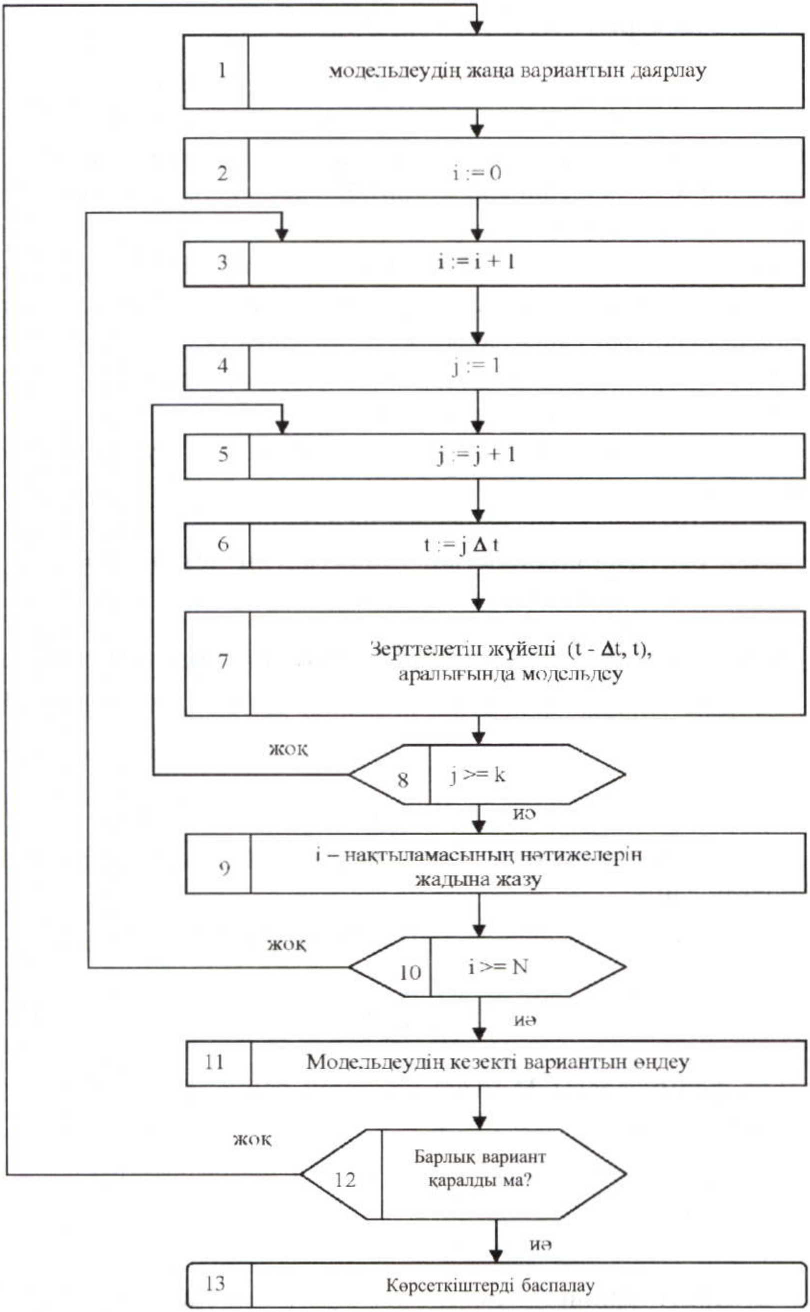
Осы айтылған тілектер модельдеуші алгоритмнің жалпы құрылымының үш циклдан тұруын талап етеді (9.1-сурет).

Ең кіші цикл (5-8 блоктар) зерттелетін жүйенің жұмысын берілген уақыт аралығында модельдейді. Имитациялық модельдің осы уақыт аралығындағы жұмысын болашақта модельдеудің бір нақтыламасы деп атаймыз.

3 пен 10 аралығындағы блоктардан тұратын ортаншы циклда имитациялық модельдеудің N ретті нақтыламалары алынады.

Ал 11-ші блокта, осы нақтыламалардың нәтижелерін статистикалық әдістермен өңдеу арқылы, зерттеліп отырған объекттің ортабелді көрсеткіштері есептеледі. Осы көрсеткіштердің дұрыс мағнасын табуға қажетті нақтыламалардың санын (N), немесе осы көрсеткіштердің алдын-ала тағайындалған дәлдігін пайдалануға болады.

Сыртқы цикл екі ішкі циклдің барлық блоктарымен қатар 1, 2, 11, 12-ші блоктарын да қамтиды. Осы төрт блок объекттің жаңа варианттарын модельдеуді қамтамасыз етеді. Ол үшін 12-ші блок алынған көрсеткіштердің тиімділігін бағалайды, ал 1-ші блок объекттің әртүрлі параметрлерін өзгерту арқылы оның тиімділігін арттыратын жолдарды іздестіреді. Біраз объекттерді имитациялық модельдеу кезінде сыртқы циклды қолданбауға да болатыны анық.


1
модельдеудің жаңа вариантын даярлау
2
i := 0
3
i := i + 1
4
j := 1
5
j := j + 1
6
t := j Δ t
7
Зерттелетін жүйені (t - Δt, t),
аралығында модельдеу
жоқ
8
j >= k
иә
9
i – нақтыламасының нәтижелерін
жадына жазу
жоқ
10
i >= N
иә
11
Модельдеудің кезекті вариантын өңдеу
жоқ
12
Барлық вариант
қаралды ма?
иә
13
Көрсеткіштерді баспалау

9.1-*сурет*

9.4. Экспериментті жоспарлау

Имитациялық модельдеудің экспериментгеу кезеңінің ең басты ерекшелігі, әрине, осы модельдеу кезінде әртүрлі кездейсоқтықтардың объекттегі процесстерге ықпалын ескеруі. Бірақ осы ерекшелік модельдеудің көрсеткіштерін кездейсоқ шама деп есептеуге мәжбүр етеді. Сондықтан бұл көрсеткіштердің қалыптасқан мәндерін табу үшін бірнеше имитациялық модельдеудің нақтыламаларының нәтижелерін орташалау керек. Осыған қажетті нақтыламалардың санын анықтау үшін көрсеткіштердің дәлдігі, нақтыламалардың саны және сенімділік ықтималдылығы арасындағы тәуелділікті пайдалану қажет.

Енді бірнеше көрсеткіштер үшін осындай тәуелділіктерді анықтайық.

9.4.1. Ықтималдылықтың тұрақталған мәнін табуға қажетті нақтылама саны

Кезкелген кездейсоқ оқиғаның, мысалы A оқиғасының, пайда болу ықтималдылығын эксперимент арқылы мына формуламен табуға болады

$$\overline{p} = \frac{m}{N}.$$

m - осы экспериментті N рет жүргізгенде A оқиғасының пайда болған саны.

Осы теңдікті басқаша да жазуға болады [18]:

$$\overline{p} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i \,, \tag{9.2}$$

Бұл формуладағы v мына кестемен бейнеленетін дискретті кездейсоқ шама

$$v_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

$\overline{p}$ көрсеткішінің математикалық үміті мен дисперсиясын табайық:

$$M\left[(1/N)\sum_{i=1}^{N}\xi_i\right]=(1/N)\sum_{i=1}^{N}M[\xi_i]=N\cdot p/N=p, \qquad (9.3)$$

$$D\left\{(1/N)\sum_{i=1}^{N}\xi_i\right\}=(1/N^2)\sum_{i=1}^{N}D[\xi_i]=(1/N^2)N\cdot p(1-p)=p(1-p)/N.$$

Енді осы көрсеткіштің дәлдігі (ε), сенімдік ықтималдылығы (α) және нақтылама саны (N) арасындағы қатынасты келтірейік.

$$P\left\{\left|\frac{m}{N}-p<\Delta\varepsilon\right|\right\}=\alpha.$$

Ықтималдықтар теориясының орталық шекті теоремасына сәйкес, N саны үлкен болған жағдайда, (9.2) өрнегімен бейнеленген $\overline{p}$ көрсеткішінің үлестірім заңы қалыпты үлестірім заңына ұқсайтыны мәлім. Сондықтан қалыпты үлестірім заңының кестесінен [12], сенімдік ықтималдылығының әрбір мәніне сәйкес t_α параметрін анықтап, соның көмегімен ε дәлдігі үшін мына өрнекті жазуға болады

$$\varepsilon=\left|\frac{m}{N}-p\right|=t_\alpha\sqrt{D}.$$

Енді осы өрнекке (9.3) қатынастарынан математикалық үміт пен дисперсияның мәндерін қойып, имитациялық модельдеудің нақтыламалар санын есептейтін формуланы шығаруға болады:

$$N=t_\alpha\frac{p(1-p)}{\varepsilon^2} \qquad (9.4)$$

Осы формуламен нақтыламалар санын есептеу үшін іздеп отырған $\overline{p}$ көрсеткішінің мәнін алдын ала білу керек екені көрініп тұр. Бұл қайшылықты шешетін бір-ақ жол бар. Ол – нақтыламалар санының жуық шамасын (N_0) алдын ала тағайындап, оған сәйкес p_0 ықтималдылығын анықтау қажет. Содан кейін p_0-ды (9.4) өрнегіне қойып, нақтыламаның мәнін есептеуге болады.

9.4.2. Математикалық үміт пен дисперсияның тұрақталған мәнін табуға қажетті нақтылама саны

Математикалық үміттің мәнін анықтау үшін іс жүзінде арифметикалық орташа қолданылатыны белгілі

$$\overline{X} = \left(\frac{1}{N} \right) \sum_{i=1}^{N} X_i \ . \tag{9.5}$$

Осы формуламен табылған арифметикалық орташа мына тәуелділікке қайшы келмеуі керек

$$P\{m - \varepsilon \le \overline{X} \le m + \varepsilon\} = 1 - \alpha.$$

Сонымен қатар, (9.5.) өрнегімен есептелетін арифметикалық орташаның үлестірім заңы, орталық шекті теорема бойынша, математикалық үміті m, дисперсиясы $\frac{\sigma^2}{N}$, қалыпты үлестірім заңына ұқсас екендігі анық. Сондықтан осы көрсеткішті бағалау дәлдігі үшін мына теңдеуді келтіре аламыз

$$\varepsilon = \left| \overline{X} - m \right| = t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{N}} .$$

Яғни
$$N = \frac{{t_\alpha}^2 \cdot \sigma^2}{\varepsilon^2} .$$

Бұл формуладағы σ^2 - арифметикалық орташаның дисперсиясы. Осы дисперсияның мөлшері белгісіз болғандықтан оның орнына

$$S^2 = \left(\frac{1}{N_0 - 1} \right) \sum_{i=1}^{N_0} \left(X_i - \overline{X} \right)^2 ,$$

формуласымен есептелетін дисперсиясының жуық шамасы алынады.

Енді, әртүрлі көрсеткіштердің дисперсиясын керекті дәлдікпен, яғни

$$P\{(1 - \varepsilon) \cdot \sigma^2 \le S^2 \le (1 + \varepsilon) \cdot \sigma^2\} = 1 - \alpha ,$$

тәуелділігімен бағалауға мүмкіндік беретін N нақтыламасын анықтайық. Дәлділіктің мөлшері, әрине, $0 \le \varepsilon \le 1$ - аралығында болуы тиіс.

Бұл жолы да дисперсияның бағасы ретінде қолданылатын S^2 шамасының, математикалы› үміті мен дисперсиясы

$$M\left[S^2\right] = \frac{N-1}{N}\sigma^2, \qquad D\left[S^2\right] = \frac{m_4 - \sigma^4}{N}$$

тең, қалыпты заңмен сипатталатынын ескере отырып, көрсеткіштің дәлдігін мына теңдікпен бейнелейміз

$$\varepsilon = \left|S^2 - \sigma^2\right| = t_\alpha \sqrt{\frac{m_4 - \sigma^4}{N}}\ .$$

Осы өрнектен, белгілі үш сигма қағидасын ескере отырып, нақтылама санын есептейтін формуланы шағаруға болады

$$N = 2t_\alpha^2 \frac{\sigma^4}{\varepsilon^2}.$$

Белгісіз v бұл жерде де жоғарыда айтылған тәсілмен табылады.

9.4.3. Нақтылама санын анықтауға Чебышев теңсіздігін қолдану

Бұған дейін нақтыламалар санын анықтау үшін біз имитациялық модельдеу кезінде пайдаланатын көрсеткіштер қалыпты үлестірім заңына бағынышты деп есептедік. Енді бұл болжамнан бас тартайық, яғни көрсеткіштер басқа да үлестірім заңдарымен сипаттала алатын болсын.

Осы жағдайда нақтылама санын табу үшін Чебышев теңсіздігін қолдануға болатынын көрсетейік.

Чебышев теңсіздігі мына өрнекпен бейнеленеді:

$$P\left\{\overline{X} - m\right| > k\sigma\right\} \le \frac{1}{k^2}.$$

Бұл өрнек кез келген көрсеткіштің арифметикалық орташасы мен математикалық үмітінің айырмашылығы $k\sigma^2$ мөлшерінен асып түсу ықтималдылығы $\frac{1}{k^2}$ санынан аспайтындығын көрсетеді.

Мысал [4]. Имитациялық модельдеу нәтижесінде алынатын $\overline{X}$ шамасы 0,95 ықтималдылығымен $M \pm \frac{\sigma}{4}$ аралығында жатуын қамтамасыз ету керек болсын. Яғни, мына теңсіздік

$$P\left\{\left|\overline{X} - m\right| > \frac{\sigma}{4}\right\} \leq 0{,}05\,.$$

орындалуы тиіс. Ол үшін $D\left[S^2\right] = \frac{\sigma^2}{N}$ екенін ескере отырып, Чебышев теңсіздігін жазайық

$$p\left\{\left|\overline{X} - m\right| > \frac{\sqrt{N}}{4} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right\} \leq \frac{16}{N} = 0.05 \quad \text{яғни} \quad N = 320.$$

Табылған нақтылама саны, қалыпты үлестірім заңы қолданғанда қажетті саннан көбірек болатынын ескеру керек.

9.5. Модельдеу нәтижелерін талдаудың регенеративтік әдісі

Жоғарыда атап өтілгендей, имитациялық модельдеудің ең соңғы, модельдеу нәтижелерін өңдеу немесе талдау кезеңінің де өзіне тән ерекшеліктері бар. Осы ерекшеліктердің біреуінің мәні мынада.

Көптеген объектерде өтіп жатқан процесстер кейбір, алдын ала белгісіз уақыт мезгілдерінде, өзінің бастапқы, әлде басқа бір әдетті қалпына қайта келетін қасиетімен сипатталады. Яғни, процесстің осы уақыт мезгілдерінен кейінгі дамуы, оның бұрынғы жүріс - тұрысына байланысты болмайды, бірақ бұл мезгілдердің аралығындағы процесстердің даму барысы бір кездейсоқ заңдылықпен бейнеленеді. Осындай уақыт мезгілдері регенерация нүктелері немесе моменттері деп аталады [29].

Егер регенерация қасиетіне ие объектердің имитациялық модельдеу арқылы алынған нәтижелерін, осы регенерация моменттері аралығына сәйкес топтасақ, ол топтар бірінен бірі статистикалық тәуелсіз және бірдей үлестірілген болып шығады. Сондықтан бұл нәтижелерді өңдеу және талдау бірсыпыра оңай жүргізіледі.

Осы параграфта регенерация әдісінің қысқа мазмұны және иллюстрациялық мысал қарастыру арқылы негізгі қасиеттері келтірілген.

9.5.1. Регенеративтік әдіс

Бұл параграфты мына анықтамалардан бастайық.

1-анықтама. *K мөлшерлі кездейсоқ вектордың $\{\overline{X}_n\}$ тізбегін регенерацияланушы процесс деу үшін, регенерация нүктелері деп аталатын кездейсоқ уақыт моменттерінің өскелең*

$$1 \le \theta_1 \le \theta_2 \le \dots$$

тізбегінің әр нүктесінен бастап, осы процесс бір кездейсоқ заңдылықпен, яғни алғашқы θ_1 моментінен басталған процесстің күйін сипаттайтын заңдылықпен бейнелеуі тиісті.

2-анықтама. $\{X_n\}$ *процесінің $\theta_i \le n \le \theta_{j+1}$ аралығындағы бөлшегі процесстің циклы деп аталады.*

3-анықтама. *Регенерацияның периоды деп қатар тұрған екі регенерация нүктелерінің аралығын айтады*

$$\alpha_i = \theta_{j+1} - \theta_j .$$

Бұл периодтар бірінен бірі тәуелсіз және бір үлестірім заңымен сипатталынатын шамалар екені анық.

Енді регенерацияланушы процесске қатысты тағы бір өрнекті келтірейік

$$Y_i = \sum_{i=\theta_j}^{\theta_{j+1}-1} f\left(\overline{X}_i\right)$$

Бұл өрнектегі $f\left(\overline{X}_i\right)$ мөлшері k және нақты мәнді функция. Осы функцияға әртүрлі мағна бере отырып, регенерацияланушы процесстің біраз стационарлы сипаттамаларын табуға болады.

Имитациялық модельдеудің мақсаты ретінде осы функциялардың орта мөлшерін, яғни $M\{f(x)\}$-тің мәнін бағалау мәселесін қоялық.

Енді осы регенерациялық әдістің негізімен танысайық.

Y_j-дің мәні $f(X_i)$ функциялардың j-цикл аралығындағы ғана қосындысы болғандықтан $\{Y_j,\ \alpha_j\}$ тізбегі тек қана тәуелсіз және бір үлестірім заңымен бейнеленетін кездейсоқ векторлардан тұрады.

Сонымен қатар $N \to \infty$ екенін ескере отырып, мына белгілі қатынасты келтіруге болады

$$\frac{f_1(x_1)+...+f_n(x_n)}{N} \to n\{f(x)\}\langle\infty \qquad (9.6)$$

Ал n-ші циклдың аяқталуы N-ге дәл келген күнде (9.6) қатынасын басқаша жазуға болады

$$\frac{(Y_1+...+Y_n)/n}{(\alpha_1+...+\alpha_n)/n}.$$

Бұл қатынас мәні бірге тең ықтималдылықпен $n \to \infty$ ұмтылған жағдайда $\frac{M\{Y_j\}}{M\{\alpha_j\}}$ қатынасына жинақталады, яғни

$$M\{f(x)\} = \frac{M\{Y_j\}}{M\{\alpha_j\}}.$$

Сонымен $M\{f(x)\}$ мөлшерін бағалау мәселесі $\frac{M\{Y_j\}}{M\{Y_\alpha\}}$ қатынасын бағалауға тіреліп отыр. Ал, осы қатынасты үлестірім заңы бірдей $\{Y_1\alpha_1\},...\{Y_n\alpha_v\}$ векторларынан оңай табуға болатыны анық.

9.5.1. Регенеративтік әдістің қолдануы

Регенеративтік әдістің негізін және мәнін кіріспеде келтірілген қарбыз сатушы жұмысының имитациялық моделі арқылы көрсетейік.

Осы мысалда қарастырылған қызмет көрсету жүйесінің негізгі көрсеткіші ретінде клиенттің қарбыз сатыла басталуын күту уақытының орта мәнін $\{M[\tau^k]\}$ алайық. Сондықтан бұл жүйені имитациялық модельдеу мақсаты $\{M[\tau^k]\}$ математикалық үмітінің мөлшерін керекті, мысалы 90% дәлдікпен бағалау болсын.

Жоғарыда (п.9.4) көрсетілгендей, математикалық үмітті бағалау үшін арифметикалық орташаны қолдануға болады

$$\overline{m} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \tau_j^k . \qquad (9.7)$$

Алайда, бұл тәсіл кем дегенде екі елеулі кемшілікпен сипатталады. Біріншіден жұмыстың бастапқы уақытындағы ерекшеліктердің әсерінен арифметикалық орташаның мөлшері өзгеруі мүмкін. Шынымен, егер $\tau_1^k = 0$ болса, бірнеше бастапқы күту уақыттарының мәні де кішірек болады (к.1-кестені қараңыз).

Бір қарағанда күмәнсіз болып көрінетін, осы бастапқы ығысудың ықпалын жоюдың ең тиімді тәсілі, алғашқы N_0 клиенттердің уақыттарын есептемей, тек осы жүйенің стационарлық режимін ғана қарастыру. Яғни (9.7)-ің орнына мына формуланы пайдалану

$$(\overline{m} = \frac{1}{N}\sum_{j=N_0+1}^{N_0+N} \tau_j^k .$$

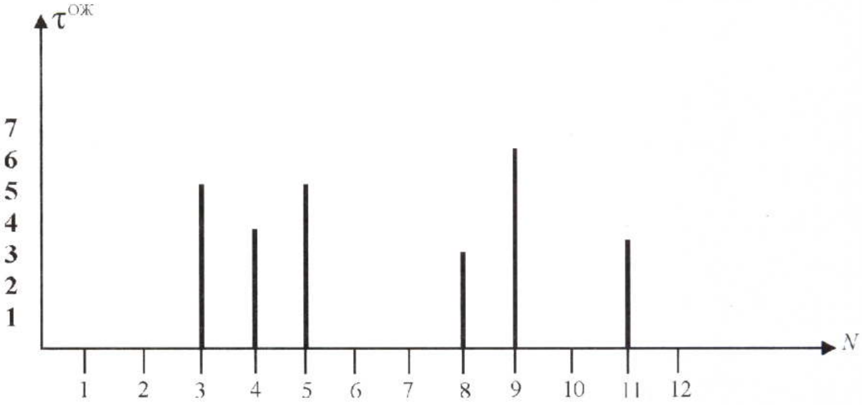
Бірақ бұл тәсілдің осал жері - компьютердің уақыты біраз ысырап болатыны. Себебі N_0 алдын-ала белгісіз болғандықтан оның мәнін едәуір үлкен қылып алу қажет.

Екіншіден, (9.7) формуласымен алынған арифметикалық орташаның мәні τ_j^k және τ_{j+1}^k күту уақыттарының іс жүзінде елеулі арақатыста болатындығын ескермейді. Сондықтан оның ақиқаттығына күмән түседі.

Шынымен, егер кезекті τ_j^k мәні үлкен (кіші) болса, келесі $j+1$-клиенттің күту уақыты да көбінесе үлкен (кіші) болады (к.1 - кестені қараңыз).

Сонымен, бастапқы шарттардан туған ығысу және күту уақыттарының бір бірімен елеулі арақатынастығы имитациялық модельдеу көрсеткіштерін таңдама орташалары арқылы дұрыс бағалауға кедергі жасайды.

Енді осы қиыншылықтарды регенеративтік әдісті қолдану арқылы шешуге болатынын көрсетейік. Ол үшін к.1 кестесіндегі деректерді график арқылы бейнелейік (9.2-сурет):



9.2-*сурет*

Осы суреттен мына жағдайды анық байқауға болады. Қарбыз сатушының бос болмау периоды мен одан кейінгі бос отыру периоды регенеративтік процесстің бір циклын құрады. Ал сатушыны бос отырған уақытта келген 1, 2, 6, 7, 10, 12 - ші клиенттердің келу мерзімі регенерация нүктелері болады. Сондықтан, жоғарыдағы графиктен қарбыз сатушының бір сағат жұмыс аралығында толық бес цикл бар екенін көреміз:

$$\{\tau_1\}, \{\tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5\}, \{\tau_6\}, \{\tau_7, \tau_8, \tau_9\}, \{\tau_{10}, \tau_{11}\}$$

Алтыншы цикл 12 - ші клиенттің келу мерзімінен басталады.

Осы графиктен әрбір цикл қайта қалыптасудан (регенерациядан), яғни осы жүйенің бірінші клиент келген мерзімдегі қалпына келуден басталып отырғаны анық көрінеді. Сондықтан, осы циклдердің тізбегі бірінен бірі тәуелсіз және олардың үлестірім заңдары бірдей екені ақиқат.

Бұл мысалда Y_j арқылы j - циклындағы күту уақыттарының қосындысын, ал a_j - арқылы осы циклда қызмет көрсетілген клиенттер санын белгілейік.

Сонымен, регенеративтік әдісін пайдалана отырып, елеулі корреляцияланған $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$ деректерін бірінен бірі тәуелсіз, бір үлестірім заңына бағынышты және әрқайсысы $\{Y_j, \alpha_j\}$ қос параметрмен бейнеленетін бірнеше топқа келтіре алдық.

Енді клиенттердің күту уақытының орта шамасын есептеу үшін (9.6) формуласына сәйкес мына қатынасты қолдануға болады:

$$\overline{m} = M\{\tau^k\} = \frac{M\{Y_j\}}{M\{\alpha_j\}}.$$

Осы айтылған тұжырымды дұрыс түсіну үшін тағы да қарбыз сатушы туралы мысалдың нақтылы деректерін пайдаланайық.

Іздеп отырған, клиенттердің күту уақытының орташа шамасын 90%-тік дәлдікпен есептеуге келісейік. Күту уақыттарының нақтылы деректері к.1-кестеде келтірілген. Сонымен қатар, 9.2-суреттен мына нәтижелерді алуға болады:

$$\{Y_1, \alpha_1\} = \{0, 1\}, \qquad \{Y_4, \alpha_4\} = \{6, 3\},$$
$$\{Y_2, \alpha_2\} = \{8, 4\}, \qquad \{Y_5, \alpha_5\} = \{1, 2\}$$
$$\{Y_3, \alpha_3\} = \{0, 1\},$$

Енді осы қос параметрлердің таңдамалы орташаларын табайық:

$$Y = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j = \frac{1}{5}(0 + 8 + 0 + 6 + 1) = 3;$$

$$\bar{\alpha}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j=\frac{1}{5}(1+4+1+3+2)=11/5.$$

Ал, таңдамалы дисперсия мен таңдамалы екінші ретті аралас моменттері мына өрнектермен анықталады:

$$S_{11}=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(Y_j-Y)^2=14;$$

$$S_{22}=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j{}^2-\frac{1}{n(n-1)}(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j)^2=1,7;$$

$$S_{12}=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}Y_j\alpha_j-\frac{1}{n(n-1)}(\sum_{j=1}^{n}Y_j)(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j)=19/4;$$

Сонда

$$S^2=S_{11}-2\bar{m}S_{12}+\hat{m}^2S_{22}=4,2.$$

Сенімдік аралығы

$$\hat{I}=\hat{m}\pm\frac{t_{0,1}}{\alpha}\frac{S}{\sqrt{n}}=\frac{15}{11}\pm0,6858;\qquad \hat{I}=1,3716.$$

Осы қатынастан, сенімдік деңгейі өзгермеген жағдайда, сенімдік аралығын 2 есе азайту үшін қосымша 20 цикл енгізу керек болатындығы көрініп тұр.

10. КӨПШІЛІККЕ ҚЫЗМЕТ КӨРСЕТУ ЖҮЙЕЛЕРІН МОДЕЛЬДЕУ

Іс жүзінде кездесетін әртүрлі күрделі жүйелерді зерттегенде, оларды көпшілікке қызмет көрсету жүйелері (ҚҚКЖ) ретінде қарастыруға болады. Өкінішке орай, көпшілікке қызмет көрсету теориясының математикалық аппаратының қолдану мүмкіншілігі өте шектеулі. Бұл аппарат тек қана кірісіндегі талаптар қарапайым ағынын құратын, ал осы талаптарға қызмет көрсету уақыты экспоненциалдық үлестірім заңымен бейнеленетін жүйелерді ғана зерттей алады. Сондықтан көпшілікке қызмет көрсету жүйелерінің сұлбасына келтіріле алатын көптеген күрделі жүйелерді зерттеу үшін имитациялық модельдеу әдісі қолданылады [6,7].

