



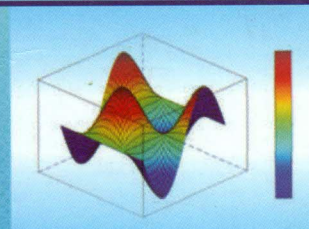
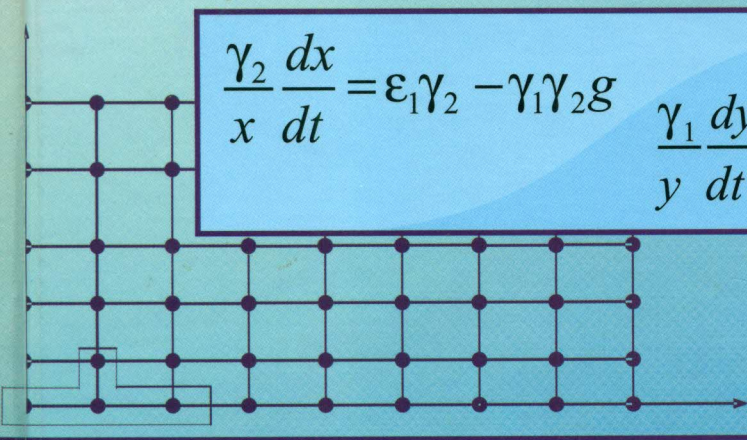
ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

М.А. СҰЛТАНОВ

**МАТЕМАТИКАЛЫҚ
ЖӘНЕ КОМПЬЮТЕРЛІК
МОДЕЛЬДЕУ
НЕГІЗДЕРІ**

$$\frac{\gamma_2}{x} \frac{dx}{dt} = \varepsilon_1 \gamma_2 - \gamma_1 \gamma_2 g$$

$$\frac{\gamma_1}{y} \frac{dy}{dt} = \varepsilon_2 \gamma_1 - \gamma_1 \gamma_2 g$$



Алматы, 2014

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

М.А.СҰЛТАНОВ

**МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖӘНЕ
КОМПЬЮТЕРЛІК МОДЕЛЬДЕУ
НЕГІЗДЕРІ**

Оқулық

Алматы, 2014

ӨОЖ 519.7
КБЖ 22.18 я7
С 89

*Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің
«Оқулық» республикалық ғылыми-практикалық орталығы бекіткен*

Пікір берушілер

Т. Р. Аманбаев – физика-математика ғылымдарының докторы;
Н. К. Аширбаев – физика-математика ғылымдарының докторы;
Е. А. Нысанов – физика-математика ғылымдарының докторы.

С 89 Сұлтанов М. А.
С Математикалық және компьютерлік модельдеу негіздері.
Оқулық. – Алматы: 2014. – 299 б.

ISBN 978-601-225-737-3

Оқулықта математикалық модельдеудің негізгі түсініктері, ұғымдары мен анықтамалары қарастырылған, математикалық модельдер классификациялары келтірілген. Математикалық модельдерді құрудың кезеңдері мен негізгі принциптері сипатталған. Сақталу заңдары, вариациялық принциптер, аналогия әдісін пайдалану негізінде зерттелетін үдерістердің математикалық модельдерін құруға мүмкіндік беретін әмбебап әдістемелік жандасулар зерттелген.

Биология, экономикада математикалық модельдер мысалдарын құру және оларды талдау жұмыстары жүргізілген. Тұтас ортаның қозғалысының жалпы математикалық моделі, сондай-ақ сұйықтықтар, газдар қозғалысын сипаттайтын модельдер келтірілген. Есептерді шешу жолымен компьютерлік, математикалық модельдеу технологиясының элементтері қарастырылған. Тақырыптарға қатысты бақылау сұрақтары мен тапсырмалар берілген.

Оқулық жоғары оқу орындарының студенттері мен оқытушыларына арналған.

ӨОЖ 519.7 (075)
КБЖ 22.18 я7

ISBN 978-601-225-737-3

© Сұлтанов М.А., 2014
© ҚР Жоғары оқу орындарының
қауымдастығы, 2014

МАЗМҰНЫ

Алғы сөз.....	8
Кіріспе.....	10
1-тарау. Математикалық модельдеу.....	13
1.1 Модель түсінігі	13
1.2 Модельдер классификациясы.....	18
1.3 Математикалық модельдер классификациясы.....	26
2-тарау. Математикалық модельдеудің жалпы принциптері.....	43
2.1 Математикалық модельді құру кезеңдері.....	43
2.2 Математикалық модельді құрудағы негізгі принциптер	46
2.2.1 Сақталу заңдары	47
2.2.2 Вариациялық принциптер.....	49
2.2.3 Аналогия әдісі	52
2.2.4 Модельдер иерархиясы	53
2.3 Математикалық модельді зерттеу	56
2.4 Есептеу алгоритмдеріне қойылатын жалпы талаптар.....	56
2.4.1 Дискрет модельге өту.....	57
2.4.2 Алгоритмнің дәлдігі	59
2.4.3 Алгоритмнің орнықтылығы	60
2.4.4 Есептеу алгоритмінің үнемділігі	61
2.4.5 Алгоритмнің параллельденуі.....	62
2.5 Есептеу алгоритмін бағдарламалық жүзеге асырудың кейбір принциптері.....	62
3-тарау. Математикалық модельдер мысалдары	67
3.1. Оқшауланған популяциялар мөлшері динамикасының моделі.....	68
3.1.1 Мальтус моделі	68
3.1.2 Ферхюльст-Пирл моделі	71
3.1.3 Ферхюльст-Пирл моделінің жалпылануы	72
3.2 Популяциялардың түрлер арасындағы бәсекелестік модельдері	73
3.2.1 Түрлер арасындағы бәсекелестік моделі.....	73
3.2.2 Лотка-Вольтерра моделі.....	78
3.2.3 Түрлер бәсекелестігінің басқа да модельдері	85
3.3. Популяциялар динамикасының жалпыланған модельдері.....	86
3.3.1 Орнықтылық мәселесі	87
3.3.2 Ляпунов бойынша орнықтылық.....	88
3.3.3 Колмогоров моделі	93

3.4 Экономикалық үдерістердің қарапайым модельдері	104
3.4.1 Экономикалық өсудің қарапайым моделі	105
3.4.2 Макроэкономикалық тепе-теңдік күйін зерттеу	108
3.4.3 Модельдер аналогиясы	112
4-тарау. Тұтас орта механикасының модельдері және интегралдық сақталу заңдары	117
4.1 Кеңістік-уақыт және материалдық континуум аксиомалары	117
4.2 Тұтас ортаның қозғалысы және ортаны сипаттау тәсілдері	119
4.3 Тұтас ортаның күштік және энергетикалық сипаттамалары	123
4.4 Тұйықтаушы қатынастар және интегралдық сақталу заңдары	125
4.4.1 Күштер үшін тұйықтаушы қатынастар	125
4.4.2 Тұйықтаушы энергетикалық қатынастар	127
4.4.3 Интегралдық сақталу заңдары	128
5-тарау. Алгебра, математикалық талдау және дифференциалдық тендеулер теориясынан қысқаша мәліметтер	130
5.1. Векторлық кеңістіктер	130
5.1.1 Векторлық кеңістік анықтамасы	130
5.1.2 Скаляр көбейтінді және нормалар	131
5.1.3 Базистер және кобазистер	132
5.1.4 Мылқау индекстер	133
5.1.5 Ковариант және контравариант компоненттер	134
5.2. Сызықтық бейнелеулер	135
5.2.1 Сызықтық бейнелеулер кеңістігі	135
5.2.2 Нормаланған кеңістіктердің изометриясы	136
5.2.3 Сызықтық бейнелеу матрицасы	136
5.2.4 Матрица және сызықтық бейнелеулердің ізі	138
5.2.5 Матрицалар және сызықтық бейнелеулердің инварианттары	138
5.2.6 Түйіндес, өзіне түйіндес (симметриялы), қарсы симметриялы және ортогонал бейнелеулер	139
5.2.7 Бейнелеулер үйірткісі	140
5.2.8 Векторлық көбейтінді	141
5.3. Тензорлар	142
5.3.1 Тензор анықтамасы	142
5.3.2 Тензорларға мысалдар	143
5.3.3 $T^2(R^m) \sim \mathcal{L}(R^m)$ изоморфизмі	144

5.4. Скаляр, векторлық және тензорлық өрістер.....	144
5.4.1 Үзіліссіз өріс	144
5.4.2 Дифференциалданушы өрістер	145
5.4.3 Бағыт бойынша туындылар және дербес туындылар	146
5.4.4 Векторлық өрістің дивергенциясы.....	147
5.4.5 Тензорлық өрістің дивергенциясы.....	147
5.4.6 Гаусс-Остроградский формуласы	148
5.4.7 Лаплас операторы	149
5.5 Қарапайым дифференциалды теңдеулер.....	150
5.5.1 Коши есебі.....	150
5.5.2 Вариациялы теңдеу.....	151
5.5.3 Эйлер формуласы	151
6-тарау. Дифференциалдық сақталу заңдары	156
6.1 Массаның сақталу заңының дифференциалдық аналогы.....	156
6.1.1 Анықталу облысы және функциялардың сыптығырлығы.....	156
6.1.2 Интегралдық сақталу заңдарын түрлендірудің жалпы сызбанұсқасы	156
6.1.3 Толық туынды.....	157
6.1.4 Дифференциалдау және интегралдау амалдары- ның орындарын алмастыру	158
6.1.5 Үзілісті еместік теңдеуі.....	159
6.2 Импульстің сақталу заңы.....	160
6.2.1 Импульстің интегралдық сақталу заңы жазылуы- ның жаңа түрі	160
6.2.2 Кернеу тензоры.....	160
6.2.3 Импульстің сақталу заңы.....	164
6.2.4 Импульс моментінің сақталу заңы.....	165
6.2.5 Кернеулер тензорының симметриялығы	165
6.3 Жылу ағынының теңдеуі.....	167
6.3.1 Жылу ағынының векторы	167
6.3.2 Деформация жылдамдықтарының тензоры	167
6.3.3 Жылу ағынының теңдеуі.....	168
6.4 Тұтас ортаның дифференциалдық моделі.....	169
7-тарау. Тұтас орта термодинамикасы.....	173
7.1 Термодинамиканың бірінші бастамасы.....	173
7.1.1 Тұтас ортадағы термодинамикалық эффектiлер.....	173
7.1.2 Күй параметрлері.....	173

7.1.3 Тұтас орталар үшін күй параметрлерінің саны жайлы	175
7.1.4 Анықтаушы параметрлердің толық жүйесі	176
7.1.5 Үдерістер мен циклдер	177
7.1.6 Жүйенің сыртқы объектілермен әсері	178
7.1.7 Термодинамиканың бірінші бастамасы. Энергия-ның сақталу заңы	180
7.1.8 Жүйенің ішкі энергиясы	182
7.1.9 Термодинамикалық тепе-теңдік	183
7.2. Термодинамиканың екінші бастамасы. Энтропия	184
7.2.1 Жылу мөлшері	185
7.2.2 Абсолют температура және энтропия	185
7.2.3 Термодинамиканың екінші бастамасы	186
7.3. Термодинамика аксиомалары	187
7.3.1 Термодинамиканың негізгі аксиомасы	187
7.3.2 Локаль тепе-теңдік аксиомасы	187
7.3.3 Клаузиус-Дюгем теңсіздігі	188
7.3.4 Фурье аксиомасы	189

8-тарау. Тұтас органың деформациясы және анықтаушы теңдеулер	191
8.1 Деформация және деформация жылдамдықтарының тензорлары	191
8.1.1 Тұтас органың деформациясы	191
8.1.2 Лагранждың деформация тензоры	192
8.1.3 Эйлердің деформация тензоры	194
8.1.4 Деформация тензоры	194
8.2. Анықтаушы теңдеулер	194
8.2.1 Себептік принципі	195
8.2.2 Кеңістік төңіректеу принципі	195
8.2.3 Санақ басы	196
8.2.4 Санақ басынан тәуелсіздік принципі	198
8.2.5 Негізгі тензорлардың индифференттілігі	198
8.2.6 Мысалдар: сұйықтықтар мен газдар	200
8.2.7 Мысал: серпімді денелер	201
8.2.8 Мысал: жылу ағынының векторы үшін анықтаушы теңдеу	202
8.3 Изотроп функциялар	202
8.3.1 Изотроп функция түсінігі	202
8.3.2 Симметриялық функцияларды өрнектеу	203
8.3.3 Изотропты тензорлық функцияларды олардың инварианттары арқылы өрнектеу	204

8.3.4	Изотроп скаляр функцияларды өрнектеу	208
8.3.5	Изотроп векторлық функцияларды өрнектеу	208
9-тарау.	Сұйықтықтар модельдері.....	211
9.1	Сұйықтықтың дифференциалдық моделінің тұйықталуы	211
9.1.1	Күйдің негізгі теңдеуі.....	211
9.1.2	Күй теңдеуінің біртектілігі	211
9.1.3	Күй теңдеуіне қатысты аксиомалар	212
9.1.4	Сұйықтықтың бірінші тұйық моделі	214
9.2	Сұйықтықтың классикалық моделі.....	214
9.2.1	Сызықтық аксиомасы	215
9.2.2	Сұйықтықтың классикалық моделінің теңдеуі.....	215
9.3	Сығылмайтын сұйықтықтар модельдері	217
9.3.1	Сығылмайтын сұйықтық.....	217
9.3.2	Жылу құйылысының теңдеуі.....	219
9.3.3	Идеал сұйықтықтың моделі	220
10-тарау.	Компьютерлік математикалық модельдеу элементтері	222
10.1	Қыздырылған денелердің суынуын модельдеу	223
10.2	«Жыртқыш-құрбан» биожүйесінің моделі	234
10.2.1	Есептің қойылымы	234
10.2.2	Биологиялық жүйенің математикалық моделі	235
10.2.3	Математикалық модельді зерттеу	235
10.2.4	«Жыртқыш-құрбан» моделін кеңейту	240
10.2.5	«Жыртқыш-құрбан» биожүйесінің кеңейтілген моделін зерттеу	240
10.3	Балка параметрлерін тиімдеу есебі.....	245
10.3.1	Есептің қойылымы	245
10.3.2	Есептің математикалық моделін құру	246
10.3.3	Есепті өлшемсіз түрге келтіру.....	248
10.3.4	Математикалық модельдің есепті дұрыс сипаттауын тексеру	249
10.3.5	Шеттік есепті шешу әдісін таңдау	250
10.3.6	Балканың максимал иілуін минимумдау есебі	253
10.4	Жылудың тарқалу үдерісін модельдеу	255
10.4.1	Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер	255
10.4.2	Айырымдық сұлбалар. Негізгі түсініктер мен анықтамалар	260
10.4.3	Жылуеткізгіштік теңдеуін сандық шешу	265
	Әдебиеттер.....	296

АЛҒЫ СӨЗ

XX ғасырдың 40-50 жылдарында дүниеге келген электрондық есептеуіш машиналары (ЭЕМ) өзінің маңызы бойынша адамзат тарихындағы кез келген ұлы техникалық жетістіктермен қатар тұрады деп есептеуге болады. Сонымен қатар, олардың ерекше, арнайы рөлін айта кеткен жөн. Әдетте, машиналар техникалық құрылғы/құрал ретінде еңбек үдерісінде адамдардың физикалық мүмкіндіктерін кеңейтетін болса, ЭЕМ олардың интеллектуалды көмекшілері қызметін атқарады. ЭЕМ негізінде математикалық әдістердің барлық салаларда кең қолданылуы нәтижесінде нақты болмыстың заңдарын зерттеудің жаңа тиімді әдістері пайда болды. Есептеуіш машиналары еңбек өнімділігін арттыру, өндірісті дамыту, басқару үдерістерін жетілдірудің жаңа мүмкіндіктеріне жол ашты.

Ғылым, техника, экономика, басқару салаларында математикалық әдістерді тиімді қолдана білу терең базалық математикалық білімге ие, ЭЕМ қолдану технологиясын жетік меңгерген, олардың үлкен мүмкіндіктерін жүзеге асыра алатын жоғары білікті мамандарды дайындау қажеттілігін келтіріп шығарды. ЭЕМ адамның бағыттаушы әсерінсіз өз бетінше жұмыс істей алмайтындығы белгілі. Оларды пайдалану математикалық модельдер мен есептеу алгоритмдерін құру, бағдарламалық қамтамасыздандыру, есептеу нәтижелерін визуалды бейнелеу және т.б. көптеген мәселелермен байланысты. Осындай күрделі де ауқымды кешенді мәселелерді шешу қолданбалы математика саласы мамандарының қызметі болып, оларды дайындау мақсатында еліміздегі бірқатар жоғары оқу орындарында математикалық және компьютерлік модельдеу мамандықтары ашылды.

Математикалық модельдеу соңғы 15-20 жылда өзіне тән зерттеу объектілері, жандасулары мен әдістері бар жеке пәнаралық білімдер саласы болып қалыптасты деп айтуымызға болады. Сондықтан жоғары оқу орындарында математикалық модельдеу мамандарын мақсатты дайындау мәселесінің маңыздылығы арта түсуде.

Осы бағыттағы мамандарды дайындаудағы білім беру үдерісін жүзеге асыру сәйкес әдістемелік қамтамасыздандырудың болуын қажет етеді. Соңғы жылдары баспадан шыққан көптеген тамаша оқулықтар, оқу құралдары, монографиялар мен ғылыми мақалалар негізінен орыс және ағылшын тілдерінде жарық көрді. Олардың қатарына бірінші кезекте А. А. Самарский, Н. Н. Моисеев, Г. Г. Малинецкий, С. П. Курдюмов, В. С. Зарубин және т.б. көптеген ғалымдардың еңбектерін атасақ та жеткілікті. Ал қазақ тілінде матема-

тикалық модельдеуге қатысты жазылған оқу құралдары аз болды, оларға деген қажеттілік күн санап артып келеді.

Ұсынылып отырған оқулық кіріспеден, он тараудан тұрады. Кіріспе бөлімінде математикалық модельдеу мағынасына қысқаша сипаттама берілген.

1-тарауда модель түсінігі, модель анықтамасы, модельге мысалдар, модельдер және математикалық модельдер классификациясы келтірілген.

2-тарау математикалық модельдерді құрудың жалпы принциптеріне арналған. Мұнда математикалық модельді құру кезеңдері, модельдерді құрудағы негізгі принциптер: сақталу заңдары, вариациялық принциптер, аналогия әдісі, модельдер иерархиясы, сызықтандыру тәсілі, есептеу алгоритмдеріне қойылатын жалпы талаптар қарастырылған.

3-тарауда математикалық модельдер мысалдары ұсынылған. Атап айтқанда, биологиядағы популяциялар динамикасы, түрлер арасындағы бәсекелестік модельдері, орнықтылық мәселесі, сондай-ақ экономикалық үдерістердің қарапайым өсу модельдеріне зерттеулер жүргізілген.

4-тарауда тұтас орта механикасының модельдері мен интегралдық сақталу заңдары келтірілген.

5-тарауда тұтас ортаның интегралдық моделінен дифференциалдық моделіне өтуде қажет болатын алгебра, математикалық және функционалдық талдау, дифференциалдық теңдеулер теориясының негізгі түсініктері, формулалары мен қатынастары қысқаша зерделенген.

6-тарауда тұтас ортаның интегралдық моделінен дифференциалдық моделін келтіріп шығару жолдары көрсетілген.

7-тарауда тұтас ортаның математикалық модельдерін тұйықтаушы анықтаушы теңдеулерді келтіріп шығаруда қажет болатын тұтас ортаның термодинамикалық қасиеттері сипатталған.

8-тарауда тұтас ортаның фундаменталды сипаттамасы болған деформация тензоры және анықтаушы теңдеулерді құрудың негізгі принциптері қарастырылған.

9-тарауда сұйықтықтар модельдері қысқаша түсіндірілген.

10-тарауда компьютерлік математикалық модельдеу технологиясы элементтері бірқатар нақты есептерде қарастырылған. Мұнда есептің мағыналы қойылымы мен сипатталуы, есептің математикалық моделін құру, дискрет модельге өту, сандық әдісті таңдау және есептеу алгоритмін құру, оны компьютерде бағдарламалық жүзеге асыру, сондай-ақ нәтижелерді талдау және оларды визуалды бейнелеу сынды мәселелер қарастырылған.

КІРІСПЕ

Қазіргі ғылым мен білім саласын математикалық модельдеудің кең қолданылуынсыз көз алдымызға елестету қиын. Математикалық модельдеудің мағынасы бастапқы объектіні оның «бейнесімен» – математикалық моделімен – алмастыру және әрі қарай осы модельді компьютерлерде жүзеге асырылатын есептеу алгоритмдері көмегімен зерттеу болып табылады. Бұл танымдық әдіс бойында теория мен тәжірибенің көптеген артықшылық жақтары бар [20, 45]. Объектінің (құбылыстың, үдерістің) өзімен емес, оның моделімен жұмыс жасау салыстырмалы түрде тез және елеулі шығындарсыз оның қасиеттері мен жағдайын зерттеуге мүмкіндік береді. Сондай-ақ объектілердің модельдерімен қазіргі заманғы есептеу әдістеріне және компьютерлердің зор мүмкіндіктеріне сүйене отырып, есептеу тәжірибелерін жүргізу теориялық әдістер арқылы қол жеткізіп болмайтын жеткілікті деңгейде толық зерттеуге мүмкіндік береді.

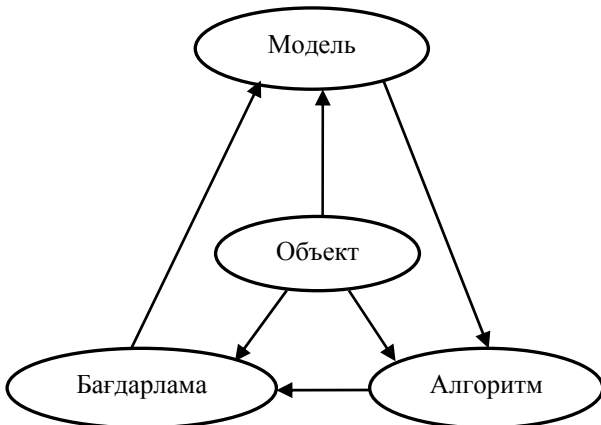
Математикалық модельдеу әдістері бүгінгі күнде қарқынды даму кезеңінде болып, түрлі жаңа техникалық жүйелерді құру және оларды басқарудан күрделі экономикалық және әлеуметтік үдерістерді талдауға дейінгі адам іс-әрекетінің көптеген жаңа салаларын қамтуда.