Енді көпшілікке қызмет көрсету жүйелерін имитациялық модельдеу әдісімен танысуды ең қарапайым бірканалды ҚҚКЖ-н модельдеуден бастайық.

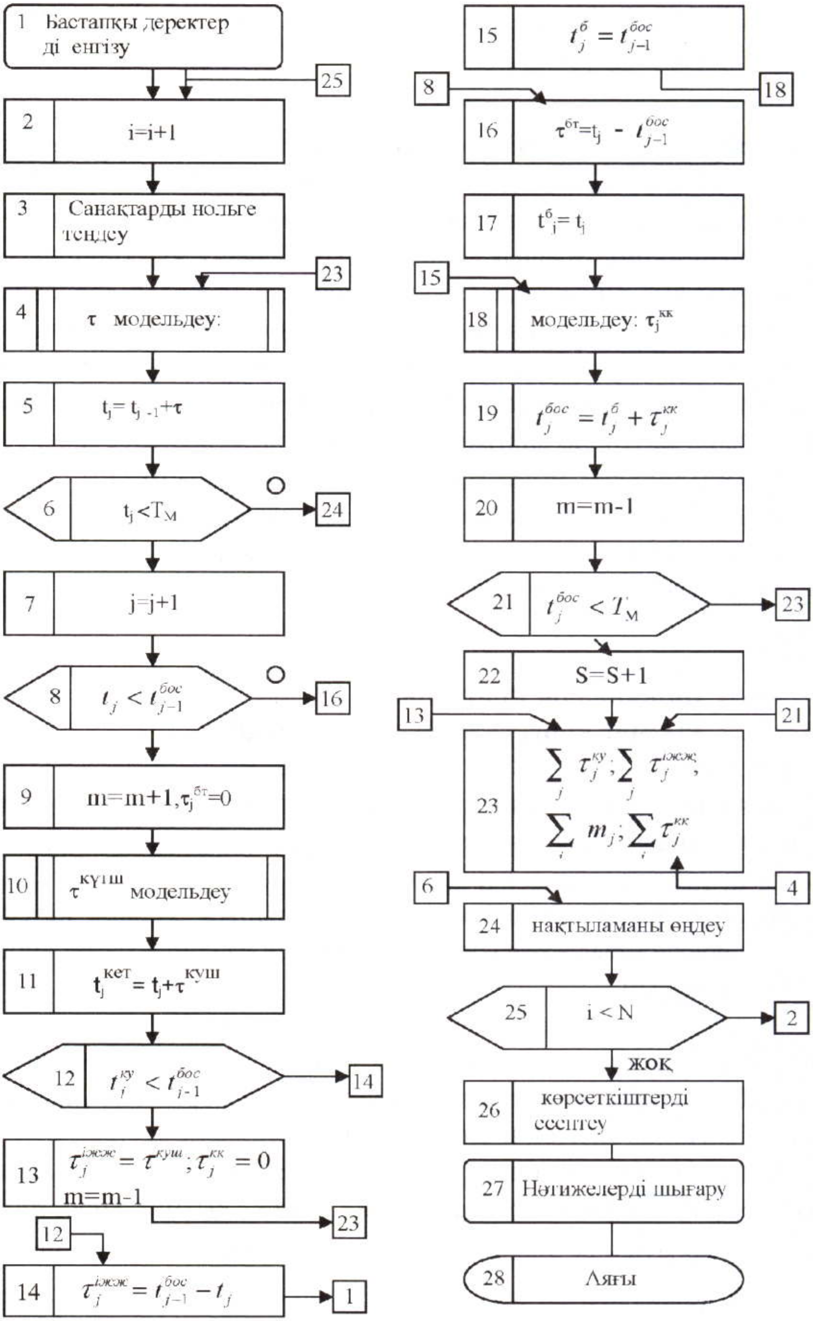
10.1. Бірканалды көпшілікке қызмет көрсету жүйесін модельдеу

Осы жүйенің кірісіндегі талаптар Пальм кездейсоқ оқиғалар ағынын құратын болсын және ол ағынның оқиғаларының аралық мәнінің үлестірім заңы берілсін.

Бұл талаптар қызмет көрсету каналының алдына кезекке тұрып, әрқайсысы өз кезегіне сәйкес бірінен соң бірі қызмет көрсетілуге алынсын.

Кезекте тұру мерзімі шектелулі деп есептейік. Жалпы жағдайда, бұл мерзім үлестірім заңы белгілі кез келген кездейсоқ шама бола алады. Талаптарға қызмет көрсету мерзімі де үлестірім заңы белгілі кездейсоқ шама болсын.

Осы көпшілікке қызмет көрсету жүйесінің $[0, T]$ аралығындағы жұмыс барысын модельдейік. Демек, қызмет көрсетілуге $t^{\sigma} < T$ уақытында алынған талаптан каналдың босау мезгілі $t_{бос} > T$ теңсіздігімен сипатталса, ол талапқа қызмет көрсетілмеуі тиіс.


1 Бастапқы деректерді енгізу
25
2 i=i+1
3 Санақтарды нольге теңдеу
23
4 τ модельдеу:
5 $t_j = t_{j-1} + \tau$
6 $t_j < T_M$
○
24
7 j=j+1
8 $t_j < t_{j-1}^{бос}$
○
16
9 $m=m+1, \tau_j^{бт}=0$
10 $\tau^{күш}$ модельдеу
11 $t_j^{кет} = t_j + \tau^{күш}$
12 $t_j^{ку} < t_{j-1}^{бос}$
14
13 $\tau_j^{іжж} = \tau^{куш}; \tau_j^{кк} = 0$
m=m-1
23
12
14 $\tau_j^{іжж} = t_{j-1}^{бос} - t_j$
1
15 $t_j^{б} = t_{j-1}^{бос}$
18
8
16 $\tau^{бт} = t_j - t_{j-1}^{бос}$
17 $t_i^{б} = t_j$
15
18 модельдеу: $\tau_j^{кк}$
19 $t_j^{бос} = t_j^{б} + \tau_j^{кк}$
20 m=m-1
21 $t_j^{бос} < T_M$
23
22 S=S+1
13
21
23 $\sum_j \tau_j^{ку}; \sum_j \tau_j^{іжж}; \sum_i m_j; \sum_i \tau_j^{кк}$
6
4
24 нақтыламаны өңдеу
25 i < N
2
жоқ
26 көрсеткіштерді есептеу
27 Нәтижелерді шығару
28 Аяғы

10.1-*сурет*

Бұл жүйені модельдеудің арқасында келесі көрсеткіштерді анықтауға болады: қызмет көрсетілген талаптардың барлық талаптарға қатысты үлесі, талаптардың кезекте күту уақыттарының орташа мәні және тағы басқалар.

Бірканалды көпшілікке қызмет көрсету жүйесін имитациялық модельдеу алгоритмінің сұлбасы 10.1-суретте келтірілген. Енді осы алгоритмнің әрбір қадамымен танысайық.

1-ші оператордың көмегімен имитациялық модельдеуге қажетті бастапқы деректер, яғни талаптар ағынының параметрлері, берілген үлестірім заңдарының сипаттамалары, модельдеу мерзімі және тағы басқалар тағайындалады.

2-ші оператор имитациялық модельдеудің неше рет қайталанғанын, яғни нақтыламалар санын, есептейді.

3-ші оператор жаңа нақтыламаны модельдей бастауға даярлық жасайды.

4-ші және 5-ші операторлардың көмегімен кезекті талаптың жүйеге келіп түскен мезгілі

$$t_j = t_{j-1} + \tau$$

табылады. Бұл формуладағы t_{j-1} -алдыңғы талаптың келіп түскен мезгілі, ал τ -осы екі талаптың аралығы.

6-шы оператордың көмегімен, j -шы талаптың келу уақыты модельдеу интервалына ене ме, әлде енбей ме деген сұраққа жауап алынады, яғни

$$t_j < T \qquad (10.1\ )$$

шарты тексеріледі. Осы шарт $\left[0,\ T\right]$ интервалы толық модельденіп болғанда ғана орындалмайтыны анық. Сондықтан $t_j \geq T$ болған жағдайда 6-шы оператордан тікелей 24-операторға өтіп, имитациялық модельдеудің бір нақтыламасының нәтижелерін есептеу қажет.

Ал (10.1) шарты орындалған жағдайда 7-ші оператор келіп түскен талаптардың санын өзгертеді.

8-ші оператор кезекті талаптың келген уақытында қызмет көрсетуші каналдың бостығын тексереді. Канал бос емес, яғни

$t_j < t_{j-1}^{бос}$ жағдайында бұл талап кезекке қойылады. Сондықтан 9 -шы оператор кезекте тұрған талаптардың m санының жаңа мөлшерін есептейді және каналдың осы талапты күтпегенін $\tau^{б.Т.} = 0$ деп белгілейді.

10-шы және 11-ші операторлар осы талаптың кезекте қай мезгілге дейін тұра алатынын анықтайды:

$$t_j^{к.у.} = t_j + \tau^{к.у.ш.}$$

$\tau^{к.у.ш.}$ - күту уақытының шектік мағнасы. Осы кездейсоқ шама, берілген үлестірім заңы бойынша 10 - шы операторда табылады, немесе константа ретінде беріледі.

12-ші оператордың көмегімен j - шы талаптың кезектен кету уақытына дейін канал босай ала ма деген сұраққа жауап алынады. Егер $t_j^{к.у.} < t_{j-1}^{бос}$ шарты ақиқат болса, яғни каналдың босауын күту мерзімі талаптың шекті күту уақытынан көп болса, ол талаптың кезектен кетуіне тура келеді. Осы жағдай 13-ші операторда $\tau^{і.ж.к.} = \tau^{к.у.ш.}$. теңдігімен бейнеленеді. Яғни талаптың іс жүзінде кезекте тұру уақыты оның шектік күту мағнасына, ал осы талапқа қызмет көрсету мерзімі, әрине, нольге тең болады. Және кезектегі талаптар саны бір данаға кемиді $(m = m - 1)$.

Енді келесі талаптарды модельдеуге кірісу үшін 23-ші оператор арқылы қайтадан 4-ші операторға көшеміз.

Қайтадан 12-ші операторға оралайық. Егер $t_j^{к.у.} < t_{j-1}^{бос}$ шарты орындалмаса, канал босасымен кезектегі талап қызмет көрсетілуге алынуы тиіс. Сондықтан 14, 15-ші операторлар осы талаптың іс жүзінде кезекте күткен уақытын

$$\tau^{і.ж.к.} = t_{j-1}^{бос} - t_j$$

есептейді және оған қызмет көрсетіле басталған уақытты тіркейді:

$$t_j^{б.} = t_{j-1}^{бос}.$$

Енді 8 - ші операторға қайта оралайық. Кезекті талаптың келіп түскен мезгілінде канал бос болса, бұл талап дереу қызмет көрсетілуге алынады. Сондықтан 16-шы операторда каналдың бұл талапты күту уақыты $\tau^{Т.к.} = t_j - t_{j-1}^{бос}$ анықталып, 17-ші операторда оған қызмет көрсете бастау мезгілі $t_j^{\sigma} = t_j$ тағайындалып, 18-операторда осы талапқа қызмет көрсету уақытының ($\tau^{қ.к.у.}$) мәні модельденеді.

19-шы оператор каналдың қызмет көрсетіп болып, қайтадан бос болатын мезгілін $t^{бос.} = t^{б.} + \tau^{к.к.у.}$ анықтайды, ал 20-шы оператор кезекте тұрған талаптардың санын бір данаға кемітеді.

Дегенмен, осы талапқа қызмет көрсетіледі деп есептеу үшін тағы бір маңызды шарт орындалуы керек: $t_j^{бос} \leq T$, яғни осы талапқа қызмет модельдеу интервалының ішінде көрсетілуі қажет (21-ші оператор). Осы шарт орындалған жағдайда ғана 22-ші оператор кезекті талапқа қызмет көрсетілді деп есептейді. Ал 21-ші оператордың шарты орындалмаған жағдайда талапқа қызмет көрсетілмейді. Сондықтан осы талапқа байланысты параметрлердің мәнін 23 - операторда тіркегеннен кейін кезек 4-ші операторға, яғни келесі талапты модельдеуге беріледі.

23-ші операторда имитациялық модельдеудің арқасында анықталатын әртүрлі көрсеткіштерді есептеуге қажетті деректер біртіндеп қалыптасады.

Енді 6-шы операторға қайта оралайық. Бұл оператор тексеретін шарт тек қана имитациялық модельдеудің кезекті нақтыламасы аяқталғанда орындалатынын байқау оңай. Сондықтан кезек 24-ші операторға беріліп, осы нақтыламаның нәтижесі анықталады.

Егер бір нақтыламаның нәтижесі зерттеліп отырған жүйенің жұмыс барысын керекті дәлдікпен анықтай алмайтын болса, 25-ші оператордың көмегімен имитациялық модельдеу N рет қайталанады. 26-шы оператор осы нақтыламаларда алынған көрсеткіштердің орташа мәнін есептейді.

Имитациялық модельдеудің нәтижесі ретінде көбінесе мына көрсеткіштер қолданылады:

- талаптардың кезекте тұру уақытының орташа мәні

$$\overline{\tau}^{.i.ж.к} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\tau^{i.ж.к.};$$

- кезектің орташа ұзындығы

$$\overline{m} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{j} m_{j};$$

- талаптардың қызмет көрсетілуге алыну ықтималдылығы

$$Pк.к. = \frac{S}{J};$$

- талаптарға қызмет көрсетуден бас тартудың ықтималдылығы

$$P_{б.Т.} = 1 - \frac{S}{J};$$

- каналдың кезекті талапты күту уақытының орташа мәні

$$\overline{\tau}^{куТ} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\tau_{j}^{куТ}$$

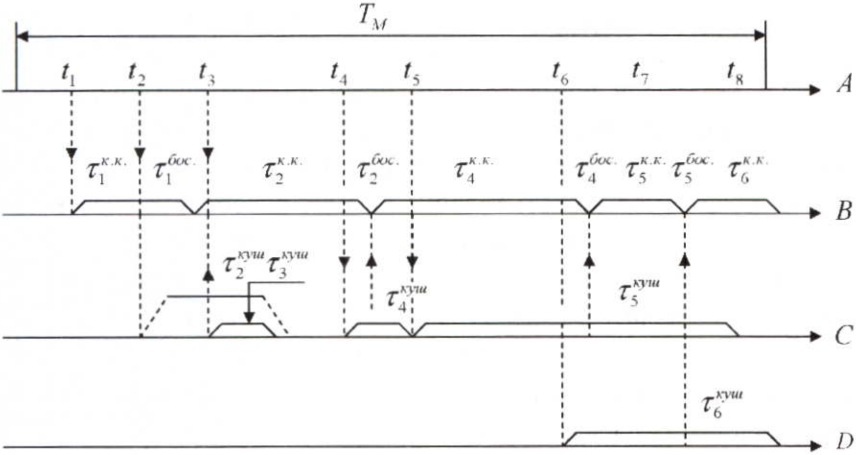
- каналдың бос тұруының ықтималдылығы

$$P_{б.т.} = \frac{\overline{\tau}^{б.т.}}{T} \quad .$$

Енді осы модельдеуші алгоритмнің жұмысын диаграмма арқылы бейнелейік [18]. Ол үшін A, B, C, D уақыт бағыттарын қарастырайық (10.2 - сурет).

A бағыты талаптар ағынын бейнелесін, B бағыты арқылы каналдың жұмысы сипатталсын, ал C және D бағыттарымен кезекте бірінші және екінші тұрған талаптардың жағдайы суреттелсін. Егер кезектегі талаптардың саны екеуден көп болса басқа да бағыттарды енгізуге болады.

Бірінші талап келіп түскен сәтте канал бос екені анық. Сондықтан бұл талапқа қызмет көрсету уақытын $\tau_{1}^{к.к.}$ - мен бейнелейік (*B* бағыты). Ал осы суреттен екінші талап келген мезгілде



10.2-*сурет*

канал бос емес екені көрініп тұр. Сондықтан екінші талап кезекке бірінші болып тұрады (*C* бағыты). Бұл талаптың күте алатын мерзімі 10-шы операторда табылады. Осы суретке сәйкес $t_2^{к.у.} > t_1^{бос}$ шарты орындалсын. Сондықтан екінші талап та канал босасымен қызмет көрсетілуге қабылданады.

Екінші талапқа қызмет көрсету уақыты 18-ші операторда анықталады. Суреттен үшінші талап келіп түскен мезгілде канал екінші талапқа қызмет көрсетіп жатқаны көрініп тұр. Сондықтан бұл талап та кезекке бірінші болып тұрады. Алайда оның күту мерзімі аздау болғандықтан $(t_3^{к.у.} < t_2^{бос})$ каналдың босау мерзіміне жетпей кезектен кетуіне мәжбүр екенін көріп отырмыз.

Осылайша бұл диаграммамен басқа талаптарға да қалай қызмет көрсетілетінін бейнелеуге болады.

10.2. Жұмысы сенімсіз элементті көпшілікке қызмет көрсету жүйелерін модельдеу

Көпшілікке қызмет көрсету сұлбасымен бейнеленетін бірсыпыра нақтылы жүйелерді зерттегенде, олардың қызмет көрсету каналдарының сенімсіздігін, яғни анда-санда істен шығып қалатынын ескеру қажет. Жоғарыда қаралған бірканалды көпшілікке қызмет көрсету жүйесін сенімсіздік қасиетімен толықтырайық. Яғни, каналдың бұзылмай қызмет істеу уақыты үлестірім заңы белгілі кездейсоқ шама болсын. Істен шығып қалған каналды қалпына келтіру уақыты да әдетте үздіксіз кездейсоқ шама болатыны анық. Бұл шаманың да үлестірім заңы белгілі деп есептейік. Егер канал кезекті талапқа қызмет көрсетіп жатқан кезде бұзылса, ол талапқа қайтадан қызмет көрсетілмейді.

Енді каналдың істен шығып қалу мүмкіншілігін ескере алатын ішене алгоритмді құрастырайық (10.3 - сурет).

Бұл ішене алгоритм негізгі модельдеуші алгоритмнің (10.1-сурет) 21-ші операторынан кейін R белгісінің көмегімен модельдеуге қатысады:

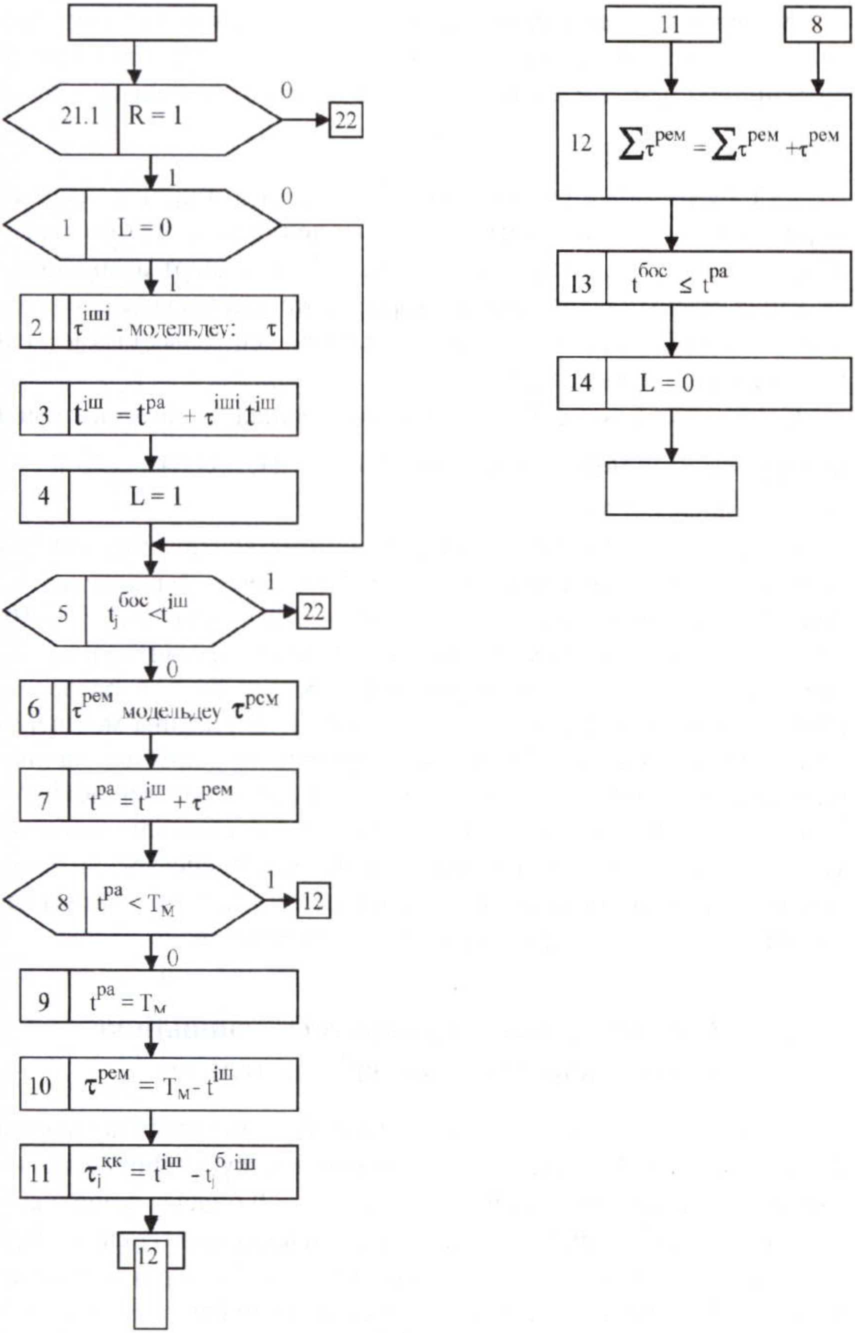
Осы ішене алгоритмнің бастапқы операторы (21.1-ші оператор) $R=1$ шартын тексереді. Бұл шарт орындалмаған, яғни каналдың сенімсіздік сипаттамасы ескерілмеген жағдайда, кезек негізгі алгоритмнің 22-ші операторына тиеді. Сондықтан ұсынылып отырған ішене алгоритм іске аспай қалады.

Ал $R=1$ шарты орындалған жағдайда көпшілікке қызмет көрсету жүйесі, каналының сенімсіздік сипаттамасын ескере отырып модельденеді. Сондықтан 21.1-ші оператордан кейін, осы ішене алгоритмнің 1- ші операторында $L=0$ шарты тексеріледі.

Бұл шарттың мағнасы мынада. Қызмет көрсетуші каналдың жұмысын модельдеген кезде ең маңызды дерек каналдың істен шығу мезгілі $\left(t^{i.ш.}\right)$. Сондықтан кез келген уақыт үшін осы мезгіл алдын ала модельденіп отыруы керек. Соны қамтамасыз ету үшін L белгісін кіргізейік:

$$L=\begin{cases}1, \text{егер каналдың істен шығу мезгілі } t^{i.ш.} \text{ анықталса}\\ 0, \text{өткен істен шығу мезгілі } t_{j-1}^{i.ш.} \text{ қолданылып, келесі}\\ \quad \text{істен шығу } t_j^{i.ш.} \text{ мезгілін табу қажет болса}\end{cases}$$

Ең бастапқы шақта, әрине, $L=0$ шарты орындалады да 2 мен 3-ші операторлар каналдың бұзылмай жұмыс істеу мерзімін болжай отырып, келесі істен шығатын $t^{i.ш.}$ мезгілін анықтайды. Сондықтан 3 - ші оператор L белгісінің мәнін өзгертеді.


21.1
R = 1
0
22
1
1
L = 0
0
1
2
τ^ішi - модельдеу: τ
3
t^іш = t^ра + τ^іші t^іш
4
L = 1
5
t_j^бос < t^іш
1
22
0
6
τ^рем модельдеу τ^рем
7
t^ра = t^іш + τ^рем
8
t^ра < T_м
1
12
0
9
t^ра = T_м
10
τ^рем = T_м - t^іш
11
τ_j^кк = t^іш - t_j^б іш
12
11
8
12
Στ^рем = Στ^рем + τ^рем
13
t^бос ≤ t^ра
14
L = 0

10.3-*сурет*

Ал бірінші оператордың шарты орындалмаған жағдайда кезек бірден 5-ші операторға беріледі. Ол осы ішене алгоритмнің ең маңызды шартын, яғни кезекті талапқа қызмет аяғына дейін көрсетілуін, тексереді $t_j^{боc.} < t^{i.ш.}$.

Бұл шарт орындалған жағдайда кезекті талапқа қызмет көрсетілді деген мәлімет негізгі модельдеуші алгоритмнің 22-ші операторында санаққа тіркеледі. Ал бұл шарт орындалмаса, канал кезекті талапқа қызмет көрсетіп жатқан уақытында бұзылғаны мәлім болады да, бұл талап осы жүйеден толық қызмет ала алмай кетуіне тура келеді.

Сондықтан 6 және 7-ші операторлар каналды қайта қалпына келтіру мерзімін модельдеп, келесі талапты қабылдауға даяр $\left(t^{p.a.}\right)$ мезгілін анықтайды.

Келесі 8-ші оператор, каналды қалпына келтіру мерзімі модельдеу интервалына кіре ме, кірмей ме деген сұраққа жауап береді. Осы оператордың шарты орындалған жағдайда, 9, 10, 11-ші операторлардың көмегімен бірнеше көрсеткіштерді анықтай отырып, кезек 12-ші операторға беріледі. Бұл оператор каналды қалпына келтіруге жұмсалған уақыттың жалпы мөлшерін есептеуге бейімделген. 13-ші оператор арқылы каналдың қалпына келген мезгіліне бұл канал бос деген сипаттама беріледі. Ал 14-ші оператор каналдың келесі істен шығатын мезгілін жобалау үшін дайындық жасай бастайды, және осы ішене алгоритмнің соңғы операторы болады. Енді кезек негізгі модельдеуші алгоритмнің (10.1 - сурет) 23-ші операторына беріледі.

10.3. Салыстырмалы приоритетті көпшілікке қызмет көрсету жүйелерін модельдеу

Кірісінде бұрынғыдай бір ғана емес, бірнеше талаптар ағыны бар көп каналды көпшілікке қызмет көрсету жүйелерін қарастырайық. Осы ағындардың саны Q (q=1,2,.....,Q) болсын және олардың әрқайсысы өзінің кездейсоқ заңдылығымен сипатталсын. Бұл ағындардың әрқайсының маңыздылығы да бір-бірінен өзгеше болсын. Дәлірек айтқанда, q – номерлі ағынның талабы $q+1$ – номерлі ағынның талабынан маңызы жоғары болсын. Сол сияқты, $q+1$ ағынның талабы $q+2$-ші ағынның талабынан жоғары болсын.

Ал бір ағынның ішіндегі талаптардың маңыздылығы біріне бірі парапар деп есептейік.

Осы жүйе келіп түскен талаптарды қызмет көрсетуге тек маңыздылығына сәйкес қабылдайды. Яғни кезекте тұрған талаптардың ішінен қызмет көрсетуге әрдайым ең маңызды ағынның талабы ғана алынады. Бірақ қызмет көрсетуге алынған талапқа, оның маңыздылығының мәніне қарамай – әне осы мезгілде одан маңыздырақ талаптардың келуіне қарамай, толық қызмет көрсетіледі. Бұл салыстырмалы приоритетке тән тәртіп екені мәлім.

Салыстырмалы приоритетті көпшілікке қызмет көрсету жүйелерінің модельдеуші алгоритмінің құрылымы жоғарыда қаралған – жүйелерден көп өзгеше болады. Оның үш себебі бар. Біріншіден, бұл құрылым бір емес, бірнеше кездейсоқ ағынды модельдеуге және соншама кезек ұйымдастыруға икемделген болуы қажет. Екіншіден, салыстырмалы приоритетке сәйкес қызмет көрсетуге алу ережесінің күрделігін ескеру керек. Ал үшіншіден, имитациялық модельдеудің нәтижесін шығарғанда маңыздылығы әртүрлі талап ағындарына сәйкес көрсеткіштерді жеке қарастыруды қамтамасыз етуі қажет.

Осы айтылған ерекшеліктерді дұрыс жүзеге асыру үшін мына әдістермен танысайық.

Ең бірінші, талаптар кезектерін модельдеу әдістерін қарастырайық. Модельдеуші алгоритмнің жұмысы тиімді болу үшін имитациялық модельдеудің бастапқы кезінде барлық Q кезектерде кем дегенде бір–бірден талап болуын қамтамасыз ету қажет. Ол үшін осы жүйенің модельдеуші алгоритмінің сұлбасын «әрбір кезекке бір талап қою» әдісін [30] іске асыратын операторлардан бастау керек. Ал осыдан кейін «кезектегі бос орынды толтыру» әдісіне көшкен жөн болады.

Осы екі әдістің керегін қолдану үшін L белгісін енгізейік:

$$L = \begin{cases} 1, & \text{егер талаптар кезегінің оқиғаларын модельдеуге «әрбір кезекке бір талап қою» әдісі қолданса;} \\ 0, & \text{егер талаптар кезегінің оқиғаларын модельдеуге «кезектегі бос орынды толтыру» әдісі қолданса.} \end{cases}$$

Бұл белгінің бастапқы мәні L=1 екені анық.

Енді қарастырылып отырған жүйе көп каналды болғандықтан осы каналдарды жұмысқа қосу тәртібіне көңіл аудару жөн. Бұл тәртіп имитациялық модельдеудің бас кезеңдерінде бір ережеге, ал басқа кезеңдерде екінші ережеге бағынышты болатыны анық. Себебі бастапқы кезде барлық каналдардың бірінен соң бірінің жұмысқа қатысуын қамтамасыз ету керек. Ал осыдан кейін бірінші босаған канал жаңа жұмысқа алғашқы болып кірісуі қажет. Осы екі ережені дұрыс қолдану үшін ϕ белгісін енгізейік:

$$\phi = \begin{cases} 1, & \text{егер жұмысқа кіріспеген каналдар әлі бар болса;} \\ 0, & \text{егер каналдардың әрқайсысы кем дегенде бір талапқа} \\ & \text{қызмет көрсеткен болса.} \end{cases}$$

Енді салыстырмалы приоритетті көпшілікке қызмет көрсету жүйесінің модельдеуші алгоритімін құрастыруға кірісейік.

Осы модельдеуші алгоритмнің сұлбасы керекті деректер мен бастапқы шарттарды программаға енгізетін 1-ші оператордан басталатыны анық. (10.4 - сурет).

Бұл деректер мен бастапқы шарттар мыналар:

- модельдеу интервалы$[0,\ T_м]$;
- осы жүйедегі каналдар саны k;
- ағындар саны Q;
- ағын талаптарының аралығын сипаттайтын кездейсоқ шамалардың заңдылықтарының параметрлері;
- қызмет көрсету уақытын белгілейтін үздіксіз кездейсоқ шамалардың үлестірім заңының параметрлері;
- барлық k каналдарының қызмет жасауға даярлық мерзімінің бастапқы мәні ($t_к^{бос}$=0);
- L және ϕ белгілерінің бастапқы мәндері (L = 1, ϕ = 1) және т.б.

Талаптар ағындары ең маңызды q=1 номерлі (2-оператор) ағынның бірінші талабын модельдеуден басталады (3, 4-ші операторлар).

Ал 5,6,7-ші операторлар осы жүйені имитциялық модельдеудің аяқталу шартын тексереді. Имитациялық модельдеудің аяқталуы үшін модельдеу барысында

$$t_{q1} \geq T_n$$

шарты барлық Q ағындарға орындалуы қажет (5-ші оператор). Яғни әр ағынның соңғы талабының келу мерзімі модельдеу интервалынан асып кетуі тиісті. Осы шарт орындалған ағындар саны 6-шы операторда есептеледі. Егер бұл оператордың мәні ағындар санына тең болса (7 - оператор) кезек имитациялық модельдеудің нәтижелерін есептеу үшін 40-шы операторға беріледі. Бұл шарт орындалмаса, кезек 13-ші операторға тиеді.

Енді 5-ші оператордың шарты орындалмаған жағдайға оралайық.. Әрине, имитациалық модельдеудің бас кезінде бұл шарт орындалмауы тиісті. Сондықтан 8-ші оператор имитациялық модельдеудің мына көрсеткіштерін тіркейді:

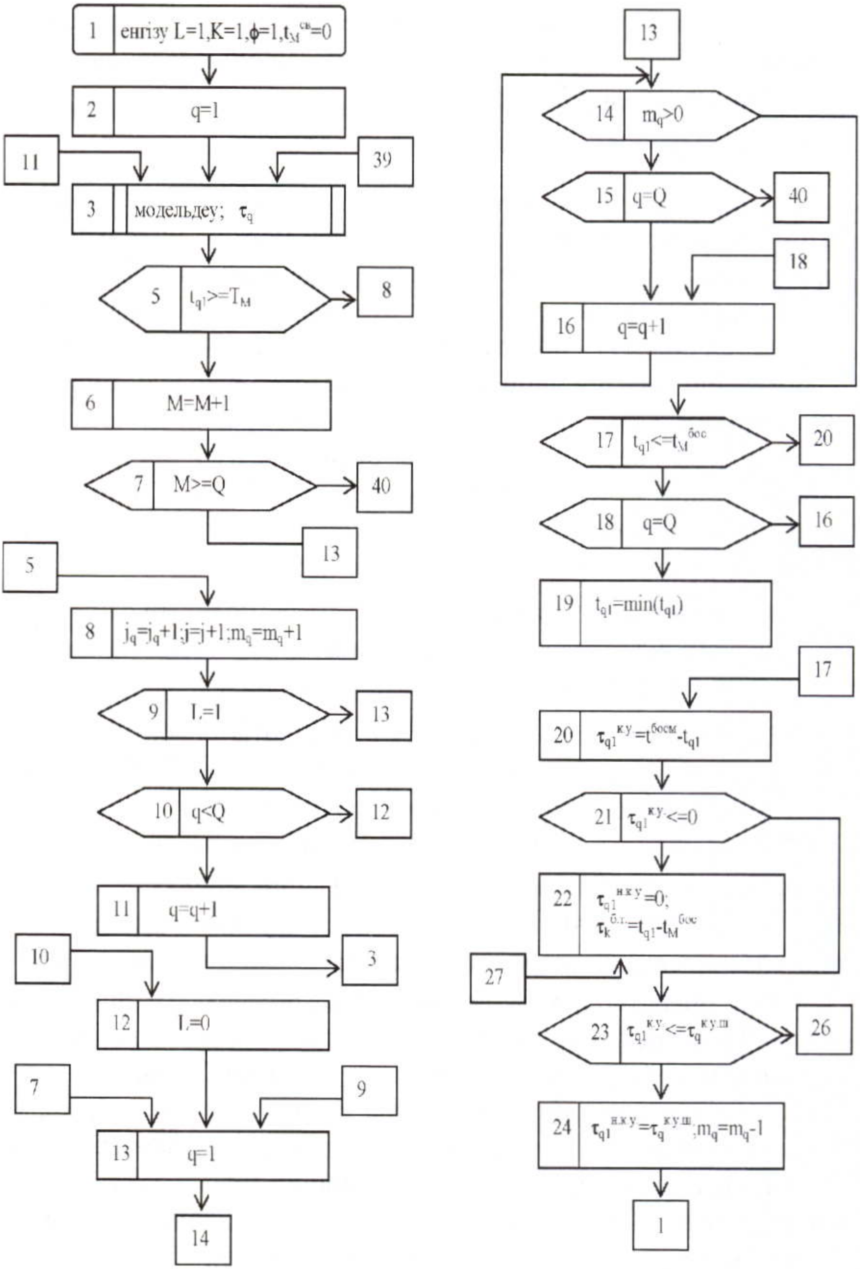
- q ағынының жүйеге келіп түскен талаптарының саны (i_q);
- жүйеге келіп түскен барлық талаптар саны (j);
- әр кезекте тұрған талаптардың саны (m_q).

Келесі үш оператор (9, 10, 11) L=1 шарты орындалған жағдайда «әр кезекке бір тадап қою» әдісіне сәйкес, барлық Q кезекте бір-бір талап тұруын қамтамасыз етеді.

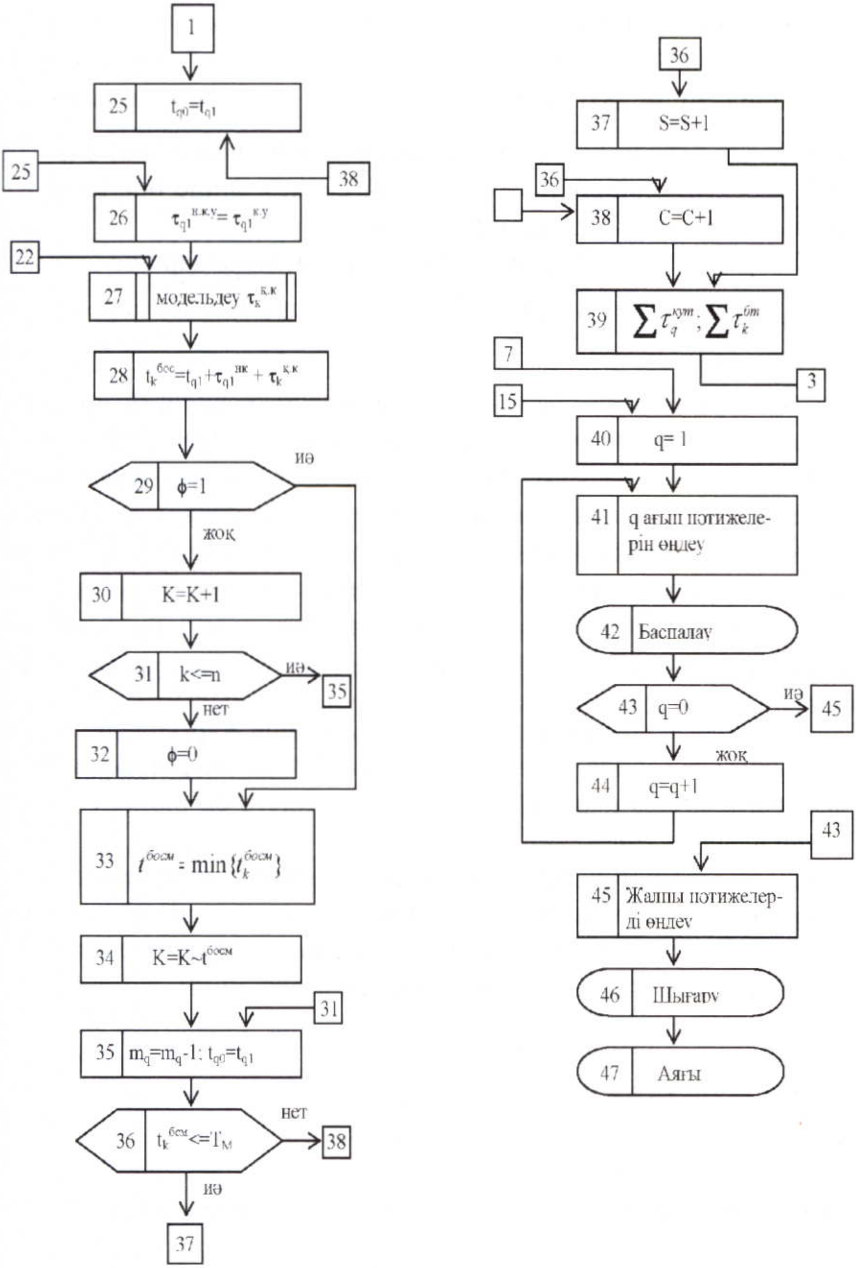
Ал L=1 және $q<Q$ шарттары орындалмаған жағдайда кезек 13-ші операторға беріледі және L белгісінің мәні (12-ші оператор) өзгертіледі (L=0). Сондықтан алдағы уақытта талап кезектері «бос орынды толтыру» әдісімен модельденуі тиіс.

13-ші оператордан бастап модельдеуші алгоритмнің екінші кезеңі басталады. Бұл кезекте тұрған талаптарды, олардың маңыздығына сәйкес, қызмет көрсетуге алу тәртібі модельденеді. Салыстырмалы приоритет бойынша қызмет көрсетілуге, қарастырылып отырған кезеңге дейін жүйеге келіп түскен талаптардың ішінен ең приоритетті кезекте бірінші болып тұрған талап алынуы тиіс. Сондықтан қызмет көрсетуге лайықты талапты 1-ші кезектен бастап іздеу жөн (13-ші оператор).

Келесі, 14-ші оператор осы кезекте тұрған талаптардың бар–жоқтығын тексеріп, $m_q > 0$ шарты орындалмаған, яғни бұл ке-


1 енгізу L=1,K=1,ϕ=1,tм св=0
2 q=1
11
39
3 модельдеу; τq
5 tq1>=Tм
8
6 M=M+1
7 M>=Q
40
13
5
8 jq=jq+1;j=j+1;mq=mq+1
9 L=1
13
10 q<Q
12
11 q=q+1
10
3
12 L=0
7
9
13 q=1
14
13
14 mq>0
15 q=Q
40
18
16 q=q+1
17 tq1<=tм бос
20
18 q=Q
16
19 tq1=min(tq1)
17
20 τq1 к.у=tбосм-tq1
21 τq1 к.у<=0
22 τq1 н.к.у=0; τk б.т=tq1-tм бос
27
23 τq1 к.у<=τq к.у.ш
26
24 τq1 н.к.у=τq к.у.ш;mq=mq-1
1

10.4-*сурет*



10.4б-*сурет жалғасы*

зектің талаптары әлі келмеген жағдайда, 15 және 16 операторлар арқылы маңызы бір саты төмен келесі кезекті тексереді. Осы операциялар $m_q > 0$ шарты әйтеуір бір кезекте орындалғанша қайталана береді. Бұл шарт орындалған жағдайда 17-ші опратор осы кезектің бірінші талабының келген мезгілінде бос каналдарының бар-жоқтығын анықтауға кіріседі.

Егер осы талап келген мезгілде барлық каналдар бос болмаса $(t_{q1} \leq t^{бос})$ бұл талап бірінші босаған каналға қызмет көрсетілуге алынуы тиіс.

Ал қарама–қарсы жағдайда, яғни каналдардың босаған мезгілінде q кезегінде бірде талап бомаса, каналды бос ұстамас үшін келесі маңыздығы төменірек кезектерде талаптар бар-жоқтығы тексеріледі. Ол үшін кезек 18-ші операторға беріліп, $q=Q$ орындалмаған жағдайда 16-ші оператор арқылы маңыздылығы төмен басқа кезектерде талаптар бар-жоқтығы анықталады.

Бұл тексеріс 14, 15, 16, 17, 18-ші операторлар тізбегі арқылы әйтеуір бір кезекте $(t_{q1} \leq t^{бос})$ шарты орындалғанша, немесе барлық Q кезекте мұндай шарт орындалмағанша жүргізіледі.

Соңғы жағдайда 18-ші оператордан 19-шы операторға көшіп, маңыздылығына қарамай, қызмет көрсетілуге ең бірінші келген талап алынуы тиіс.

20-шы оператор талаптың кезекте күткен уақытың, ал 21-ші оператор әр нақтылы жағдайда талап пен каналдың қайсысының күткенін анықтайды. Канал күткен жағдайда 22-ші оператор каналдың бос тұрған уақытын есептейді:

$$\tau_к^{б.т.} = t_{q1} - t_m^{бос} .$$

Ал талап күтсе 23-ші оператор

$$\tau_{q1}^{кут} \leq \tau_q^{к.у.ш.} . \tag{10.2}$$

шартын тексереді. $\tau_q^{к.у.ш.}$ - q приоритетті талаптардың қызмет көрсетуді күте алатын уақытының шекті мөлшері. (10.2)-ші шарт орындалмаса бұл талапқа қызмет көрсетілмейді, сондықтан 24-ші оператор тиісті параметрлерге осы жағдайға сәйкес түзетулер еңгізеді. Содан кейін кезек 25-ші оператор арқылы, қызмет көрсетілмеген талаптардың санын есептейтін 38-ші операторға беріледі.

(10.2) шарты орындалған жағдайда 26-шы оператор осы талаптың іс жүзінде кезекте күткен уақытын есептейді. 27-ші оператор кезекті талапқа қызмет көрсету уақытының мөлшерін модельдейді, ал 28–ші оператор осы қызмет көрсетіліп болған, яғни каналдың қайтадан босаған, мезгілін анықтайды:

$$t_j^{бос} = t_{q1} + \tau_{q1}^{к.у.} + \tau_к^{к.к.}.$$

Модельдеуші алгоритмнің тағы бір кезеңі 29–32-ші операторларды қамтып, талаптарға қызмет көрсетуге бастапқы кезде барлық k каналдарды бірінен соң бірін қатыстырады. Бұл операторлар тобының жұмысы $\varphi = 1$ шарты орындалғанда ғана басталып, барлық канал жұмысқа тартылып болғаннан кейін φ белгісіне ноль мәнін тағайындаумен аяқталады. (32-ші оператор) .

Ал 29-шы оператордың шарты орындалмаса, келесі талапқа қызмет көрсетуге ең бірінші босаған канал (33, 34-ші операторлар) қатыстырылады. Дегенмен, қызмет көрсетуге алынған келесі талапқа толық қызмет көрсетіледі деп есептеу үшін (37 - оператор)

$$t_к^{бос} \le T_M$$

шарты орындалуы керек (36-шы оператор). Бұл шарт орындалмаған жағдайда ол талапқа қызмет көрсетілмейді. (38-ші оператор).

37 және 38-ші операторлардан кейін кезек 39-шы оператор арқылы қайтадан 3-ші операторға келесі талаптарды модельдеуге беріледі.

Ең соңғы операторлар тобы (40–47-ші операторлар) имитациялық модельдеудің нәтижелерін өңдеуге бейімделген. Осы топтың ішіндегі бастапқы 5 оператор әр приоритеттің көрсеткіштерін бөлек өңдеуге мүмкіншілік береді. Ал 45-ші оператор жалпы көрсеткіштерді анықтайды.

11. АГРЕГАТТЫҚ ЖҮЙЕЛЕРДІ МОДЕЛЬДЕУ

11.1. Агрегаттар

Өткен тараудан, көптеген іс жүзінде кездесетін күрделі объекттілерді көпшілікке қызмет көрсету жүйелер сұлбасымен сипаттауға болатынын көрдік. Алайда бұл сұлба қазіргі заманда кездесетін күрделі объекттілердің қай элементін болса да қамти алады деп айтуға болмайды. Сондықтан өте күрделі жүйелердің барлық элементтерінің математикалық бейнесі бір сипатты болу үшін бұдан да универсальді сұлба керек. Қазіргі кезде осындай универсальді сұлба ретінде агрегат сұлбасы пайдаланылады [21, 31].

Агрегаттың мынадай анықтамасын келтірейік [31]. *Агрегат деп* T, X, Γ, Y, Z *жиындарымен және* H, G *операторларымен бейнеленетін объект аталады.*

Осы жиындардың элементтері ретінде мына параметрлер мен айнымалылар қолданылады: t - уақыт моменті $(t \in T)$; x - кірістегі хабар $(x \in X)$; g- басқарушы хабар $(g \in \Gamma)$; y - шығыстағы хабар $(y \in Y)$; z - хал-күй сипаттамасы $(z \in Z)$ Хал-күй сипаттамасы, кіріс, шығыс және басқарушы сигналдары уақыт функциялары ретінде қаралады:

$$z(t),\ \ x(t),\ \ y(t),\ \ g(t).$$

H және G операторлары көшу және шығу операторлары деп аталады және жалпы жағдайда кездейсоқ оператор болуы мүмкін.

Осы операторлардың көмегімен $z(t)$ және $y(t)$ функциялары анықталады:

$$z(t) = H\{z(t_0),\ t\};$$

$$y(t) = G\{z(t),\ t\}.$$

11.2. Көшу және шығу операторларының түрлері

Ең бірінші көшу (H) операторларының түрлерімен танысайық. Бұл оператордың түр-түрге бөлінуінің себебі мынада. Жалпы жағдайда агрегат екі күймен сипатталады: біріншісі ерекше күй деп аталса, екіншісі қарапайым күйі делінеді. Агрегат ерекше күйге тек кейбір уақыт моменттерінде ғана келеді. Ондай моменттер ретінде кіріс әлде басқару хабарлары түскен, немесе шығу хабары берілген моменттер қаралады. Осы моменттерде агрегаттың күй-жәйі кілт өзгереді. Ал бұл моменттердің арасында агрегат қарапайым қалыпта болады деп есептейміз. Осы ерекше күйлерді бейнелеу үшін $z(t)$ - хал-күйі сипаттамасымен бірге $z(t+0)$ - функциясын кіргізейік.

Сонда $z(t+0)$ - агрегаттың өз хал-күйін кілт өзгерткеннен кейінгі қалпын бейнелейді.

Енді $z(t^*)$ - ерекше күйлердің бірі, ал g_i- соңғы басқарушы хабар болсын. H көшу операторының әртүрлі жағдайда агрегаттың $z(t^*+0)$ сипаттамасын анықтайтын жеке түрлеріне мынадай шартты белгілер тағайындайық.

Егер t_j^*- агрегатқа кіріс хабарының келіп түскен уақыты болса, онда $z(t_j^*+0)$ сипаттамасы V_1 операторының көмегімен табылады:

$$z\left(t_j^*+0\right)=V_1\left\{z\left(t_j^*\right),\ g_i,\ x_j\right\}.$$

Ал t_j^* - агрегатқа басқару хабары келген уақыт мезгілі болса V_2 операторы қолданылады

$$z\left(t_j^*+0\right)=V_2\left\{z\left(t_j^*\right),\ g_i\right\}.$$

Осы екі хабар бір мезгілде келіп қалса $z(t_j^*+0)$ сипаттамасын V операторымен анықтаймыз

$$z\left(t_j^*+0\right)=V\left\{z\left(t_j^*\right),\ g_i,\ x_j\right\}.$$

Егер t_k^* - шығу хабары берілетін мезгіл болса W операторы пайдаланылады

$$z\left(t_k^*+0\right)=W\left\{z\left(t_k^*\right),\ \ g_i\right\}.$$

Көшу операторы H кездейсоқ болса, оның түр-түрлері де кездейсоқ болатынын есте ұстау керек.

Енді шығу (G) операторының түр-түрімен танысайық. Бұл оператор екі G_1 және G_2 ішене операторлардан тұрады. G_1 операторының көмегімен агрегаттың ерекше жағдайда болатын уақыт мезгілдері, ал G_2 операторымен шығу хабарларының мәндері анықталады.

Бұл операторлардың жұмысының негізі мынада. Агрегаттың күйін сипаттайтын $z(t)$ функцияларының Z жиынының ішінен бірнеше $\{Z^y\}$ ішене жиындарын таңдап алайық. Олар агрегаттың шығу хабарын беруге тиісті мезгілдегі Z (t) күйлерінің жиыны болуы керек. Сондықтан осы жиындарының көмегімен шығу хабарлары берілетін моменттерді табуға болады. Ол үшін мына ереже пайдаланылады.

Егер $t-\varepsilon<\theta<t$ шартымен бейнеленетін (ε - өте кіші, оң сан) θ моментінде $z(\theta)$ күй сипаттамасы $\{Z^y\}$ жиынына жатпаса $\left(z(\theta)\ \bar{\in}\ Z^y\right)$, ал t моментінде $z(t)$ күй сипаттамасы осы жиынға жатса $\left(z(t)\in\ Z^y\right)$, онда t моменті шығу хабары берілетін уақыт мезгілі деп есептеледі.

Ал шығу хабарының нақтылы мәні G_2 операторымен анықталады:

$$y=G_2\{z(t),\ \ g_i\}.$$

Сонымен G_1 операторының жұмысы, $z(t)$ функция траекториясының $\{Z^y\}$ жиындарының біріне жеткен мезгілін қадағалау екендігі көрініп тұр.

11.3. Агрегаттың жұмыс процесі

Енді агрегаттың жұмыс процесімен танысайық.

Бастапқы t_0 моментінде агрегаттың күйі z_0 болсын. t_1^x және t_2^x моменттерінде кіріске x_1 және x_2 хабарлары, ал t_1^g моментінде басқарушы g_1 хабары келіп түссін.

Анықтық үшін $t_1^x < t_1^g < t_2^x$ деп алайық. Ең бірінші $\left[t_0,\ t_1^x\right]$ интервалын қарастырайық. Агрегаттың күйі осы интервалдың бастапқы мезгілдерінде

$$z(t) = U_t\left\{z(t_0),\ g_0\right\} \tag{11.1}$$

тәуелділігімен сипатталады.

Енді $t_0 < t_1^y < t_1^x$ шарты орындалатын t_1^y мезгілінде агрегаттың $z\left(t_1^y\right)$ күйі Z^y жиынына жетсін, яғни $z\left(t_1^y\right) \in Z^y$. Сонда t_1^y моментінде агрегат

$$y_1 = G_2\left\{z\left(t_1^y\right),\ g_0\right\}$$

шығу хабарын беруі тиісті.

Агрегатқа берілген анықтама бойынша t_1^y моменті ерекшелік күйге тән момент. Сондықтан агрегаттың $t_1^y + 0$ мезгілінде шығу хабары берілгенмен кейінгі жаңа күйін

$$z\left(t_1^y + 0\right) = W\left\{z\left(t_1^y\right),\ g_0\right\}$$

өрнегімен анықтаймыз.

Ал $t_1 > t_1^y$ мезгілдері үшін тағыда (11.1) формуласы қолданылады.

Егер $z(t)$ функциясына да келесі t_2^y мезгілінде $\left(t_2^y \in \left[t_0,\ t_1^x\right]\right)$ мына $z\left(t_2^y\right) \in Z^y$ шарты орындалса, онда осы t_2^y мезгілінде екінші шығу хабары берілуі тиіс:

$$y_2 = G_2\left\{z\left(t_2^y\right),\ g_0\right\}.$$

Осы процесс бірнеше рет қайталануы мүмкін.