Математикалық модельдеу элементтері математика, физика, география және басқа да жаратылыстану ғылымдарының пайда болуымен қатар қолданыла бастағаны белгілі. Кейбір есептеу әдістері ұлы ғалымдар Ньютон және Эйлер есімдері арқылы аталуы кездейсоқтық емес, сондай-ақ «алгоритм» сөзі біздің дәуіріміздің ІХ ғасырында өмір сүрген Хиуа қаласы тумасы, Орталық Азияның ғұлама ғалымы әл-Хорезми (шын аты Мұхамед бен Мұса) есімімен байланысты.

Математикалық модельдеудің екінші рет «дүниеге қайта келуі» ХХ ғасырдың 40-50-жылдары аралығына тура келіп, ол негізінен екі себепке байланысты: біріншісі – ЭЕМ-ның пайда болуы және КСРО (Кеңестік Социалистік Республикалар Одағы) мен АҚШ (Америка Құрама Штаттары) мемлекеттерінің ракеталық-ядролық қорғаныс жүйелерін құруы, екіншісі – дамыған жетекші мемлекеттердің ғарышты игерудегі ұлттық бағдарламаларын жүзеге асыруға кірісуі. Ядролық жарылыстар мен жасанды жер серіктерінің ұшулары алдын ала математикалық модельдер көмегімен ЭЕМ-ларында орындалып, соңынан іс жүзінде практикада жүзеге асырылды. Осы салалардағы үлкен жетістіктер математикалық модельдеу әдістерінің кейінгі даму бағыттарын анықтауға өз септігін тигізді және қазіргі күнде бірде бір үлкен масштабтағы күрделі ғылыми-техникалық, эколо-

гиялық немесе экономикалық жобалар математикалық модельдеуді қолданбастан жүзеге аспайды.

Бүгінгі таңда ақпараттық қоғамның жаңа мүмкіндіктері жағдайында математикалық модельдеу дамуының үшінші кезеңі басталғанын айта кеткен жөн. Ақпараттық ресурстарды басқаруды тиімді игерместен адамзат қоғамының алдында тұрған маңызды мәселелерді шешу жайлы ойлаудың өзі орынсыз болар еді. Бастапқы шикі өңделмеген ақпарат талдау, болжау, шешім қабылдау мен оның орындалуын бақылау үшін пайдасы аз болатыны белгілі. Осындай ақпараттық шикізатты жаңа өнімге, яғни нақты білімдерге айналдыратын сенімді әдістер мен тәсілдер қажет. Математикалық модельдеу ақпараттық технологиялардың, қоғамды ақпараттандырудың жалпы үдерісінің интеллектуалдық түпқазығы бола алады және болуы да керек. Қандай да бір объектіні, үдерісті немесе құбылысты математикалық модельдеу жайлы сұрақтың қойылымының өзі анық іс-әрекеттерді келтіріп шығарады. Оны шартты түрде үш кезеңге бөлуге болады: модельді құру, алгоритмді таңдау, бағдарламаны құру (К.1-сурет). Бірінші кезеңде объектінің маңызды қасиеттерін – ол бағынатын заңдар, оның бөліктеріне тән байланыстар және т.б. – математикалық формада бейнелейтін оның «эквиваленті» таңдалады немесе құрылады. Математикалық модель теориялық әдістермен зерттеледі, олар арқылы объект жайлы бастапқы маңызды білімдер алу мүмкін болады.



К.1-сурет. Математикалық модельдеу элементтері

Екінші кезең – модельді компьютерде жүзеге асыру үшін алгоритмді таңдау немесе құру. Модель сандық әдістерді қолдану үшін

ыңғайлы түрде берілуі тиіс, ізделінетін шамаларды берілген дәлдікпен табу үшін орындалуы қажет есептеу және логикалық амалдар тізбегімен анықталады. Есептеу алгоритмдері модельдің негізгі қасиеттерін бұрмаламауы тиіс, үнемді және шешілетін есептердің ерекшеліктеріне бейімделген болуы керек.

Үшінші кезеңде модель мен алгоритмді компьютер түсінетін тілге аударатын бағдарлама құрылады. Оларға да үнемділік пен бейімделгендік талаптары қойылады. Оларды компьютерде тікелей сынақтан өткізуге дайын зерттелетін объектінің «электрондық» эквиваленті деп атауға болады.

Құрылған «модель-алгоритм-бағдарлама» үштігі зерттеушіге әмбебап және шығын көп қажет етпейтін зерттеу сайманы қызметін атқарып, ол алдымен қалыпты күйге келтіріледі, «тексеру» есептеу тәжірибелерінде тестіленеді. Үштіктің бастапқы объектіге адекваттылығына (жеткілікті сәйкестілігіне) көз жеткізілгеннен соң модельмен объектінің талап етілетін барлық сапалық және мөлшерлік қасиеттері мен сипаттамаларын беретін түрлі «тәжірибелер» жүргізіледі. Қажеттіліктерге қарай, модельдеу үдерісінде үштіктің барлық бөліктерін жақсарту мен нақтылау жүргізіледі.

Математикалық модельдеу нақты қолданбалы үдерістер мен құбылыстарды зерттеу методологиясы ретінде математиканы, физиканы, биологияны және басқа да ғылыми пәндерді өзімен алмастырмайды. Керісінше, түрлі әдістер мен жандасуларға сүйенбей – сызықтық емес модельдерден қазіргі заманғы бағдарламалау тілдеріне дейін – математикалық модельдеудің үштігін құру мен оны қолдану мүмкін емес.

Математикалық модельдеудің ғылымда, техникада және басқару салаларында кең қолданылуындағы негізгі кедергі – білікті мамандардың жетіспеушілігі. Математикалық модельдеу саласының маңына қойылатын талаптар жоғары, сонымен қатар олардың қайшылықты болуы. Бір жағынан, ол белгілі бір зерттеу саласын терең білетін кәсіби маман болуы керек. Ал екінші жағынан, ол мәселені тұтастай көре алатын және нақтылауға қабілетті, кейбір жағдайларда физиктер, механиктер, химиктер немесе биологтар қойған есепті түбегейлі өзгерте алатын маман ретінде өзін жиі көрсетуіне тура келеді.

Математикалық модельдеу саласында жұмыс жасау өзіндік ойлау қабілетінің болуын көзде тұтып, онда тереңдік пен нақтылық жалпы идеялардың кеңдігі мен оларды түсінумен үйлесім табады.

Сондықтан математикалық модельдеу негіздерімен танысу және оқып үйрену қазіргі заманғы жоғары білім саласында маңызды орын алады.

1-тарау. МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ

1.1 Модель түсінігі

Ғылыми таным біздің санамыздан тыс болған және *зерттеу объектілері* деп аталатын құбылыстар мен үдерістерді зерттеуге бағытталған. «Модель» сөзі латын тілінің «modulus» сөзінен шыққан, *өлшем, үлгі* деген мағынаны білдіреді. Бұл термин біздің эрамыздан бірнеше ғасыр бұрын құрылыс мәдениеті еңбектерінде пайдаланылған. Қазіргі заманғы қолданыста модель түсінігімен киімдер үлгілері, кемелер мен ұшақтардың кішірейтілген көшірмелерінен бастап математикалық теңдеулер мен есептеу алгоритмдеріне дейінгі санап болмайтын материалдық объектілер және таңбалық құрылымдар байланысқан.

Модель түсінігі ғылыми зерттеулерде, жобалау-конструкторлық, техникалық, инженерлік жұмыстарда, білім беру саласында кең таралған. Кез келген ғылым түрлі нақты құбылыстар мен үдерістердің жалпы заңдылықтарын анықтау үшін нақты болмыстың белгілі бір *абстракциясын* пайдаланады. Мысалы, физикада мектеп курсынан белгілі «математикалық маятник» абстракциясы зерттеледі. Осы аталған бір абстракциямен сипатталатын нақты құбылыстар көп болуы мүмкін:

1. Кран тросына ілінген мырыш шарының тербелісі;
2. Қаладағы ескі мұнаралы сағат маятнігінің тербелісі;
3. Фуко маятнігінің тербелісі және т.б.

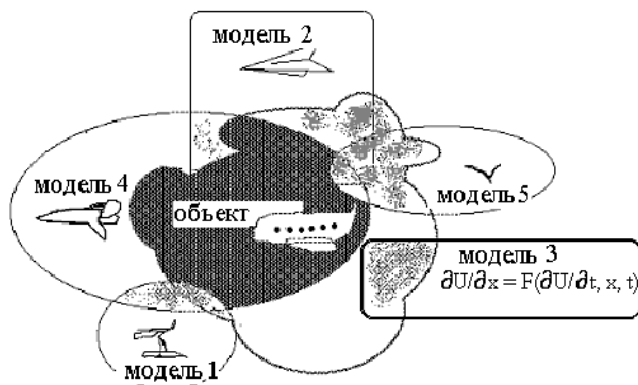
Басқаша айтқанда, түрлі объектілер арасында қандай да бір ұқсастық бар болып, оның негізінде ғылымда абстракция құру мүмкін болады. Егер зерттеу мақсаттары тұрғысынан екі объект арасында ұқсастық бар болатын болса, онда біреуінің орнына екіншісін зерттеуге болады. Біріншісі *түпнұсқа* (оригинал) деп, ал екіншісі – *модель* деп аталады. *Модель* – түпнұсқаның орнын алмастырушы болып, белгілі бір шарттарда оның кейбір қасиеттерін зерттеуге мүмкіндік береді. Мұнда ұқсастық формасы, түсі, өлшемі, құрылымы және т.с.с. барлық сипаттамалары бойынша болмауы мүмкін. Ұқсастық зерттеу объектісі болған қасиеттерде ғана болса жеткілікті. Мысалы, жылдамдығы дыбыс жылдамдығынан жоғары болған ұшақтың қобалжытуынан тарқалатын толқындарды зерттеу үшін осы құбылыстың көл бетіндегі қайық қозғалысынан туындайтын толқындардың таралуымен ұқсастығын пайдалану мүмкін.

Модель деп біз қасиеттер жиыны модельдеу мақсатына жету үшін маңызды болған түпнұсқаның қасиеттері жиынымен қиылысатын қандай да бір идеал образдар, материалдық немесе таң-

балық конструкцияларды түсінеміз. Модельді құру мен пайдалану үдерісі **модельдеу** деп аталады.

Мұнда түпнұсқа немесе объект дегенде модельдеудің өзі бағытталған – зат, құбылыс, үдеріске айтылады. Идеал образдар – адамның ойындағы оның басындағы нәрсе; таңбалық конструкциялар – формулалар, графиктер, символдар тізбегі және т.с.с. түріндегі абстракциялар. Қасиеттер жиыны – қасиеттердің жиынтығы, ал қиылысу – олардың дәлме-дәл түсуі. Басқаша айтатын болсақ, модель – адам өзінің максаттарын жүзеге асыру үшін құратын және/немесе пайдаланатын, өзінің қасиеттері бойынша түпнұсқаға ұқсас болатын қандай да бір идеал образдар, материалдық немесе таңбалық конструкциялар.

Осы айтылғандарды тікұшақты модельдеу мысалында төменде келтірілген 1.1-сурет бейнелейді. Сурет жазықтығының әрбір нүктесі қандай да бір қасиетке сәйкес келеді деп есептейміз: ақ, көк, металдық, жоспарлайды және т.с.с., ал сызықтар объект және модельдер қасиеттері жиындарын шектейді. Модельдер қасиеттері көп немесе аздау, түрлі болуы мүмкін. Олар объектіге қарағанда күрделірек құрылымды болуы да мүмкін. Модель мен объект қасиеттерінің қиылысу аймақтары да шамалары бойынша әртүрлі – өте кішіден (микроскопиялық) бір жиынның екіншісін өз ішіне алуына дейін болуы мүмкін. Белгілі бір модель түрін таңдау модельдеу мақсатымен анықталады. Мысалы, тікұшақ формасын модельдеу үшін заттың астына қойғышқа орналастырылған оның кішірейтілген көшірмесін алуға болады (1-модель); мұнда қиылысу аймағына жазықтықтың, мысалы, элементтер пропорциялары мен түсіне сәйкес келетін нүктелері түседі.



1.1-сурет. Модель анықтамасына мысал. Қасиеттер қиылысуының аймақтары штрихталған, объект үшін олар қалың сызықтармен, модельдер үшін жұқарақ сызықтармен шектелген.

Жақсырақ жоспарлау қабілеттілікті тікұшақтың қағаздан жасалған кішірек үлгісі модельдейді (2-модель) – арнайы қайыстырылған қағаз парағы. Бұл жағдайда қасиеттер қиылысуы аймағына осындай ұшуға жауапты қасиеттер кіреді, ал түс пен форманың маңызы болмайды. Тікұшақ қанаттарының вибрациялануы қабілеттіліктері математикалық теңдеулер көмегімен модельденуі мүмкін (3-модель). Бұл жағдайда тікұшақ қанаттарының қозғалысы мен модельдік теңдеу шешімдерінің тербелістік-толқындық сипаты дәлме-дәл түседі. Ауада қозғалу қабілеттілігі бойынша тікұшақ құсқа (5-модель) ұқсайды, бірақ ұшу принципі құстарда мүлдем басқаша, сондай-ақ биологиялық жүйелердің ұйымдастырылу деңгейі өзгеше, жоғары болады. Тікұшақтың жеткілікті деңгейдегі толық моделі ретінде кез келген басқа тікұшақтарды (4-модель) пайдалануға болады, бірақ толықтай өзіне ұқсас тек қана өзі бола алады. Келтірілген сурет те біздің анықтаманың моделі болады.

Біздің әрбіріміздің басымызда жинақталған білімдеріміз шкафтағы киімдеріміздің жиынтығына – гардеробымызға ұқсаған болады. Осы жиынтық қаншалықты көп және сан алуан болса, соншалықты біздің болып жатқан оқиғаларды бағалау мүмкіндігіміз кең болады. Осы ретте мынадай фантастикалық аңызды айта кеткенді жөн көрдік.

«... Терезенің сыртынан қатты ысқырынған дыбыс естіліп, соңынан үлкен терезе айнасы шытынап сынып, жан-жаққа шашырады және жаздың таза ауасымен бірге бөлмеге жартылай көмескі, дерлік көрінбейтін, жағал-жағал және үсті сұйықтық секілді белгісіз бір нәрсе ұшып келді және тура залдың ортасына топ етіп құлап түсті. Дүкендегі сатылымға келгендердің ішінен фантастикаға қызығатын біреуінің аузынан «Келгінді» – деген сөз шығып кетті. Қорқыныштан кері шегініп кеткен сатушылар мен сатып алушылар, дүкенді жай аралап жүргендер, оқиға орнында болған екі полиция қызметкері мен қайдан пайда бола кеткені белгісіз теледидар жүргізушілері белгісіздің маңайында аңтарылып тұрып қалды. Ол қозғалмады және уақыт өткен сайын ерте көктемдегі және кешкі күздегідей терезенің айнасын алғаш және соңғы рет жуғандағыдай көрінбейтін болып бара жатты.

Адамдар көбейе түсіп, дүкен тола бастады. Онда қызу талқылау жүріп жатты: Ғарыш бізге кімді жіберген? Фантастикалық әдебиетті оқымаған көпшілік белгісіз нәрсе адам деп ойлады, бірақ қандай да бір деформацияланған, өзгеше, адамға онша ұқсамайды. Бірақ бұл жағдайда оның басы болуы керек қой! Алдыңғы қатардағылардың ішінен батылдары мен пысықтары осы пікірді тексеріп көруді

ұсынды. Қандай да бір жаман нәрсені жұқтырып алып, күйіп қалмау үшін сөрелердегі және дүкен шкафтарында тола болған киімдер модельдерін оған тиместен өлшеп көруге келісті. Жақын тұрған шкафтардың бірінен бас киімнің түрлі үлгілері мен өлшемдері бар болып шықты және оларды оның үстіне кигізе бастады. Бас киімдер шынында орнына түсті, алайда толықтай тегіс емес, бірақ түсіп те кеткен жоқ. Бәрінен орнына жақсы қонғаны жасөспірімдердің шаңғылық кішілеу бас киімі болды. Сондықтан мұндай дене үшін кішкентай болса да, адамдар оның басы шынында бар деп шешті (1.2-сурет). Теледидар жүргізушілері көршілерін жұлқылай итере, келгіндінің адамға ұқсастығы жайлы жаңалықты редакцияларына хабарлау үшін бірінші болып телефонға жүгірді. Осы арада алдыңғы қатарлардағы зерттеушілер логикаға сай адамға тән басқа да сипаттардың бар ма екендігін тексере бастады. Аздаған әрекеттен соң оған жейде мен шалбар кигізді. Бұл енді адамға туыстас тіршілік иесінің келуінің айқын дәлелі болды – бізде де қол мен аяқ бар. Алдыңғы қатардағы белсенділер күшімен зерттеулер тоқтаған жоқ. Шалбардан төмен етік кигізілді, бірақ олар жақсы қонып отырған жоқ, аяқта айналып тез түсіп қалды. Таңдануға болмайды: себебі әдеттегіден өзгеше адам ұшып келген, мүмкін табандары жетілмеген мүгедек болуы мүмкін.



1.2-сурет. Аңызға иллюстрация

Бұл болжаммен соңғы қатардағы адамдармен қоса барлығы келісті, себебі оларға ештеңе көрінбеген болатын. Мәселеге қызығушылық бәсеңдеп, адамдар жайлап тарай бастады. Теледидар жүргізушілері жаңа сенсациялар іздеп кетті. Келгінді адамның алдында қонақтың қауіпсіздігі мен оны Ғылым Академиясының жақын маңдағы институтына көшіруді ұйымдастырған жергілікті әкімшілік өкілі, бірнеше тамашалап тұрғандар мен дүкен сатушысынан басқа үстіндегі киген киімі өте қарапайым, түрі кәдімгіден сәл өзгешелеу ең табанды жалғыз зерттеуші қалды. Сөрелерден түрлі киімдер мен етіктерді алып оларды өзіне берген көмекші балалар жәрдемімен ол өзінің қолына түскен киім үлгілерін келгіндіге өлшеп, кигізуін жалғастырды. Табандылық жаңалықпен марапатталды – аяқтан басқа, етіктер «дерлік адамның» бүйіріне жақсы қонып орналасты – жейденің бүйір қалталары маңайына! Бұл басқалардың назарынан тыс қалған жоқ. Бөлме ішінде сыбыр басталып, сәлден кейін жуан дауыстар шықты: «Бұл өзі адам ба? Адамдарда бүйірлерінде аяқтар болмайды!». Шуға қызығушылар жинала бастады, қайдан екені белгісіз теледидар жүргізушілері қайтадан пайда болып редакцияларына келгіндінің адамға ұқсамайтындығын хабарлауға кірісті және бұл оқырмандарды қызықтырмауы мүмкін емес еді. Дүкендегі түсінбеушілік оқиғаны қызықтап тұрған, мұхиттарды жүзіп өткен және көпті көрген, бұрын теңізші болған бір адамның: «Бұл сегізаяққа ұқсаған емес пе!» – деп айтқан сөзіне дейін жалғасты. Зерттеуші көмекшілерімен бұл болжамды тез арада тексерді. Нәтижелер сенім ұялататын еді – көптеген «қармауыштар» табылып, оларға шалбарлар мен жейделер, қалпақтар мен етіктер кигізілді, алдын түсінбегендіктен оларды адамның басы мен сирақтары деп ойлаған еді. Соншалық аяқ-қолдар адамда болмайды. Бір сағаттан кейін жаңа сенсация газет оқырмандары мен радио тыңдармандарын таңғалдырды...»

Осы келтірілген аңыз көп жағынан пайдалы болары сөзсіз. Адамдар келгіндіде өздерінде бейне болып қалыптасқан нәрсені іздеді. Барлығының басына келген бірінші ой – адам бейнесі. Олардың ішінде басында сегізаяқтың бейнесі болған теңізші болмағанда екінші болжам болмаған немесе көп уақыттан кейін пайда болуы мүмкін еді. Табиғаттағы үдерістерді зерттеп білуде де әзірге белгісіз болған модельді генерациялап (келтіріп) шығаратын ғалымның орны жетекші болады. Біз – адамдар – көргендерімізден білгендерімізді, ненің моделі қолымызда бар, тек соларды ғана қабылдаймыз.

Ежелгі дәуір ғалымдарының мыңжылдық зерттеулері гелиоцентрлік теорияның дұрыстығын растады: қазір де Күн Жерді шы-

ғыстан батысқа қарай аспан жүзінде «айналып» шығады. Ал бүгінгі таңда кез келген мектеп оқушысы мұны Жердің өз осі бойынша айналуы себебінен екендігін түсіндіре алады. «Көз сана көрмеген нәрсені көре алмайды. Сенің ақыл-ойың нені қабыл алса, соны көзіңмен көре аласың» (М. А. Беделъ) [45].

XVII ғасырдағы үнді ақынының осы сөздерінің дұрыстығының қазіргі заманғы мысалдарына динамикалық хаос феноменінің анықталуын келтіруге болады.

XX ғасырдың орталарына дейін сызықтық болмаған динамикалық жүйелердегі алдын ала болжап болмайтын хаос жағдайы қарастырылатын жүйелердің күрделілігімен, көп элементтілігімен (молекулалар жиынтығы, құрылымдық реттелмегендік және т.б.) байланыстырылатын. Бірақ XX ғасырдың 60-жылдарында хаос жайлы қазіргі заманғы түсініктер мен ұғымдар, теория қалыптасқаннан соң және қарапайым кіші өлшемді хаосты динамикалық модельдер пайда болғаннан кейін жалпылық түсінушілік қалыптаса бастады, регуляр болмаған, қайталанбайтын қозғалыстарды көптеген қарапайым механизмдерде де күзетуге мүмкіндік туды. Ол үшін модельдерге сызықтық емес бейнелеулер үлгілері мен хаостық сипатқа ие дифференциалдық теңдеулерді ендіруге қажет болды.

Толықтық үшін «модель» және «модельдеу» түсініктерін талқылауды қорытындылауда түрлі салалардағы белгілі ғалымдардың модель жайлы айтқан кейбір сөздерін келтіріп өтеміз. Белгілі философ ғалым М. Вартовский модель жайлы: «Модель – бардың тек қана көшірмесі емес, сонымен бірге болашақ практиканың бейнесі. Біз модельдер көмегімен білімдерді аламыз» – дейді [9].

Ал математикалық модельдеу саласының жетекші ғалымдарының бірі, академик Н. Н. Моисеев модель туралы: «...Біз нақты болмысты жуық сипаттайтын бейнелермен ғана ойлай аламыз. Философтар айтқандай, абсолют білім, абсолют ақиқат объектив дүниенің белгілі бір жақтарын жуық бейнелейтін салыстырмалы ақиқаттардың шексіз асимптотикалық тізбесі арқылы танылады. Осы салыстырмалы ақиқаттар модель немесе модельдік сипаттау деп аталады ...» – дейді [37].

1.2 Модельдер классификациясы

«Модель» ұғымының бір мәнді еместігі, модельдеу түрлерінің көптігі мен олардың күн санап арта түсуі бүгінгі күнде барлық сала мамандарын қанағаттандыратын модельдер классификациясын құруды қиындатады. Кез келген күрделі құбылыстар мен үдерістерді

классификациялау сияқты модельдерді классификациялау да күрделі және көпжақты сипатқа ие. Мұның объектив себебі – зерттеушіні объектінің, құбылыстың немесе үдерістің бір немесе бірнеше қасиеті қызықтырады. Сондықтан классификациялау негізіне көптеген түрлі классификациялық белгілерді: сипаттау тәсілі, функционалдық қызметі, құрылымдық қасиеттері, қолданыс аймағы және т.б. алуға болады. Модельдерді классификациялауда біз [11] келтірілген классификацияға жүгінеміз.

Модельдеуді зерттеудің эмпирикалық және теориялық деңгейде пайдалану модельдері шартты түрде материалдық және идеал деп бөлуге алып келеді.

Материалдық модельдеу – бұл сондай модельдеу болып, мұнда объектіні зерттеу осы объектінің негізгі физикалық, геометриялық, динамикалық және функционалдық сипаттамаларын келтіріп шығаратын оның материалдық аналогын пайдалану арқылы орындалады. Мұндай модельдерге, мысалы, сәулет құрылысындағы макеттерді, түрлі көлік құралдарын құрудағы модельдер мен тәжірибелік үлгілерді пайдалануды келтіруге болады.

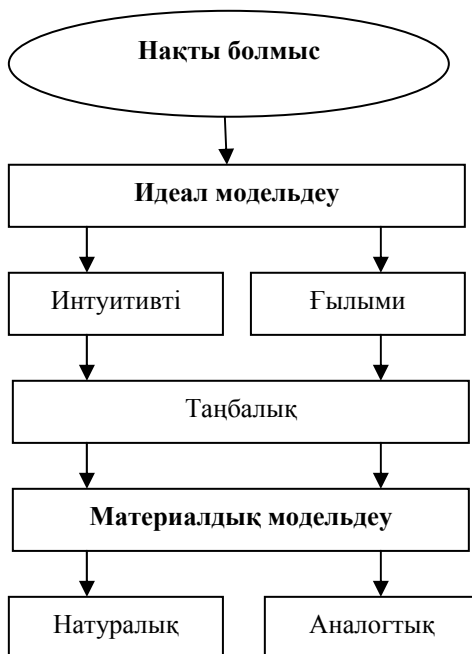
Идеал модельдеу материалдық модельдеуден объектінің аналогы мен моделіне негізделмегендігімен айырмашылық етіп, объектінің идеал, ойдағы моделін басшылыққа алады және әрқашан теориялық сипатта болады.

Идеал модельдеу материалдық модельдеуге қатысты бастапқы болғандықтан (алдымен адамның санасында идеал модель қалыптасады, соңынан оның негізінде материалдық модель құрылады) модельдеу түрлерін 1.3-суреттегідей беруімізге болады.

Осы модельдеу түрлеріне қысқаша тоқталып өтеміз.

Материалдық модельдеу

Материалдық модельдеудің негізгі түрлері: натуралық және аналогтық. Осы екі модельдеу түрі де геометриялық немесе физикалық ұқсастық қасиеттеріне негізделген. Егер барлық сәйкес ұзындықтар мен бұрыштар қатынастары бірдей болса, екі геометриялық фигура ұқсас болады. Егер ұқсастық коэффициенті – масштаб белгілі болса, онда бір фигураның өлшемдерін масштабқа көбейту арқылы оған ұқсас басқа фигураның өлшемдері анықталады. Егер біреуінің берілген сипаттамалары бойынша екіншісінің сипаттамаларын бір бірліктер жүйесінен басқасына өту сияқты жай қайта есептеу арқылы алу мүмкін болса, онда екі физикалық құбылыс ұқсас болады. Құбылыстардың ұқсастық шарттарын зерттеумен ұқсастық теориясы айналысады.



1.3-сурет. Модельдеу түрлері

Ұқсастық теориясы негізінде зерттелетін құбылыстар мен үдерістердің қасиеттерін модельден объектіге көшіру көмегімен зерттеуге мүмкіндік беретін нақты объектіге оның үлкейтілген немесе кішірейтілген материалдық аналогын сәйкес қою арқылы модельдеуді натуралық модельдеу деп атайды.

Натуралық модельдеуге сәулет құрылыстарындағы макеттерді, кеме жасаудағы кемелердің модельдерін келтіруге болады. Модельдеудің ғылыми сала ретінде қалыптасуы XIX ғасырдың орталарында кемелердің натуралық модельдерін зерттеу жұмыстарынан бастау алды, ал модельдердің өзі жаңа техникалық құрылғыларды жобалауда кең пайдаланыла бастады. Үлкен бір кемені құру бірнеше жыл уақытты алатындығы және оның құны елеулі болатындығы кеме жасаушыларды кеменің тиімді параметрлерін табудың арзан және қысқа уақыт кететін тәсілдері мен әдістерін табуға мәжбүрледі. Бұл мәселенің шешімін табуда көмекке модельдеу келді. Болашақ кемелердің кішірейтілген модельдерін су бассейндерінде қозғалысқа келтіріп және кедергі күшінің шамасын өлшей отырып, конструкторлар кеменің түрлі параметрлерінің (корпусы, көлемі, қозғалтқыш қуаты және т.б.) тиімді шамаларын табудың ұтымды шешімдерін таба алатын болды.

Қазіргі уақытта натуралық модельдеу әдістері кеме, ұшақ, автомобиль, ракета жасау және басқа да салаларда кеңінен қолданылады. Мысалы, жаңа ұшақ жасауда аэродинамикалық трубада сынақталатын натуралық модельдермен жүргізілетін тәжірибелердің маңызы зор. Осы зерттеулер нәтижелері ұшақ фюзеляжын ауа ағындарының ағып өтуі ерекшеліктерін, ұшақтың корпусы мен жеке бөліктерінің тиімді формаларын анықтауға мүмкіндік береді.

Физикалық табиғаты әртүрлі болған, бірақ формаль сипатталуы бірдей (бір математикалық қатынастар, логикалық және құрылымдық сызбанұсқалармен) үдерістер мен құбылыстардың аналогиясына (ұқсастығына) негізделген модельдеуді *аналогтық модельдеу* деп атайды.

Аналогтық модельдеу негізіне түрлі объектілердің математикалық сипатталуларының дәлме-дәл түсуі жатады. Аналогтық модельдерге, мысал ретінде, электрлік және механикалық тербелістер жатады. Олар математикалық тұрғыда бірдей қатынастармен сипатталады, бірақ бір-бірінен сапалық айырмашылық ететін физикалық үдерістерге жатады.

Идеал модельдеу

Идеал модельдеу екі негізгі түрге бөлінеді: *интуитивтік* және *ғылыми*. Бізді қоршаған ортаның жарқын интуитивтік моделіне кез келген адамның өмірлік тәжірибесін келтіруге болады. Осы модельдеу түріне көптеген ғасырлар бойы жинақталған және ұрпақтан ұрпаққа берілетін біліктер мен білімдерді (мысалы, ауруларды дәрілік шөптерді және халықтық медицинаны пайдаланып емдеу қабілеті) жатқызуға болады. Күзегілетін құбылыстардың себептері мен механизмдерін түсіндірмейтін кез келген эмпирикалық (яғни тәжірибе немесе күзету үдерісінде алынған) білімді де интуитивтік деп айтуға болады.

Зерттеу объектісі жайлы интуитивтік түсініктерге (формаль логика позициясы тұрғысынан негізделмеген) негізделген, формальдауға келмейтін немесе оны қажет етпейтін модельдеуді *интуитивтік модельдеу* деп атайды.

Интуицияның, интуитивтік модельдердің ғылымда алатын орны ерекше, қандай да бір жаңа білімдерді оларды пайдаланбай алу мүмкін емес.

Модельдеу объектісін күзету негізінде гипотеза ретінде қабылданған минимал санды болжамдарды пайдаланатын, әрқашан логикалық негізделген модельдеуді *ғылыми модельдеу* деп атайды.

Ғылыми модельдеудің интуитивтік модельдеуден басты айырмашылығы модельдеудің өзінде қажет амалдар мен іс-әрекеттерді

орындауды білуде ғана емес, сонымен бірге мұнда пайдаланатын «ішкі» механизмдерді де білу болып табылады.

Модель ретінде қандай да бір түрдегі таңбалық кескіндерді: сызбанұсқаларды, графиктерді, символдар жиынтығын және т.б., сондай-ақ таңдалған таңбалық құрылымдар мен элементтермен орындалатын амалдар заңдары мен ережелерін пайдаланатын модельдеуді *таңбалық модельдеу* деп атаймыз.

Мұндай модельдерге мысал ретінде, кез келген алгоритмдік тілді, химиялық формулалар тілін, музыкалық шығармаларды жазуға арналған нота тілін және т.б. келтіруге болады. Таңбалық форма ғылыми, сонымен қатар интуитивтік білімдерді де беру үшін пайдаланылады. Математикалық қатынастар көмегімен модельдеу де таңбалық модельдеуге жатады.

Когнитивтік, концептуалдық және формалдық модельдер

Жоғарыда атап өтілгендей, түпнұсқа – объектіні күзетуде зерттеушінің басында объектінің қандай да бір ойша образы, оның идеал моделі қалыптасады, оны ғылымда *когнитивтік* модель деп атайды [56]. Мұндай модельді құра отырып, зерттеуші нақты сұрақтарға жауап беруге әрекет етеді, сондықтан объект, құбылыс немесе үдерісте маңызды болмаған жақтары оны ықшам және түсінікті сипаттау, зерттеу мақсатында қарастырылмайды.

Когнитивтік модельді табиғи тілде бейнелеуді *мағыналы* модель деп атайды.

Когнитивтік модельдер субъективті сипатқа ие, себебі олар зерттеушінің «басында» оның алдыңғы барлық білімдері мен тәжірибесі негізінде қалыптасады. Когнитивтік модель жайлы түсінікті оны таңбалық формада сипаттап қана алуға болады. Когнитивтік және мағыналы модельдерді эквивалент деп тұжырымдауға болмайды, себебі, когнитивтік модельде зерттеуші сипаттай алмайтын немесе сипаттағысы келмейтін элементтер болуы мүмкін. Сонымен қатар егер мағыналы модельді басқа біреу сипаттаған немесе ол ұжымдық шығармашылық өнім болса, онда оны интерпретациялау, түсіну деңгейі, сенімділік дәрежесі интерпретаторға байланысты айтарлықтай өзгеруі мүмкін. Жаратылыстану пәндері мен техникада мағыналы модельді көбінесе мәселенің техникалық қойылымы деп атайды.

Функционалдық белгілері және мақсаттары бойынша мағыналы модельдер сипаттамалық, түсініктемелік және болжамдық болып жіктеледі. *Сипаттамалық* модель деп объектінің кез келген сипатталуын айтуға болады. *Түсініктемелік* модель не себептен бір нәрсе болып жатыр деген сұраққа жауап беруді қамтамасыз ете алады. Ал *болжамдық* модель объектінің болашақтағы жағдайын сипаттауы қажет.

Сипаттауда модельдеу объектісін зерттеумен айналысатын білімдердің пәндік аймақтарының түсініктері мен ұғымдарын пайдаланатын мағыналы модельді **концептуалдық** модель деп атайды.

Keң мағынада концептуалдық модель дегенде белгілі бір концепцияға негізделген мағыналы модельді түсінеміз.

Концептуалдық модельдер: логикалық-семантикалық, құрылымдық-функционалдық және себепті-салдарлы болып үш түрге бөлінеді.

Логикалық-семантикалық модель объектінің барлық белгілі логикалық және қайшылықсыз тұжырымдар мен фактілерді қамтыған білімдердің сәйкес пәндік аймақтарындағы терминдер мен анықтамалардағы сипатталуы болып табылады. Мұндай модельдері талдау логика құралдарымен сәйкес пәндік аймақтарда жинақталған білімдер арқылы жүзеге асырылады.

Құрылымдық-функционалдық модельді құруда объекті, әдетте, жеке элементтер немесе жүйе ішжиындарына бөлінетін тұтас жүйе ретінде қарастырылады. Жүйе бөліктері бағыныңқылықты, жекеленген есептерді шешудің логикалық және уақыттық тізбектерін сипаттайтын құрылымдық қатынастарды байланыстырады. Мұндай модельдерді бейнелеуде түрлі сызбанұсқалар, карталар мен диаграммалар кең пайдаланылады.

Себеп-салдарлы модель объект жағдайын түсіндіру мен болжау үшін пайдаланылады. Бұл модельдер негізінен: 1) зерттелетін объектінің құрамдас элементтері арасындағы негізгі өзара байланыстарды анықтауға; 2) бір факторлардың өзгеруі модель компоненттеріне қалай әсер ететіндігін анықтауға; 3) модель жалпы қалай жұмыс істейді және ол зерттеушіні қызықтыратын параметрлер динамикасын адекват сипаттай алатындығына бағытталған болады.

Формаль модель концептуалдық модельді бір немесе бірнеше формаль тілдер (мысалы, математикалық теория тілдері, модельдеудің әмбебап тілі (UML) немесе алгоритмдік тілдер) көмегімен бейнелеу болады.

Гуманитарлық ғылымдарда модельдеу үдерісі көпшілік жағдайларда объектінің концептуалдық моделін құрумен аяқталады.

Жаратылыстану ғылымдарында, әдетте, объектінің формаль моделін құру мүмкін болады.

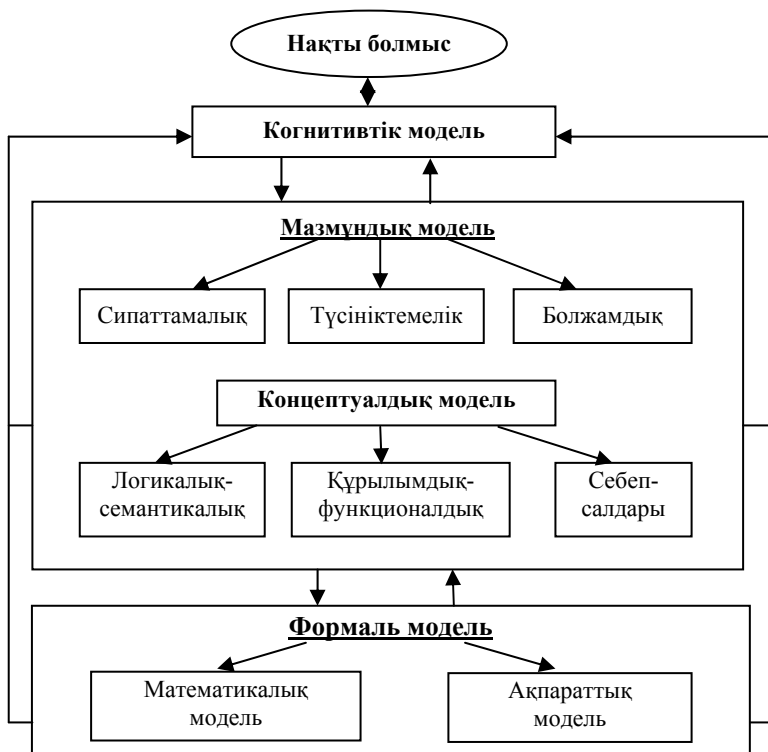
Сонымен, когнитивтік, мағыналы және формаль модельдер модельдеудің өзара байланысқан үш деңгейін құрайды. Модельдердің өзара қатынасы 1.4-суретте келтірілген.

Модельдеу деңгейлерінің өзара әсері модельдердің потенциалдық қасиетіне байланысты болады. Кез келген модельді құру зерттеліп жатқан объект, құбылыс, үдеріс жайлы жаңа білімдердің пайда болуымен қабаттас жүреді, ал бұл модельдеу объектісіне қатысты концепциялар мен көзқарастарды қайта бағалау мен нақтылауға алып келеді.

Жоғарыда атап өткеніміздей, таңбалық модельдеудің бірі түрі – математикалық модельдеу.

Математикалық модельдеу – модельдеу объектісінің зерттеушіні қызықтыратын қасиеттерін сипаттайтын математикалық формулалар, теңдеулер, қатынастар жиынтығы.

Математикалық модельдеуге мысал ретінде И. Ньютонның нүктенің классикалық механикасын келтіруімізге болады, оның көмегімен өлшемдері дене жүріп өтетін қашықтықпен салыстырғанда кіші болатын кез келген материалдық объектінің қозғалысын сипаттауға болады. Қазіргі таңда математикалық модельдеу ғылым мен техниканың барлық салаларында, физика, техника, химия, биология, экономика, экология және т.б. кеңінен қолданылуда. Мысалы, физикада тәжірибелер жүргізуден бұрын математикалық модельдерді пайдаланып күрделі зерттеулер жүргізіледі. Осы теориялық модельдеу нәтижелеріне негізделіп, натуралық түрдегі тәжірибелер әдістемесі құрылады немесе нақтыланады, қандай эффектiлердi қашан және қай жерде күтуге болатындығы, қашан және нені тіркеу керектігі анықталады.



1.4-сурет. Модельдердің өзара байланысы

Модельдеуге мұндай жандасу тәжірибені өткізуге кететін шығындарды елеулі азайтып, оның тиімділігін арттырады. Ядролық соғыс салдарын математикалық модельдеуге қатысты көптеген жаңа нәтижелер алынғандығын атап өтуімізге болады. Осындай математикалық және компьютерлік зерттеулер нәтижелерінде атмосфераның қатты шаңдануынан онда жаһандық суыну («ядролық қыс») үдерісі орын алу мүмкіндігі, мұның салдарынан барлық тіршілік атаулы жойылып кету қаупі бары анықталды. Математикалық модельдеуді түрлі салаларда тиімді қолдану мысалдарын көптеп келтіруге болады. Қазіргі уақытта математикалық модельдеу ғылыми зерттеулердегі ең бір нәтижелі және жиі қолданылатын әдістің бірі.

Математикалық модельдеудің натуралық тәжірибеден артықшылықтары төмендегідей:

- үнемділігі;
- гипотетикалық, яғни табиғатта жүзеге асырылмаған объектілермен модельдеу мүмкіндігі;
- натуралық түрде жүзеге асыруда қауіпті немесе қиын болған режимдерді жүзеге асыру мүмкіндігі (ядролық реакторлар жұмысы, ракетаға қарсы қорғаныс жүйесінің жұмысы және с.с.);
- уақыт масштабын өзгерту мүмкіндігі;
- жүргізілетін жұмыстардың техникалық және бағдарламалық қамтамасының әмбебаптығы (электрондық есептеуіш машиналары, бағдарламалау жүйелері, қолданбалы бағдарламалар пакеттері).

Ғылыми зерттеулерге арналған кез келген математикалық модель зерттеушіні қызықтыратын модельденіп жатқан объект, құбылыс, үдерістің параметрлерін бастапқы берілгендер бойынша табу мүмкіндігін береді. Сондықтан осындай кез келген модельдің мағынасы X кіріс параметрлері мәндерінің қандай да бір берілген Ω_X жиынын Y шығыс параметрлері мәндерінің Ω_Y жиынына бейнелеу деп айтуымызға болады. Осы айтылғандар негізінде математикалық модельді қандай да бір математикалық оператор ретінде қарастыруымызға және төмендегідей анықтама беруімізге болады.

Математикалық модель дегенде біз модельдеу объектісінің X кіріс параметрлерінің сәйкес мәндері бойынша Y шығыс параметрлерінің мәндерін орнататын кез келген A операторды түсінеміз:

$$A: X \rightarrow Y, \quad X \in \Omega_X, \quad Y \in \Omega_Y,$$

мұнда Ω_x және Ω_y – модельдеу объекті үшін кіріс және шығыс параметрлерінің жарамды мәндер жиындары. Модельдеу объектісінің табиғатына байланысты Ω_x және Ω_y жиындар элементтері түрлі математикалық объектілер болуы мүмкін (сандар, векторлар, тензорлар, функциялар, жиындар және т.б.).

Жоғарыда келтірілген оператор анықтамасы оның математикадағы қатаң анықтамасынан айырмашылық ететін болып, оны кең мағынада түсіну қажет. Мұндағы A оператор кіріс және шығыс параметрлерінің мәндерін байланыстыратын қандай да бір функция, сондай-ақ алгебралық, дифференциалдық, интегралды-дифференциалдық немесе интегралдық теңдеулер мен жүйелердің символдық жазылуын білдіретін бейнелеу де болуы мүмкін. Сонымен қатар, ол кіріс параметрлері бойынша шығыс параметрлерін табуды қамтамасыз ететін қандай да бір алгоритм, ережелер жиынтығы да болуы мүмкін.

Есептеу техникасының дамуымен байланысты қазіргі уақытта ақпараттық модельдер кең қолданыс табууда. Берілгендер қорын басқару жүйелері көмегімен жүзеге асырылатын мұндай модельдер автоматтандырылған анықтамалықтар қызметтерін атқарады. Кірісте қажет ақпаратты іздеу жайлы қандай да бір сұраныс алған соң, мұндай модельдер қызықтырған сұрақ бойынша берілгендер қорындағы бар ақпаратты табуға мүмкіндік жаратады. Бірақ мұндай модельдер берілгендер қорында болмаған жаңа білімдерді генерациялап шығара алмайды. Сондықтан оларды нөлдік потенциалды модельдер деп атайды.

1.3 Математикалық модельдер классификациясы

Математикалық модельдеу әдістерінің қарқынды дамуы мен оларды қолдану салаларының күн санап арта түсуі түрлі типтегі көптеген модельдердің пайда болуына алып келді. Мүмкін болған классификациялық белгілер санының үлкендігі мен оларды таңдаудың субъективтігі, модельдердің жаңа кластарының уақыт өткен сайын көптеп пайда болуы төменде келтірілетін классификацияның шартты екендігі мен толық еместігін атап өтуімізді қажет етеді.