Енді t_1^x мезгілінде агрегатқа бірінші x_1 кіріс хабары келіп түссін. Сонда агрегаттың жаңа күйі:

$$z\left(t_1^x+0\right)=V\left\{z\left(t_1^x\right),\ g_0,\ x_1\right\}$$

болады. Осы өрнекке кіретін $z\left(t_1^x\right)$ функциясын әдетше (11.1) формуласымен табамыз.

Келесі $\left[t_1^x,\ t_1^g\right]$ аралығының жұмысына тоқталайық. Осы екі ерекшелік мезгілдерінің аралығындағы агрегаттың күйі U_t операторымен сипатталады

$$z(t)=U_{t_1}\left\{z\left(t_1^x+0\right),\ g_0,t\right\}. \tag{11.2}$$

Егер $t_1^x<t_k^y<t_1^g$ аралығында жатқан кейбір t_k^y уақыт мезгілдерінде агрегаттың $z\left(t_k^y\right)$ күйі Z^y жиынының құрамына кірсе, осы мезгілдердің әрқайсысында әдеттегідей жаңа шығу хабарлары анықталады:

$$y_k=G_2\left\{z\left(t_k^y\right),\ g_0\right\},\quad k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ ,n.$$

Бұл өрнектегі $z\left(t_k^y\right)$ функциясының мәні (11.2) формуласынан алынатыны анық.

Енді t_1^g мезгілінде агрегатқа басқарушы g_1 хабары келіп түссін. Онда агрегаттың жаңа күйі V_2 операторымен табылады

$$z\left(t_1^g+0\right)=V_2\left\{z\left(t_1^g\right),\ \ g_1\right\}.$$

Бұл жерде де $z\left(t_1^g\right)$ күй сипаттамасы (11.2) формуламен анықталатыны мәлім.

Келесі $\left[t_1^g,\ t_2^x\right]$ аралығында агрегаттың күйі

$$z(t)=U_{g_{t_1}}\left\{z\left(t_1^g+0\right),\ g_1,\ \ t\right\} \tag{11.3}$$

формуласымен табылады. Бұл аралықта да кейбір t_{k+1}^y мезгілдерінде $z(t_{k+1}^{y}) \in Z^{y}$ шарты орындалса $\{y_{k+1}\}$ шығу хабарларын байырғы G_2 операторымен табуға болады:

$$y_{k+1} = G_2\ \left\{z\left(t_{k+1}^{y}\right),\ \ g_1\right\}$$

Агрегатқа x_2 кіріс хабары келген кезде, оның жаңа күйін V_1 операторымен анықтаймыз

$$z(t_2^{x} + 0) = V_1\{z(t_2^{y}),\ g_1,\ x_2\}$$

Әдеттегіше $z(t_2^{y})$ күйі (11.3) формуладан алынуы тиіс.

Осы процессті әрі қарай басқа $\left[t_2^{x},\ \bar{t}\right]$ уақыт аралықтарына да тарату қиын емес екені анық болған сияқты.

11.4. Көпшілікке қызмет көрсету жүйесін агрегат ретінде қарастыру

Әртүрлі, соның ішінде көпшілікке қызмет көрсету жүйелерін, агрегат сұлбасымен бейнелеудің мысалдарымен танысайық [31]. Мына нақтылы қасиеттермен сипатталатын бірканалды көпшілікке қызмет көрсету жүйесі берілген дейік.

Кездейсоқ ағын құратын $t_j,\quad j = 1,\ 2,\ 3,\ \dots\ ,n$ мезгілдерінде кіріске $x_j,\quad j = 1,\ 2,\ 3,\ \dots\ ,n$ талаптары келіп түссін. Егер кезекті талап келіп түскен мезгілде канал бос болса, ол дереу қызмет көрсетілуге алынатын болсын. Керісінше жағдайда, талап кезекке тұруы тиіс. Кезекте күту уақытының мәні

$$\tau_j^{кут} = f(x_j,\ \beta)$$

өрнегімен анықталсын. β - осы жүйеге тән параметр.

Егер $t = t_j + \tau_j^{кут}$ мезгіліне дейін j - талабы қызмет көрсетілуге алынбаса, оның кезектен шығуына тура келеді. Қызмет көрсету уақыты

$$\tau_j^{к.к.} = \varphi(x_j,\ \beta)$$

өрнегімен сипатталсын.

Осы жүйені агрегат деп санап, оның $z(t)$ күйлерінің координаттарын белгілейік:

- $z_1(t)$ - қызмет көрсетіле бастаған талапқа қызмет көрсетілу аяқталғанша қалған уақыт;

- $z_2(t)$ - жүйедегі талаптар саны (кезекте тұрған және қызмет көрсетіліп жатқан талаптарды бірге санағанда).

Егер $z_2(t) \geq 1$, яғни кезекте де, каналда да талаптар болған жағдайда, агрегатты бейнелейтін тағы бірнеше күй сипаттамаларын енгізуіміз керек:

$$z_{1+2k}(t) = x_k, \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ ,\ z_2 - 1;$$

$z_{2+2k}(t)$ - k талабының кезекте тұру мерзімінің аяғына дейін қалған мерзімі.

Енді бірканалды көпшілікке қызмет көрсету жүйесін бейнелейтін агрегаттың көшу және шығу операторларымен танысайық.

t_j - моментінде кезекті j талабы келіп түссін. Осы кезде канал бос болмаса, яғни $z_1(t_j) > 0$ шарты орындалса, талап кезекке тұрады. Бұл жағдайда $z_1(t)$ сипаттамасы өзгермейді, $z_2(t)$ сипаттамасының мөлшері бір санға өседі, ал $z_{1+2k}(t)$ және $z_{2+2k}(t)$ күй сипаттамалары өз қалыптарын сақтап қалады. Сонымен қатар осы талапқа тән екі жаңа сипаттамалар пайда болады:

$$z_{1+2z_2}(t_j) = x_j \text{ және } z_{2+2z_2}(t_j) = f(x_j,\ \beta).$$

Ал егер t_j моментінде кезек те, канал да бос болса, келген талап бірден қызмет көрсетілінуге алынады. Бұл жағдайда

$$z_1(t_j) = \varphi(x_j, \beta); \quad z_2(t_j) = 1$$

тең болып, басқа координаттар анықталмайды.

Осы айтылғандарға сәйкес V_1 операторының іс жүзіндегі түрін мына өрнектермен бейнелеуге болады [31]:

$$z_1\left(t_j+0\right)=z_1\left(t_j\right);$$

$$z_2\left(t_j+0\right)=z_2\left(t_j\right)+1;$$

$$\left.\begin{array}{ll} z_{1+2k}\left(t_j+0\right)=z_{1+2k}\left(t_j\right), & k<z_2\left(t_j\right) \\ z_{2+2k}\left(t_j+0\right)=z_{2+2k}\left(t_j\right), & k<z_2\left(t_j\right) \end{array}\right\} \quad z_2\left(t_j\right)>0$$

$$z_{1+2z_2}\left(t_j+0\right)=x_j;$$

$$z_{2+2z_2}\left(t_j+0\right)=f\left(x_j,\ \beta\right);$$

$$\left.\begin{array}{l} z_1\left(t_j+0\right)=\varphi\left(x_j,\ \beta\right); \\ z_2\left(t_j+0\right)=1. \end{array}\right\} \quad z_2\left(t_j\right)=0$$

Басқарушы хабар (β) өзгермейтін болғандықтан V_2 операторын табу керек жоқ.

Басқа операторлардың жұмысын қарардың алдында $\{Z^y\}$ жиындарымен танысайық. Бұл жиындар жүйесі екі Z_1^y, Z_2^y жиыннан тұрады. Бірінші жиын $z_1(t)=0$, ал екінші жиын $z_{2+2k}(t)=0$ шарттарымен сипатталады.

Енді агрегаттың шығу хабарын қарастырайық. Бұл хабар екі белгімен бейнеленсін:

$$y=\left(y^1,\ y^2\right).$$

Бірінші белгі екі ғана мөлшерде бола алсын:

$$y^1=\begin{cases} 1, & \text{егер жүйеге келіп түскен талапқа қызмет көрсетілсе;} \\ 0, & \text{егер келген талап қызмет көрсетілмеген күйінде кетуге мәжбүр болса;} \end{cases}$$

Екінші белгі агрегаттың шығу хабарының нақтылы мәні болсын.

Сонымен G_2 операторының жұмысы y^1 белгісін анықтау және шығу хабарының жаңа мәнін қалыптастыру болады.

Енді t_1^y моментінде агрегаттың күйі Z_1^y жиынына сәйкес келсін дейік. Онда шығу хабары берілетін t_1^y уақыт мезгілін $z_1(t_1^y)=0$ теңдігінен анықтауға болады. Бұл теңдік кезекті талапқа қызмет көрсетіліп болуын бейнелейтіні анық. Сондықтан t_1^y моментінде агрегат

$$y^2 = G\{z(t_1^y), \ g_i, \ x_j\} \text{ және } y^1 = 1$$

хабарын беруі тиіс.

Енді t_2^y моментінде агрегаттың күйі Z_2^y жиынына сәйкес келсін. Бұл, кезекте тұрған талаптардың бірінің күту мерзімі бітіп, ол кезектен кетеді деген сөз. Бұл жағдайда

$$y^2 = G\{z(t_2^y), \ x_j\} \text{ және } y^1 = 0 \text{ болады.}$$

Шығу хабары берілгеннен кейінгі агрегаттың жаңа күйі W операторымен анықталады.

Осы жағдайды қарастырайық. $t = t_1^y$ болсын, яғни кезекті талапқа қызмет көрсетіліп бітсін. Бұл жерде екі жол бар. Біріншіден, егер жүйеде бұдан басқа да талаптар болса, яғни $z_2(t_1^y) > 0$ шарты орындалса, қызмет көрсетілуге кезектегі келесі талап алынып, оған алдағы $\tau^{к.к.} = \varphi(x_j, \ \beta)$ уақыт аралығында қызмет көрсетіле басталады. Екіншіден, егер жүйеде басқа талаптар болмаса, яғни $z_2(t_1^y) = 0$ жағдайында, канал жаңа талаптың келуін күтеді. Осы айтылғанға сәйкес операторының мына нақтылы түрін көруге болады:

$$z_1(t_1^y + 0) = \varphi(x_j, \ \beta);$$

$$z_2(t_1^y + 0) = z_2(t_1^y) - 1;$$

$$\left.\begin{aligned} z_{1+2k}\left(t_1^y+0\right)&=z_{1+2(k+1)}\left(t_1^y\right);\\ z_{2+2k}\left(t_1^y+0\right)&=z_{2+2(k+1)}\left(t_1^y\right); \end{aligned}\right\} \quad z_2\left(t_1^y\right)>0$$

$$\left.\begin{aligned} z_1\left(t_1^y+0\right)&=z_1\left(t_1^y\right)=0;\\ z_2\left(t_1^y+0\right)&=0; \end{aligned}\right\} \quad z_2\left(t_1^y\right)=0$$

Енді W операторының t_2^y мезгілінде берілген шығу хабарынан кейінгі жұмысын сипаттайық:

$$\begin{aligned} z_1\left(t_2^y+0\right)&=z_1\left(t_2^y\right);\\ z_2\left(t_2^y+0\right)&=z_2\left(t_2^y\right)-1; \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} z_{1+2k}\left(t_2^y+0\right)&=z_{1+2k}\left(t_2^y\right);\\ z_{2+2k}\left(t_2^y+0\right)&=z_{2+2k}\left(t_2^y\right); \end{aligned}\right\} \quad k<1$$

$$\left.\begin{aligned} z_{2+2k}\left(t_2^y+0\right)&=z_{1+2(k+1)}\left(t_2^y\right);\\ z_{2+2k}\left(t_2^y+0\right)&=z_{2+2(k+1)}\left(t_2^y\right); \end{aligned}\right\} \quad 1\le k\le z_2\left(t_2^y\right)$$

Ал ерекшелік күйлерге сәйкес моменттердің $\left[t_n,\ t_{n+1}\right]$ аралығында агрегаттың күйі U_t операторымен анықталады:

$$\begin{aligned} z_1(t)&=z_1\left(t_n+0\right)-\left(t-t_n\right);\\ z_2(t)&=z_2\left(t_n+0\right);\\ z_{1+2k}(t)&=z_{1+2k}\left(t_n+0\right);\\ z_{2+2k}(t)&=z_{2+2k}\left(t_n+0\right)-\left(t-t_n\right). \end{aligned}$$

11.5. Агрегаттың жұмысын модельдеу

Модельдеудің мақсаты ретінде зерттелетін жүйелердің күй сипаттамаларын анықтау мәселесін қоялық. Сонда осы агрегатты модельдеу арқылы оның кейбір уақыт мезгілдеріндегі $z(t)$ функциясының мәнін табу керек.

Енді 11.3 параграфында қаралған агрегаттың жұмысын модельдеуші алгоритмді құрастырайық.

Бұл алгоритмнің сұлбасы бастапқы деректерді программаға кіргізетін 1-ші оператордан басталады (11.1 - сурет). 2, 3 және 7, 8-ші операторлардың көмегімен басқарушы және кіріс хабарларының агрегатқа келіп түскен моменттері анықталады. 4-ші және 9-шы операторлар осы мезгілдердің модельдеу аралығында жатқанын тексереді. 4-ші оператордың шарты орындалмаса 5-ші оператор соңғы басқарушы хабардың келген мезгілін модельдеу аралығының шегіне теңдеуі тиіс. Ал 9-шы оператордың шарты орындалмаса, агрегатты модельдеудің бір нақтыламасы аяқталады деген тұжырымға келіп, кезекті 29-шы операторға, яғни осы модельдеудің нәтижелерін өңдеуге, береміз.

10-шы оператор t_i және t_j моменттерін салыстырып, сырттан келетін екі хабардың қайсысы ертерек жеткенін анықтайды. Осы оператордың жұмысының нәтижелері 11 және 12-ші операторларда L белгісімен бекітіледі.

Сонымен, бастапқы 12 оператордың көмегімен кіру және басқару хабарларының келіп түскен мезгілдерін тауып, оларды салыстыру арқылы бірінші болып келген хабарды анықтаймыз.

Келесі операторлар тобы (14–20) агрегаттың ерекшелік жағдайлардың аралығындағы жұмысын модельдейді. Бұл аралықтарда агрегаттың күйін U_t операторының көмегімен сипаттауымыз керек (14-ші оператор).

Алайда осы аралықта да ерекшелік жағдайлар кездесуі мүмкін. Ол шығу хабарларын беру моменттері. Сондықтан U_t операторы $z(t)\in\{Z^y\}$ шарттарының орындалуын мұқият қадағалап отырып, әр мезгіл үшін шығу хабарын беретін ең бергі мезгілді анықтайды (15-ші оператор):

$$t_ш = \min\{t_k^y\}$$

Осы $t_ш$ мезгілі сырттан келген хабарлардың түсу моменттерінің аралығында жатқан болса (16-шы оператор), бұл шығу хабары іс жүзінде берілуі тиісті. Сондықтан $z(t_ш)$ сипаттамасын анықтап (17-ші оператор) шығу хабарының (y) нақтылы мәнін табу керек (18-ші оператор). Бұл, әрине, ерекшелік мезгілі, сондықтан $z(t_ш + 0)$ сипаттамасын (19-шы оператор) табу қажет. Ал келесі 20-шы оператор, осы сипаттаманың (Z^y) жиындарына қатысын анықтай отырып, сол мезгілде тағы бір шығу хабары беріле ме деген сұраққа жауап іздейді.

Егер 20-шы оператордың шарты орындалмаса кезек 13-ші оператор арқылы, 14, 15-ші операторларға, келесі сырт хабарларының келіп түсу мезгілдерін модельдеуге беріледі.

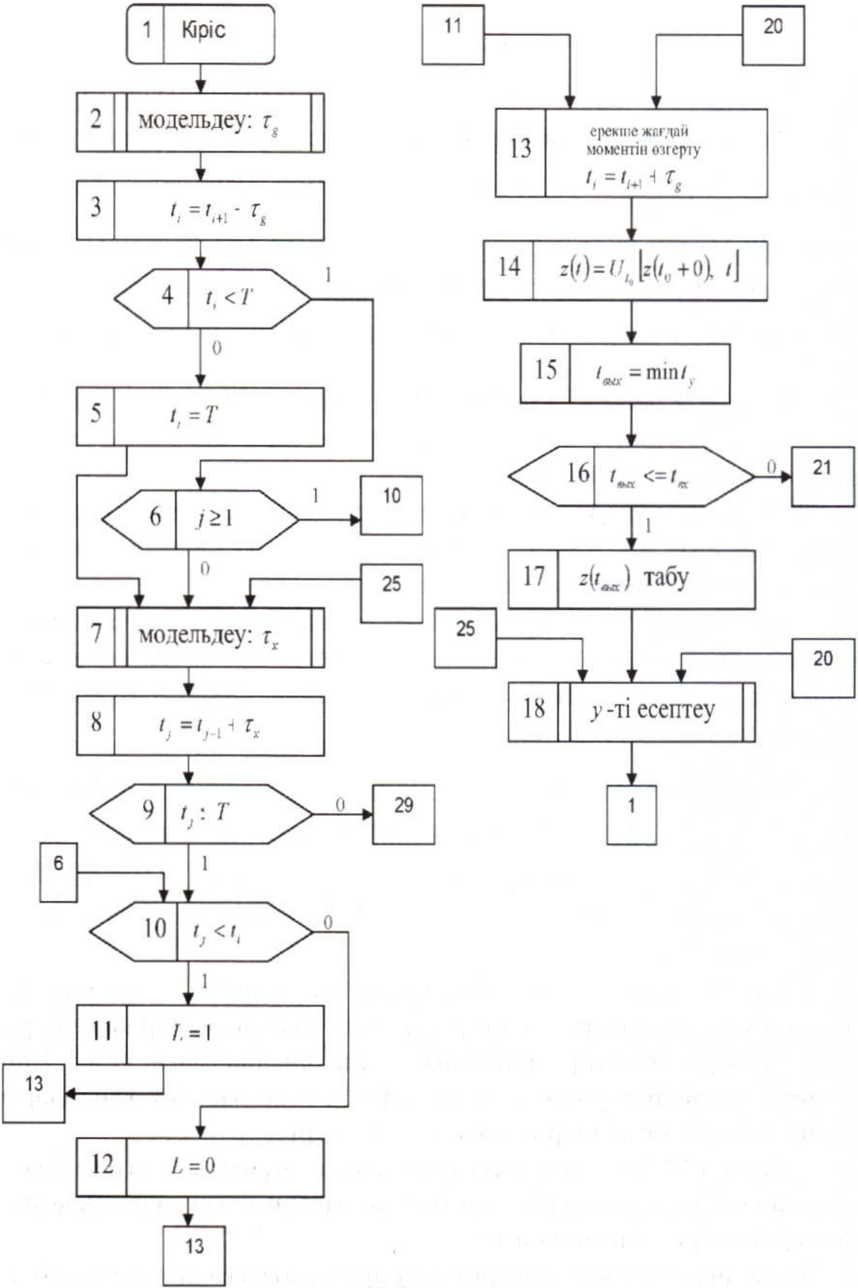
Енді 16-шы операторға қайтып оралайық. Бұл оператордың шарты орындалмаса 21-ші оператор сыртқы хабар келген мезгіліндегі агрегаттың күйін анықтайды, ал 22-ші оператор бұл хабардың түрін ажыратады.

Келесі (23-25) операторлар тобы t_j^x мезгілінде келетін кіру хабарын, ал (26-29) операторлар тобы t_i^g мезгілінде келетін басқару хабарын қабылдау процесстерін модельдейді. Осы топтардың жұмысы жоғарыда қаралған (18-20) операторлар жұмысымен сәйкес.

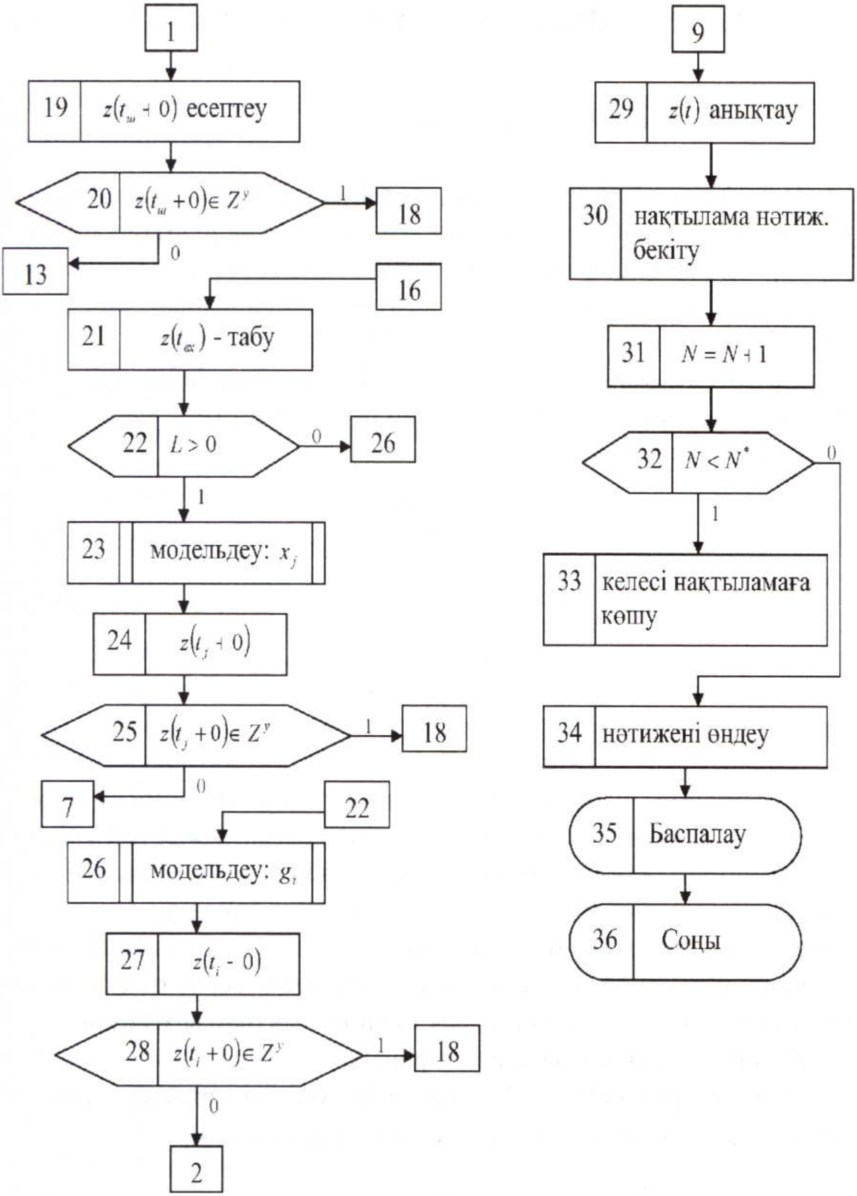
Егер 25 және 28-ші операторлардың шарттары орындалса, кезек 18-ші операторға, яғни жаңа шығу хабарын даярлауға беріледі. Ал бұл операторлардың шарттары орындалмаса, кезек 7-ші және 2-ші операторларға, келесі кіру немесе басқару хабарлары келіп түсетін мезгілдерді модельдеуге беріледі.

Соңғы (29-36) операторлар тобының жұмысы көптеген модельдеуші алгоритмдерге тән болғандықтан өткен параграфтарда бірнеше рет айқындалған.

Осы модельдеуші алгоритмдердің сұлбасымен таныса отырып, агрегаттарды модельдеу онша қиын емес деген тұжырымға келеміз.


1 Кіріс
2 модельдеу: τ_g
3 $t_i = t_{i+1} - \tau_g$
4 $t_i < T$
1
0
5 $t_i = T$
6 $j \geq 1$
1
10
0
25
7 модельдеу: τ_x
8 $t_j = t_{j-1} + \tau_x$
9 $t_j : T$
0
29
1
6
10 $t_j < t_i$
0
1
11 $L = 1$
13
12 $L = 0$
13
11
20
13 ерекше жағдай моментін өзгерту $t_i = t_{i+1} + \tau_g$
14 $z(t) = U_{t_0}\left[z(t_0+0),\ t\right]$
15 $t_{вых} = \min t_y$
16 $t_{вых} <= t_{вх}$
0
21
1
17 $z(t_{вых})$ табу
25
20
18 y-ті есептеу
1

11.1- *сурет*



11.1- *суреттің жалғасы*

12. РЕСУРСТАРДЫ ҮЛЕСТІРУ ЖҮЙЕСІН МОДЕЛЬДЕУ

12.1. Мәселенің қойылымы

Түрлі процестерді тиімділеу кезінде, параметрлер мен шарттарды анықтау мәселесі өте жиі кездеседі. Осы шарттар мен параметрлер жүйенің қалыпты жұмысын ұйымдастырады және процесстің болашақта жақсаруын қамтамасыздандырып, сол параметрлердің тиімді мәндерінің аумақтарын анықтайды.

Сызықтық қойылымда берілген параллельді объекттілердің арасындағы шектелген ресурстарды (S) үлестіру мәселесінің моделін қарастырайық [27]:

$$F = \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{12.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le \overline{S_i,\ \mathrm{i}=}1, m-1\,; \tag{12.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = S_m\,; \tag{12.3}$$

$$x_j \ge \overline{0,\ j}=1,\ n \tag{12.4}$$

Ресурстарды үлестіру мәселесіне қатысты шешіміміз тиімді болмастан бұрын c_j - дің қанша тұратындығын көрсететін коэффициенттерді қандай шектеулерде өзгертуге болады; немесе шешім мүмкін болмастан бұрын ресурстың шамасын сипаттайтын коэффициенттерді қаншалықты өзгертуге болады немесе, сонымен қатар шектеу коэффициенттерінің өзгеруі тиімді шешімге қалай әсер етеді деген сұрақ бізді қызықтыруы мүмкін.

Келесі екі жағдайды қарастырайық:

1) S_i ресурстарының (12.2) оң жақ бөлігінің шектеулеріндегі вектордың қайсыбір ΔS шамасына өзгеруі мүмкін:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le S_i + \Delta S_i\,, \quad i = 1,\ m-1; \tag{12.5}$$

2) Мақсатты функцияның параметрлері өзгеруі мүмкін:

$$F = max \sum_{j=1}^{n} (c_j + a_j)\, x_j\,. \tag{12.6}$$

Егер шектеулерге қатысты анықталмағандық болмаса, бірақ мақсатты функция күмән тудыратын болса, онда екілік симплекс кестелерін пайдаланатын екі жақтылық теориясына негізделген әдісті қолдануға болады.