Математикалық модельдерді:

- модельдеу объектісінің күрделілігі;
- модель операторы;
- кіріс және шығыс параметрлері;

- модельді зерттеу тәсілі;
 - модельдеу мақсаты бойынша кластарға бөлуге болады.
- Осы модельдерді қысқаша қарастырып өтеміз.

Математикалық модельдердің модельдеу объектісінің күрделілігіне байланысты классификациясы

Модельдеу объектісі ретінде қандай да бір материалдық дене немесе конструкция, сондай-ақ табиғи, технологиялық немесе элементтік үдеріс, құбылыс болуы мүмкін. Барлық модельдеу объектілерін екі топқа бөлуге болады: жай және жүйе-объектілер (1.5-сурет). Бірінші жағдайда модельдеуде объектінің ішкі құрылысы қарастырылмайды, оны құраушы элементтер мен ішкі үдерістер ажыратылмайды. Мұндай объектіге мысал ретінде, классикалық механикадағы материалдық нүктені келтіруге болады.



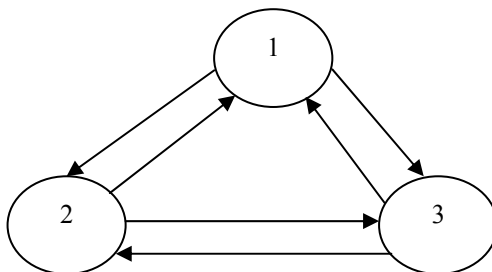
1.5-сурет. Модельдеу объектісінің классификациясы

Жүйе дегеніміз – өзара байланысқан элементтер жиынтығы, ол белгілі бір мағынада қоршаған ортадан оқшауланған және онымен өзі тұтас ретінде өзара әсерде болады.

Күрделі жүйелер үшін өзара байланысқан, өзара әсерлесетін көптеген элементтер болуы оларға тән қасиет.

Егер жүйенің N элементі бар болса және әрбір элемент басқа әрбір элементпен байланысқан болса, онда байланыстардың жалпы саны $N(N-1)$ тең болады. Егер барлық N элементтердің әрбірі M жағдайда болатын болса, онда мұндай жүйе үшін жалпы жағдайлар саны $S = M^N$ тең болады. Мысалы, қандай да бір электрондық жүйе (1.6-сурет) үш блоктан ($N = 3$) тұратын және әрбір блок екі ($M = 2$,

мысалы, қосылған және қосылмаған) жағдайда болатын болсын. Осындай жүйе үшін жағдайлар саны $S = 2^3 = 8$, ал ең үлкен байланыстар саны 6-ға тең. Егер жүйенің іс-әрекеті блоктың бір жағдайдан екінші жағдайға өту үдерісімен сипатталатын болса, онда мүмкін болған барлық өтулер саны S^2 тең, яғни 64-ке тең болады.



1.6-сурет. Электрондық жүйе сызбанұсқасы

Жүйе жағдайы жүйе элементтері санының артуымен тез күрделене түседі. Мысалы, 10 элементтен тұратын жүйе үшін $M = 2$ болғанда жағдайлар саны $S = 1024$, ал мүмкін болған жалпы өтулер саны 1 048 576-ға тең болады. Бұл жағдай бір жағынан жүйенің күрделілігі мен болуы мүмкін жағдайларының көп нұсқалылығын білдіретін болса, екінші жағынан жүйені модельдеу мен зерттеуде көптеген қиындықтар кездесетіндігін аңғартады.

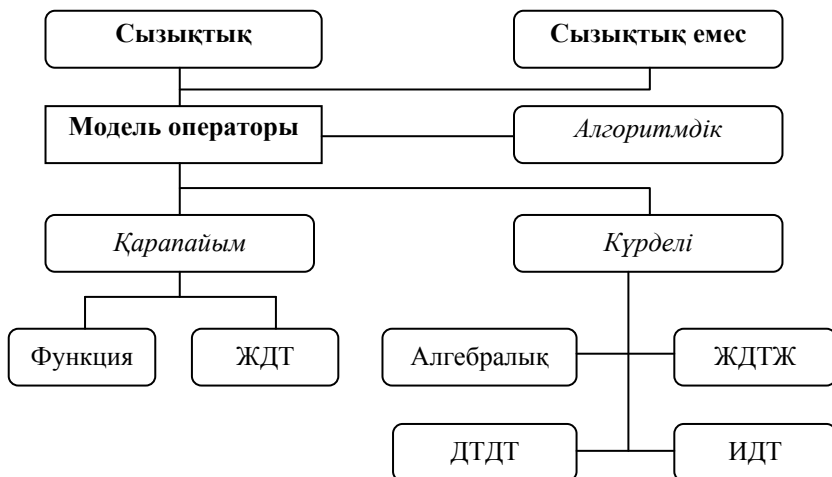
Зерттеу объектілерін «жай» және «күрделі» деп бөлудің өзі шартты екендігін естен шығармағанымыз жөн. Себебі, кез келген объектіні, үдерісті, құбылысты шексіз күрделі деп қарастырсақ болады. Модельді құруда оның құрылысын ықшамдау (қарапайымдырақ түрге келтіру) сол уақыт мезетінде қойылған, объектіні құрастырушы элементтер арасындағы байланыстарды зерттеу мақсаттарына жетуде айтарлықтай маңызы болмаған, объект жағдайына ықпалы шамалы болатын қасиеттерін қарастырмау арқылы орындалады.

Жүйенің жекеленген элементтерінің қасиеттері мен жағдайларын, сондай-ақ олар арасындағы байланыстарды есепке алатын объект-жүйелер модельдері *құрылымдық* модельдер деп аталады.

Құрылымдық динамикалық жүйелер ішінен ақырғы санды элементтерден тұратын, осы элементтердің әрбірінің жағдайлары саны ақырлы болған имитациялық жүйелерді атап өтуге болады. Жүйе ішінде элементтердің өзара әсері ЭЕМ-ны пайдаланып жүзеге асырылатын қандай да бір алгоритм көмегімен орындалады.

Модель операторына байланысты математикалық модельдердің классификациясы

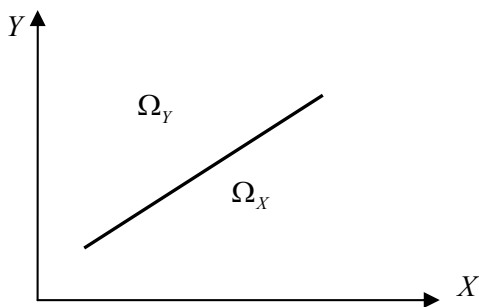
Жоғарыда кез келген математикалық модельді қандай да бір оператор ретінде қарастыруға және осы оператор алгоритм болуы немесе теңдеулер жиынтығымен (алгебралық, жай дифференциалдық теңдеулер (ЖДТ), ЖДТ жүйелері (ЖДТЖ), дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер (ДТДТ), интегралдық-дифференциалдық теңдеулер (ИДТ) және т.б.) анықталатындығы айтылды (1.7-сурет).



1.7-сурет. Модель операторына қатысты классификация

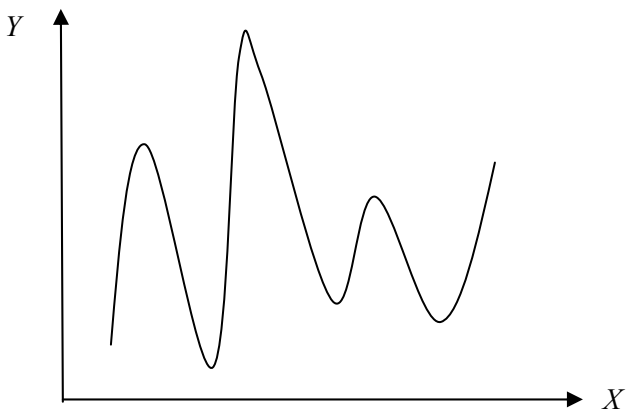
Егер оператор Y шығыс параметрлерінің X кіріс параметрлерінен сызықтық тәуелділігін қамтамасыз ете алатын болса, онда математикалық модель *сызықтық* деп аталады (1.8-сурет). Сызықтық модельдер зерттеу үшін қарапайымдырақ болады. Мысалы, модельдің сызықтық қасиетінен шешімдердің суперпозиция қасиеті келіп шығады, яғни X_1 -де шешім Y_1 және X_2 -де шешім Y_2 болса, онда $X = X_1 + X_2$ -де шешім $Y = Y_1 + Y_2$ болады.

Сызықтық математикалық модельдер ежелден қазіргі күнге дейін кеңінен құрылып және тиімді қолданылып келеді, олардың қолданыс салалары ауқымды болып, классикалық механика, электр-динамикасы, химия, биология және басқа да көптеген салаларды қамтиды. Сызықтық модельдер, әдетте салыстырмалы түрдегі қарапайым объектілер, үдерістер мен құбылыстарға қатысты болады.



1.8-сурет. Сызықтық модель

Табиғат, ғылым мен техника, қоғамдағы түрлі үдерістер сипаты, әдетте сызықтық болмайды (1.9-сурет).



1.9-сурет. Сызықтық емес модель

Қазіргі уақытта модельдеу дәлдігін арттыру қажеттілігі туындап қана қоймастан, нақты зерттеу объектілерінің сызықтық емес қасиеттерін де есепке алатын жаңа сапалы модельдерге деген қажеттілік күн санап арта түсуде. Мұның басты себептері – энергия көздерінің, табиғи жерасты қазба байлықтарының оларды қарқынды иегеру нәтижесінде таусылу шегіне жақын қалғандығы, ауаның шектен тыс ластануы, экологиялық, техногендік апаттардың күшеюі.

Сызықтық емес модельдері зерттеу сызықтыққа қарағанда анағұрлым күрделі болады және қазіргі күнде мұндай модельдерді зерттеудің жалпы әдістемесі мен жандасуларын құру мәселелері толықтай өз шешімін тапқан жоқ. Сызықтық емес модельдер қазіргі за-

манғы ғылым үшін күрделі құбылыстар мен үдерістердің жаңа заңдылықтарын ашу және сипаттау тұрғысынан маңызы зор. Мысалы, солитондар мен хаос жайлы құбылыстарды дәстүрлі сызықтық модельдер шеңберінде жеткілікті дәрежеде дәл сипаттау мүмкін болмайды. Сызықтық емес модельдерді зерттеу әдістері бүгінгі таңда қарқынды дамып, ғылымда жаңа бағыттардың пайда болуына себеп болуда. Мұндай бағыттарға, мысал ретінде, синергетиканы – өз бетінше ұйымдасатын күрделі жүйелер жайлы ғылымды келтіруімізге болады.

Оператор түріне қатысты математикалық модельдерді *қарапайым* және *күрделі* деп бөлуге болады.

Y шығыс параметрлерінің X кіріс параметрлерінен функционалдық тәуелділігін бейнелейтін модель операторы алгебралық өрнек болған жағдайда модельді *қарапайым* деп атаймыз.

Қарапайым модельдер көпшілік жағдайларда зерттелетін объекті немесе құбылысты күзету арқылы алынған тәжірибелік нәтижелерді жалпылау мен талдау нәтижелері болады. Осындай берілгендерді талдау негізінде кіріс және шығыс параметрлерінің мүмкін болған функционалдық байланысы жайлы гипотеза ұсынылады. Осыдан кейін гипотеза қолда бар тәжірибелік материалдармен тексеріледі, оның адекваттық дәрежесі, яғни осы гипотезаны қолданып алынған модельдеу нәтижелері зерттелуші объект жайлы бар білімдерге сәйкестік дәрежесі анықталады. Егер тексеру нәтижелері қанағаттанарлықсыз болса, онда қабылданған гипотеза жаңасымен алмастырылады. Үдеріс тәжірибе нәтижелері мен модельдің қанағаттанарлық сәйкестік дәрежесін алғанға дейін жалғасады.

Қарапайым модельдерге физиканың көптеген заңдарын жатқызуға болады (бүкіләлемдік тартылыс заңы, Ом заңы, Гук заңы және т.б.).

Дифференциалдық және интегралдық қатынастар жүйелерін өз ішіне алған модельдер қарапайым болмайды, оларды зерттеу үшін күрделі математикалық әдістерді қолдауға тура келеді.

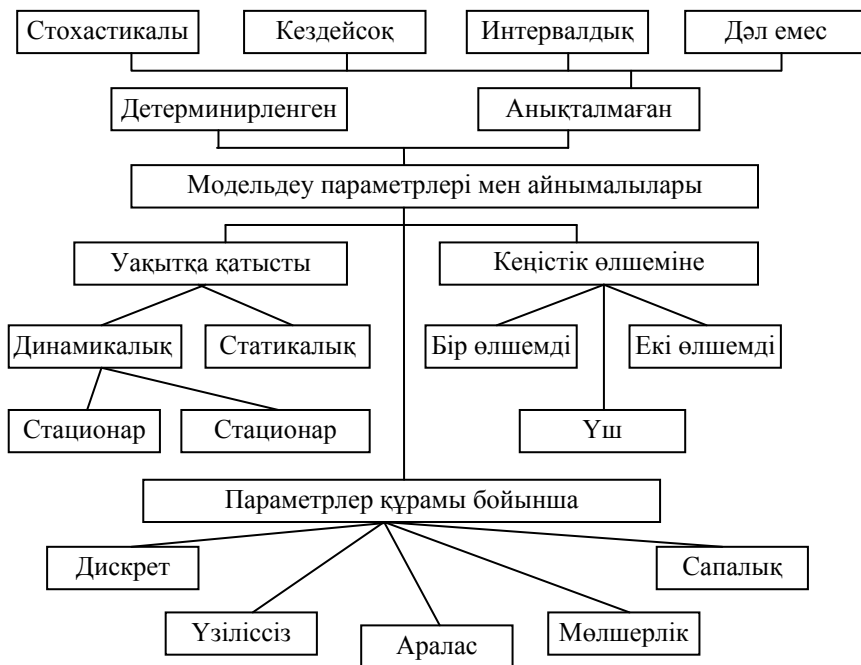
Модель параметріне қатысты математикалық модельдер классификациясы

Модель параметріне қатысты математикалық модельдер классификациясы төменде келтірілген (1.10-сурет).

Жалпы жағдайда модельдеу объектісінің жағдайын сипаттайтын параметрлерді бірқатар қиылыспайтын ішкі жиындарға бөлуге болады:

- объектіге кіріс (басқарылатын) әсерлерінің жиынтығы (Ω_X);
- сыртқы орта әсерлерінің жиынтығы (басқарылмайтын) (Ω_E);
- объектінің ішкі (өзіндік) параметрлерінің жиынтығы (Ω_I);
- шығыс сипаттамаларының жиынтығы (Ω_Y).

Мысалы, қатты дененің атмосферадағы ауырлық күштерінің өрісіндегі қозғалысын модельдеуде полюс ретінде алынған нүктенің бастапқы орны мен бастапқы жылдамдығы, сондай-ақ $t = 0$ уақыт моментіндегі бұрыштық жылдамдық кіріс параметрлері болуы мүмкін. Қарсылық күші мен ауырлық күштері сыртқы орта әсерін сипаттайды. Дененің массасы мен оның формасы дененің өзіндік параметрлері болып табылады. Дене нүктелерінің координаталары мен жылдамдықтары ($t > 0$ болғанда) шығыс параметрлері болады.



1.10-сурет. Параметрге қатысты математикалық модельдер классификациясы

Сонымен қатар, параметрлерді кіріс немесе шығыс параметрлеріне жатқызу нақты есептің қойылымына тәуелді болады. Жоғарыда келтірілген мысалда есеп қойылымын өзгертіп, оны бастапқы есепке

кері болған есеп түрінде қоюға болады: дененің бастапқы орны мен жылдамдығын (поллюстің сызықтық жылдамдығы мен бұрыштық жыдамдығын) $t_1 > 0$ уақыт моментіндегі берілген орны мен жылдамдығы бойынша табу керек. Бұл жағдайда кіріс және шығыс параметрлері орындарын алмастыратындығы түсінікті болуы керек.

X кіріс параметрлері, сыртқы ортаның әсерін сипаттаушы параметрлер E және объектінің ішкі (өзіндік) сипаттамалары I *тәуелсіз (экзогенді)* шамалар деп аталады. Y шығыс параметрлерін – *тәуелді (эндогенді)* шама деп атайды.

Жалпы жағдайда модель операторы A экзогенді параметрлерді эндогенді параметрлерге түрлендіреді $A: \{X, E, I\} \rightarrow Y$.

Өзінің табиғаты бойынша объект сипаттамалары сапалық та, мөлшерлік те болуы мүмкін. Модельдеу объектісінің қандай да бір мөлшерлік сипаттамасын енгізу салыстыру эталоны бар болған жағдайда мүмкін болады. Мысалы, дене өлшемдерін сипаттау үшін эталондық үлгі-метр пайдаланылады. Мөлшерлік сипаттау үшін параметр мен эталон берілгендерінің қатынасын өрнектейтін сандар енгізіледі. Сондай-ақ параметрдің мөлшерлік мәндері дискрет және үзіліссіз шамалармен өрнектелуі мүмкін. Сапалық сипаттамалар математикалық, эксперттік бағалау және басқа да әдістерді қолданып табылады.

Пайдаланылатын параметрлер жиындарының түріне қатысты модельдер *сапалық* және *мөлшерлік*, *дискрет* және *үзіліссіз*, сонымен қатар *аралас* болып бөлінеді.

Нақты объектілер мен құбылыстардың модельдерін құруда ақпараттың жетіспеушілігі жиі кездеседі. Кез келген зерттеу объектісі үшін қасиеттердің үлестірілуі, объектіге әсер етуші параметрлер мен оның бастапқы жағдайы қандай да бір анықталмағандық дәрежесінде белгілі болады. Мұның себебі есепке алу қиын болған факторлардың көптігі, пайдаланылатын модель параметрлері санының шенелгендігі, тәжірибелік өлшеулер дәлдігінің дәл болмауы және т.б. Модельді құруда параметрлердің анықталмағандығын сипаттаудың мынадай нұсқалары болуы мүмкін:

1) *детерминирленген* – модельдің барлық параметрлерінің мәндері детерминирленген (яғни, әрбір параметрге қандай да бір бүтін, нақты, комплексті сан немесе функция сәйкес келеді) шамалармен анықталады;

2) *стохастикалық* – модельдің барлық немесе кейбір параметрлерінің мәндері ықтималдық тығыздығымен берілген кездейсоқ шамалармен анықталады;

3) *кездейсоқ* – модельдің барлық немесе кейбір параметрлерінің мәндері параметрлер берілгендерінің тәжірибелік шенелген таңдама-сын өңдеу нәтижесінде алынған ықтималдық тығыздықтарының бағалауларымен анықталады. Бұл сипаттау формасы алдыңғымен тығыз байланысты. Бірақ қарастырылып жатқан жағдайда алынатын модельдеу нәтижелері кездейсоқ параметрлердің моменттері мен ықтималдық тығыздықтары бағалауларының дәлдігіне, кездейсоқ шамалардың үлестірім заңдарына және таңдама көлеміне елеулі тәуелді болады;

4) *интервалдық* – модельдің барлық немесе кейбір параметрлерінің мәндері параметрлердің мүмкін болған ең үлкен және ең кіші мәндерінен құралған интервалдық шамалармен сипатталады;

5) *анықталмаған* – модельдің барлық немесе кейбір параметрлерінің мәндері анық емес жиынға сәйкес келетін тиістілік функциясымен сипатталады. Мұндай форма модель параметрлері жайлы ақпарат сарапшы тарапынан табиғи тілде, яғни «жетіден анағұрлым үлкен», «нөл маңайында» секілді математика тұрғысынан «анық емес» терминдер арқылы берілген жағдайда пайдаланылады.

Модельдерді *бір, екі* және *үш* өлшемді деп бөлу параметрлер ішінде кеңістік координаталары болған модельдер үшін қолдануға болады. Әдетте, өлшем артқан сайын модель күрделене түседі. Қазіргі күнде үш өлшемді модельдері тиімді шешу параллель есептеу алгоритмдері көмегімен көп процесорлы есептеу кешендерінде жүзеге асырылады. Үш өлшемді қойылымдағы модельдерді құруда кездесетін есептеу қиындықтарына үлкен көлемдегі (100 мың және одан көп теңдеулер жүйелері) сызықтық алгебралық теңдеулер жүйелерін сақтау мен шешу, бастапқы берілгендерді дайындау мен оларды тексеру, алынған нәтижелерді көрнекі бейнелеу және т.б. келтіруге болады.

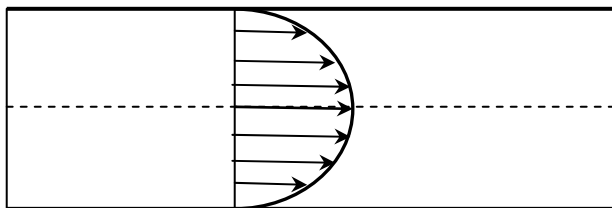
Түрлі модельдерді құруда параметрлер жиынтығынан уақытты бөлек ажыратып қарастырған жөн. Координаталар секілді, уақыт тәуелсіз айнымалылар қатарына жатады және модельдің басқа параметрлері уақытқа тәуелді болуы мүмкін. Әдетте, объектінің масштабы қаншалықты кіші болса, оның параметрлерінің уақытта тәуелділігі соншалықты елеулі болады. Егер түрлі объектілердің жылдамдықтарының өзгерулерін Жерге тән масштабқа қатысты салыстыратын болсақ, онда галактикалар үшін сезілетіндей уақыт өзгерістері миллиондаған жылдармен, ал элементар бөлшектер үшін – секундтың миллиондаған үлесімен өлшенеді. Бізді қоршаған орта тынымсыз өзгеруде және өзара әсерлесуде болатын элементар бөлшектер мен өрістерден тұратындығын ескеретін болсақ, онда барлық зерттеу объектілерін уақытқа қатысты өзгерісте болады деп айтуымызға болады.

Кез келген объект оны қоршаған ортамен қандай да бір тепе-теңдік жағдайына өтуге ұмтылады. Осы тепе-теңдіктің бұзылуы объектінің түрлі параметрлерінің өзгеруіне және оның жаңа тепе-теңдік жағдайына өтуіне алып келеді.

Қандай да бір уақыт моментіндегі модель параметрлерінің мәндерінің жиынтығы *объектінің жағдайы* деп аталады.

Егер сыртқы әсерлер мен зерттелуші объекті жағдайы параметрлерінің өзгеру жылдамдығы жеткілікті үлкен болса, онда уақытты есепке алу қажет болады. Бұл жағдайда зерттеу объектісін *динамикалық үдеріс* шеңберінде қарастырады.

Зерттелетін объектінің жекеленген элементтерінің қозғалыс шарты уақытты модель параметрлері қатарына қосудың міндетті шарты бола алмайды. Мысал ретінде көлденең қимасы тұрақты болған ұзын трубадағы сұйықтықтың ағысын қарастырайық. Тәжірибелер трубаның басынан жеткілікті қашықтықта сұйықтық бөлшектері трубаның осіне параллель қозғалыста болатындығын көрсетеді (1.11-сурет).



1.11-сурет. Ламинар ағысты жылдамдықтар өрісі

Егер турбаның кірісінде шарттар өзгермейтін және ағыс жылдамдығы кіші болса (ламинар ағыс), онда трубаның осы қимасындағы бөлшектер қозғалыстары жылдамдықтарының профилі уақыт өте келе өзгермейді. Бұл жағдайда зерттелетін кеңістіктің әрбір нүктесінде модель параметрлерінің мәндері уақытқа тәуелді болмайды.

Мұндай үдерістерді *стационар* үдерістер деп атайды. Ағынның кірісі мен шығысындағы шарттар өзгермеген тұрақты жағдайда сұйықтықтардың қозғалысы, газдар және жылуудың көптеген тарқалу үдерістерін сипаттау үшін стационар модельдер қолданылады. Осындай үдерістер үшін уақыт тәуелсіз айнымалылар қатарынан шығарылуы мүмкін.

Егер үдерістің өту жағдайы уақытқа қатысты болатын болса, мұндай модельдер *стационар емес* деп аталады. Қандай да бір

ыдыстан құйылып ағатын трубаның ішіндегі сұйықтық қозғалысының моделі стационар емес модельге мысал бола алады. Ыдыстағы сұйықтық қысымы деңгейінің төмендеуімен трубаның кірісіндегі қысым азая түседі, мұның нәтижесінде трубаның кез келген нүктесінде сұйықтық ағысы параметрлерінің мәндерінің өзгеруіне алып келеді.

Модельдеу мақсатына қатысты математикалық модельдер классификациясы

Модельдеу мақсатына қатысты модельдерді *дескриптивтік, тиімдеу және басқарушылық* деп бөлуге болады (1.12-сурет).



1.12-сурет. Модельдеу мақсатына қатысты классификациялау

Дескриптивтік модельдердің мақсаты – модель параметрлерінің өзгеру заңдылықтарын анықтау болып табылады. Мұндай модельге Ньютонның екінші заңын пайдаланатын материалдық нүктенің оған әсер етуші күш нәтижесіндегі қозғалысын келтіруге болады. Бастапқы уақыт моментінде нүктенің орны мен жылдамдығын (бастапқы берілгендер), массаны (өзіндік параметр) және оған әсер етуші күштердің (сыртқы әсерлер) өзгеру заңдарын беру арқылы кез келген уақыт моментінде нүктенің жылдамдығы мен координаталарын (шығыс параметрлері) анықтауға болады. Бұл модель шығыс параметрлерінің кіріс параметрлеріне тәуелділігін сипаттайды. Сондықтан дескриптивтік модельдер сипаттамалық және мағыналық модельдері формаль модельдеу деңгейінде жүзеге асыруы болып табылады.

Тиімдеу модельдері қандай да бір критерий тұрғысынан модельденетін объектінің тиімді параметрлерін немесе қандай да бір үдерістің тиімді басқару режимін анықтауға арналған. Әдетте, мұндай модельдер бір немесе бірнеше дескриптивтік модельдерді пайдалана отырып құрылады және мұнда ең жақсысын тандау мақсатында шығыс параметрлері мәндерінің түрлі нұсқалары жиынтықтарын өзара салыстыруға мүмкіндік беретін қандай да бір критерий болады. Кіріс параметрлерінің мәндерінің аймағына қарастырылып

жатқан объекті немесе үдерістің ерекшеліктеріне байланысты теңдіктер және теңсіздіктер түріндегі шектеулер қойылған болуы мүмкін.

Тиімдеу моделіне ракетаны Жер бетінен оны берілген биіктікке қозғалтқыш импульсінің шамасына, оның жұмыс істеу уақытына, ракетаның бастапқы және соңғы массасына шектеулер қойылған жағдайда минимал уақыт ішінде шығару үдерісін модельдеу мысал бола алады.

Ракета қозғалысының дескриптивтік моделінің математикалық қатынастары бұл жағдайда теңдіктер түріндегі шектеулер болады.

Көптеген нақты үдерістер үшін бірнеше критерийлер бойынша оптимал параметрлерді табу қажет болады. Мұндай есептерді *көп-критериялы тиімдеу есептері* деп атайды және оларды шешуде арнайы әдістер мен алгоритмдер қолданылады.

Басқарушылық модельдер адам іс-әрекетінің түрлі салаларында тиімді басқару шешімдерін қабылдауда қолданыс табады. Жалпы жағдайда, шешімдер қабылдауды өзінің күрделілігі бойынша ойлау үдерісімен салыстыруға болатын үдеріс деп айтуға болады. Бірақ амалда шешімдер қабылдау дегенде кейбір альтернативаларды олардың берілген жиынынан таңдауды түсінеді, ал шешімдер қабылдаудың жалпы үдерісі альтернативаларды осындай таңдау тізбегі ретінде қарастырады [17].

Таңдау критерийі анықталған деп есептелетін және ізделінетін шешім оның экстремалдық шарттарынан табылатын тиімдеу модельдерінен басқарушылық модельдерінің айырмашылығы – бұл модельдерде есептің түрлі анықталмағандық жағдайында баламаларды салыстыруға мүмкіндік беретін арнайы тиімділік критерийлерін енгізу қажет болады.

Бір жағдайдың өзінде қабылданған шешімнің тиімділігі әртүрлі түсінілуі мүмкін және басқарушылық модельдеріндегі тиімділік критерийінің түрі алдынан белгіленбейді, осы айтылғандар – басқарушылық модельдерінің негізгі ерекшеліктері.

Жүзеге асыруға қатысты математикалық модельдер классификациясы

Математикалық модельдерді жүзеге асыруға қатысты олардың классификациясы төмендегідей болуы мүмкін (1.13-сурет).

Модельдің шығыс параметрлерін аналитикалық өрнектер түрінде алуға мүмкіндік беретін модельдерді *аналитикалық* деп атайды.

Аналитикалық өрнектерге мысалдар:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n x^n}{x^n + 1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

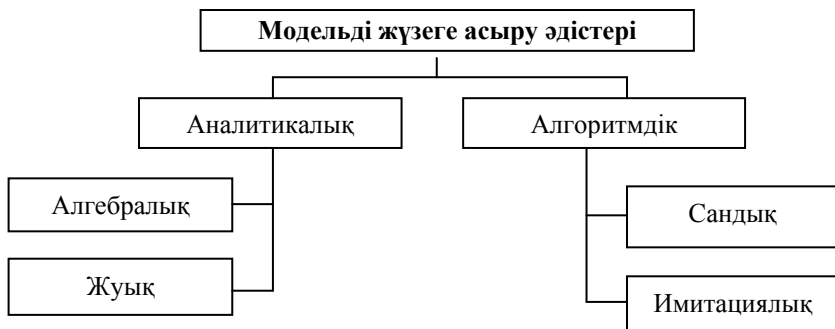
Ақырлы немесе саналымды санды арифметикалық амалдар, бүтін дәрежеге көтеру және түбір алу амалдары пайдаланылатын аналитикалық өрнектердің дербес түрлері *алгебралық өрнектер* деп аталады. Алгебралық өрнектерге мысалдар:

$$ax^2 + bx + c, \quad a + b\sqrt{x^3 + 7bc}.$$

Көпшілік жағдайда модель үшін аналитикалық шешімді элементар немесе арнайы: көрсеткіштік, логарифмдік, тригонометриялық, гиперболалық және т.б. функцияларда бейнелейді. Кіріс параметрлерінің нақты мәндерінде осы функциялардың мәндерін алу үшін олардың қатарларға, мысалы, Тейлор қатарына жіктелулерін пайдаланады. Мысалы, көрсеткіштік функция төмендегідей қатарға жіктелуі мүмкін:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Қатардың түрлі санды мүшелерін ала отырып, көрсеткіштік функцияның мәнін түрлі дәлдік дәрежесімен есептеуге болады. Мысалы, көрсеткіштік функцияның жіктелуіндегі алғашқы алты мүшесін алып есептеу 10^{-4} , ал алғашқы он мүшесі 10^{-8} дәлдікті қамтамасыз етеді. Сол себепті, аргументтің әрбір мәнінде функция мәні жуық анықталады. Осындай тәсілді пайдаланатын модельдерді *жуық модельдер* деп атайды.



1.13-сурет. Жүзеге асыруға қатысты модельдер классификациясы

Модельдерді зерттеудің аналитикалық әдістері аналитикалық функцияларды талдаудың жетілдірілген математикалық әдістерін қолдану арқылы аз есептеу шығындарымен модельдеу объектісінің фундаменталь қасиеттерін, сапалық жақтарын зерттеуге, оның ішкі құрылымы жайлы жаңа болжамдар жасауға мүмкіндік береді. Аналитикалық әдістердің мүмкіндігі математиканың сәйкес бөлімдерінің даму деңгейлеріне елеулі тәуелді болатындығы белгілі.

Қазіргі уақытта математикалық модельдерді зерттеуде аналитикалық әдістерге деген қызығушылық компьютерлік математикалық есептеу жүйелерінің (*MatLab, Mathcad, Maple, Derive, Mathematica және т.б.*) дүниеге келуімен байланысты. Мұндай жүйелер көмегімен шешілетін есептер түрлері өте ауқымды және тұрақты түрде артып келеді (элементар математика, көпмүшеліктермен, туындылар және интегралдар, векторлар және матрицалармен символдық амалдар, өріс теориясы есептері және векторлық талдау, ақырлы айырымдар әдісі, шекті элементтер әдісі және т.б.). Мұндай компьютерлік математикалық бағдарламалық жүйелерді қолдану аналитикалық шешімді алу процедурасын жеңілдетіп қана қоймастан, түрлі графикалық бейнелеу құралдарымен алынған шешімді талдау мүмкіндіктерін береді [43].

Қазіргі уақытта қолданылып келе жатқан математикалық әдістермен салыстырмалы түрде күрделі болмаған математикалық модельдер үшін параметрлер мәндерінің үлкен болмаған диапазонында аналитикалық шешімдерді алуға болады.

Математикалық модельдерді *сандық* шешуде математикалық қатынастар жиынтығы олардың ақырғы өлшемді аналогтарымен алмастырылады. Мұнда бастапқы қатынастарды дискреттеу, яғни үзіліссіз аргументті функциялардан дискретті аргументті функцияларға өту орындалады. Бастапқы есепті дискреттеу жүзеге асырылғаннан соң есептеу алгоритмі – ЭЕМ-де орындалатын және дискрет есептің шешімін ақырғы санды қадамдардан соң табуға мүмкіндік беретін арифметикалық және логикалық амалдар тізбегі құрылады. Дискрет есептің табылған шешімі бастапқы математикалық есептің жуық шешімі ретінде алынады.

Сандық әдістер көмегімен табылатын модель параметрлерінің жуықтау дәрежесі бастапқы модельді оның дискрет аналогымен алмастыруға қатысты пайда болатын *әдіс қателігімен* қатар, ЭЕМ-де орындалатын кез келген есептеулер кезінде оның жадында бейнеленетін сандардың дәлдігінің ақырлылығына байланысты пайда болатын *дөңселектеу қателігіне* де тәуелді болады. Есептеу алгоритміне қойылатын негізгі талап – бастапқы есептің шешімін берілген дәлдікпен ақырғы санды қадамдарда табу.

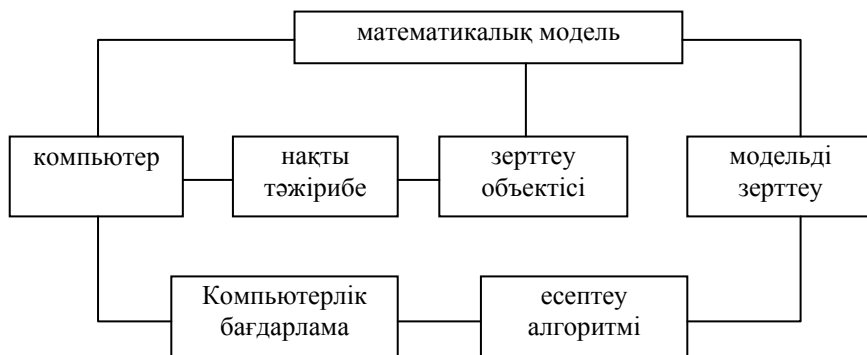
Бүгінгі таңда сандық әдістерді құру мен оларды қолдану, сондай-ақ, олар негізінде есептеу алгоритмдерін құруға қатысты мәселелер *есептеу математикасы* деп аталатын математиканың дербес, қарқынды даму кезеңіндегі үлкен бір тармағына айналды.

Модельдерді сандық шешуде модельдегі математикалық қатынастар дискреттелетін болса, имитациялық модельдеуде зерттеу объектісінің өзі жекеленген элементтерге бөлінеді [33]. Бұл жағдайда тұтас объект-жүйе үшін математикалық қатынастар жазылмайды, оның жағдайын модельдейтін және жүйе элементтерінің өзара әсерін есепке алатын қандай да бір алгоритммен алмастырылады. Жекеленген элементтердің модельдері аналитикалық та, алгоритмдік те болуы мүмкін.

Сандық және имитациялық жандасуларды пайдаланатын алгоритмдік модельдер есептің шешімін аналитикалық түрде алуға мүмкіндік бермейді, сондықтан модельдеу нәтижелерін талдау үдерісі қиындап күрделене түседі. Мұндай түрдегі модельдер есептеу техникасы көмегімен жүзеге асырылады, ал олардың тиімділігі ЭЕМ-ның қуаты мен жылдамдығына тәуелді болады. Алгоритмдік модельдердің артықшылығы – модель күрделілігіне қатысты маңызды шектеулердің болмауы. Сол себепті оларды кез келген күрделі жүйелерді зерттеуде қолдануға болады.

Алгоритмдік әдістермен құрылған математикалық модельді пайдалануда объектімен нақты тәжірибе жүргізудің орнына оның моделімен *есептеу тәжірибесі* жүргізіледі.

Кең мағынада есептеу тәжірибесі дегенде біз ғылыми зерттеулердің жаңа технологиясын түсінеміз. Есептеу тәжірибесінің негізгі кезеңдері төменде (1.14-сурет) келтірілген.



1.14-сурет. Есептеу тәжірибесінің негізгі кезеңдері

Бақылау сұрақтары

1. Модель және модельдеу дегеніміз не?
2. Модельдеу мақсаты?
3. Модельдеудің қандай түрлері бар?
4. Аналогтық модельдеуге тән ерекшеліктер қандай?
5. Когнитивтік модель дегеніміз не?
6. Мағыналық модель деп қандай модельге айтылады?
7. Концептуалдық модель дегеніміз не және оның мағыналық модельден айырмашылығы неде?
8. Формаль модель деп қандай модельге айтылады?
9. Қандай модельді математикалық модель деп атайды? Қандай математикалық модельдерді білесіз?
10. Математикалық модельдің түрлі анықтамаларын келтіріңіз және оларға талдау жүргізіңіз.
11. Математикалық модельдеуде модельдің операторы ретінде не болуы мүмкін?
12. Ақпараттық модельдерді не себептен математикалық модельдердің бір түрі ретінде қарастыруға болмайды?
13. Қандай классификациялық белгілер бойынша математикалық модельдерді бөлуге болады?
14. Қарапайым және күрделі модельдер деп қандай модельдерді айтамыз?
15. Жүйелерді модельдеудің күрделілігі нені білдіреді?
16. Сызықтық және сызықтық емес модельдер және олардың айырмашылықтары қандай?
17. Модельдеу параметрлері бойынша модельдердің қандай типтерін ажыратуға болады?
18. Дескриптивтік модель қандай модель?
19. Қандай модель оптимизациялық модель деп аталады?
20. Стационар және стационар емес модельдер және олардың айырмашылықтары неде?
21. Модель өлшемі оның күрделілігіне қалай әсер етеді? Оның себебі неде?
22. Модель параметрлерінің анықталмағындығы дегенде нені түсінеміз?
23. Есептеу тәжірибесі деп неге айтылады?
24. Имитациялық модель деп қандай модельге айтылады?
25. Модельдерді жүзеге асырудың негізгі әдістерін атаңыз. Олардың артықшылық және кемшілік жақтарын сипаттап беріңіз.

Тапсырмалар

1. Сымның бойында жылудың таралауының когнитивтік, мағыналы және концептуалдық модельдерін құрыңыз. Сізге қолжетімді математикалық әдістерді пайдалана отырып, жылу таралауының математикалық моделінің бір нұсқасын құрыңыз.

2. Классикалық механиканың математикалық модельдерін классификациялаңыз.

3. 1-тапсырма үшін қарапайым аналитикалық модельді құрыңыз, оны объектінің күрделілігі позициясы, модель операторы, кіріс және шығыс параметрлерінің түрлері, модельдеу мақсаты тұрғысынан талдау жүргізіңіз.

4. Өзіңізді қызықтыратын білім саласынан бірнеше математикалық модельдерге классификация жүргізіңіз және талдау жұмыстарын орындаңыз.

5. Төменде келтірілген

- азық-түлік дүкені;
- аурухана;
- теміржол билеттерін сатушы касса;
- ЖОО кітапханасы

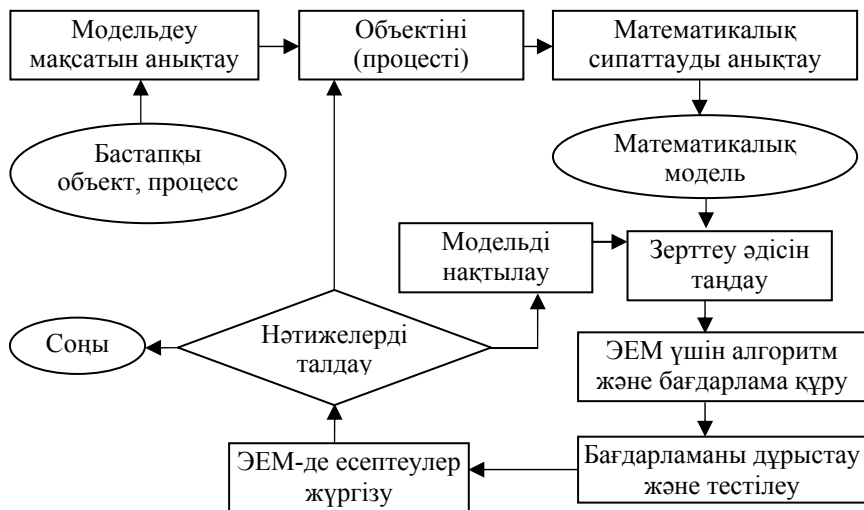
жұмыстарын модельдеу есептерінің мағыналы қойылымдағы бірнеше нұсқаларын сипаттаңыз.

2-таpау. МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУДІҢ ЖАЛПЫ ПРИНЦИПТЕРІ

2.1 Математикалық модельді құру кезеңдері

Математикалық модельді құру үдерісі қиын, ұзақ және жеткілікті жоғары деңгейдегі модельдеу объектісіне қатысты пәндік аймақта, сондай-ақ қолданбалы математика, сандық әдістер, бағдарламалау салаларынан жақсы дайындыққа ие, қазіргі заманғы есептеу техникасының мүмкіндіктері мен ерекшеліктерін және оларды амалда қолдана білетін түрлі мамандардың бірлесіп жұмыс жасауын қажет етеді. Қазіргі уақытта түрлі салаларда қолданылып келе жатқан және құрылып жатқан математикалық модельдердің басты ерекшелігі – модельдеу объектілерінің күрделілігіне байланысты олардың кешенді сипатқа ие болуы. Мысалы, түрлі конструкцияларда оларға қойылған күштердің әсеріндегі деформациялау үдерістерін модельдеуде деформациялануда орын алатын масса алмасу үдерістерімен қоса, жылу алмасу үдерістерін, сондай-ақ осы үдерістермен байланысты материал құрылымы мен қасиеттерінің өзгеруін есепке алу қажет болады.

Біз есептеу тәжірибесін өз ішіне алған компьютерлік математикалық модельдеу үдерісін қарастырамыз (2.1-сурет).



2.1-сурет. Компьютерлік математикалық модельдеу үдерісінің жалпы сызбанұсқасы

Бірінші кезең – модельдеу мақсатын анықтау. Олардың негізгілері мыналар:

1. Модель объекті қалай түзілген, оның құрылымы, негізгі қасиеттері, даму заңдары мен қоршаған ортамен өзара әсері қандай екендігін білу үшін қажет (**түсіну**);

2. Модель объектіні немесе үдерісті баасқаруды үйрену және берілген мақсаттар мен критерийлерде тиімді басқару тәсілдерін анықтау үшін керек (**басқару**);

3. Модель берілген тәсілдер мен формалардағы объектіге әсерлерді жүзеге асырудың тікелей және жанама салдарын болжау үшін қажет (**болжау**).

Модельдеудің келесі маңызды кезеңі – модельді нақтылау. Мұнда кіріс параметрлері олардың мәндерінің өзгерулері шығыс параметрлеріне әсерінің маңыздылық дәрежесіне қарай бөлінеді. Мұндай үдерісті *ранжирлеу* деп атайды. Көпшілік жағдайда модельдің бізді қызықтыратын параметрлеріне әсер етуі мүмкін болған барлық факторларды есепке алу мүмкін болмайды. Модельдеудің сәтті болуы маңызды болған факторларды дұрыс ажырата білуге байланысты болады. Маңызды факторларды ажыратып, маңызы шамалы болған факторларды қарастырудан тыс қалдыруды тек қана модель қатысты болған пәндік аймақтағы маман ғана жүзеге асыра алады. Мұның нәтижесінде модельдеу объектісі алғашқы жуықтауда нақтыланады және оның негізгі қасиеттері мен заңдылықтарын түсінуге септігін тигізеді.