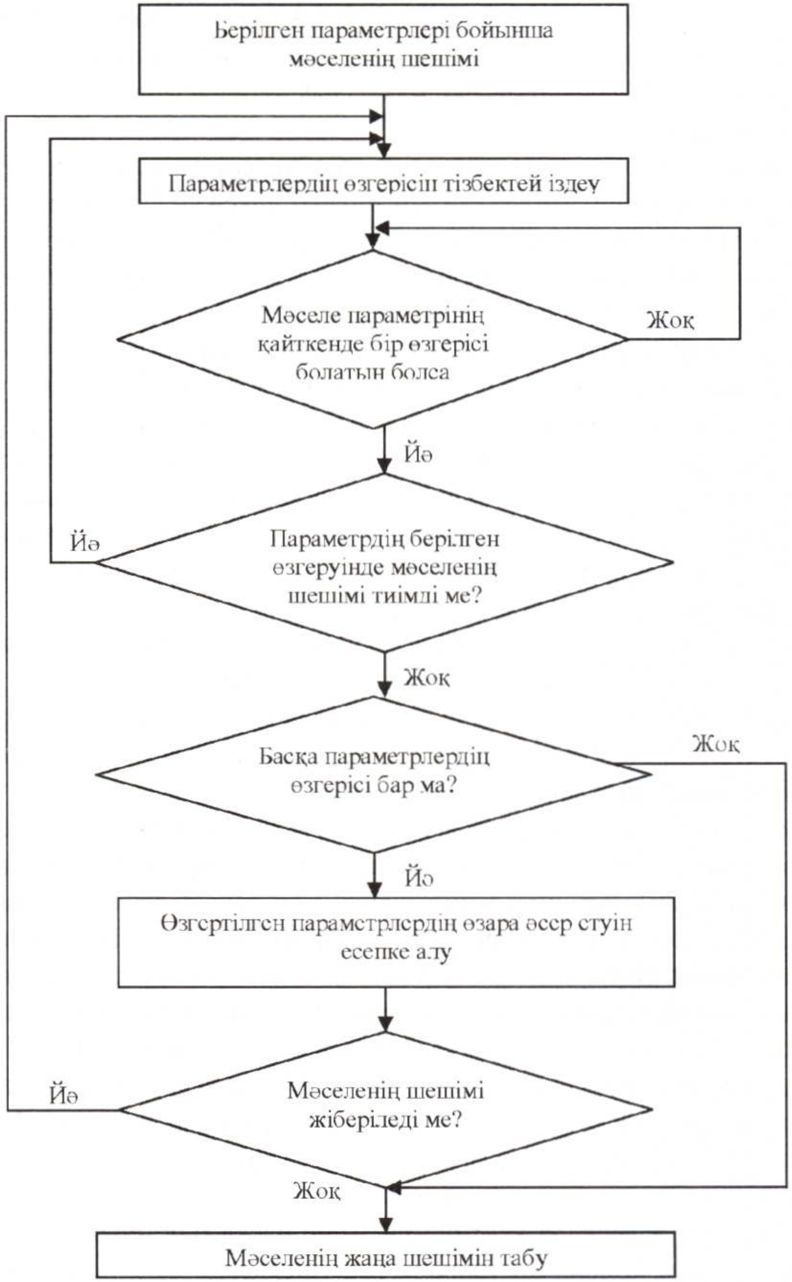
Оптимизациялық мәселелердің модельдерінің өздерінің параметрлеріне сезгіштігін талдайтын аппарат үлкен көлемділік қолайсыздығымен ерекшеленсе де, шын мәнінде қарапайым болады. Бірақ осы мәселелердің белгілі кең тобы бар. Оларды шығару үшін қойылған мәселенің өзіне тән өзгешеліктерін ескеретін басқа әдістер принципиалды түрде қолданылады. Солардың бірі деп параллельді жүйелерде кейде кездесетін, бірақ туындауы міндетті болмайтын шектеу матрицасының шектелген ресурстарын үлестіру мәселесін айтуға болады. Сондықтан осы жұмыста параметрлер тізбегінің стационарлы еместігімен сипатталатын бұрын табылған үлестіру процесстерінің тиімді режимдерін жақсарту және талдау үшін компьютерлік модельді қолдану мүмкіндігі айтылып, талданады [28].

Оптимизациялық мәселені сезгіштікке талдайтын жүйені модельдеу сұлбасы келесі түрде берілген.(12.3-сурет).

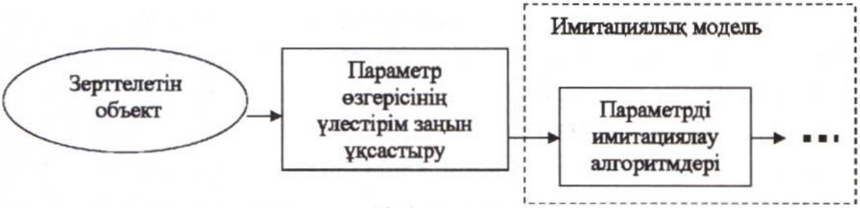
Компьютермен модельдеу аппараты жүйедегі көрсеткіштерді тізбектей диагностикалауды қолдана отырып, параметрлерді талдауға мүмкіндік береді.

Ресурстардың өзгеруінің стохастикалық моделін ұқсастыру осы имитациялық жүйенің маңызды мәселелерінің бірі болып саналады [29]. Кейбір параметрлердің кездейсоқ өзгеруі, мысалы, ресурс көлемі, осы ресурс көлемінің өзгеруін сипаттайтын кездейсоқ шамалардың үлестірім заңдылықтарын (ұқсастыруды) анықтау қажеттілігіне себеп болады. Осыған қатысты ұқсастырудың белгілі әдістері мен алгоритмдерін қолдану керек [8]. Содан кейін, кездейсоқ заңдылықтарды модельдеудің тиісті алгоритмдерінің көмегімен алынған үлестірім заңдылықтары бойынша параметрлердің шын мәнінде өзгеруі имитацияланады (12.4-сурет).

Осылай жоғарыда келтірілген және басқа әдістерді қолдана отырып, жиі кездесетін үздіксіз үлестірімдерді модельдеуге болады. Қалыпты немесе Гаусс үлестірімі – бұл үздіксіз үлестірімдердің ішіндегі жиі қолданылатын маңызды үлестірімдердің бірі.



12.3-*сурет*. Параметрлерді талдау жүйесін модельдеудің жалпы сұлбасы



12.4-*сурет*

Бірқалыпты үлестірімнің қолдану жиілігі тек қана қалыпты заңдылыққа ғана жол береді. Экспоненциалды үлестірім “пайда болу уақыты” қарастырылатын шын мәнінде болып жатқан біраз процесстерді бейнелеп көрсетеді. Қандай да бір кездейсоқ құбылыс-

Кесте 12.1

Үлестірулер	Тығыздық функциясы, формула	Модельдеу формуласы
Үздіксіз кездейсоқ шамалар: Қалыпты	$f(x)=\frac{1}{\delta_x\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{-(x-m_x)^2}{2\delta_x^2}}$, $-\infty < x < \infty$	$X=m_x+\delta_x\left(\sum_{i=1}^{12}Z_i-6\right)$
Бірқалыпты	$f(x)=\frac{1}{b-a}$, $x\in[a,b]$	$x=a+z(b-a)$
Экспоненциалды	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, $x\geq 0$	$x=-\frac{1}{\lambda}\ln Z$
Сызықтық	$f(x)=\lambda\left(1-\frac{\lambda}{2}x\right)$. $x\in\left(0,\frac{2}{\lambda}\right]$	$x=\frac{2}{\lambda}\left(1-\sqrt{z}\right)$
Гамма-	$f(x)=\alpha^k\left[(k-1)!\right]^{-1}x^{(r-1)}\cdot e^{-\alpha x}$, $\alpha>0,\ k>0,\ x\geq 0$	$x=-\frac{1}{\alpha}\ln\left(z_1,z_2,\ldots,z_k\right)$
Пуассонның дискреттік кездейсоқ сандары:	$P\left\{v=k\right\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	$x=k$, k – A оқиғасының басталу кездерінің саны
Геометриялық	$P\left\{v=k\right\}=p*(1-p)^{k-1}=p_k$	$x=Ц\left[\frac{\ln z}{\ln(1-p)}\right]+1$

ты сипаттайтын теріс емес шамаларды гамма-үлестірімі арқылы бейнелеуге болады. Гамма-үлестірімінің параметрлері үлестірім заңдылығының масштабын және пішінін анықтайтын болғандықтан, онда олардың мәндері өзгерген кезде гамма-үлестірімінің тығыздығы әртүрлі пішіндерді қабылдауы мүмкін, осыған байланысты қолданбалылық жағынан бұл заңдылық бағалы және әмбебап болып табылады [9]. Кездейсоқ шамаларды модельдеу формулалары 12.1 - кестеде келтірілген.

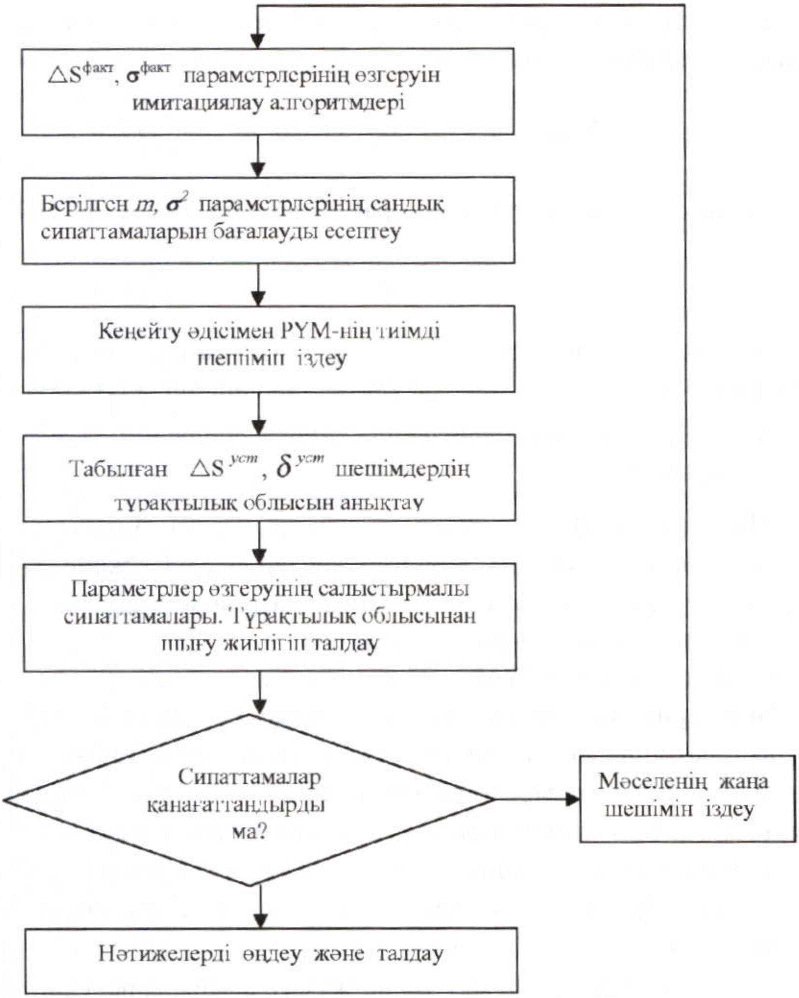
Сөйтіп, келтірілген әдістер мен формулаларды қолдана отырып, параметрлердің өзгеруін имитациялауға және олардың тұрақтылық облыстарынан шығу жиіліктеріне талдау жасауға болады.

12.2. Имитациялық жүйенің құрылымы

Жүйенің құрылымы қойылған мақсатқа жету үшін осы жүйе арқылы іске асырылатын мәселелердің өзара байланысымен және сипатымен анықталуы қажет. Имитациялық жүйені өңдеудің мақсаты деп әдетте кездесетін жағдайларға жақынырақ келетін, яғни шығарылатын мәселенің стационарлы емес параметрінің стохастикалық сипатын ескеретін жағдайларда параллель құрылымды жүйелердегі ресурстардың тиімді үлестірілуін айтуға болады. Параметрлерді талдаудың имитациялық моделі келесі өзара байланысқан мәселелердің жүзеге асырылуын қамтамасыз ету керек:

- стационарлы емес параметрлердің өзгеруі мүмкінкіншіліктерін имитациялау;
- берілген параметрлердің сандық сипаттамасының есептеу;
- жүйенің параллельді элементтерінің параметрлерінің әртүрлілігін ескере отырып шығарылатын ресурстарды үлестіру мәселелерінің шешімін табу;
- алынған шешімнің тұрақтылық аумағын анықтау;
- стационарлы емес параметрлердің тұрақтылық аумағынан шығу жиілігін талдау;
- нәтижелерді өңдеу және ресурстарды үлестірудің тиімділігін талдау.

Атап өткен мәселелердің өзара байланыстылығының сипатын талдау параметрлерді бағалаудың келесі алгоритмімен бей-



12.5-*сурет*. Ресурстарды үлестіру есептерінің параметрлерін талдаудың алгоритмінің блок-сұлбасы.

неленеді және оның жалпыланған блок-сұлбасы 12.5-суретте келтірілген.

Блоктардың әрқайсысына қысқаша тоқталайық.

$\Delta S^{факт}$, $\Delta\sigma^{факт}$ *параметрлерін өзгерту алгоритмі.*

Осы берілген жүйеде екі жағдайды қарастырамыз:

1) Шектеулердің оң жағын құратын S_i ресурс векторының қайсыбір ΔS шамасына өзгеруін:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq S_i + \Delta S_i, \qquad i=\overline{1, m-1};$$

2) мақсатты функцияның параметрлерінің өзгеруін:

$$F = \max \sum_{j=1}^{n} \left(c_i + \delta_j \right) x_j \ .$$

Олардың өзгерісін модельдеу үшін 4-ші тарауда келтірілген кездейсоқ шамаларды модельдеудің бір әдісін қолдануға болады.

Берілген m, σ^2 параметрлерінің сандық сипаттамаларын бағалау мәселесі.

Математикалық үміт және дисперсия негізгі сипаттамалардың бірі болып саналады. Берілген жағдайда $\Delta S^{\text{факт}}$ және $\Delta\sigma^{\text{факт}}$ параметрлерінің өзгеру шамаларының математикалық үміті мен дисперсиясының бағалары есептелінеді.

Кеңейту әдісімен РҮМ-нің тиімді шешімін іздеу.

Бұл жұмыста параллельді объектілердің арасында шектеу жүйесі матрицасының өзгешеленуі мүмкін, бірақ міндетті болмайтынын ескере отырып, ресурстарды үлестіру мәселесі қарастырылады. Бұл жерде матрицаның өзгешеленуі проблемасын шешу үшін мынадай принцип қолданылады: ресурстарды үлестіру есебін пайымдау үшін оның оптимальді шешімдер нүктесіне ресурстарды үлестірудің кеңейтілген есебінің шешім нүктесінен бағытталған қадамдап ауысу тәсілі жүзеге асырылады. Сонымен қатар осы тәсілмен есептеу процедурасы есептің шектеу матрицасының өзгешеленуі әсерінен айрылады және осындай есептерді шығаруға қолданылатын математикалық программалаудың стандартты аппаратына қарағанда тиімді болады. Берілген тәсіл кеңейту әдісінің көмегімен жүзеге асады [30-33].

Табылған $\Delta S^{\text{уст}}$, $\Delta\sigma^{\text{уст}}$ шешімдердің тұрақтылық облыстарын анықтау.

Ресурстарды үлестіру есебіне қатысты c_j коэффициентінің мәнін қаншаға дейін өзгертсе алынған шешіміміз тиімділігін сақтайды, немесе шешім өз күшін сақтап қалу үшін ресурстың шамасын сипаттайтын коэффициенттерді қаншалықты өзгертуге болады, немесе шектеу коэффициенттерінің өзгеруі тиімді шешімге қалай әсер етеді деген сұрақ бізді қызықтыруы мүмкін. Алынған шешімдердің тұрақтылық облысының шектерін анықтау алгоритмдері төменде қарастырылатын болады.

Параметрлердің өзгеруінің салыстырмалы сипаттамалары. Тұрақтылық облысынан шығу жиілігін талдау. Нәтижелерді өңдеу және талдау.

Берілген блок имитациялық модельдеу барысында интерпретациялау кезінде де, модельдеуден алынған нәтижелердің дұрыс, сенімді болуын талап етуді қамтамасыздандыру кезінде де маңызды роль атқарады. Байқағанымыздай, компьютермен модельдеудің нәтижелеріне ресурстарды үлестірудің шамалары жөніндегі накты сандық деректер ғана емес, сондай-ақ ресурстарды пайдаланудың тиімділігіне стационарлы емес параметрлердің әртүрлі өзгерістерінің әсер етуін талдау да кіреді.

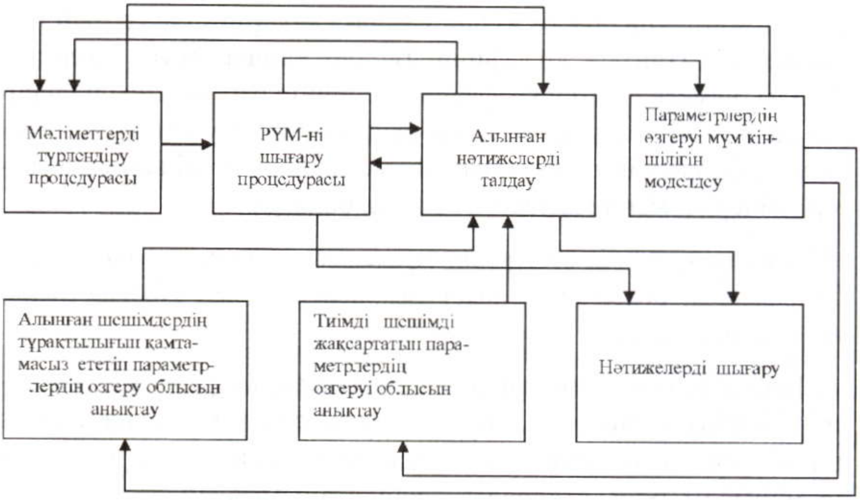
Параллельді жүйелердегі ресурстарды үлестірудің имитациялық жүйесі келесі ішкі жүйелерден тұруы керек:

- есептің кірістегі деректерін түрлендіру;
- ресурстарды үлестіру есептерін шешу;
- оптимизациялау есептері модельдерінің параметрлерінің өзгеруінің мүмкінкіншілігін имитациялау;
- есептің тиімді шешімін жақсарта түсуге әкелетін немесе бұрын алынған режимдердің тұрақтылығын қамтамасыздандыратын модельдердің стационарлы емес параметрлерінің өзгеру облысын анықтау;
- алынған нәтижелерді талдау;
- нәтижелерді шығару.

Сонымен жүйенің келесі құрылымын ұсынуға болады. (12.6-сурет)

Ресурстарды үлестіру мәселесінің имитациялық жүйесі келесі функционалды блоктардан тұрады:

• Деректерді қалыптастыру процедуралары алғашқы деректерді диалог түрінде енгізуден немесе реляциялық файлдарды



12.6-*сурет*

қосып, параметрлердің өзгерісінің үлестірім заңдылықтарын идентификациялауды қамтиды.

- Ресурстарды үлестіру мәселесін (РҮМ) шешу процедуралары параллельді объекттер арасындағы шектелген ресурстардың тиімді үлестіруін табу алгоритмдерін қамтиды.
- Параметрлердің өзгеруі мүмкіншіліктерін модельдеу. Берілген блокта үлестірім заңдылығы бойынша параметрлердің өзгеруін модельдеу алгоритмдері жүзеге асады.
- Алынған нәтижелердің тұрақтылығын қамтамасыз ететін параметрлердің өзгеру облысын анықтау. Бұл жерде параметрлердің, алынған шешімнің тиімді болуын сақтайтын, тербелістерінің амплитудасы есептеледі.
- Тиімді шешімді жақсартатын параметрлердің өзгеру облысын анықтау. Мұнда параметрлердің, олардың шектік мәндерімен алынған шешім жақсаруы мүмкін, тербелістерінің амплитудасы есептеледі.
- Нәтижелерді талдау. Бұл блокта алынған шешім бағаланады, параметрлердің өзгеруі мен олардың салыстырмалы сипаттамалары талданып, шешімнің тұрақтылық облысынан параметрлердің шығуы анықталады.
- Нәтижелерді шығару.

12.3. Ресурстарды үлестірудің тиімділігін бағалау мен талдау әдістері

$S=S'+\Delta S$ жағдайын қарастырайық. 12.2.-тармақта берілген ресурстарды үлестіру мәселесінің моделін кеңірек қарастырайық.

Айталық (12.2) шектеуінің оң жағының S_i ресурстарының векторы, қайсыбір уақыт интервалының аралығында S шамасына өзгере алады деп есептейік. Онда есептің моделін келесі түрде келтірейік:

$$F=\max\sum_{j=1}^{n}c_j x_j;$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \le S_i+\Delta S_i, i=\overline{1,m-1} \qquad (12.7)$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_i = S_m;$$

$$x_j \ge 0, j=\overline{1,n}$$

Бірінші кезекте қандай ресурстардың қорын көбейту қажет деген сұрақты шешу кезінде, әдетте көлеңкелі бағалар пайдаланылады [27]. Айта кетейік көлеңкелі баға – бұл ресурстардың құндылығын сипаттаған кезде экономистердің қолданатын термині. Көлеңкелі баға мақсатты функцияның (*F*) тиімді мәнінің жақсаруының қарқындылығын сипаттайды. Алайда, осы жағдайда ресурс қорының көбею мәндерінің аралығы бекітілмесе де, мақсатты функцияның жақсаруының қарқындылығы өзгермей, тұрақты болып қала береді. Іс-жүзінде кездесетін көптеген жағдайларды алып қарағанда қорлардың өсуінің жоғарғы шегі болатынын болжаған дұрыс, алайда қорлардың өсуі өз шегінен артық болып кетсе, оларға сәйкес шектеулердің қажеті болмай, бұл өз кезегінде жаңа шешімнің және қатысты көлеңкелі бағалардың пайда болуына әкеп соғады. Демек, өзара сәйкес шектеулері артық болмайтын, яғни берілген ресурстың көлеңкелі бағасы өзгеріссіз қалатын ресурс қорларының мәндерінің аралығын анықтау қажет.

(12.7) есеп моделінің құрылымы келесі талдамалы есептеулерді айқындауға мүмкіндік береді [28].

Мақсатты функцияны x^p нүктесінің аймағында Тейлор қатарына жіктейік:

$$F = F^p - \frac{\Delta c}{\Delta a}(S^p - S) \qquad (12.8)$$

мұндағы x^p және F^p – сәйкесінше (12.9) кеңейтілген есептегі мақсатты функцияның тиімді шешімі мен мәні

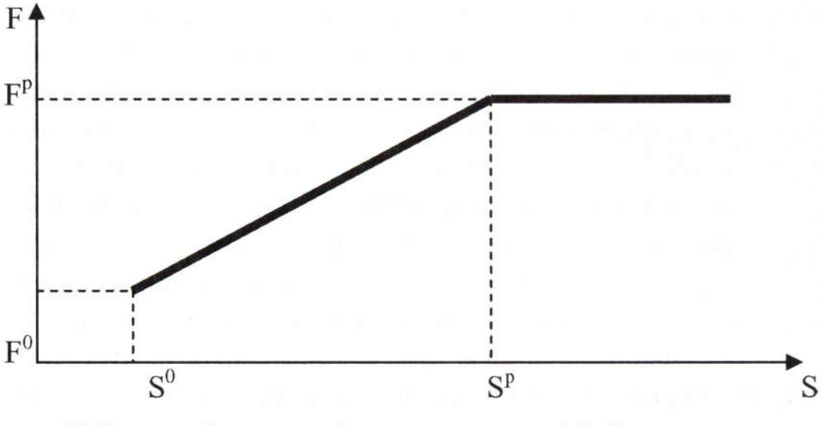
$$F = \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = S_m; \qquad (12.8)$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,n}$$

x^p шешіміне сәйкес келетін, (12.2) шектеуінің оң жақ бөлігінің мәндері S^p - деп белгіленген.

Есеп моделін сезгіштікке талдау ресурстарға қатысты жүргізілетіндіктен, c_j және a_{ij} , сондай-ақ S_m параметрлері тұрақты деп жорамалданады. Демек, F^p және S^p шамалары да тұрақты болады. Бұл өз кезегінде мақсатты функцияның мәнін S векторына тәуелді болуға әкеледі (12.7-сурет).



12.7-*сурет*. F мақсатты функциясының мәнінің S векторына тәуелділік графигі.

Мұндағы S^0 - (12.4)–(12.7) мәселелерінің тиімді шешіміне сәйкес келетін (12.2) шектеуінің оң жақ бөлігінің векторы.

12.5-суретінен бұрын табылған шешімнің жақсаруы мүмкін болатын S ресурсының өзгеру облысы - $[S^0, S^p]$ аралығы болатыны көрініп тұр, S-тің жаңа мәнін таңдаған кезде келесі шарт бұзылмау керек.

$$S = S^0 + \Delta S \leq S^p \tag{12.10}$$

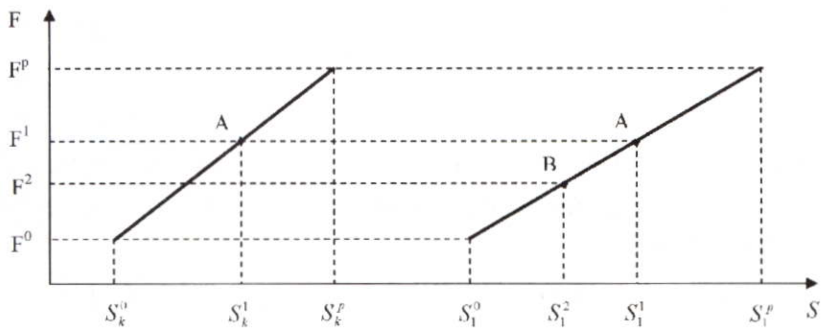
Бұл шарт S векторының әр тиімді компоненті үшін орындалуы тиіс:

$$S_i = S_i^0 + \Delta S \leq S_i^p, \forall i \in I\{1,2,...,m-1\}. \tag{12.11}$$

Осылайша, РҮМ-нің бұрын табылған тиімді шешімдерін жақсарту мақсатымен бастапқы модельдің параметрлерінің өзгеру облысын имитациялау арқылы іздеу кезінде ΔS - ті модельдегенде (12.11) теңсіздігін ескеру қажет.

РҮМ математикалық моделінің өзіне тән ерекшелігі *(S^p)* тапшы ресурсының тиімді мәнін тауып қана қоймай, сонымен бірге бірнеше тапшы ресурстардың бір-бірімен өзара ықпалын орнатады. Экстремальді есептерді шешу тәжірибесі, іс-жүзінде (11.2) түрдегі шектеулердің барлығы бірдей тиімді бола бермейтінін көрсетеді.

Екі тиімді шектеулері бар жағдайды қарастырайық. Айталық, бұл шектеулерге S_i және S^p ресурстары сәйкес келсін. Бұдан басқа, осы ресурстардың бірі, мысалы $S_к$, негізгі болсын деп жорамалдайық. Бұл ресурстардың мәндерін өзгертейік: $S_k^0 \rightarrow S_k^1$ және S_1^0 Ұ S_1^1 (12.8-сурет).



12.8-*сурет*. S_k және S_i ресурстарының өзгеруінің графигі.

Графикте (12.8-сурет) ресурстардың мұндай өзгерісіне A нүктесі сәйкес келеді. Мақсатты функцияның мәні жақсарды: $F=F^l$.