Төменде (2.2-сурет) екі жағдай бейнеленген:

а) қандай да бір x кіріс параметрі y_i шығыс параметріне қатты әсер етеді;

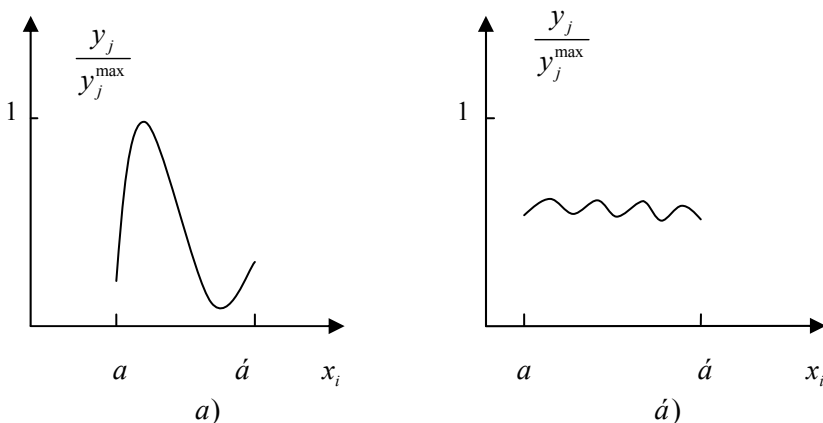
б) x кіріс параметрінің y_i шығыс параметріне әсері шамалы.

Кіріс параметрі x_i -лердің мәндерінде шығыс параметрі y_i -дің өзгеру заңдылығы 2.2 б) -суретте көрсетілгендей болса, онда бірінші жандасуда x_i -ді модельдің кіріс параметрлері жиынтығынан шығарып тастауға болатын параметр деп қарастыруға болады; ал егер x_i -лердің мәндерінде y_i -дің өзгеру заңдылығы 2.2 а) -суретте көрсетілгендей болса, онда x_i -ді маңызды параметрлер қатарынан шығарып тастауға болмайды.

Келесі кезең – модельдің математикалық сипатталуын анықтау. Бұл кезеңде модельдің абстракт сипатталуынан нақты математикалық қатынастармен (теңдеу, теңдеулер немесе теңсіздіктер жүйелері, дифференциалдық/интегралдық теңдеу немесе теңдеулер жүйелері және т.б.) берілген сипатталуына өту қажет болады.

Математикалық модель сипатталып болған соң оны зерттеу әдісі таңдалады. Әдетте, қандай да бір есепті шешуде орнықтылығы, қолдану қарапайымдылығы, есептеу көлемі және т.б. сипаттамаларымен

ерекшеленетін бірнеше әдістер болады. Жалпы модельдеу үдерісінің қойылған мақсатқа жетуі математикалық модельді шешу әдісін дұрыс таңдауға байланысты болады.



2.2-сурет. x шаманың нәтижелік y_i шамаға әсері

ЭЕМ үшін алгоритм мен бағдарлама құру – модельдеудегі келесі маңызды кезеңдердің бірі. Қазіргі күнде компьютерлік математикалық модельдеуде есептеулер жүргізу мен нәтижелерді бейнелеуде MatLab, Mathcad, Maple, Derive, Mathematica және т.б. компьютерлік математикалық есептеу жүйелері, MS Visual Studio, Delphi және т.б. визуалды бағдарламалау орталары, сондай-ақ ғылыми математикалық есептеулерде кең қолданыс тапқан, көптеген тәжірибелерде сынақтан өткен, стандартты бағдарламалар кітапханасына ие FORTRAN тілінің жетілдірілген нұсқалары пайдаланылады [5].

Бағдарлама құрылған соң оны модельді немесе есептеу алгоритмдерін құруда жіберілуі мүмкін қателіктерді анықтау және түзету мақсатында қарапайым тест есептерінде тексеру орындалады.

Әрі қарай есептеу тәжірибелері жүргізіліп модельдің нақты үдеріске сәйкестігі анықталады. ЭЕМ-де алынған үдерістің маңызды сипаттамалары тәжірибелік берілгендермен дәлдік дәрежесінде дәлме-дәл түсетін болса, онда модель нақты объектіні/үдерісті жақсы сипаттайды деп есептеледі.

Модель нақты үдеріске сәйкес болмаған жағдайда жоғарыдағы кезеңдердің біріне қайта ораламыз.

2.2 Математикалық модельді құрудағы негізгі принциптер

Материалистік дүниетанымның негізгі қағидаларының бірі дүниенің және оның әрбір бөлігінің шексіздігі, яғни табиғаттағы кез келген құбылыс өзінің күрделілігі бойынша шексіз болатындығы [20, 56]. Бұл нақты бір зерттеуде құбылыстың, үдерістің немесе объектінің барлық жақтарын есепке алу мүмкін еместігін білдіреді, сондықтан математикалық модельді құруда алдымен қойылған зерттеу есебінің мақсаты тұрғысынан маңызды болған факторларды (параметрлерді) анықтай және ажырата отырып, құбылыстың сапалы сипатталуы жүргізіледі. Мұндай маңызды және маңызы шамалы болған факторларға ажырату нақты құбылыс жайлы бар білімдерге сүйенеді. Алайда осы білімдердің толық болмауынан математикалық модельдеудің барлық кезеңдерін орындап болғаннан кейін математикалық модельді қайта қарап шығу қажеттілігі туындауы мүмкін: құбылыстың маңызды болмаған параметрлерінің өзгеруі модельдің шығыс параметрлеріне қатты әсер етуі, анықтаушы параметрлердің белгілі бір аралықтарында басымдыққа ие болған жаңа факторлардың анықталуы және т.б.

Әрі қарай құбылыстың таңдалған сапалық сипаттамасы бойынша оның математикалық моделі құрылады. Бұл кезеңде құбылысты сапалық сипаттау мөлшерлікке өтеді: қозғалысты, санақ жүйесі мен өлшеу бірліктерін сипаттайтын айнымалылар таңдалады, осы айнымалылар арасындағы байланысты орнататын теңдеулер жүйелері (алгебралық, дифференциалдық немесе интегралдық және т.б.) жазылады. Мұнда «қозғалыс» сөзін біз жалпы, кең мағынада өзгеру деп түсінеміз, ал объектілердің өздері табиғаты және мақсаты бойынша түрлі болуы мүмкін: физикалық, химиялық, биологиялық, техникалық механизмдер мен конструкциялар немесе әлеуметтік құбылыстар.

Математикалық модель теңдеулерін алудағы негізгі әдістер сақталу заңдары немесе вариациялық принциптерге негізделген [8, 25, 26, 27, 30, 32, 36, 50]. Бұл заңдар мен принциптер жалғыз қозғалысты ажыратып ала алмайды, сол себепті мүмкін болған ойдағы жиындар ішінен нақты қозғалысты ажыратып алу үшін қосымша таңдап алу принциптері болуы қажет. Мысалы, шекаралық шарттар, ал стационар емес есептер үшін – қосымша бастапқы берілгендер де қажет болады. Сондай-ақ, үдерісті сипаттаудағы пайдаланылған түрлі шарттар нәтижесінде модель теңдеулерінде кез келген параметрлер немесе функциялар болуы мүмкін. Осы анықталуға тиіс функциялар модельдің тұйықтаушы деп аталатын қатынастарына

кіреді. Мысалы, газдың ағысын сипаттайтын модельдерді алуда заттың, импульстің, импульс моментінің, энергияның сақталуы заңдарымен қатар, қысымның, тұтқырлық және жылуөткізгіштік коэффициенттерінің тығыздық пен температураға тәуелділігі, сондай-ақ басқа да тұйықтаушы қатынастар қажет болады. Мысалы,

$$p = \rho RT ,$$

Клапейрон теңдеуін келтіруге болады, ол идеал газдың моделінде тұйықтаушы қатынас ретінде пайдаланылады. Мұнда ρ – қысым, T – температура, R – газдың химиялық құрамымен анықталатын газ тұрақтысы.

Жанды материя деңгейінде жансыз материя үшін орынды болған қозғалыстарды тандап алудың барлық принциптері өз күшін сақтайды. Сондықтан мұнда да модельдеу үдерісін сақталу заңдарын немесе вариациялық принциптерді жазудан бастау қажет. Алайда, жанды материядағы барлық өзара әсерлер «кері байланыс» деп аталатын ерекшелікке ие болады: үдерістің кейбір эффектілері өзінің бастауына немесе алдыңғы стадиясына қайтып оралады, мұның нәтижесінде олар күшейеді немесе бәсеңдейді. Сол себепті, биологиялық жүйелерді сипаттауда осы аталған таңдау принциптері мен кері байланыстар жүйесін басшылыққа алу қажет болады [7, 16].

Материяның қоғамдық деңгейдегі ұйымдастырылуында мүлде жаңа құбылыс – еңбек қатынастары пайда болады. Сондықтан адамдардың өздерінің саналы араласуына тәуелді болатын, формальдануы қиын болған осы саладағы күрделі үдерістердің математикалық модельдерін құруда еңбек қатынастары терминдерін, нақты «қозғалыстарды» таңдаудың экономикалық, қаржылық және т.б. принциптерін [17, 41, 52], аналогия әдісін [47] пайдалану керек.

2.2.1 Сақталу заңдары

Масса, импульс, энергияның сақталу заңдары көптеген тәжірибелер нәтижелерімен дәлелденген, олардың негізделгендігі күмән тудырмайды, сондықтан олар қатты немесе деформацияланатын денелер механикасының модельдерін құрудағы негізгі принциптер ретінде пайдаланылады. Сақталу заңдарының мағынасы масса, импульс, энергияның өзгеруіне толықтай бір шектеу қойылғандығын білдірмейді, ол зерттелетін қасиеттердің мөлшерлік сипаттамаларының белгілі бір өзгеру мүмкіндігін көрсететін қандай да бір тұжырым болады. Мысалы, оқшауланған материалдық нүктелер жүйесі үшін импульстың сақталу заңы мұндай жүйенің импульсі уақыт өте өзгермейтіндігін білдіреді, ал оқшауланбаған (сыртқы күштер,

эсерлер болған жағдайда) жүйе үшін – импульстің өзгеру жылдамдығы жүйеге эсер етуші барлық сыртқы күштердің қосындысына тең болады [39], яғни уақыт өте импульс өзгеруі мүмкін.

Сақталу заңдары механикадан басқа да көптеген салаларда математикалық модельдерді келтіріп шығаруда қолданыс тапты.

Сақталу заңының жалпы математикалық сипатталуы мынадай [50]:

$$\frac{d\Phi}{dt} = F \quad (2.1)$$

мұнда, t – уақыт, $\Phi = \sum_k \varphi^k$, $\varphi^k = \varphi^k(\varphi_1^k, \dots, \varphi_m^k)$, $\varphi_m^k = \varphi_m^k(t, x_1, \dots, x_n)$ –

жүйенің k элементінің қандай да бір қасиетінің мөлшерлік сипаттамасы (мысалы, масса, кинетикалық энергия, ішкі энергия және т.б), $x_i (i=1, \dots, n)$ – жүйе элементінің берілген өзіндік белгісі (мысалы, оның координаталары). Өзгеру себебі F эсер деп аталады.

Егер жүйенің элементтер саны көп болып, жүйе элементтерінің өзіндік белгілері, қасиеттері, эсерлер мүмкін болған интервалдардан барлық мәндерді қабылайтын болса, ал ізделінетін функциялар үзіліссіз болса, онда жүйенің ізделінетін сипаттамасы:

$$\Phi = \int_{\omega} \varphi d\omega, \quad (2.2)$$

мұнда ω – x_i айнымалылар кеңістігіндегі кез келген ажыратылған көлем, φ – Φ шаманың үлестірім тығыздығы. F эсер жүйенің әрбір элементіне

$$G = \int_{\omega} g d\omega$$

көлемдік эсерден және жүйеге ω көлемнің S шекарасы арқылы берілетін

$$\Sigma = \int_S \sigma_n dS$$

беттік эсер қосындысынан тұрады. Мұнда g – көлемдік эсер тығыздығы, ал σ_n – беттік эсер үлестірімінің тығыздығы.

Сондықтан *үзіліссіз жүйелер* үшін (1.1) сақталу заңы мынадай түрде жазылады:

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \varphi d\omega = \int_{\omega} g d\omega + \int_S \sigma_n dS \quad (2.3)$$

Сақталу заңдарының нақты түрлері зерттелетін үдеріс үшін φ , σ_n және g шамалар анықталғаннан соң алынады.

2.2.2 Вариациялық принциптер

Математикалық модельдері құрудың тағы бір әдісі вариациялық принциптермен байланысты. Вариациялық принцип мағынасы мынадай: зерттелетін объектінің мүмкін болған барлық қозғалыстары ішінен объектімен байланысқан қандай да бір шама өзінің экстремал мәніне жететіні ғана жүзеге асырылады.

Қандай да бір механикалық жүйенің қозғалысын қарастыра отырып вариациялық принцип мағынасын түсіндіріп өтеміз. Вариациялық принципті қолдануда қозғалыс конфигурациялық кеңістік көмегімен сипатталады, бұл кеңістік жалпыланған q координаталардан, \dot{q} жалпыланған жылдамдықтар және t уақыттан құрылады. Бұл теориядағы негізгі түсініктер \mathcal{L} Лагранж функциясы және Гамильтон бойынша S іс-әрекеттер болып, қозғалыс барлық уақыт моменттерінде $q(t)$ және $\dot{q}(t)$ шамалардың жиынтығымен толық анықталады.

$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t))$ Лагранж функциясы кинетикалық және потенциалдық энергияларының айырмасына тең, S іс-әрекет

$$S(q) = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

функционал түрінде анықталады, ол $[t_1, t_2]$ аралықта анықталған әрбір функцияға қандай да бір нақты санды сәйкес қояды. Гамильтон принципі бойынша нақты қозғалыста іс-әрекет минимал болуы тиіс, ол:

$$\delta S = 0, \quad (2.4)$$

теңдігімен өрнектеледі. Мұнда δ символымен вариациялау математикалық амалы белгіленген. Жоғарыдағы (2.4) теңдікті ашып жазатын болсақ, ол мынадай болады:

$$\frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} \left(q + \varepsilon\varphi, \frac{d(q + \varepsilon\varphi)}{dt} \right) dt \Big|_{\varepsilon=0} = 0, \quad (2.5)$$

мұнда $\varphi(t)$ – $t=t_1$ және $t=t_2$ -де нөлге айналатын кез келген функция, $\varepsilon\varphi(t) - q(t)$ шаманың вариациясы. (2.5) теңдеу ізделінетін модельді береді.

Вариациялық принцип көмегімен алынатын қарапайым математикалық модельге мысал келтіреміз. Қазіргі уақытта энергетика саласында беттік толқындардың механикалық энергиясын пайдаланатын толқындық энергетикалық станцияларды құру перспекти-

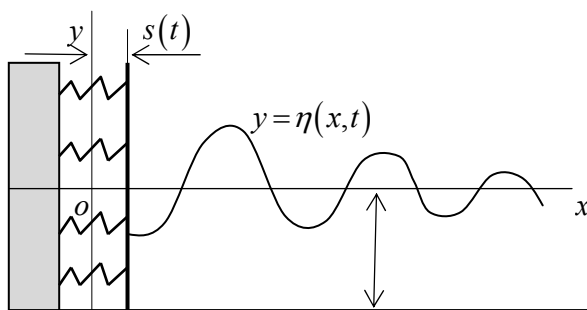
валық бағыттардың бірі болып табылады. Бұл бағытта бірқатар зертханалық зерттеулер жүргізіліп келеді және станцияның жекеленген бөліктерін есептеудің түрлі аналитикалық әдістері ұсынылуда [51]. Адекват математикалық модельдер негізіндегі есептеу тәжірибелері станцияның жұмыс элементтеріне толқындар әсерлерін жеткілікті деңгейде толық зерттеуге мүмкіндік береді.

Мұнда біз үлгілік қондырманы қарастырамыз, онда қозғалмалы қабырғаға беттік толқындар әсер ететін болып, ол қозғалысқа түскенде толқындар энергиясы электр энергиясын өндіретін қондырманың механикалық энергиясына түрлендіріледі. Толқындардың қабырғамен өзара әсерін сипаттау үшін қозғалмалы вертикаль қабырғалы аймақта сұйықтықтың толқындық қозғалысы есебін қарастыруға болады. Қабырға серіппелермен қозғалмайтын блокқа бекітілген болып, оның қозғалысы толқындық жүктемелермен, серіппенің тіктеуші күші, үйкеліс күші, судың кедергі күші және басқа да күштермен анықталады.

Осыған ұқсас есеп беттік толқындар әсеріндегі үлкен конструкциялардың серпімді қабырғаларының жағдайын зерттеуде пайда болады. Мұнда да гидросерпімділіктің байланысты есептерін шешуге тура келеді, себебі қабырғалардың деформациясы толқындық қысымға тәуелді келіп, оның өзі қабырғалардың серпімді қасиеттеріне тәуелді болады. Сондай-ақ, үдерістердің стационар және сызықтық еместігін есепке алу қажет.

Мұндай есептер мұнай өндіруші теңіз платформалары үшін толқыннан сақтайтын қозғалмалы қабырғалардың конструкцияларын жасауда да кездеседі.

Қабырғаның жағдайы $s(t)$ горизонталь координатамен анықталатын болсын, мұнда $s = 0$ координата серіппелердің жүктелмеген жағдайындағы қабырғаның орнына сәйкес келеді (2.3-сурет).



2.3-сурет. Беттік толқындардың серпімді беріктелген вертикаль қабырғамен өзара әсерінің сызбанұсқасы

Ньютонның екінші заңы ($F = ma$, мұнда F – күш, a – үдеу, m – масса) бойынша қабырғаның горизонталь қозғалысының теңдеуі

$$m\ddot{s} = -ks + F, \quad (2.6)$$

түрінде болады, мұнда k – серіппенің қатандық коэффициенті, $-ks$ – серіппенің тіктеуші күші, F – басқа барлық күштердің әсерлерінің қосындысы.

Вариациялық әдіспен математикалық модельді алуда қабырғаға тек бір күш (серіппенің серпімділік күші) әсер ететін қарапайым жағдайды қарастырамыз ($F = 0$). Бұл жағдайда кинетикалық және потенциалдық энергиялардың айырмасына тең болатын Лагранж функциясының түрі

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{s}^2 - \frac{k}{2} s^2,$$

Гамильтонның іс-әрекеті

$$S(s) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{m}{2} \dot{s}^2 - \frac{k}{2} s^2 \right) dt,$$

ал $\varepsilon\varphi(t)$ вариациялардағы $s(t)$ шаманың іс-әрекеті мынадай болады:

$$S(s + \varepsilon\varphi) = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{d}{dt}(s + \varepsilon\varphi) \right)^2 - \frac{k}{2} (s + \varepsilon\varphi)^2 \right] dt.$$

Сондықтан біздің мысалымызда (2.5) теңдеуді

$$\begin{aligned} 0 = \frac{dS(s + \varepsilon\varphi)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= \int_{t_1}^{t_2} \left[m \left\{ \frac{ds}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right\} - k(s\varphi + \varepsilon\varphi^2) \right] dt \Big|_{\varepsilon=0} = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[m \frac{ds}{dt} \frac{d\varphi}{dt} - ks\varphi \right] dt \end{aligned}$$

түрінде жазуымызға болады.

φ функция t_1 және t_2 уақыт моментерінде нөлге тең болатындықтан,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{dt} \frac{d\varphi}{dt} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2s}{dt^2} \varphi dt$$

бөлектеп интегралдау формуласын есепке алатын болсақ, қарастырылған мысал үшін (2.5) теңдеудің соңғы түрі мынадай болады:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[m \frac{d^2 s}{dt^2} + ks \right] \varphi dt = 0 .$$

φ функция кез келген функция болғандықтан, жоғарыдағы теңдік квадрат жақшаның ішіндегі өрнек кез келген $t \in (t_1, t_2)$ уақыт моментінде нөлге тең болғанда ғана орынды болады:

$$m\ddot{s} = -ks, \quad (2.7)$$

яғни, қабырғаның қозғалысы Ньютон заңы негізінде алынған (2.6) теңдеумен дәлме-дәл ($F \equiv 0$) түсетін теңдеумен сипатталады.

(2.7) теңдеу екінші ретті біртекті сызықтық қарапайым дифференциалдық теңдеу болып, оның жалпы шешімі

$$s(t) = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t \quad (2.8)$$

қабырғаның жиілігі $\omega = \sqrt{k/m}$ болған гармоникалық тербелісін сипаттайды, ал c_1 және c_2 шамалардың мәндері бастапқы Коши берілгендері: қабырғаның $s(0)$ бастапқы уақыт моментіндегі жағдайы және оның $\dot{s}(0)$ жылдамдығы арқылы анықталады.

Вариациялық принцип көмегімен механикалық жүйелердің ғана емес, сондай-ақ физикалық, химиялық, биологиялық және басқа үдерістердің математикалық модельдерін құруға болады.

2.2.3 Аналогия әдісі

Математикалық модельдеу – ғылым мен техникада кең қолданыс тапқан әмбебап, модельдеу әдісінің жоғары түрі. Физикалық модельдеу табиғат құбылыстарын зерттеу құралы ретінде ежелден қолданылып келеді. Физикалық модельдеудің ең қарапайым түрі механикалық модельдеу болып, онда объектіні зерттеу оның кішірейтірілген немесе үлкейтірілген моделін зертханалық қондырғыларда зерттеумен алмастырылады. Мысалы, ұқсастықтың геометриялық және динамикалық критерийлерін сақтаған жағдайдағы ұшақтың кішірейтілген моделін аэродинамикалық трубада ауа ағынының ағып өтуі ұшақтың атмосферадағы нақты ұшу бейнесін жеткілікті деңгейде дәл қайталайды [50]. Физикалық модельдеудің күрделірек түрі – аналогтық модельдеу. Аналогтық модельдеуде түрлі физикалық үдерістер арасында аналогия (ұқсастық, жақындық) орнатылады (мысалы, жылуөткізгішті пен электрөткізгіштік арасында) және бір физикалық үдерісті табиғаты мүлде одан өзгеше болған басқа физикалық үдеріспен модельдеу жүзеге асырылады.

Мұндай аналогия математикалық модельдеуде де бар, оның бір көрінісі – бірнеше салыстырмалы түрде қарапайым болған математикалық модельдер көмегімен көптеген түрлі құбылыстарды зерттеу мүмкіндігі. Мысалы, өткізуші бетте зарядтар келтіріп шығаратын электрлік өріс потенциалы және денедегі температуралық өріс (дене бетінде температура берілген) бір дифференциалдық теңдеумен сипатталады. Көптеген физикалық үдерістердің аз мөлшерлі математикалық модельдермен сипатталатындығы соңғыларының әмбебаптығын білдіреді және математикалық модельдеудің көптеген салаларда табысты қолданылуы себептерінің бірі болып табылады.

Көпшілік жағдайда қандай да бір үдерістің моделін құруда осы үдерісті сипаттайтын сақталу заңын немесе вариациялық принципті тікелей көрсету мүмкін болмайды немесе қазіргі білімдер тұрғысынан математикалық сипатталуы мүмкін болған осындай заңдардың бар болуына деген жалпы сенімділіктің жоқтығын келтіруге болады. Мұндай жүйелерге, мысалы, адам іс-әрекетімен қатысатын экономикалық және әлеуметтік жүйелерді атап өтсек болады.

Осындай үдерістердің модельдерін құруда олардың бұрын зерттелген құбылыстармен аналогиясын пайдалану жемісті болады: қандай да бір үдерістерді математикалық модельдеуде құрылған және жинақталған әдістер мен нәтижелер «аналогия» бойынша кең кластағы басқа үдерістерді модельдеуде пайдаланылады. Мысалы, механикалық-экономикалық аналогия (сақталу заңдарын пайдалану, микродеңгейден макродеңгейге өту), термодинамикалық-экономикалық аналогия (стационар үдерістер жайлы түсініктер, теңсалмақты жағдайлар, дискрет модельден үзіліссіз модельге өту) және т.б. Осындай аналогияларды қолдану формальдауы қиын болған үдерістердің маңызды қасиеттерін терең түсінуге мүмкіндік жаратады.

2.2.4 Модельдер иерархиясы

XX ғасырдағы ғылымның дамуы бір құбылыс немесе үдерісті сипаттау үшін түрлі модельдер жиынтығын, нақты болмыс бейнесінің баламалығын құру қажеттілігін көрсетті. Модельдеудің таңдап алынатын оптимал деңгейі модельдеу мақсатына тәуелді болады: практикалық қажеттілігі болмаған, компьютерлік ресурстар бойынша шығыны елеулі болған жоғары деңгейлі модельді пайдалану шарт емес. Сонымен қатар, құбылыстың жағдайы үшін маңызды болған барлық факторларды есепке алатын «толық» математикалық модельдерді құру да өзін ақтамайды.

«Қарапайымнан күрделіге» принципін жүзеге асыратын жандасу нәтижелі болуы мүмкін. Мұнда күрделірек болмаған модельді жеткілікті деңгейде толық зерттеп болғаннан соң келесі қадам жасалады – зерттелетін үдерісті идеалдаушы бір немесе бірнеше ықшамдаушы факторлар қарастырылудан шығарылып тасталады. Осындай қадам нәтижесінде толығырақ модельдер тізбесі (иерархиясы) пайда болады, олардың әрбірі алдыңғыларын жалпылайды. «Қарапайымнан күрделіге» принципін қолдану құбылысты дәлірек сипаттайтын модельдерді кезең-кезеңмен зерттеу және олардың қасиеттерін салыстыру мүмкіндігін береді.

Математикалық модельдердің иерархиясын «қарапайымнан күрделіге» принципіне кері болған «күрделіден қарапайымға», «жалпыдан дербеске» принципі бойынша да құру мүмкін. Бұл жағдайда «жоғарыдан төменге» жолы жүзеге асырылады – жеткілікті деңгейдегі жалпы және күрделі модельден қарастырылатын үдерістің сәйкес ықшамдаушы факторлары мен нақтылануы нәтижесінде алдыңғыларынан қарапайымдырақ (қолданыс аймағы кішірейген) модельдер алынады. Мұндай жандасуда бірден үдерістің қандай да бір жалпы қасиеттерін анықтау мүмкін болады және олар дербес жағдайларда нақтыланып, толықтырылады.

Көптеген нақты үдерістер мен олардың сәйкес математикалық модельдері сызықтық болмайды. Соған қарамастан сызықтық емес модельдерден сызықтандыру (линеаризация) арқылы алынатын және үдерістер параметрлерінің кіші өзгерулерін сипаттау үшін ғана орынды болатын сызықтық модельдер де математикалық модельдер иерархиясына енгізілуі қажет, себебі оларды зерттеу аса қиын болмайды және нақты үдеріске алғашқы жуықтау болуы мүмкін. Мысалы, ішектің қалыңдығы мен тербеліс амплитудасы оның ұзындығынан елеулі кіші, сызықтық тығыздығы тұрақты, ал ішек бөліктерінің бойлық ығысулары мен жылдамдықтарын есепке алмасақ болады деп қарастырып, біз ішек нүктелерінің кіші көлденең қозғалыстарын жуық сипаттайтын сызықтық модельді аламыз. Сызықтандырылған модель көмегімен үдерістің бізді қызықтыратын қасиеттерінің толық сипаттамаларын алу мүмкін емес, бірақ одан үдерісті толық зерттеу үшін пайдалы болатын бірқатар мәліметтер алуға болады.

Сызықтандыру үдерісін қандай да бір механикалық жүйенің сызықтық емес

$$y'' + (1 + y^2) \sin y' + y = 1$$

дифференциалдық теңдеуін шешу мысалында қарастырып өтеміз. $y_0(x) = 1$ функция осы теңдеудің дербес шешімі болатындығы

көрініп тұр (тексеріп көріңіз). Айталық, бізді осы $y_0(x) = 1$ дербес шешімге «жақын» және $y(x) = 1 + \eta(x)$ түрінде өрнектеу мүмкін болған шешім қызықтыратын болсын, мұнда $\eta(x) - y(x)$ функцияның 1-ге жақын болуы талап етілетін болғандықтан кіші шама болады. $y(x) = 1 + \eta(x)$ өрнекті бастапқы теңдеуге қоятын болсақ, төмендегі теңдеуді аламыз:

$$\eta'' + (1 + 1 + 2\eta + \eta^2) \sin \eta' + 1 + \eta = 1,$$

немесе

$$\eta'' + 2 \sin \eta' + \eta(2 + \eta) \sin \eta' + \eta = 0.$$

Осы теңдеуде үшінші қосылғыш, яғни $\eta(2 + \eta) \sin \eta'$, η, η', η'' бірінші дәрежелерімен салыстырғанда кіші шама болатындықтан, оны тастап кетуімізге болады. Сондай-ақ x -тің кіші мәндерінде $\sin x \sim x$ болатындығын есепке алып, $\sin \eta'$ -ті η' алмастырамыз. Нәтижеде $\eta(x)$ үшін төмендегі теңдеуді аламыз:

$$\eta'' + 2\eta' + \eta = 0.$$

Бұл теңдеу екінші ретті тұрақты коэффициентті біртекті болған қарапайым сызықтық дифференциалдық теңдеу болып, оның жалпы шешімі мынадай:

$$\eta(x) = (C_1 + C_2 x) e^{-x}.$$

Сызықтандыруды қолданудың тағы бір мысалына сызықтық емес $f(x) = 0$ алгебралық теңдеуді (теңдеулер жүйесін) Ньютон әдісімен сандық шешуді келтіруімізге болады. Бұл әдіс функцияның Тейлор қатарына жіктелуін сызықтық жуықтауға негізделген:

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Көрініп тұрғандай, сызықтандыру тәсілінің мағынасы Тейлор қатарына жіктеудегі бірінші мүшемен салыстырғанда аздық реті жоғары болған мүшелерін тастап кетуге негізделген, сондықтан сызықтандыру тәсілін аргументтер өзгерулерінің кіші аралықтарында қолдануға болады.

Сонымен, иерархиялық тізбекте сызықтық және сызықтық емес, стационар және стационар емес модельдер, модельдің математикалық қатынастарындағы теңдеулер түрлерімен айрықшаланатын (гиперболалық, параболалық, эллипстік типті және т.б.) модельдер, көп өлшемді және бір өлшемді және т.б. модельдер болады. Кез келген модельді құру мен талдауда оның модельдердің жалпы

иерархиясындағы орнын білу пайдалы болады [47]. Бұл модельдің қолданыс аймағын дұрыс бағалау мен басқа модельдермен байланыстарын айқын сезінуге, яғни зерттелетін құбылыстарды терең түсінуге мүмкіндік береді.

2.3 Математикалық модельді зерттеу

Құрылған математикалық модельді зерттеудің маңызы үлкен, себебі алынған модельдер күрделі тендеулер жүйелері болып, көпшілік жағдайларда олардың аналитикалық шешімдерін алу қиынға соғады. Сондықтан оларды зерттеу әдістерін дамыту мен жетілдіру қажет. Мұнда қазіргі заманғы математиканың үлкен бір бөлігін құрайтын сапалық әдістерді – шешімдердің дәл өрнегін білместен олар жайлы белгілі бір қорытынды жасауға мүмкіндік беретін әдістер жиынтығын – ажыратуға болады. Бұл әдістерге шешімнің бар болуы мен оның жалғыздығын, оның орнықтылығын, асимптотикасын зерттейтін әдістерді, өлшемдер талдауын, модельдерді топтық талдау әдістерін және т.б. жатқызуға болады. Мұндай теориялық талдауларды жүргізу модельдеудің келесі кезеңінде – есептеу алгоритмдерін құруда – сапалы сандық әдістерді құру мен сандық шешімнің ерекшеліктерін болжауда көмек береді.

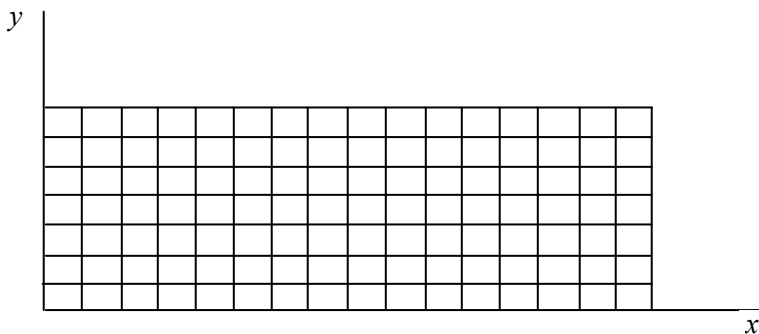
Сонымен қатар математикалық модельдердің шешімдерін айқын түрде табатын аналитикалық әдістер мен тәсілдерді, шешімдердің арнайы кластарын іздеуді жетілдіру қажет. Дербес жағдайларда болса да дәл шешімді білу есептеу алгоритмінің сапасын алдын ала тексеруге мүмкіндік береді, себебі мұндай тексерулерсіз есептеу тәжірибелерінің нәтижелері үдерістің нақты қасиеттері немесе есептеу процедурасының өзінің қандай да бір ерекшеліктерінің белгісі екендігін білу мүмкін болмайды. Шешімдердің аналитикалық өрнектерін, жалпы аналитикалық есептеулерді жүргізуде компьютерлерді пайдалану математикалық модельдерді зерттеу мүмкіндіктерін елеулі арттырады. Қазіргі уақытта түрлі аналитикалық түрлендірулерді көптеген компьютерлік математикалық жүйелер (MatLab, Mathcad, Maple, Derive, Mathematica, Reduce және т.б.) көмегімен жүзеге асыруға болады.

2.4 Есептеу алгоритмдеріне қойылатын жалпы талаптар

Мұнда біз қазіргі заманғы ЭЕМ-де пайдалануға арналған есептеу алгоритмдерін құрудың кейбір жалпы принциптерін қарастырып өтеміз.

2.4.1 Дискрет модельге өту

Компьютер ақпараттың тек қана дискрет нұскасымен амалдар орындайтын болғандықтан математикалық есепті ақырғы өлшемді есепке келтіру қажет болады. Бұл көпшілік жағдайда бастапқы есепті дискреттеу (аппроксимациялау немесе жуықтау), яғни үзіліссіз аргументті функциялардан дискрет аргументті функцияларға өту арқылы жүзеге асырылады. Мысалы, бастапқы есепте x және y тәуелсіз айнымалылардың өзгеру аймағында анықталған $u(x, y)$ функция бар болса, дискрет есепте (x_i, y_j) ($i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$) нүктелердің ақырлы жиынында анықталған $u(x_i, y_j)$ функция пайдаланылады. $M_{ij} = (x_i, y_j)$ нүктелерді тор түйіндері деп, ал (x_i, y_j) нүктелерінің жиыны тор деп аталады. Тор шешімдер аймағының дискрет бейнеленуі болып табылады. Екі және үш өлшемді аймақтарда тор құрудың көптеген әдістері бар [2, 3, 6, 18, 21, 34, 53]. Жазықтықта төртбұрышты ұяшықты, ал кеңістікте алтыжақты құрылымдалған (регуляр) торлар кең қолданылады. *Регуляр* (бірқалыпты) тор деп «торлық бағыттар» бойынша түйіндердің реттелген жиынтығына айтылады, яғни айнымалылар бойынша қадамдар тұрақты болады (2.4-сурет).

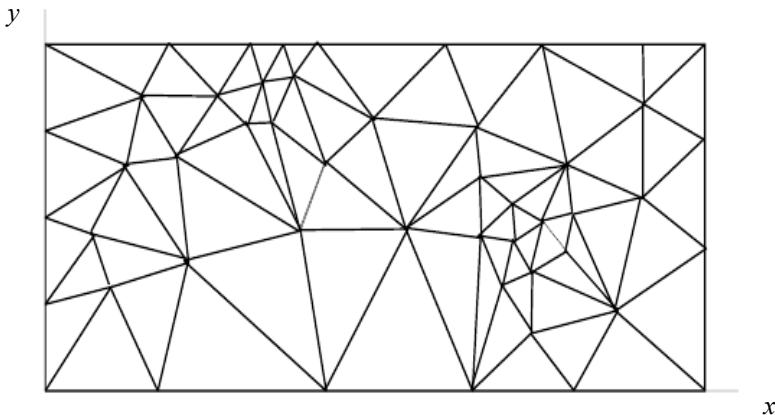


2.4-сурет. Регуляр тор

Есептеу практикасында құрылымдалмаған (регуляр емес) торлар да кең қолданылады. Олардың ерекшелігі – шешімдер аймағында тор түйіндерінің кез келген тәртіппен орналасуы, яғни айқын бір торлық бағыт болмайды және әрбір нақты түйінді өз ішіне алған ұяшықтар саны түйіннен түйінге өзгеріп отырады (2.5-сурет).

Сонымен қатар, шешімдер аймағының қандай да бір ішкі аймақтарындағы регуляр торларды басқаларындағы регуляр емес торлармен біріктіретін гибридітік торлар да қолданыс тапқан.

Математикалық модельдің аналитикалық (үзіліссіз) түрінен дискрет түріне өтудің көптеген әдістері бар: *ақырлы айырымдар әдісі, белгісіз коэффициенттер әдісі, ақырлы элементтер әдісі, интегралдық-интерполяциялық әдіс, ақырлы көлемдер әдісі, спектралдық әдіс* және т.б. [2, 6, 14, 22, 49, 55].



2.5-сурет. Құрылымдалмаған тор

Ақырлы айырымдар әдісі бастапқы теңдеудегі туындыларды регуляр торларда олардың дискрет (айырымдық) аналогтарымен алмастыруға негізделген. Мысалы, (1.7) теңдеуді ақырлы айырымдар әдісімен түйіндер саны $(N + 1)$ және қадам шамасы $\tau = T / N$ болған уақыт бойынша бірқалыпты $t_j = j\tau$ ($j = 0, \dots, N$) торда дискреттейтін болсақ мынадай айырымдық теңдеуді аламыз:

$$m \frac{s_{j+1} - 2s_j + s_{j-1}}{\tau^2} = -ks_j, \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (2.9)$$

Мұнда, s_j $t_j = j\tau$ торда анықталған торлық функция болып (2.7) теңдеудің $s(t)$ шешімі үшін $[0, T]$ уақыт аралығындағы жуықтауы болады.

Ақырлы көлемдер әдісінде (2.3) сақталу заңының интегралдық сипатталуы пайдаланады, ол бақылау көлемдерінің жиынтығы үшін жазылады. Сақталу заңдарының дискрет аналогы сипатталудағы барлық интегралдарды қандай да бір квадратуралық формулалармен есептеу жолы арқылы алынады.

Ақырлы элементтер әдісінде ізделінетін жуық шешім финиттік құрама-полиномиальдық базистік функциялардың ақырлы жүйесі бойынша жіктеледі және шешімнің алшақтығы барлық базистік функцияларға ортогональ болуы талап етіледі. Сондықтан бастапқы есептің шешімі жіктелу коэффициенттеріне қатысты алгебралық теңдеулер жүйесіне, сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесіне немесе сызықтық емес алгебралық теңдеулер жүйесіне келтіріледі. Базистік функциялары құру тандалған торға, дәлірек айтатын болсақ, оның ұяшықтарына тығыз байланысты болады, оларды бұл әдісте *ақырлы элементтер* деп атайды. Бір өлшемді аймақтарда кесінділер, екі өлшемді аймақтарда – үшбұрыштар немесе төртбұрыштар, ал үш өлшемді аймақтарда – тетраэдрлер немесе призмалар ақырлы элементтер болады. Ақырлы элементтер әдісі құрылыс механикасы, деформацияланатын қатты дене механикасы және т.б. көптеген салаларда дискрет модельдерді келтіріп шығаруда кең қолданыс тапты.

Спектралдық әдістерде финиттік болмаған өзара ортогонал болған базистік функциялар пайдаланады. Ізделінетін шешім осы функциялар бойынша жіктеледі, қатардың ақырлы бөлігі бастапқы теңдеуге қойылады. Нәтижеде жіктелу коэффициенттерін табу үшін оны алгебралық теңдеулер жүйесіне бейнелеу орындалады. Формасы қарапайым аймақтар үшін спектралдық әдіс базистік функциялардың саны аз болған жағдайда да жоғары дәлдік береді.

Математикалық модельді дискрет модельмен алмастырғаннан соң біз тор түйіндерінің саны (базистік функциялар саны) артуымен дискрет есептің шешімі қандай да бір мағынада бастапқы есептің шешіміне жақындайтындығына сенімді болуымыз керек. Осы шешімдердің жақындығы көпшілік (бірақ толықтай емес) жағдайларда жуықтау тәсілімен, математикалық модель мен оны жуықтаушы дискрет модельдің «жақындығымен» анықталады. Дискрет есеп бастапқы үзіліссіз есепті жуықтайтындығының қатаң математикалық дәлелдеулері кейбір, мысалы, сызықтық немесе квазисызық, есептер үшін ғана бар. Көптеген сызық емес есептер үшін мұндай теоремалар жоқ. Сондықтан құрылатын алгоритмнің қасиеттерін жан-жақты зерттеу қажет болады.

2.4.2 Алгоритмнің дәлдігі

Бастапқы есепті жуықтау нәтижесінде дискрет есеп алынған соң есептеу алгоритмін, яғни ЭЕМ-де орындалатын және ақырғы санды кадамдардан соң дискрет есептің шешімін беретін арифметикалық

және логикалық амалдар тізбегін құру қажет болады. Алынған шешім бастапқы математикалық есептің жуық шешімі болады.

Дискрет модельді шешу үшін көптеген есептеу алгоритмдерін пайдалануға болады. Бірақ олардың барлығы сапа және басқа да сипаттамалары (орнықтылығы, дәлдігі, жинақтылығы, есептеу алгоритмдерінің күрделілігі және т.б.) жағынан бірдей болмайды, сондықтан алдын ала, априори, есептеуге жарамды жақсыларын таңдай білу керек. Ол үшін есептеу алгоритмдерінің сапасын бағалау критерийлерін сипаттау қажет.

Есептеу алгоритміне қойылатын негізгі талап – оның *дәлдігі*. Бұл – есептеу алгоритмі көмегімен құрылған немесе таңдалған математикалық модельдің жуық шешімін ақырғы санды $Q(\varepsilon)$ амалдарда $\varepsilon > 0$ дәлдікпен алу дегенді білдіреді. Алгоритм жүзеге асырылатын болуы, яғни дискрет есептің шешімі жарамды компьютерлік уақыт ішінде алынуы тиіс. Есептеу дәлдігі артқанда (ε шамасы кішірейгенде) дерлік барлық алгоритмдер үшін есепті шешу уақыты артады.

Дискрет есептің шешімі бастапқы есептің шешімімен дәлме-дәл түспейді, ол қателігі бар жуық шешім болады. Сандық шешімде қателіктің пайда болуының негізгі екі себебін атап өтуге болады. Біріншісі бастапқы есепті дискрет есеппен аппроксимациялау кезінде пайда болады. Мысалы, (2.7) теңдеудегі \dot{s} туындыны (2.8) айырымдық теңдеудің сол жағындағы айырымдық қатынаспен (айырымдық туындымен) алмастыратын болсақ, τ нөлге ұмтылғанда ($\tau \rightarrow 0$) реті τ^2 -қа тең аппроксимациялау қателігін жібереміз. Қателіктің екінші түрі – дөңгелектеу қателігі – ЭЕМ-де бейнеленетін сандардың ақырлы разрядты болуына байланысты пайда болады.

2.4.3 Алгоритмнің орнықтылығы

ЭЕМ-дегі әрбір есептеуде дөңгелектеу қателігі пайда болады. Алгоритмге байланысты осы қателіктер уақыт өте шексіз артуы немесе қателіктер жинақталмауы мүмкін. Бірінші жағдайда алгоритм *орнықсыз*, ал екінші жағдайда – *орнықты* деп аталады. Мысалы, егер қандай да бір алгоритмде еселігі $q > 1$ болған $a_{n+1} = a_n q$ ($n = 1, 2, \dots$) геометриялық прогрессияның мүшелері есептелетін және бірінші мүшені есептеуде δ қателік жіберілген,

яғни a_1 -дің орнына $\bar{a}_1 = a_1 + \delta$ мән алынған болса, онда a_{n+1} -ді есептеуде де осы қателіктің әсері болады: дәл мәннің орнына біз

$$\bar{a}_{n+1} = \bar{a}_1 q^n = a_{n+1} + \delta \cdot q^n,$$

мәнді аламыз, ол a_{n+1} -ден жинақталған $\delta \cdot q^n$ қателікке тең айырмашылыққа ие, ал осы қателік n шексіздікке ұмтылғанда ($n \rightarrow \infty$) өте тез артады.