Енді $S_k^0 \rightarrow S_k^1$ және $S_l^0 \rightarrow S_l^2$ болсын, мұндағы $S_l^2 < S_l^1$. Бұл жағдайда (12.8-суреттегі B нүктесі) S_k^1 негізгі ресурсына сәйкес келетін $F = F^2$ $(< F^1)$ шектеуі тиімді болмай қалады. Айтылғандарды келесі тұжырыммен түйіндеуге болады: “Ресурстардың өзгеруінен үлкен тиімділікке жетуге болады, егер бұрын тиімді болған шектеулер жаңа шешімде де тиімді болатын болса”.

$$S = S^p - \frac{\Delta a_i}{\Delta a_k} \Delta S_k \tag{12.12}$$

формуласы негізгі ресурстың өзгеруі (ΔS_k) берілгенде ресурстардың жаңа мәндерін табуға мүмкіндік береді. Бұл ресурстар үшін бұрын тиімді болған шектеулер, бұдан әріқарай тиімді болып қала береді.

Өсумен қатар ресурстардың кейбір түрлерінің азаюы мүмкін. S ресурсының азаю жағына кез-келген өзгеруі міндетті түрде мақсатты функцияның мәнінің нашарлауына әкеліп соқтыруы айқын.

Алайда, қарастырылып жатқан есептердің модельдерінің құрылымы келесі қорытындыларды жасауға мүмкіндік береді.

Осы берілген топтағы мәселелерді шешу үшін біз кеңейту әдісін қолданатымызды еске түсіре кетейік [28]. Бұл әдіс РҮМ шешімдері мүмкін болатын, кеңейтілген облысы бар қарапайым есептердің шешіміне сәйкес келетін нүктеден оның тиімді шешіміне бағытталған ауысуы арқылы шығаруды болжайды. Бұл жерде

$$\alpha_i = \min_{(k,l)} \left[\frac{c_k - c_i}{a_{tk} - a_{tl}} \left(S_t^p - S_t \right) \right] \tag{12.13}$$

өрнекті $N_B = N_B^{dir} \bigcup N_B^{rev}$ төмендетудің мүмкін болатын барлық бағыттары бойынша минимизациялайтын (k, l) бағыты тиімді болып табылады.

$$N_B^{dir} = \left[(j, j+p) \ / \Delta c_{j,j+p} \geq 0, \Delta a_{j,j+p}^1 > 0 \forall t \in I_H \right];$$

$$N_B^{rev} = \left[(j+p, j) \ / \Delta c_{j,j+p} < 0, \Delta a_{j,j+p}^1 < 0 \forall t \in I_H \right].$$

(12.13) шартынан табылған төмендету қадамының

$$h_{kl} = \frac{S_i^p - S_i}{\Delta a_{kl}^i} \tag{12.14}$$

шамасы *F(x)*-тің *F*(x^b)-ден минималды ауытқуын қамтамасыз етеді, бірақ *t* индексі бар ғана шектеулерді орындауға кепілдік береді. Шектеулердің бірде біреуі бұзылмас үшін, барлық $t \in I_n$, бойынша (12.3) өрнектерінен ең көп сәйкес келетін бағыт таңдалады , мұндағы I_n - оған x^p қойған кезде бұзылған (12.2) шектеулерінің индекстерінің жиыны, яғни

$$\alpha = \max_{t \in I_H} \min_{(k,l) \in N_B} \left[\frac{c_k - c_l}{a_{tk} - a_{tl}} \left(S_t^p - S_t \right) \right]. \tag{12.15}$$

Демек, параметрлері бойынша төмендетудің қадамы есептелетін τ - нөмірлі шектеу тиімді болады, яғни $a_\tau x = S_\tau$, ал басқа шектеулер үшін келесі қатынас айқын болады:

$$a_i x = S_i^{'} \le S_i,\ i \ne \tau\ , \tag{12.16}$$

яғни S_i -дің S'_i мәніне дейін төмендеуінің мүмкін болуы, бұрын алынған тиімді шешімге әсер етпейді.

Енді δ жағдайын қарастырайық. *F* мақсатты функциясының параметрлерінің өзгеруі мүмкін болатын жағдайды қарастырайық.

$$F = \max \sum_{j=1}^{n} \left(c_j + \delta_j \right) x_j;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le S_i, i = \overline{1, m-1};$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = S_m;$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1, n}.$$

Мақсатты функцияның коэффициенті x_r нүктесінде теріс емес δ өсімшесін қабылдайды деп есептейік, яғни ($c_r + \delta$) - ға тең болады. Жоғарыда берілген алгоритм бойынша қандай қадамдарда тиісті мәндердің өзгере алатындығын бақылайық. x_i-дің бұрын алынған тиімді мәндерін сақтау үшін, есептеу барысын өзгеріссіз қалдыру керек. Бастапқы есептің алдын-ала қайта нөмірленген айнымалылары үшін, мақсатты функцияның параметрлерінің мәндері төмендеп айнымалы индексі өсетін кезде, төмендетудің барлық мүмкін болатын бағыттары үшін

$$\Delta c_{j,j+p} \geq 0, \;\; \Delta a^t_{j,j+p} > 0$$

теңсіздігі орындалады. Бұл $(c_r + \delta)$ өзгерісі мүмкін болатын бағыттардың көпшілігіне ешқандай әсер етпейтінін білдіреді. (12.14) төмендету қадамының шамасы c_j коэффициенттеріне тәуелді болмайды. $(c_r + \delta)$ өзгеруі төмендетудің тиімді бағытын таңдау кезінде ғана әсер етуі мүмкін, демек, (12.14) және (12.15) шарттары бұзылмауы керек.

(12.14) өрнегінде шама

$$S^p_t - S_t = const,$$

сондықтан минимум $\dfrac{\Delta c_{kl}}{\Delta a^t_{kl}}$ мәндері бойынша ізделінеді. Есептеуді жеңілдету үшін бұл жиындағы элементтерді өсу ретімен орналастыруға болады. Егер c_r коэффициенті $(c_r + \delta)$ мәнін қабылдаса, мұнда $k = r$ болатын барлық $(k,\ l)$ бағыттарында Δc_{kl} $(\Delta c_{kl} + \delta)$-ге тең болады, яғни $l = r$ болғанда барлық $(k,\ l)$ бағыттарына сәйкес Δc_{kl}, $(\Delta c_{kl} - \sigma)$-ге тең болады.

Δc_{kl} барлық сәйкес мәндерін мұндай ауыстыру, тиімді бағытты іздегенде элементтер ретін бұзбауы керек. Осыдан δ өзгерісінің шектерін табуға болады. $\alpha = \max\{\alpha_r\}$ таңдауы кезінде максимум шартын қамтамасыз ету үшін

$$\Delta S_t = S^p_t - S_t$$

мәндерін ескермеуге болмайды, өйткені олар әр шектеу үшін әртүрлі, сонымен қатар шешім тиімді шешімге жақындаған сайын итерацияларда өзгеріп отырады және осыған байланысты $\{\alpha_r\}$ жиынындағы теңсіздіктер шарттары болады. Осылайша δ параметрі үшін шектеулердің барлық облыстарын біріктіріп, олардың қиылыстарын тауып, тиімді режимдердің бұзылуына әкелмейтін мақсатты функциясының c_r коэффициентінің өзгеру шектерін іздеп табуға болады.

Мысал

$$\begin{aligned}&5{,}3x_1 + 5{,}1x_2 + 5x_3 + 4{,}8x_4 \to \max;\\&3x_1 + 3{,}1x_2 + 3{,}2x_3 + 2{,}8x_4 \le 30{,}1;\\&2{,}1x_1 + 1{,}9x_2 + 2{,}2x_3 + 1{,}9x_4 \le 20;\\&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10;\\&1 \le x_1 \le 5;\\&1 \le x_2 \le 4;\\&1 \le x_3 \le 5;\\&1 \le x_4 \le 5.\end{aligned}$$

Тиімді шешімі $X=\{3{,}5;\ 3{,}33;\ 1;\ 2{,}17\}$. x_4 кезінде коэффициент өсімше алады, яғни $(4{,}8 + \sigma)$ - ге тең болады. Мүмкін болатын бағыттардың жиыны $N_1=\{(2{,}4),(1{,}4)\}$, $N_2=\{(1{,}2),(1{,}4)\}$.

Келесі теңсіздіктер бұзылмауы тиіс:

$$\frac{\Delta c_{24} - \delta}{\Delta a_{24}^1} \le \frac{\Delta c_{14} - \delta}{\Delta a_{14}^1} \text{ және } \frac{\Delta c_{12}}{\Delta a_{12}^2} \le \frac{\Delta c_{14} - \delta}{\Delta a_{14}^2};$$

1-ші итерация үшін $$\frac{\Delta c_{12}}{\Delta a_{12}^2} \Delta S_{2(1)} \ge \frac{\Delta c_{24} - \delta}{\Delta a_{24}^1} \Delta S_{1(1)};$$

2-ші итерация үшін $$\frac{\Delta c_{24}}{\Delta a_{24}^1} \Delta S_{1(2)} \le \frac{\Delta c_{12} - \delta}{\Delta a_{12}^2} \Delta S_{2(2)} .$$

Барлық алынған теңсіздіктер жүйесін шығарып, δ: $-0{,}15 \le \delta \le 0{,}2$ параметрінің шектеулерінің облысын алуға болады. Бұдан x_4 кезінде коэффициент өзгеретін болса $4{,}65 \le c_4 \le 5$ шегінде x - тің тиімді шешімі өзгермейтіні белгілі болады.

13. КҮРДЕЛІ ЖҮЙЕЛЕРДІ МОДЕЛЬДЕУ

13.1. Қор жинау жұмысын ұйымдастыру процесстерін модельдеу

Қор жинау мәселесін дұрыс ұйымдастыру талабы іс жүзінде көп кездесетіні анық. Әсіресе бұл мәселе тауарды көп мөлшерде сатып алатын және оны шығаратын өндірістерде жиі қаралады [1].

Қор жинау мәселесін шешкенде көбінесе қорды толықтыру мөлшерін және мезгілін анықтау қажет болады. Және, іс жүзінде, осы жүйенің біраз параметрлерінің мәні кездейсоқ шамалармен сипатталатыны мәлім.

13.1-*сурет*

Енді ''жабдықтаушы-қойма-тұтынушы'' жүйе жұмысын қарастырайық (13.1-ші сурет). Күнделікті таңертең қоймадағы тауардың бір бөлшегі тұтынушыларға, мысалы дүкендерге, жіберіледі. Осы бөлшектің мөлшері күнделікті сұранысқа сәйкес болсын. Сондықтан ол кездейсоқ шама ретінде қаралуы тиісті. Егер осы қордың деңгейі белгілі бір мөлшерден азайса, қойма басқармасы қорды толықтыру үшін жаңадан жабдықтаушыға тапсырыс жасайды. Бұл тапсырыстың мөлшері алдын ала келісілген болғанмен, оны орындау уақыты іс жүзінде кездейсоқ шамамен сипатталатыны мәлім. Тапсырыс орындалғаннан кейін қойманың сол уақыттағы деңгейі келіп түскен тауардың мөлшеріне көтеріледі.

Осы жүйені модельдеудің мақсаты ретінде әртүрлі мәселе қоюға болады. Соның бірі, қойма қорының төменгі шек деңгейінің осы қойманың жалпы жұмсалған қаражатына ықпалын анықтау бола алады. Бұл жалпы қаражат қорды сақтауға жұмсалған, жаңа тапсырыстарға төлеген және тұтынушылардың сұранысын орындай алмаған үшін төлеген айып ақысынан тұрады.

Осы жүйенің имитациялық моделін құру үшін мынадай параметрлер мен айнымаларды тағайындайық:

P_x – тауардың бір данасын қоймада бір күн сақтау үшін жұмсалған қаржы;

P_n – қойманың қорын бір рет толықтыруға жұмсалған қаржы;

P_D – қоймадағы тауардың тұтынушыларға жетпей қалу себебінен пайда болған шығын (тауардың бір данасына есептегенде);

VP_x, VP_n, VP_D – осы шығындардың қосынды мәндері;

VP – қойманың толық шығыны;

V_0 – қордың бастапқы деңгейі;

T – модельдеу периодының ұзындығы;

n – кезекті күн;

t – кезекті тапсырыстың орындалатын күні;

V – қоймадағы қордың мөлшері;

Z_i – i-ші күнгі сұраныс;

θ_j – жадбықтаушының тапсырысты орындау мерзімі;

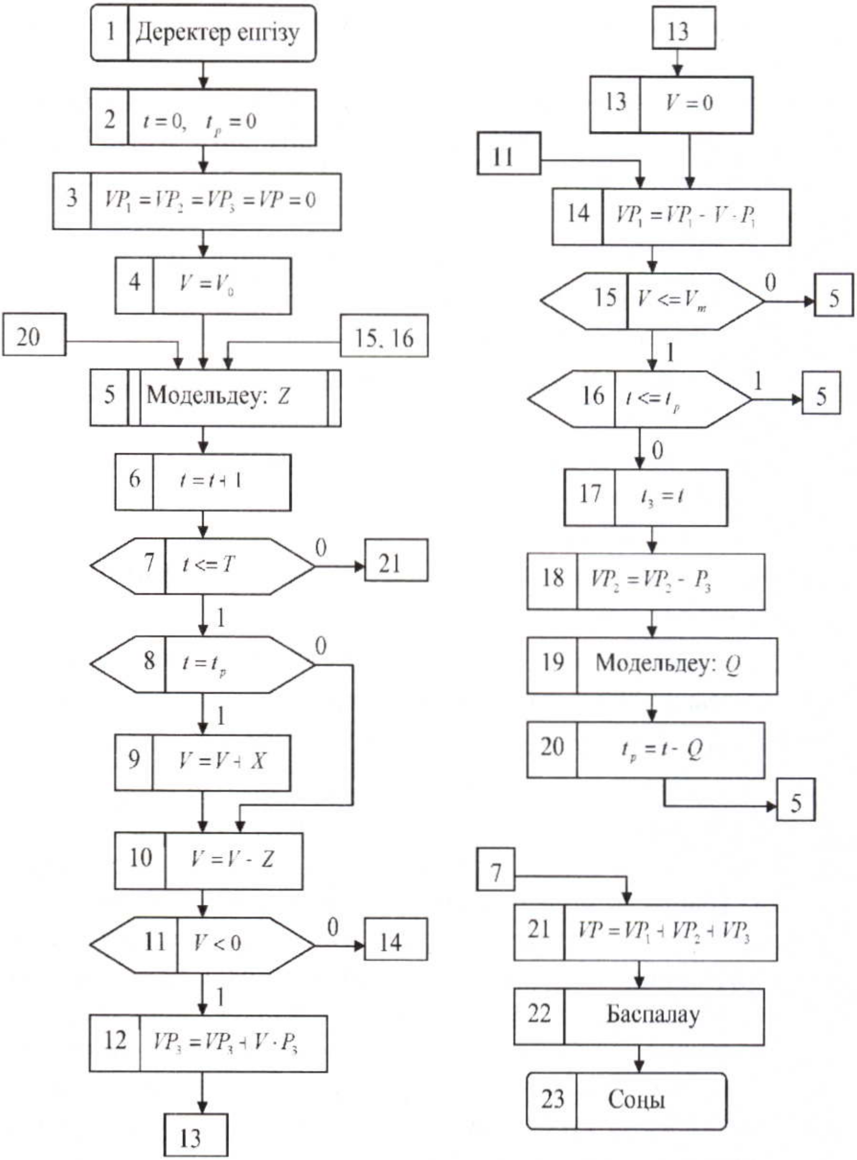
X – бір тапсырыстың мөлшері;

V_m – қордың төменгі шек деңгейі (қорды толықтыру нүктесі).

Енді осы жүйенің модельдеуші алгоритмін құрастырайық.

Бірінші оператор X, V_m, P_x, P_n, P_D, V_0, T параметрлері мен Z және θ кездейсоқ шамаларын сипаттайтын заңдылықтарды программаға енгізеді (13.2-сурет). Келесі үш оператор осы жүйенің бастапқы күйін бейнелейді. 5-ші оператор кезекті күнгі тауарға сұранысты модельдейді, ал 6-шы оператор осы модельдің ''сағатын'' келесі күнге ауыстырады. 7-ші оператор, әдеттегідей, модельдеу процессінің аяқталу шартын тексереді. Егер имитациялық модельдеудің бір нақтыламасы аяқталса, 8-ші оператор жүйенің жалпы жұмсалған қаражатын есептейді. Керісінше жағдайда, 10-шы оператор кезекті күн, алдын-ала жасалған тапсырыс қоймаға келіп түсетін күн болу мүмкіншілігін тексеріп, бұл шарт орындалса қойманың қорын осы тапсырыстың мөлшеріне өсіреді (11-ші оператор).

12-ші оператор қойманың қорын тұтынушыларға жіберетін тауардың мөлшеріне азайтады. Ал 13-ші оператор қойманың қоры тұтынушылардың күнделекті сұранысын орындауға жете ме деген сұраққа жауап іздейді. Егер бұл сұраққа керісінше $(V < 0)$


1 Деректер енгізу
2 $t=0, \quad t_p=0$
3 $VP_1=VP_2=VP_3=VP=0$
4 $V=V_0$
20
15, 16
5 Модельдеу: Z
6 $t=t+1$
7 $t<=T$
0
21
1
8 $t=t_p$
0
1
9 $V=V+X$
10 $V=V-Z$
11 $V<0$
0
14
1
12 $VP_3=VP_3+V\cdot P_3$
13
13
13 $V=0$
11
14 $VP_1=VP_1-V\cdot P_1$
15 $V<=V_m$
0
5
1
16 $t<=t_p$
1
5
0
17 $t_3=t$
18 $VP_2=VP_2-P_3$
19 Модельдеу: Q
20 $t_p=t-Q$
5
7
21 $VP=VP_1+VP_2+VP_3$
22 Баспалау
23 Соңы

13.2-*сурет*

жауап берілсе, 14-ші оператор қойманың шығынын есептеп, 15-ші оператор оның босап қалғанын белгілейді.

13-ші оператордың шарты орындалса, яғни қойманың қоры сұраныстан артық болса, 16-шы оператор кезекті күні қоймадағы қорды сақтауға жұмсалған қаражатты есептейді:

$$VP_x = VP_x + V \cdot P_x$$

17-ші операторда тексерілетін $V_m \leq V$ шарты орындалса, кезек 5-ші операторға беріледі, ал орындалмаса, қоймадағы қорды толықтыру керек деген шешім шығарылады. Сондықтан 18-ші оператор бұрын жасалған тапсырыс қоймаға жеткізілді ме деген сұраққа жауап береді. Егер ол тапсырыстың орындалуы алда болса, кезек 5-ші операторға, яғни тұтынушылардың келесі күнгі сұраныстарын орындауға, беріледі. Керісінше жағдайда, 19-шы оператор жаңа тапсырыс жасауға даярлық ретінде оған керекті қаражатты есептеуге кіріседі, ал 20, 21-ші операторлар осы тапсырыстың орындалу мерзімін анықтайды. Содан кейін кезек тағы да 5-ші операторға берілетіні анық.

Осы модельдеуші алгоритмнің көмегімен қарастырылып отырған жүйенің әртүрлі жағдайлардағы жұмысын талдауға және параметрлерінің тиімді мәндерін табуға болатынын көреміз.

13.2. Әскери ұшақтың кемеге шабуылын модельдеу

Ракеталармен қаруланған ұшақтың соғыс кемесіне шабуылының түрпайы моделін қарастырайық. Кеме де ракета қаруымен жабдықталған болсын.

Осы модельдеудің мақсаты ұшақ пен кеменің қару-жарақтарының тактико-техникалық көрсеткіштері ұрыс барысына қандай әсер көрсете алатынын талдау болады.

13.2.1. Әуе шабуылының сценарии және оған қойылған шарттар

Теңіз шекарасын күзетуші әскер бөлімінің, ракеталардың толық қарукомплектімен жабдықталған ұшағы жау кемесіне қарсы тұрақты жылдамдықпен ұшып, ракетасы кемеге жететін жерге келген кезде оларды бірінен соң бірін кемеге ататын болсын. Барлық ракеталарын атқаннан кейін ұшақ бұрылып сол жылдамдықпен кейін қарай ұшуы тиіс.

Ал кеме ракеталары қуаттырақ болғандықтан олар ұшақты байқасымен ақ атыла бастайды. Ұшақты байқау аралығын кездейсоқ шама ретінде қарау керек. Оның үлестірім заңдылығы белгілі деп есептейік.

Кеменің ұшаққа қарсы жіберетін ракеталарының максималды саны ұшақтың атыс зонасында болу мерзіміне байланысты, біракта, әрине, қару комплегіндегі ракета санынан аспайды.

Әуе шабуылының моделі өте күрделі болмас үшін мына жорамалдар енгізейік:

1) Ұшақ ракеталарының нысанасы кеме, ал кеме ракеталарының нысанасы тек қана ұшақ болсын. Ракеталардың бір-бірін жою жағдайларын қарастырмайық.

2) Ұшақ та, кеме де өзінің ракеталарын қарсыластары атыс зонасына енгенде ғана ата бастайды.

3) Ұшақтың әр шабуылының нәтижесінде кеме әлде зақымданбаған, әлде зақымданған, әлде жойылған болады. Ал кеменің қарсы атысының нәтижесінде ұшақ тек зақымданбауы, немесе жойылуы мүмкін. Зақымдану сатысы мұнда қаралмайды.

Осы шайқастың аяғы келесі алты нәтиженің біреуімен бітетіні анық:

- ұшақ жойылып, кеме зақымданбайды;
- ұшақ жойылып, кеме зақымданады;
- ұшақ та, кеме де жойылады;
- ұшақ та, кеме де зақымданбайды;
- ұшақ зақымданбай, кеме зақымданады;
- ұшақ зақымданбай, кеме жойылады.

4) Кеменің жылдамдығы ұшақтың жылдамдығынан өте аз болғандықтан, ол есепке алынбайды.

5) Зақымданған кеме шайқасты жүргізу қабілетін сақтайды.

13.2.2. Әуе шабуылының математикалық моделі

Әуе шабуылының математикалық моделін құрастыру үшін мына параметрлерді қолданайық:

V - ұшақтың ұшу жылдамдығы;

Δ_Y және Δ_K – ұшақ пен кеменің ракеталарының атылу моменттерінің аралығы;

U және W – ұшақ ракетасы (ҰР) және кеме ракетасының (КР) жылдамдықтары;

M және N – ұшақ пен кеменің қару комплектеріндегі ракеталар саны;

S_Y – ҰР-ның шектік ұшу қашықтығы;

S_k – КР-ның шектік ұшу қашықтығы;

$P_1(S_i)$ – ұшақтың i-ракетасымен S_i қашықтығындағы кеменің зақымдалмау ықтималдылығы;

$P_2(S_i)$ – ұшақтың i-ракетасымен қашықтықтағы кеменің зақымдалу ықтималдылығы;

$P_3(S_i)$ – ұшақтың i-ракетасымен S_i қашықтығындағы кеменің жойылу ықтималдылығы;

$P_k(S_j)$ – кеменің j-ракетасымен ұшақтың жойылу ықтималдылығы;

Осы белгіленген параметрлердің арақатынастарын анықтағанда салыстырмалы уақытты қолданамыз, яғни, қарсы жақтың қайсысының болмасын бірінші ракетасын жіберген сәті осы шайқастың басы деп есептеледі [4]. Сондықтан барлық теңдеулердің түрі шайқасты кім бірінші бастауына байланысты болады.

Осы шарттарды ескере отырып, әуе шабуылы моделінің әртүрлі параметрлерін есептеу үшін мына қатынастарды келтірейік:

- ұшақтың соңғы ракетасын ату моменті

$$t_0 = \begin{cases} (M-1)\Delta_y & \text{егер } S_y \geq S_k; \\ \dfrac{S_k - S_y}{y} + (M-1)\Delta_y & \text{егер } S_y < S_k; \end{cases}$$

- кеме мен ұшақ аралығының қашықтығы

$$S(t)=\begin{cases} S_y - V\cdot t \quad \text{егер} \quad t<t_0,\ S_y \geq S_k; \\ S_y - 2V\cdot t_0 + V\cdot t \quad \text{егер} \quad t \geq t,\ S_y \geq S_k; \\ S_k - 2V\cdot t_0 + V\cdot t \quad \text{егер} \quad t \geq t,\ S_k > S_y; \\ S_k - 2V_0\cdot t_0 + V\cdot t \quad \text{егер} \quad t \geq t_0,\ S_k > S_y; \end{cases}$$

- ұшақтың кеме зонасында өткізген уақыты

$$T=\begin{cases} 2[(S_k - S_y)/V + (M-1)\Delta_Y], \ \text{егер} \ S_k > S_y; \\ 2[(M-1)\Delta_y - (S_y - S_k)/V] \quad \text{егер} \ S_k \leq S_y; \end{cases}$$

- кеменің атып үлгіретін ракеталар саны

$$R = Б[T/\Delta_k] + 1;$$

- ұшақтың i - ракетасын ату моменті

$$t_i=\begin{cases} (i-1)\Delta_y, \quad \text{егер} \quad S_y \geq S_k; \\ (S_k - S_y)/V + (i-1)\Delta_y, \quad \text{егер} \quad S_y < S_k; \end{cases}$$

- i - ші ҰР-ның кемеге жету моменті

$$\theta_i = t_i + \frac{S(t_i)}{U+V};$$

- кеменің j - ракетасын ату моменті

$$\tau_j=\begin{cases} (S_y - S_k)/V + (j-1)\Delta_K, \quad \text{егер} \quad S_y \geq S_k \\ (j-1)\Delta_k, \quad \text{егер} \quad S_y < S_k \end{cases}$$

Ал кеменің ракетасының ұшаққа жету моментін η_j есептеу үшін ұшақтың қай бағытқа ұшып келе жатқанын ескеру керек.

1-ші жағдай. Кеменің j-ші ракетасын атқан уақытта ұшақ кемеге қарай ұшып келе жатса $(\tau_j < t_c)$, бұл ракетаның ұшаққа жететін моменті мына теңдеуден анықталады:

$$\eta_j - \tau_j - S(\eta_j)/(W+V) = 0\cdot$$

2-ші жағдай. Кеменің -ші ракетасын атқан уақытта ұшақ кейін қарай ұшып бара жатса моментін анықтау үшін келесі теңдеуді шешу керек:

$$\eta_j - \tau_j - S(\eta_j)/(W-V) = 0.$$

13.2.3. Модельдеуші алгоритмді құрастыру

Осы әуе шабуылы процесін модельдеу интервалының басы ретінде ең бірінші ракета атылған мезгілін, ал аяғы ретінде жоғарыда келтірілген алты нәтиженің біреуіне жеткен мезгілін есептейміз.

Модельдеуші алгоритмді ''жетектеп өткізу'' принципінің көмегімен құрастыруға болады. Осы модельдеуші алгоритмнің сұлбасы 13.3-ші суретте келтірілген. Бірінші оператордың көмегімен мына бастапқы ақпаратты енгізу керек: ұшақ пен кеменің және олардың ракеталарының тактико-техникалық деректері, ұшып келе жатқан ұшақты кеме локаторының байқау қашықтығының үлестірім заңының параметрлері және тағы басқалар.

Ал, 2, 54, 55-ші операторлар әуе шайқасының бірнеше нақтыламаларын модельдеуді қамтамасыз етеді. 3-ші операторда кеме локаторының көмегімен ұшақтың қай қашықтықта байқалып қалғаны (S_k) модельденеді.

Енді φ белгісін енгізейік:

$$\varphi = \begin{cases} 1, & \text{егер шайқасты бірінші болып кеме бастаса,} \\ & \text{яғни оның ракетасы бірінші атылса;} \\ 0, & \text{егер шайқасты бірінші болып ұшақ бастаса.} \end{cases}$$

Осы белгінің мәні 4-ші оператордың

$$S_y \geq S_k$$

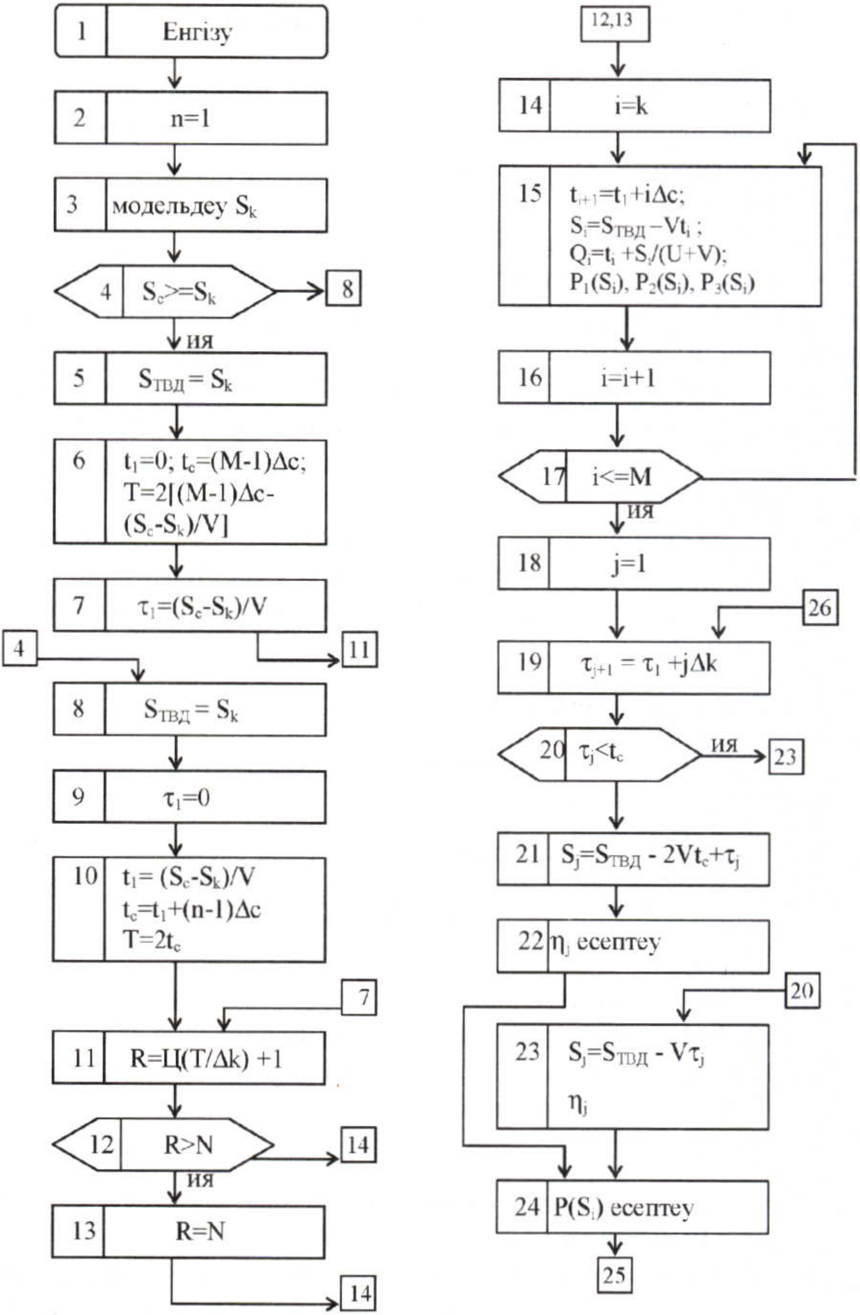
шартын тексеру арқылы анықталады.

Егер 4-ші оператордың шарты орындалса әуе шайқасын бірінші болып ұшақ өз ракетасын атумен бастайды. Сондықтан шайқас аренасының ұзындығы

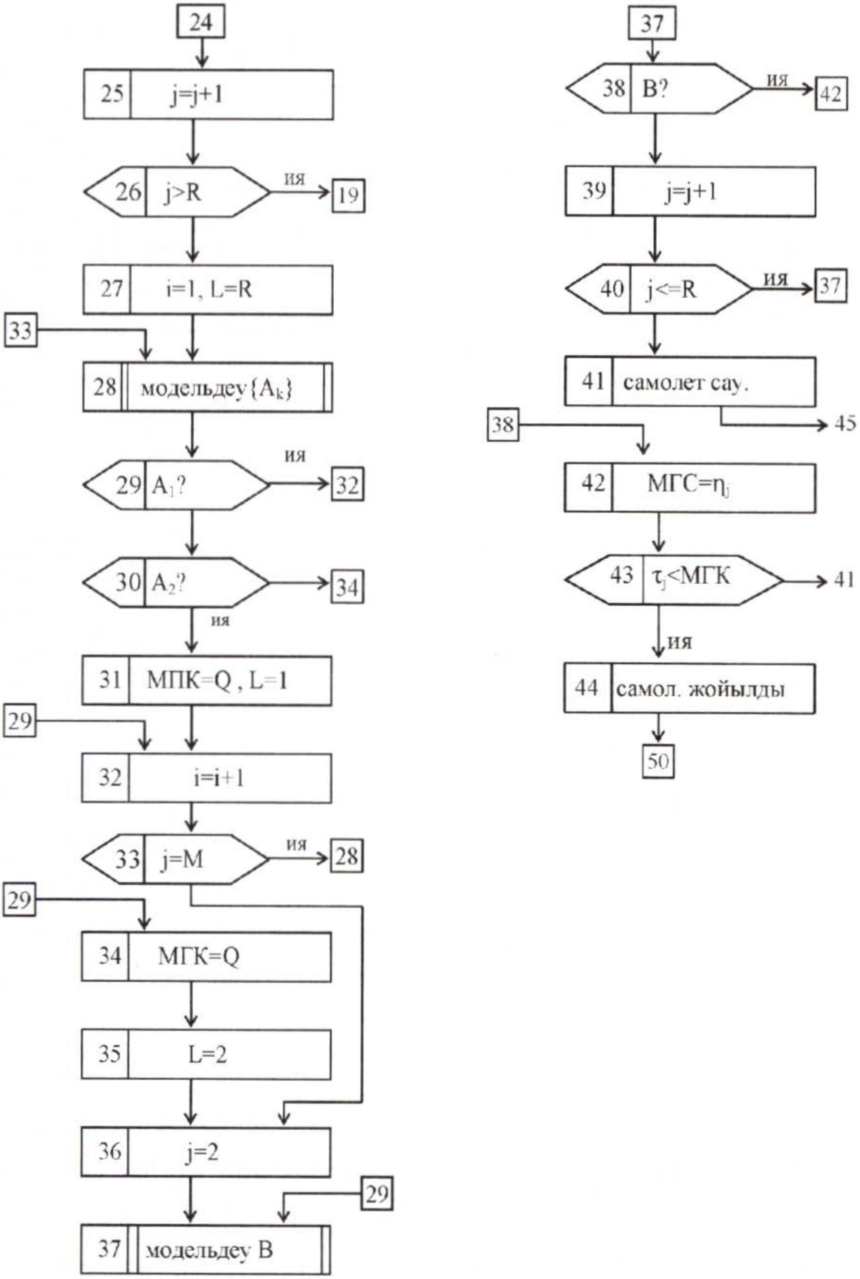
$$S_{ш.а} = S_y$$

тең болады (5-оператор), ал шайқастың басталуы осы сәттен есептеледі (6-оператор).

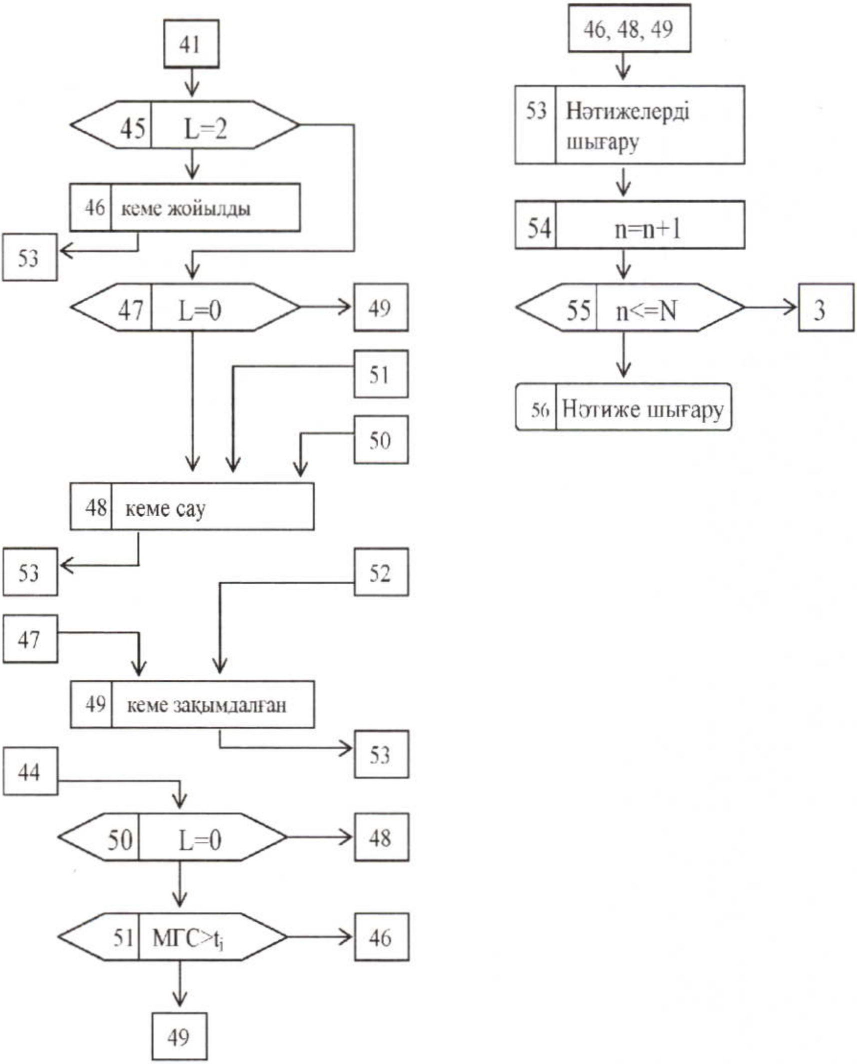
6-шы оператор ұшақтың соңғы ракетасының атылу моментін және ұшақтың шайқас аренасында қанша уақыт болатынын да есептейді.


1 Енгізу
2 n=1
3 модельдеу S_k
4 S_c>=S_k
8
ия
5 S_ТВД = S_k
6 t_1=0; t_c=(M-1)Δc; T=2[(M-1)Δc-(S_c-S_k)/V]
7 τ_1=(S_c-S_k)/V
11
4
8 S_ТВД = S_k
9 τ_1=0
10 t_1= (S_c-S_k)/V t_c=t_1+(n-1)Δc T=2t_c
7
11 R=Ц(T/Δk) +1
12 R>N
14
ия
13 R=N
14
12,13
14 i=k
15 t_{i+1}=t_1+iΔc; S_i=S_ТВД –Vt_i ; Q_i=t_i +S_i/(U+V); P_1(S_i), P_2(S_i), P_3(S_i)
16 i=i+1
17 i<=M
ия
18 j=1
26
19 τ_{j+1} = τ_1 +jΔk
20 τ_j<t_c
ия
23
21 S_j=S_ТВД - 2Vt_c+τ_j
22 η_j есептеу
20
23 S_j=S_ТВД - Vτ_j η_j
24 P(S_i) есептеу
25

13.3-*сурет*



13.3-*суреттің жалғасы*



13.3-*суреттің жалғасы*

Ал 4-ші оператордың шарты орындалмаған жағдайда, яғни бірінші болып ракетасын кеме атса, t_1, t_c, T, $S_{ш.а}$ параметрлерінің мәндерін 8, 9, 10-шы операторлар есептейді. 7 және 9-шы операторлар кеменің бірінші ракетасының атылу моментін анықтайды.

Ұшақ шайқас аренасында болған мезгілде оған қарсы кеменің жіберіп үлгірген ракеталарының саны 11, 12, 13-ші операторларда айқындалады.

14 пен 17-нің аралығындағы операторлардың келесі тобы ұшақтың барлық M ракеталарының атылған моменттерін (t_i), осы кездегі қарсыластардың аралығының мәнін (S_i), атылған ракеталардың кемеге жеткен моменттерін (θ_i) және толық топ құратын $(A_1,\ A_2,\ A_3)$ оқиғалардың $P_1(S_i)$, $P_2(S_i)$, $P_3(S_i)$ ықтималдылықтарын есептейді.

Келесі топ 18–26 аралығындағы операторлардан тұрады. Осы операторлардың көмегімен кеменің барлық ракеталарының атылған (τ_j) моменттері (19-оператор), ұшақтың қай бағытта ұшып бара жатуына сәйкес осы мезгілдердегі кеме мен ұшақтың қашықтығының мәндері (21, 23-операторлар), ракеталардың ұшаққа жеткен моменттері (22, 23-операторлар) және сол ракетамен ұшақтың жойылу ықтималдылығы (24-оператор) есептеледі.

27–35-ші операторлардан тұратын келесі топтың көмегімен ұшақтың әр ракетасының кемеге қандай зақым жасағаны анықталады. Ол үшін 28-оператор оқиғалардың толық тобын модельдейді. Егер A_1, яғни кеме зақымданбай қалды деген оқиға пайда болса, келесі ракетаның атылу нәтижесін модельдеуге көшеміз (32-оператор).

Керісінше жағдайда, 30-шы оператор кеменің зақымдалғанын, немесе жойылғанын тексереді. 31 және 35-ші операторларда осы екі оқиғаның әрқайсына тән белгі тағайындалады және кеменің зақымдалған, немесе жойылған моменті белгіленеді (31, 34-операторлар).

Келесі 34–44-ші операторларды қамтитын топтың жұмысы 27–35-ші операторлар тобына сәйкес. Тек бұл топ жұмысының нәтижесі ұшақтың зақымдалмауы (41-оператор) немесе жойылуы (42-оператор) болады. Бірақ ұшақ жойылды деген үзілді-кесілді тұжырым тек 44-ші операторда, алдын-ала $\tau_j < KЖM$ шартын ($KЖM$-кеменің жойылу моменті) тексергеннен кейін ғана, қалыптасады.

Ал 43-ші оператордың шарты орындалмаса, ұшақты жоятын кеме ракетасының атылуы мүмкін емес, себебі ол мезгілге дейін кеменің өзі жойылуы тиіс.

Шайқастың аяғындағы кеменің жағдайы 36–44-ші операторларға ұқсас 45–52-ші операторларда анықталады. Ал 53–55-ші операторлар, көмекші оператор есебінде, әуе шайқасын бірнеше рет қайталап модельдеуге мүмкіншілік жасайды.

Осы құрастырылған модельдеуші алгоритмнің көмегімен қарсыластардың қару-жарағының сапасының әуе шайқасының нәтижесіне ықпалын зерттеуге болатыны күмәнсіз.

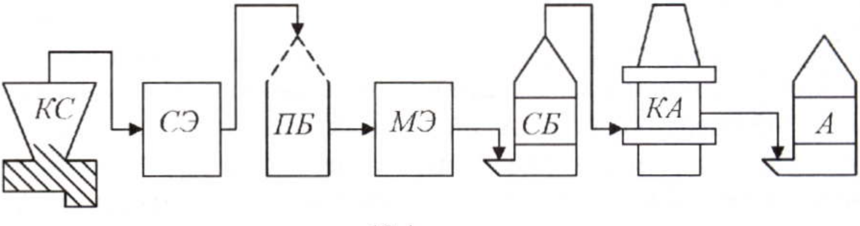
13.3. Өндірістік кешеннің автоматтандырылған басқару жүйелерін модельдеу

13.3.1. Кешеннің технологиялық сұлбасы

Полиметалл рудаларын, мысалы мырыш концентратын, қорытқанда шығатын күкірттелген газдардан күкірт қышқылын өндіретін кешеннің жұмысымен танысайық [32,33].

Бұл өндіріс автоматтандырылған басқару жүйесімен жабдықталған болсын.

Осы өндірістің технологиялық сұлбасы бойынша (13.4-сурет) әртүрлі мырыш концентраттарынан жасалған және Z_n, S, Cu, Fe-ның проценттік мәндері регламенттелген шикіқұрам қоймадан бірнеше қатарлас істеп тұрған металлургиялық пештерге келіп түссін. Осы концентрат пеште дұрыс қорытылуы үшін, пешке оттегінің проценті көбейтілген ауа үрленеді.



13.4-*сурет*

)

Қорытудың нәтижесінде алынған мырыш тұқылы сілтісіздендіру цехына жіберіледі.

Ал біз бұл цехтың жанама өнімі - күкірттелген газға назар аударайық. Пештерден кейін бұл газ ағыны құрғақ электрофильтрлерде (СЭ) шаңнан арылып, күкірт қышқылы цехының жуыптазарту бөліміне (ПБ) барады. Бұл бөлім жуып-тазарту мұнарасы және скруббер-электрофильтрлермен (МЭ) жабдықталған.

Осы қондырғыларда күкірттелген газ ағыны себелеп тұрған күкірт қышқылынан өтіп, әртүрлі зиянды қоспалардан арылады. Содан кейін газ ағыны кептіру мұнарасынан (СБ) өтіп, контакты аппараттар (КА) бөліміне келеді. Осы жерде

$$2SO_2 + O_2 = 2SO_3$$

реакциясы өтіп күкірт ангидриды алынады. Содан кейін газ моногидратты абсорбер (*А*) бөліміне жетіп, ондағы концентраттығы жеткіліксіз күкірт қышқылындағы сумен реакцияға түседі

$$SO_3 + H_2O = H_2SO_4 .$$

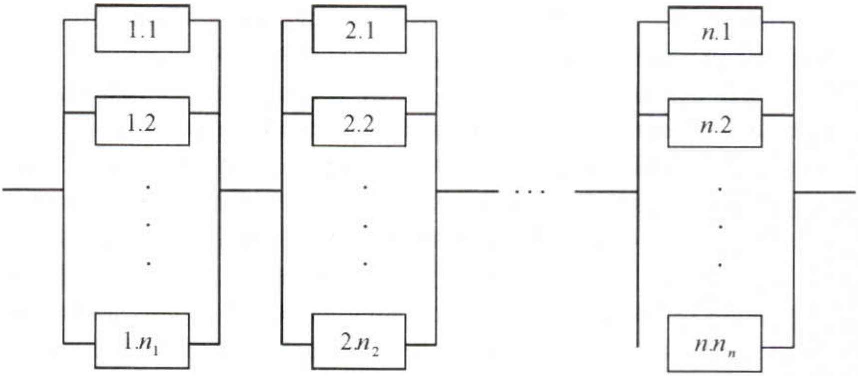
Күкірт қышқылының концентраттығы 93-95% жеткенде ол қоймаға жіберіледі.

13.3.2. Кешеннің математикалық модельдері

Күкірт қышқыл өндірісі көптоннажды өндіріс болғандықтан оның технологиялық процесстерінің әрбір сатысында бір емес, бірнеше біріне бірі ұқсас қондырғылар қатар жұмыс істейді. Осы қатарлас қондырғыларды бұдан-былай бір ішенекешен деп атайық. Сонда, күкірт қышқылын өндіретін кешен бірнеше параллельді қондырғылардан тұратын ішенекешендердің тізбегін құрайды (13.5-сурет).

Басқаруға жататын объект ретінде осы тізбекті-параллельді кешен мынадай қасиеттермен сипатталады:

- жалпы кешенді алғанда оның технологиялық режимінің стационарлығы; осы қасиеттің негізі - ішенекешендердің арасындағы коллекторлық байланыстың болуы;
- көпөлшемділік; бұл қасиет осы кешеннің өзгермелі айнымаларының көптігімен байланысты;



13.5-*сурет*

- көп критерийлік; бұл қасиет кешеннің әрқайсысының өз нысанасы бар көп ішенекешендері болғандығынан туады;
- сатылылық; бұл қасиет әр қондырғылардың бір ішенекешенге бірігіп, ал ол ішенекешендер бір күрделі кешенді құрғандығынан көрінеді.

Осы қасиеттерге сүйене отырып, қарастырылатын кешеннің статикалық моделін құрастыруға болады деген тұжырымға келеміз.

Кешеннің математикалық моделі мына қатынастарынан тұрады:

- әрбір қондырғының кіріс айнымалары $\bar{x}_{ij}$, $\bar{z}_{ij}$, басқарушы айнымалары $\overline{U}_{ij}$ және шығу айнымалары $\bar{y}_{ij}$ аралығындағы тәуелділіктер

$$\begin{aligned} &y_{ijs} = \omega_{ijs}(\bar{x}_{ij}) + V_{ijs}(\bar{z}_{ij}) + \phi_{ijs}(\overline{U}_{ij}), \\ &i = \overline{1,n}, \;\; j = \overline{1,n_i}, \;\; S = \overline{1,m_i}; \end{aligned} \tag{13.1}$$

әр ішенекешеннің ішіндегі қондырғылардың арасындағы айнымалар қатынастары

$$\sum_{j=1}^{n_i} x_{ijl} = x_{jl}, \qquad \sum_{j=1}^{n_i} y_{ijs} = y_{is}, \qquad i = \overline{1,n}, \qquad l,s \in L_1;$$

$$z_{ijl} = z_{il}, \qquad \sum \lambda_j y_{ijs} = y_{is}, \qquad i = \overline{1,n},. \qquad l,s \in L_2$$

Бұл жерде $\bar{x}_{ij}$ және $\bar{z}_{ij}$ кіріс айырмашылығын айтып кету жөн. x_{ij} айнымалысы арқылы қондырғыға келіп түскен газдың мөлшерін белгілеп, ал $\bar{z}_{ij}$ - арқылы осы газдың кондициялық параметрлерін бейнелейміз (температурасы, күкіртті газдың проценті және т.б.);

- ішенекешеннің аралығындағы материалдық және кондициялық айнымалар байланыстары

$$\begin{aligned}
&x_{i+1,l} = y_{is} = \omega_{is}(x_i) + V_{is}(z_i) + \sum_{j=1}^{n_i} \phi_{ijs} = \left(\bar{U}_{ij}\right), \\
&i = \overline{1, n-1}, \qquad l, s \in L_1, \\
&z_{i+1,l} = y_{is} = \omega_{is}(\bar{x}_i) + V_{is}(z_i) + \sum_{j=1}^{n_i} \phi_{ijs} = \left(\bar{U}_{ij}\right), \qquad (13.2) \\
&i = \overline{1, n-1}, \qquad l, s \in L_2.
\end{aligned}$$

L_1 және L_2 - материалдық және кондициялық ағындарды бейнелейтін айнымалардың индекстерінің ішенежиындары.

Бүкіл кешеннің критериі F, ішенекешендердің критерийлері F_i және әр қондырғылардың критерийлері F_{ij} аралығында мынадай приоритеттер болсын $F > F_i > F_{ij}$.

Жоғарыда келтірілген (13.1) тәуелділіктерінің нақтылы түрлері белгілі идентификациялау алгоритмдерінің көмегімен, ал (13.2) қатынастары күрделендірумен алынады [35, 36].

13.3.3. Кешенді басқару нысаналары мен иерархиялары

Осы кешеннің технологиялық процесстерін автоматтандырылған жүйелермен басқарғанда әр деңгейде әр түрлі мәселелерді шешу керек болады.

Қарастырылып отырған кешеннің әрбір қондырғысы күрделі объект болғандықтан, ондағы процесстерді оптимальды жүргізудің өзі үлкен мәселе. Ал ішенекешендердің деңгейінде қатарлас жұмыс істеп жатқан қондырғылардың әрқайсысының мүмкіншілігін дұрыс пайдалану үшін кірістегі газдың мөлшерін оларға дұрыс бөліп беру керек. Бұл да бір күрделі мәселелердің бірі. Ал бүкіл кешеннің деңгейіндегі негізгі мақсат, ол барлық ішенекешендердің қимыл бірлігін қамтамасыз ету.

Осы мәселелерді дұрыс шешу үшін автоматтандырылған басқару жүйелері шеңберінде иерархиялық (сатылық) басқару әдісін пайдалану қажет және ол жүйе үш сатыдан тұруы керек [34,37]. Ең бірінші сатыда әрбір қондырғының жұмысын оптимальдау, екінші сатыда ішенекешендердің (бөлімдердің) алдындағы газ ағынын қатар істеп тұрған қондырғыларға оптимальды тарату, ал үшінші сатыда барлық бөлімдердің жұмыс режимін бір-бірімен оптимальды бірлестіру керек.

Осы үшінші сатыда анықталған шешімдер екінші сатыға берілген жоспар ретінде, ал бұл сатыда алынған нәтижелер келесі (бірінші) сатыға тапсырма ретінде қолданылады.

13.3.4. Кешеннің технологиялық процесстерін оптимальдау алгоритмі

Жоғарыда қаралған кешенді басқару сатыларын және әр сатыдағы мәселелердің бір бірімен қарым-қатынасын ескере отырып, осы кешеннің технологиялық процесстерін оптимальдау үшін үш қадамнан тұратын мына алгоритмді ұсынуға болады.

1-қадам. Ішінекешендердің технологиялық режимдерін бірімен біріне бірлестіру үшін мына математикалық есепті шешу қажет

$$F = \max \quad \left\{ \sum_{i \in I_1} \left[\omega_{i_0}(\bar{x}_i) + V_{i_0}(\bar{z}_i) + \sum_{j=1}^{n_i} \phi_{ijs} = \left(U_{ij}[k-1]\right) \right] \right\};$$

$$\bar{x}_i \bar{z}_i \in X$$

$$X = \{x_i, z_i / \omega_{i_0}(x_i) + V_{i_0}(z_i) + \sum_{j=1}^{n_i} \phi_{ijs}\left(U_{ij}[k-1]\right) \le F_i^3,\ i \in I_2,$$

$$x_{i+1,l} = y_{is},\ i = \overline{1, n-1},\ l, S \in \overline{1, m_i}\}$$

Бұл өрнекте I_1 – дайын өнім беретін, ал I_2 – шикізатты дайын өнімге жеткізу аралығындағы операцияларды жүргізетін ішенекешендер номерлерінің жиындары болады. Бұл жиындардың біріне бірінің қатысы мына өрнектермен бейнеленеді:

$$I_1 \cap I_2 = \varnothing, \qquad I_1 \cup I_2 = I = \left(\overline{1,n}\right)$$

2-қадам. Әр ішенекешенге келіп түскен ағынды параллельді қондырғыларға оптимальды тарату үшін мына математикалық есепті шешу қажет

$$F_i = \max \qquad \left\{ \sum_{j=1}^{n_i} \left[\omega_{ij_0}\left(\bar{x}_{ij}\right) + V_{ij_0}\left(\bar{z}_{ij}[k]\right) + \phi_{ij_0}\left(\overline{U}_{ij}[k-1]\right) \right] \right\};$$

$$x_{ij} \in X_i$$

$$X_i = \{ x_{ij} / P_{is} \le \sum_{j=1}^{n_i} \left[\omega_{ijs}\left(x_{ij}\right) + V_{ijs}\left(z_{ij}[k]\right) + \phi_{ijs}\left(U_{ij}[k-1]\right) \right] \le R_{is},$$

$$\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij_1} = x_{i_1}[k], \bar{x}_{ij}^{H} \le \bar{x}_{ij} \le x_{ij}^{B}, j = \overline{1, n_i} \}.$$

3-қадам. Әр қондырғының технологиялық режимін оптимальдау үшін мына математикалық есепті шешу керек

$$F_{ij} = \max \qquad \left\{ \omega_{ij_0}\left(\bar{x}_{ij}[k]\right) + V_{ij_0}\left(\bar{z}_{ij}[k]\right) + \phi_{ij_0}\left(u_{ij}\right) \right\};$$

$$\bar{u}_{ij} \in U$$

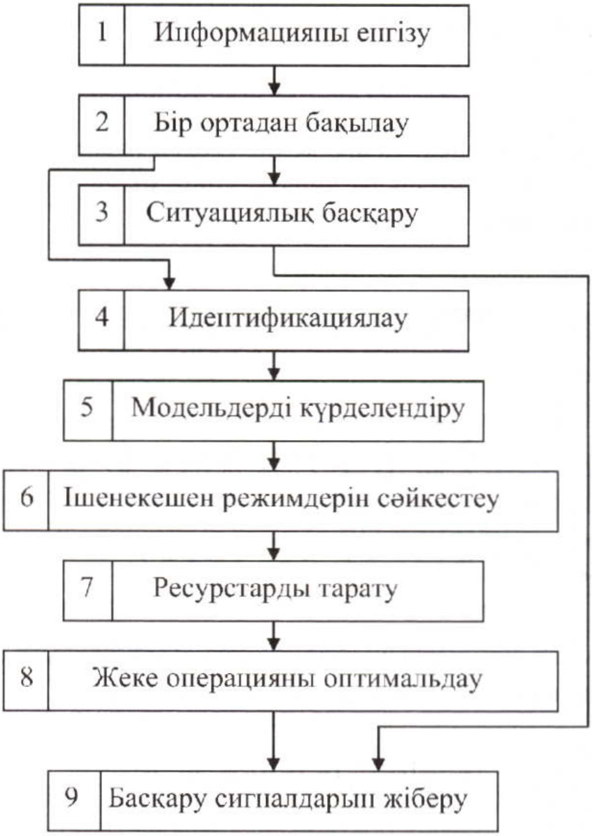
$$U = \left\{ \bar{u}_{ij} / V_{ij}^{s} \le \omega_{ijs}\left(\bar{x}_{ij}[k]\right) + \phi_{ijs}\left(\bar{u}_{ij}\right) \le W_{ij}^{s}, \qquad , s = 1, m_i, \bar{u}_{ij}^{H} \le \bar{u}_{ij} \le \bar{u}_{ij}^{B} \right\}.$$

Бүкіл кешеннің оптимальды режимі ретінде осы есептердің мына шартпен таңдалатын шешімі алынады

$$\left(\bar{x}_i^k, \bar{x}_{ij}^k, \bar{u}_{ij}^k\right) \in \Omega = \left\{ \left(\bar{x}_i^k, \bar{x}_{ij}^k, \bar{u}_{ij}^k\right) / F^{k+1} - F^k \le \Delta \right\}$$

13.3.5. Кешеннің модельдеуші алгоритмі

Автоматтандырылған жүйелермен басқарылатын кешенді имитациялап модельдеу мақсаты, осы басқару жүйесіне арнап құрастырылған әртүрлі алгоритмдерді, іс жүзіне жақындатылған жағдайда, тексеру болады.



13.6-*сурет*

Металлургия пешінен шыққан күкірттелген газдан күкірт қышқылын өндіру кешенінің автоматтандырылған басқару жүйесінің алгоритмдер сұлбасы 13.6-суретте келтірілген.

Осы сұлбаға сәйкес модельдеуші алгоритмді құрастырған кезде, бастапқы деректерді енгізу блогы ретінде әртүрлі кездейсоқ шамаларды модельдейтін программаларды қолданымыз [38]. Бұл программалар технологиялық режимді бейнелейтін әртүрлі көрсеткіштерді модельдеуге мүмкіншілік береді.

Ал, келесі ''бір ортадан бақылау'' және ''Идентификациялау'' блоктарында технологиялық процесстерді басқару жүйелеріне арнап құрастырылған алгоритмдер пайдаланылады деп есептейік.

Модельдеуші алгоритмнің сұлбасы 13.7-суретте келтірілген. 2-ші оператордың көмегімен қарастырылып отырған технологиялық процессті сипаттайтын әртүрлі параметрлердің мәні модельденеді. Осы параметрлердің мәндерін өлшеп тексеру 3 және 4-ші операторларға жүктелген. Егер осы параметрлердің мәнін тексеру арқылы, технологиялық режим дұрыс жүріп жатыр деген тұжырымға келсек, онда 6-шы оператор оның моделін идентификациялауға кіріседі. Керісінше жағдайда, әртүрлі апаттарды болғызбау үшін, немесе апат жағдайынан тез шығу үшін пайдаланылатын ситуациялық басқару алгоритмдерінің [39] жұмысы модельденеді (5-оператор).

7-ші оператордың көмегімен басқару жүйесінің қандай режимде жұмыс істеуге тиістілігі анықталады. Егер бұл толық режим болса, кезек 8-ші операторға, ал толық режим болмаса, онда жеке бір ішенекешеннің жұмысын басқаруға кезек 11- ші операторға беріледі.

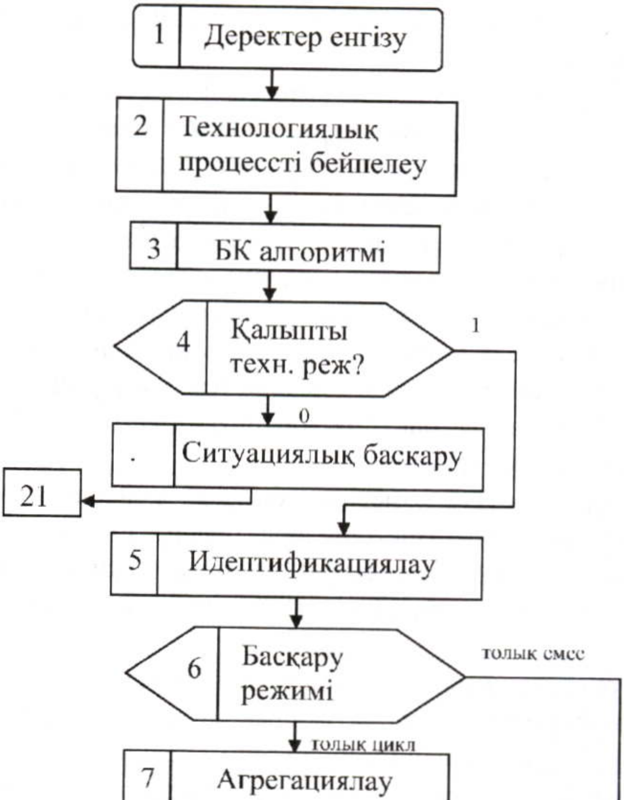
8-ші оператордың көмегімен әрбір қондырғының идентификацияланып алынған математикалық модельдерін агрегациялау арқылы [36] ішенекешеннің іріленген моделі анықталады.

9 және 10-шы операторлар әртүрлі ішенекешендердің технологиялық режимдерін бірімен біріне сәйкестейді. Осы табылған технологиялық режимнің оптимальдылығын 11-ші оператор анықтайды.

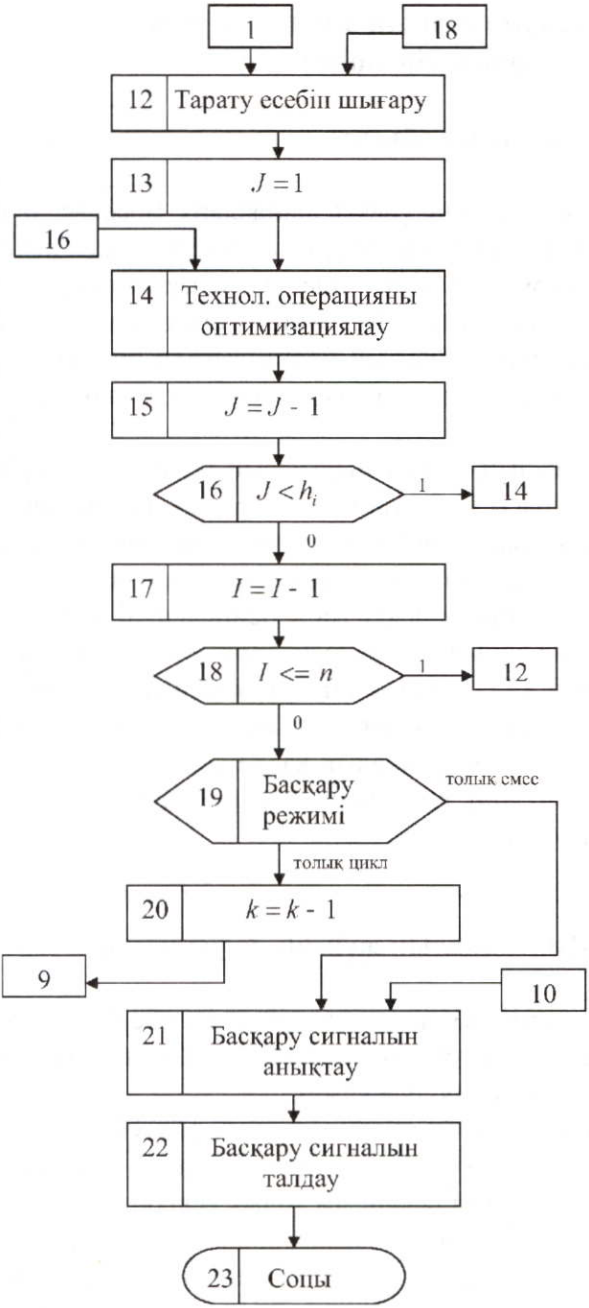
Ал 12, 13, 18, 19-шы операторлардың көмегімен осы оптимальды ішінекешендердің аралығындағы газ ағынын ішінекешендердің ішіндегі қатарлас жұмыс істеп тұрған қондырғыларға оптимальды тарату мәселесі шешіледі. Барлық қондырғылардың жеке режимдерін оптимальдау есептері

14–17 операторлары арқылы орындалады. 21-ші оператор осы есептерді шығарудың келесі итерациясына көшуге көмектеседі.

Осы модельдеуші алгоритмнің автоматтандырылған басқару жүйесінде қолданатын әртүрлі әдістердің сапасы мен бірлесіп жұмыс істеу қабілеттерін алдын-ала тексеріп алуға көп пайдасы тиетіні анық.


1
Деректер енгізу
2
Технологиялық процессті бейнелеу
3
БК алгоритмі
4
Қалыпты техн. реж?
1
0
.
Ситуациялық басқару
21
5
Идентификациялау
6
Басқару режимі
толық емес
толық цикл
7
Агрегациялау
8
$k=1$
20
9
Сәйкестеу есебін шығару
10
$F[k]=F[k-1]$
21
11
$i=1$
1

13.7-*сурет*



13.7-*суреттің жалғасы*

13.4. Республиканың электр қорын бөлу процесін модельдеу

13.4.1. Модельдеу объекті

Электр энергиясын үнемді пайдалану мәселесі бүкіл дүние жүзінде жылдан жылға ең маңызды мәселе болып келе жатқаны күмәнсіз. Бұл мәселе біздің елде де өте өзекті түр.

Электр энергиясыз бірде-бір халық шаруасының салалары жұмыс істей алмайтын болғандықтан оны өндіретін және пайдаланатын салалардың энергетикалық балансын қадағалау қажет.

Республиканың электр энергиясын тарату жүйелерінің функционалды сұлбасы 13.8-суретте келтірілген. Қазақстанның электр энергия балансының пайдалану жағы динамизм қасиеттерімен сипатталса, ал энергия қорымен камтамасыз ететін жүйелері құрылым өзгерістерінің сиректігімен бейнеленеді [40]. Сондықтан электр энергия қорын оптимальды тарату үшін жалғыз оптимизация әдістерін ғана емес, сонымен қатар имитациялық тарату жүйелерін пайдалану қажет. Бұл жүйелер қарастырылып отырған объекттердің динамикалық қасиеттерін және іс жүзінде жиі кездесетін әртүрлі кездейсоқ жағдайларды дұрыс ескеруге мүмкіншілік береді.

13.4.2. Имитациялық жүйенің құрылымы

Осы жүйенің құрылымы оның шеңберінде қойылатын мәселелердің қарым-қатынастарына, алдына белгілеген нысаналарына байланысты болуы қажет.

Имитациялық жүйе жасау мақсаты, республика электр энергиясының қорын энергобаланс шеңберінде, іс жүзінде кездесетін әртүрлі жағдайларды неғұрлым толық ескере отырып, тиімді тарату болады. Бұл үшін осы имитациялық жүйе бірімен бірі байланысты мына мәселелерді шешуді қамтамасыз етуі тиіс:

- әртүрлі өндіріс салалары бойынша электр энергиясын пайдалану мөлшерлерін нормативтерге сәйкес есептеу;

13.8-*сурет*

- электр энергиясын іс жүзінде пайдалану мөлшерлерінің өзгеру заңдылықтарын анықтау;
- электр қорын өндіру және пайдалану мөлшерлерінің әртүрлі жағдайларға байланысты кездейсоқ өзгерістерін имитациялау;
- лимиттелген электр қорын пайдаланушылардың арасында тиімді бөлу;
- осы имитациялық жүйенің көмегімен әртүрлі факторлардың электр энергияны тиімді пайдалану барысына әсерін анықтау.

Осы келтірілген мәселелердің өзара қатынастарын талдау нәтижесінде имитациялық жүйенің мына жалпы құрылымын 13.9-суретте келтірілген күйде таңдап алуға болады. Енді осы құрылыммен танысайық.

13.4.3. Әр өндіріс саласының электр энергияны пайдалану мөлшерін есептеу

Әр салаға қажетті электр энергиясын есептеу үшін алдын-ала орташаланған шығын нормасын белгілеу керек. Ол үшін әр сала бойынша i – түрлі өнімді жоспарланып отырған мерзім ішінде өндіруге қажетті электр энергиясы есептеледі. Содан кейін, осы өнімді барлық салалар бойынша (p_i мөлшерінде) өндіруге қажетті энергия (Π_i) есептеледі. Сондықтан, осы екі параметр арқылы іздеген норманы оңай табуға болады $N_i = \Pi_i / P_i$.

13.4.4. Энергия қорын өндіру мен пайдаланудың стохастикалық моделін идентификациялау

Электр энергиясын өндіру және пайдалану мөлшерлерінің кездейсоқ шама ретінде қарастырылуы күмәнсіз екені мәлім. Сондықтан бұл факторды осы жүйелерді зерттегенде еске ұстамасқа болмайды. Сол себептен құрастырылып жатқан имитациялық модельдің негізгі міндеттерінің бірі осы кездейсоқ мөлшерлердің әр салаға сәйкес үлестірім заңын анықтау болады. Ол үшін осы кітаптың 8-ші тарауында келтірілген әдістерді қолдану қажет.

13.4.5. Электр қорын пайдалану және өндіру мөлшерін болжау

Табылған үлестірім заңдарының көмегімен электр энергиясын алдағы уақытта өндіру және пайдалану мөлшерлерін алдын-ала болжау үшін осы оқулықтың 3–7 тарауларында келтірілген әртүрлі заңдылықтарды модельдеу әдістерін қолдануға болады.

13.4.6. Болжау нәтижесі мен электр энергияны іс жүзінде өндіру және пайдалану мөлшерлерінің бір-бірімен теңдігін тексеру” және “Сұраныстарды орындау

Бұл блоктардың жұмысын, олардың оңайлығын ескере отырып, әдейілеп қараудың қажеті жоқ сияқты.

13.9-*сурет*

13.4.7. Шектелген электр қорын оптимальды тарату

Бұл мәселе көбінесе математикалық программалау есебі ретінде қойылады. Бұл есептер мақсат функциясы мен шектеу теңсіздіктерінен тұратыны мәлім. Мақсат функциясы ретінде электр қорын республика бойынша тиімді пайдалануды бейнелейтін өрнектерді қолдану қажет.

Ал бұл есептің шектеулері ретінде мына деректер алынады:

- тауар өнімінің жалпы мөлшері (B);
- электр энергиясының шекті мәні (L);
- электр энергиясын пайдаланушы салалардың әртүрлі ерекшеліктерін бейнелейтін параметрлер мен өрнектер.

Осы келтірілген деректерге сәйкес энергияны тиімді тарату мәселесінің математикалық моделін мына түрде жазуға болады:

$$y = \max \sum_{j=1}^{n} \left(1 / p_j\right) x_j;$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{N} - x_j \geq B;$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \leq L;$$

$$d_j \leq x_j \leq D_j, \qquad j = 1,2,\ldots,n.$$

13.4.8. Нәтижелерді өңдеу және талдау

Бұл блоктың жұмысы имитациялық модельдеуде үлкен роль атқарады. Себебі осы блоктың жұмыс барысында алынған нәтижелер қарастырылып отырған жүйелерді қандай дәлдікпен сипаттайтындығына байланысты.

Бұл блоктың жұмысы осы кітаптың тоғызыншы тарауында қаралған сынақтарды жоспарлау әдістерін қолдануға негізделген.

Әрине, имитациялық модельдеудің мақсаты тек қана ізделген көрсеткіштердің нақтылы мәндерін табу ғана емес, әртүрлі факторлардың осы жүйенің жұмысына әсерін анықтау болатыны да күмәнсіз.

ӘДЕБИЕТ

1. *Нейлор Т.* Машинные имитационные эксперименты с моделями экономических систем, М., Мир, 1975.

2. *Соболь И.М.* Численные методы Монте-Карло, М., Наука. 1973.

3. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. М., Мир, 1980.

4. *Шеннон Р.* Имитационное моделирование систем - искусство и наука. М., Мир, 1978.

5. *Кнут Д.Е.* Искусство программирования. Получисленные алгоритмы, М., Мир. 1977. т.2.

6. Основы кибернетики. Теория кибернетических систем. Под ред. *К.А. Пупкова,* М. Высшая школа, 1976.

7. *Аверилл М. Лоу, В. Дэвид Кельтон.* Имитационное моделирование, М. ПИТЕР, 2004.

8. *Полляк С.Г.* Вероятностное моделирование на ЭВМ. М.Сов. Радио,1971.

9. *Абдуллина В.З., Муртазина А.У., Шукаев Д.Н.* Моделирование и исследование базовой последовательности, Алма-Ата, КАЗПТИ, 1987.

10. *Акулинин В.И. и др.* Методы проверок базовой последовательности псевдослучайных чисел. Рязань, 1976.

11. *Муртазина А.У.* Компьютермен модельдеу. Под редакцией *Шукаева Д.Н.,* Алматы. КАЗНТУ. 2003.

12. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. М. .Физматгиз. 1962.

13. *Кудрявцев Е.М.* Основы имитационного моделирования различных систем. М., ДМК Пресс, 2004.

14. *Ермаков О.М, Михайлов Г.А.* Курс статистического моделирования. М., Наука, 1976.

15. *Четвериков В.Н., Баканович Э.А., Меньков А.В.* Вычислительная техника для статистического модалированая. М. Сов. Радио, 1978.

16. *Иванова В.М.* Случайные числа и их применение. М., Финансы и статистика. 1984.

17. *Пугачев В.С.* Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М. .Физматгиз, 1960.

18. *Потапов В.Д., Яризов А.Д.* Имитационное моделирование производственных процессов в горной промышленности. М. Высшая школа, 1981.

19. *Овчаров Л.А.* Прикладные задачи теория массового обслуживания. М.,Машиностроение, 1969.

20. Вероятностные метода в вычислительной технике. Под ред. *А.Н. Лебедева и Е.А.Чернявского.* М. Высшая школа, 1986.

21. *Бусленко Н.П.* Моделирование сложных систем. М., Наука, 1978.

22. *Советов Б.Я., Яковлев С.А.* Моделирование систем. М., Высшая школа, 1999.

23. *Шукаев Д.Н.* Имитационное моделирование на ЭВМ. Алматы, КАЗНТУ, 1995.

24. *Кюн Ю.* Описательная и индуктивная статистика. М., Финансы и статистика, 1981.

25. *Петрович М.Л., Давидович М.И.* Статистическое оценивание и проверка гипотез на ЭВМ. М., Финансы и статистика,1989.

26. *Афифи А.,Эйзен С.* Статистический анализ: Подход с использованием ЭВМ. М., Мир, 1982.

27. *Вентцель Е.С.,Овчаров Л.А.* Теория вероятностей в ее инженерные приложения. М., Наука,1988.

28. *Крамер Г.* Математические методы статистики. М.,ИЛ, 1948.

29. *Крэйн М. Лемуан О.* Введение в регенеративный метод анализа моделей. М., Наука, 1992.

30. *Лифщиц А.Л., Мальц Э.А.* Статистическое моделирование систем массового обслуживания. Сов. Радио,1978.

31. *Бусленко Н.П., Калашников В.В., Коваленко М.К.* Лекции по теории сложных систем. М., Сов. Радио,1973.

32. Автоматизированные системы управления технологическими процессами производства серной кислот из отходящих газов. *Ашимов А.А.* и др. М., Металлургия, 1987.

33. *Ашимов А.А., Куленов А.С.. Морозов В.П., Шукаев Д.Н.* Согласованное управление сложным непрерывным технологическим комплексом. Сб. “Кибернетика в ввтоматяка” Алма-Ата, КАЗПТИ, 1984.

34. *Шукаев Д.Н.* Оптимизация технологического комплекса с многоуровневой структурой управления. Сб. “Вопросы создания АСУТП и АСУП”, Алма-Ата, КАЗПТИ, 1990.

35. *Shukayev D.N., Kiм E.R.* Extension method in location problems with discrete objects. Proceeding of the 21st IASTED International Conference MODELLING AND SIMULATION (MS 2010) July 15-17, 2010 Banff, Alberta, CANADA, s. 270-274.

36. *Шукаев Д.Н., Есбатыров Т.К.* Агрегирование моделей параллельных объектов. Сб. «Управление сложными техническими и организационными системами», Алма-Ата, КАЗПТИ, 1996.

37. *Toktabaev G.M., Shukaev D.N.,* Optimizing a multi-level controlled process. Sumposium optimization methods: applied aspects. Varna, 1979.

38. *Шукаев Д.Н.* Анализ и моделирование информационных процессов. Алматы, Эверо, 2005.

39. *Клыков Ю.И.* Ситуационное управление большими системами. М., Энергия, 1974.

40. *Жигайло О.М., Казбеков Б.К.* Методические рекомендации по разработке и анализу баланса электроэнергии. А., НИИ АСПУ, 1997.

41. *Хорасони Ш.Б., Майдан Р.О.* Математикалық аталымдардың орысша-қазақша сөздігі. Алматы, МГП «Принт», 1992ж.

42. *Shukayev D.N.* Optimization of resourse allocation processes in parallel structure systems. Presentation of International scientific and technical conference FEIIC. p 185-192. International scientific and technical conference “New technologies in Islamic Countries”. Almaty, 1999.

МАЗМҰНЫ

I - бөлім. КЕЗДЕЙСОҚ ЗАҢДЫЛЫҚТАРДЫ МОДЕЛЬДЕУ

6. КЕЗДЕЙСОҚ ПРОЦЕССТЕРДІ МОДЕЛЬДЕУ

7. ОҚИҒАЛАР АҒЫНЫН МОДЕЛЬДЕУ

8. ҮЛЕСТІРІМ ЗАҢДАРЫН ҰҚСАСТЫРУ

ІІ - бөлім. ИМИТАЦИЯЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ

9. ИМИТАЦИЯЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУДІ ҰЙЫМДАСТЫРУ

10. КӨПШІЛІККЕ ҚЫЗМЕТ КӨРСЕТУ ЖҮЙЕЛЕРІН МОДЕЛЬДЕУ

11. АГРЕГАТИВТІК ЖҮЙЕЛЕРДІ МОДЕЛЬДЕУ

12. РЕСУРСТАРДЫ ҮЛЕСТІРУ ЖҮЙЕСІН МОДЕЛЬДЕУ

13. КҮРДЕЛІ ЖҮЙЕЛЕРДІ МОДЕЛЬДЕУ

Оқулық басылым

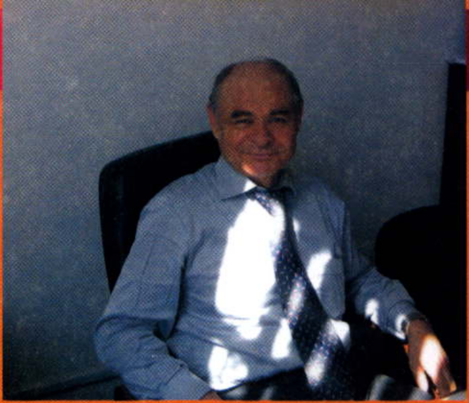
Шукаев Дулат Нұрмашұлы

КОМПЬЮТЕРМЕН МОДЕЛЬДЕУ НЕГІЗДЕРІ

Оқулық

Басуға 29.03.2011 ж. қол қойылды. Формат $60x90^{1}/_{16}$.
Қағазы офсеттік. Каріп түрі «Times». Көлемі 12,5 б.т.
Тираж 2500 экз. Заказ № 388.

ДӘУІР
ЖШС РПБК «Дәуір», 050009, г.Алматы, пр.Гагарина, 93а.
Тел.: 394-39-22, 394-39-34, 394-39-42.
E-mail: rpik-dauir81@mail.ru, rpik-dauir2@mail.ru



ШУКАЕВ
ДУЛАТ НҰРМАШҰЛЫ

Техника ғылымдарының докторы, профессор, Халықаралық ақпараттандыру академиясының толық мүшесі, Қ. И. Сәтбаев атындағы Қазақ Ұлттық техникалық университетінің «Техникалық кибернетика» кафедрасының меңгерушісі.

Профессор Шукаев Д. Н. “Электрон есептеу машинасымен модельдеу (1993)”; “Анализ и моделирование информационных процессов (2005)”; “Ақпараттық процестерді талдау және модельдеу (2005)” атты оқулықтардың авторы.

Профессор Шукаев Д. Н. 1998-2010 жылдары докторлық диссертациялық Кеңесінің төрағасы лауазымын атқарған.

Қазақстан Республикасының білім беру ісінің құрметті қызметкері белгісімен, Қазақстан Республикасының ғылымын дамытуға сіңірген еңбегі үшін белгісімен және А. Байтұрсынов атындағы «Саңлақ автор» медалімен марапатталған.