Алгебрадан сызықтық теңдеулер жүйесін Крамер формулалары көмегімен шешуге болатындығын білеміз. Алайда Крамер формулаларына негізделген алгоритм оны ЭЕМ-дегі есептеулер үшін пайдаланғанда орнықсыз болады. Сондай-ақ шешімді ақырғы санды амалдарда алу талабы да орындалмайды, себебі өлшемі N болған анықтауыштарды есептеу үшін шамамен $N!$ амалдарды орындау қажет болады (N – белгісіздер саны).

Сол себепті, сызықтық алгебралық теңдеулер жүйелерінің шешімдерін компьютер көмегімен табуда орнықты болған итерациялық әдістер қолданылады.

2.4.4 Есептеу алгоритмдерінің үнемділігі

ЭЕМ-нің көмегімен есептерді шешуде шешімді алудағы амалдар саны $Q(\varepsilon)$ -ның кіші болуы талап етіледі және бұл талап орынды да, себебі мұнымен есепті шешуге кететін компьютер уақыты анықталады. Кез келген есепті шешу үшін бірнеше алгоритмдерді ұсынуға болады. Оларды қолдануда бірдей ε дәлдікке түрлі амалдар санымен жетуге болады. Дискрет есептің шешімі өлшемі N болған ақырғы өлшемді кеңістіктің (u_1, u_2, \dots, u_N) векторы болсын деп қарастырайық. Егер шешімнің бір компонентасын табуға кететін арифметикалық амалдар саны жалпы белгісіздер санынан «әлсіз» тәуелді болса немесе мүлдем тәуелді болмаса, онда алгоритм *үнемді* деп аталады. Сонымен, үнемді алгоритм саны дискрет есептің шешімі жататын ақырғы өлшемді кеңістіктің өлшемі N -ге пропорционал болған арифметикалық амалдарды орындауды талап етеді. Сондықтан, сызықтық алгебралық теңдеулер жүйелерін шешудегі Крамер алгоритмі де (шамамен, $N!$ амалдарды қажет етеді), Гаусс әдісінің алгоритмі де (шамамен, $\approx N^3$ амалдарды қажет етеді) үнемді алгоритмдер қатарына жатпайды, ал қума әдісі үнемді болады (амалдар саны N -ге пропорционал).

2.4.5 Алгоритмнің параллельденуі

Есептеу алгоритмі дәлдік, орнықтылық, үнемділік қасиеттерімен қатар параллельдену қасиетіне ие болғаны дұрыс. Күрделі есептеу үдерісін кіріс және шығыс берілгендерімен өзара уақытылы алмасып тұратын бірнеше қарапайым және салыстырмалы түрде тәуелсіз болған үдерістерге ажырату параллель есептеулердің компьютерлік бағдарламаларын құруға кең жол ашады [13]. Бұл бағытта үдерістер арасындағы үлкен көлемдегі ақпараттарға байланысты қосымша мәселелер туындайды (аралық есептеулерді буферде уақытша сақтау, есептеулерді синхрондау және т.б.).

Егер күрделі алгоритмді жақсы зерттелген және қарапайымдау есептердің сенімді алгоритмдері түрінде бейнелеу мүмкін болса, онда мұндай элементар алгоритмдері *есептеу модульдері* деп, ал модульдерді ажырату процедурасының өзін *алгоритмнің модульдік талдауы* деп атайды [28]. Алгоритммен модульдік талдау жүргізе отырып, біз күрделі алгоритмді салыстырмалы түрде қарапайымдау болған есептеу модульдерінің тізбекті орындалуы ретінде қарастыру мүмкіндігіне ие боламыз.

Сонымен қатар, алгоритмді модульдік декомпозициялау оны бөліктерге ажыратуды елеулі жеңілдетеді, ал модульдік құрылымға ие болған алгоритм негізінде құрылған «тізбекті» бағдарламаны параллель архитектуралы ЭЕМ үшін жеңіл бейімдеу мүмкін болады.

2.5 Есептеу алгоритмін бағдарламалық жүзеге асырудың кейбір принциптері

Есептеу алгоритмі дискрет модельді ЭЕМ-де орындалуы қажет іс-әрекеттер жиынына бейнелейді. Осы іс-әрекеттерді компьютер түсінетін тілде жазу математикалық модельдеудің келесі кезеңі – бағдарламаны құру кезеңінде орындалады. Мұнда ЭЕМ үшін бағдарлама құру, бағдарламаны дұрыстау және тестілеу, ЭЕМ-де есептеулер жүргізу, нәтижелерді талдау, модельді нақтылау жұмыстары жүргізіледі.

Есептеу алгоритмінің бағдарламасын құруда мына кезеңдерді атап өтуге болады.

1. Берілгендерді құрылымдық жағынан ажырату;
2. Алгоритмді құрылымдық жағынан ажырату;
 - 2.1. Кіріс және шығыс берілгендерін ажырату;

2.2. Алгоритмдік модульдерді ажырату – алгоритмнің процедура немесе процедура-функция түрінде жүзеге асыру керек болған блоктарын ажырату;

3. Бағдарламаның логикалық сызбанұсқасын (блок-сызбанұсқа) құру.

4. Бағдарламаны жоғары деңгейлі бағдарламалау тілдерінің бірінде жазу немесе компьютерлік математикалық жүйелерді пайдалану;

5. Бағдарламаны дұрыстау (отладка) және тестілеу.

Есептеу алгоритмінің бағдарламасын осы айтылғандарды басымылыққа ала отырып құру көлемі, есептеу уақыты, ЭЕМ жадында алатын орны бойынша тиімді бағдарламалар құруға мүмкіндік береді. Жоғарыда келтірілген кезеңдердің кейбіріне қысқаша тоқтала кетейік.

Стационар болмаған (уақытқа қатысты өзгертін) есептерді сандық шешуде ізделінетін функциялар мәндерін уақыт бойынша әрбір қадамда сақтамаған жөн, себебі бұл сәйкес массивтердің өлшемдерінің артуына алып келеді. Ал бұл массивтер саны есептің кеңістік айнымалылары санына тең болуы тиіс. Мысалы, функцияны $t = t_m$ -де екі өлшемді $\{u_{ij}^m\}, i = 1, 2, \dots, M_x, j = 1, 2, \dots, M_y$ массивте сақтау қажет. Егер қажеттілік болса, аралық мәліметтерді баспаға жіберуге болады.

Енгізу, шығару информациялары мен бағдарламалық модульдерді ажырату да бағдарлама құрудағы маңызды кезең. Бағдарламаның берілгендерін дұрыс басқару онымен жұмыс істеуді жеңілдетеді, есептеулерді тиімді ұйымдастыруға мүмкіндік береді. Бағдарламалық модульдер-процедуралар мен процедура-функцияларды ажырату қолданбалы бағдарламаларға қойылатын үнемділік талабымен, яғни жад пен есептеу уақытын үнемдеумен, анықталуы тиіс.

Логикалық сызбанұсқа – есепті алгоритмге сәйкес шешуді жүзеге асыратын амалдарды орындау үшін нұсқаулар тізбесі. Басқаша айтқанда, логикалық сызбанұсқа – есепті шешу алгоритмін, оның логикасын, жеке блоктарының байланысын көрнекі бейнелеу мен өңдеу үшін бағдарламаны қандай да бір псевдокодта құру.

Блок-сызбанұсқа – логикалық сызбанұсқаның (есепті шешу алгоритмінің) геометриялық фигуралар жәрдеміне көрнекі бейнеленуі.

Бағдарламаны дұрыстау – пайдаланылатын жоғары деңгейлі алгоритмдік тілдің синтаксисі мен ерекшеліктеріне байланысты

болған бағдарламадағы қателіктерді іздеу мен түзету. Бағдарлама жұмыс істеп нәтиже бере бастағаннан кейін бағдарламаны тестілеу жүргізіледі.

Тестілеу – нәтижелердің дұрыстығын тексеру мақсатында бағдарламаның бірнеше қайта орындалуы үдерісі. Бұл кезеңде сандық алгоритм мен бағдарламаның адекваттығы талданады.

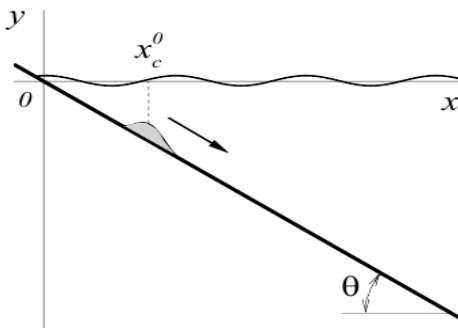
Бақылау сұрақтары

1. Математикалық модельдерді құру кезеңдерін атаңыз.
2. Модельдеу мақсатын анықтау дегенде нені түсінеміз?
3. Объекті немесе үдерісті жуықтаудың мағынасы неде?
4. Ранжирлеу деп неге айтылады?
5. Математикалық модельдеудегі негізгі принциптерді атаңыз.
6. Математикалық модельдердегі тұйықтаушы қатынастар деп қандай қатынастарға айтылады?
7. Сақталу заңының жалпы математикалық сипаттаулы қандай?
8. Вариациялық принциптің мағынасы неде?
9. Вариациялық принципте Лагранж функциясы мен Гамильтонынның іс-әрекетін сипаттаңыз.
10. Вариациялық принцип көмегімен алынатын қарапайым математикалық модельге мысал келтіріңіз.
11. Аналогия әдісінің мағынасы неде?
12. Модельдер иерархиясы дегенде нені түсінеміз?
13. Дискрет модель деп қандай модельге айтылады?
14. Регуляр, регуляр емес торлар деп қандай торларды айтамыз?
15. Үзіліссіз модельдерден дискрет модельдерге өтудің әдістерін атаңыз.
16. Ақырлы айырымдар әдісінің мағынасы неде?
17. Алгоритмнің дәлдігі дегенде нені түсінеміз? Мысалдар келтіріңіз.
18. Үзіліссіз модельдерден дискрет модельдерге өтуде пайда болатын қателіктердің негізгі себептері неде?
19. Алгоритмнің орнықтылығы деп неге айтылады? Мысалдар келтіріңіз.
20. Есептеу алгоритмінің үнемділігі дегеніміз не? Үнемді және үнемді болмаған есептеу алгоритмдеріне мысалдар келтіріңіз және себептерін түсіндіріңіз.
21. Алгоритмнің параллельденуі дегенде нені түсінеміз және оның ұтымды жақтары неде?

22. Есептеу алгоритмін бағдарламалық жүзеге асырудың негізгі принциптері қандай?

Тапсырмалар

1. Ньютонның екінші заңын ($F = ma$, мұнда F – күш, a – үдеу, m – масса) және «қарапайымнан күрделіге» принципін пайдаланып, суасты көшкінінің жазық көлбеу бойынша (2.6-сурет) қозғалысын сипаттайтын математикалық модельдер иерархиясын құрыңыз. Суасты көшкіні формасы белгілі қатты дене деп есептеледі және ол ауырлық және Архимед күштері, судың қарсылық күші және суасты түбіне үйкеліс күші әсерлерімен қозғалады. Модельдердің аналитикалық шешімдерін анықтаңыз және оларды зерттеңіз. Құбылысты әрі қарай тағы да толығырақ сипаттауға алып келетін қарастырылған модельдердің мүмкін болған жалпылауларын қарастырыңыз.



2.6-сурет. Жазық көлбеу бойынша суасты көшкіні қозғалысының сызбанұсқасы

2. (2.7) теңдеу үшін $t = 0$ болғандағы

$$s(0) = a > 0, \quad \dot{s}(0) = 0 \quad (2.10)$$

бастапқы шарттармен Коши есебін қарастырамыз. Осы шарттарда (2.7) теңдеудің шешімі (2.8) мына түрде болады (тексеріп көріңіз):

$$s(t) = a \cdot \cos \omega t \quad (2.11)$$

мұнда $\omega = \sqrt{k/m}$. Ньютонның $F = ma$ заңын пайдалана отырып, вертикаль қабырғаның (2.3-сурет) серіппенің серпімді күші әсерінде

ғана емес ((2.7) модельдегідей), сонымен қатар $-F_0 \cos \omega_1 t$ тең болған қосымша сыртқы күш әсеріндегі (қабырғаға периодты беттік толқындардың қысымы) қозғалысын сипаттайтын жаңа математикалық моделін құру керек. Мұндағы ω_1 – толқындық күштің жиілігі. Алынған модельдің шешімін (2.10) бастапқы берілгендерде зерттеңіз. Модельді әрі қарай жалпылаудың жолдарын ұсыныңыз.

3. (2.7) дифференциалдық теңдеуді (2.9) айырымдық теңдеумен, ал (2.10) бастапқы шарттарды

$$s_0 = a, \quad \frac{s_1 - s_0}{\tau} \quad (2.12)$$

айырымдық бастапқы шарттармен аппроксимациялаймыз. Тікелей тексеру жолымен кіші τ қадамдарда:

$$s_j = \alpha \sin j\varphi + \beta \cos j\varphi, \quad j = 0, \dots, N, \quad (2.13)$$

торлық функция (2.9) теңдеудің жалпы шешімі болатындығын тексеріңіз, мұнда $\varphi = \arccos(1 - \tau^2 \omega^2 / 2)$, $\tau = T / N$, $0 < T < \infty$ α және β кез келген нақты сандар. (2.9), (2.12) дискрет есептің шешімін табыңыз және қадам τ -дың кіші мәндерінде шешімнің қателігі үшін

$$\max_{j=0, \dots, N} |s_j - s(t_j)| \leq C\tau \quad (2.14)$$

бағалау орынды болатындығын көрсетіңіз.

4. Дискрет есептің бастапқы шарттарын шамалы өзгертеміз:

$$s_0 = a, \quad \frac{s_1 - s_0}{\tau} = -\tau \frac{a\omega^2}{2}. \quad (2.15)$$

Жаңа (2.9), (2.15) дискрет есептің s_j шешімін табыңыз және τ қадамның кіші мәндерінде шешім қателігі

$$\max_{j=0, \dots, N} |s_j - s(t_j)| \leq C_1 \tau^2 \quad (2.16)$$

бағалауды қанағаттандыратындығын көрсетіңіз, мұнда C_1 τ -ға тәуелді болмаған тұрақты. (2.16) бағалаудан көрініп тұрғандай, бастапқы айырымдық шарттарды шамалы өзгерту жуық шешімнің дәл шешімге жинақталу жылдамдығының елеулі өсуіне алып келді: τ -ға қатысты бірінші ретті жинақталудан екінші ретті жинақталу алдық.

3-тарау. МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕР МЫСАЛДАРЫ

Бұл тарауда біз алдыңғы тарауларда келтірілген математикалық модельдері құру кезеңдерін түрлі модельдер мысалында қарастырып шығамыз.

Алдыңғы тарауларда айтылып өтілгендей, аналитикалық модельдер ізделінетін шешімді элементар функциялардың ақырлы комбинациясы ретінде алуға, модельдеу үдерісінің қасиеттерін, оның сапалық жақтарын математикадағы аналитикалық әдістер көмегімен зерттеуге мүмкіндік береді.

Белгілі бір себептерге байланысты есептің дәл шешімі болмаған аналитикалық өрнектердің ақырлы «жиынтығымен» (мысалы, қатардың бірнеше мүшесімен, егер шешім шексіз қатар түрінде болғанда) шектелген жағдайда жуық модель алынады. Бірақ бұл жағдайда да модельді сапалық зерттеу мүмкіндігі сақталып қалады.

Қазіргі уақытта аналитикалық және жуық шешімдерін алуға болатын практикалық маңызы болған есептер мөлшері көп емес. Ғылыми және техникалық қолданбалы есептерде көптеген параметрлер мен факторларды, олардың арасындағы байланыстарды (сызықтық болмаған) есепке алу қажет және математиканың қазіргі даму деңгейінде олардың аналитикалық немесе жуық шешімдерін алу мүмкін болмайды.

Сандық жандасуда модельдің математикалық қатынастары олардың қандай да бір жуық аналогымен алмастырылады, бұл алмастыру модель теңдеулерін дискреттеу арқылы жүзеге асады. Нәтижеде үзіліссіз шешім дискрет модель шешімінің ақырғы санды мәндері жиынымен жуықталады.

Есептеу техникаларының дамуы және мүмкіндіктерінің артуы нәтижесінде сандық әдістер күрделі қолданбалы есептерді шешуде кең қолданыс тапты. Есептерді сандық әдістермен ЭЕМ-де шешудің негізгі идеясы бастапқы есепті сызықтық немесе сызықтық емес алгебралық теңдеулер жүйесіне келтіру болып табылады. Мұнда есептеу алгоритмінің орнықтылығына басты назар аудару қажет болады, себебі орнықсыз есептеу алгоритмдерін қолдану шын мәніндегі дәл шешімнен мүлде басқа болған нәтижелерге алып келуі мүмкін.

Мұнда біз биология, экология, экономика және шешімдер қабылдауды қолдау есептерінің математикалық модельдерін қарастырамыз.

3.1 Оқшауланған популяциялар мөлшері динамикасының моделі

Есеп шешімін аналитикалық түрде алу маңыздылығы жоғарыда атап өтілген болатын, себебі мұндай шешім құрылған модель нақты үдерісті сипаттауға жарамды ма деген сұраққа жауап беруде өз септігін тигізуі мүмкін.

3.1.1 Мальтус моделі

Қазіргі заманғы биологияның маңызды бөлімдерінің бірі – популяциялар биологиясы. Биологияда популяция деп жер бетіндегі қандай да бір аймақта өмір сүріп жатқан бір түрдегі тіршілік иелерінің қауымдастығын айтады. Популяциялар биологиясына шешуге тура келетін мәселелер өте көп. Мысалы, азық қорларының ресурсы шектелген Арал теңізінің бір бөлігіне мың майшабақ балығын жіберсе не болады? Ал егер ол жерге күніне үш майшабақ жейтін жүз шортанды жіберген жағдайда не өзгереді? Белгілі бір түрдегі жануарлардың өліміне алып келетін және таралу жылдамдығы популяцияның тығыздығына байланысты вирустың әсері қандай болады? Жер бетіндегі адамдар санының өсу деңгейі қандай болуы мүмкін? Осындай сұрақтарды тағы да көптеп жалғастыруға болады.

Зерттеу әдістерінің ішінен бақылау әдісі қазіргі күнде де биологияда ең көп қолданылады, бұл биология ғылымының басты ерешеліктерінің бірі. Мұның себебін көптеген себептермен түсіндіруге болады, солардың бірі – түрлі жанды тіршілік иелерін сипаттаушы параметрлерді формальдау қиындығы. Соған қарамастан популяциялар биологиясында популяциялардың динамикасын зерттеуде математикалық модельдеу кең қолданыс тапқан.

Табиғатта көбею периоды үзіліссіз болған организмдер популяциясымен қатар, көбею периоды дискретті болған организмдер популяциялары да кездеседі. Біріншісіне көптеген жәндіктер түрлерін (көбелектер, қоңыздар, шегірткелер), балықтар, құстар мен кіші қоректілерді (көбею периоды белгілі бір жыл мезгіліне қатысты қарастырғанда) жатқызуға болады. Екіншісіне көбею үдерісі жыл мезгілдеріне қатысты болмаған тірі организмдер жатады. Олар – негізінен үй жануарлары мен адамдар. Көбею периодтары дискрет және үзіліссіз болған популяциялар динамикасының модельдері бір-бірінен елеулі айырмашылық етеді. Көбею периоды үзіліссіз болған популяциялар модельдеріне дифференциалдық қисап аппаратын

қолдану мүмкін болады. Әрі қарай біз көбею периоды үзіліссіз болған популяцияларды ғана қарастырамыз.

Популяция динамикасының алғашқы моделін 1778 жылы Томас Мальтус өзінің «Халықтың қоныстануы жайлы трактат» атты еңбегінде ұсынған. Мальтус ұсынған модель Жерді халықтың қоныстануы мәселесіне арналған болса да, оны тірі организмдердің кез келген популяциясына қолдануға болады.

Популяция мөлшерінің динамикасы, яғни t уақыт өтуімен популяциядағы тіршілік иелерінің жалпы мөлшері $N(t)$ -нің өзгеруі – популяция дамуының маңызды мәселелерінің бірі. Белгілі бір популяция мөлшері динамикасының қарапайым моделін мынадай жағдайда алу мүмкін: популяция оқшауланған, қорек қорының ресурстары шенелмеген, популяциядағы тіршілік иелерінің өсімі осы уақыт моментіндегі олардың мөлшеріне пропорционал. Сонымен, егер $N(t)$ және $N(t + \Delta t)$ – сәйкес t және Δt уақыт моменттеріндегі популяциялар саны болса, онда

$$N(t + \Delta t) - N(t) = \varepsilon N(t) \Delta t,$$

мұнда $\varepsilon = \alpha - \beta$, $\alpha > 0$ және $\beta > 0$ – сәйкесінше *туылу* және *өлім коэффициенттері*. Біз қабылдаған келісім бойынша популяцияның дамуына ештеңе кедергі келтірмейді, сол себепті туылу коэффициенті өлім коэффициентінен кіші болмайды, сондықтан $\varepsilon \geq 0$ деп есептеуге болады және оның шамасын *популяцияның табиғи өсуінің тума жылдамдығы* деп атайды. Физикалық модельді құру кезеңінде α және β коэффициенттер жайлы келісімді көрсетіп алған жөн. Мысалы, оларды тұрақты деп алуға болады: $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$ $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$. Бұл кезең есепті қоюмен аяқталады: егер бастапқы $t=0$ уақыт моментінде популяция мөлшері белгілі болса, онда оны кез келген $t > 0$ уақыт моментінде табу қажет.

Әрі қарай таңдалған физикалық модельге сәйкес математикалық модель құрылады. Популяция саны $N(t)$ уақыттың үзілісті бүтін функциясы болатыны түсінікті. Алайда популяцияда тіршілік иелерінің саны көп деп есептесек, $N(t)$ үзілісті функцияның орнына $x(t)$ үзіліссіз функцияны қарастыруға болады. Сонда біз мынадай теңдікті жазсақ болады:

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \varepsilon x(t).$$

Егер $x(t)$ функцияның үзіліссіз функция болуымен қатар дифференциалданушы болуын талап ететін болсақ, жоғарыдағы теңдік $x(t)$ белгісіз функцияға қатысты қарапайым дифференциалдық теңдеуге өтеді:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon x, \quad t > 0. \quad (3.1)$$

Нәтижеде жоғарыда құрылған қарапайым физикалық модельге сәйкес келуші Мальтустың математикалық моделін аламыз: (3.1.) теңдеудің бастапқы

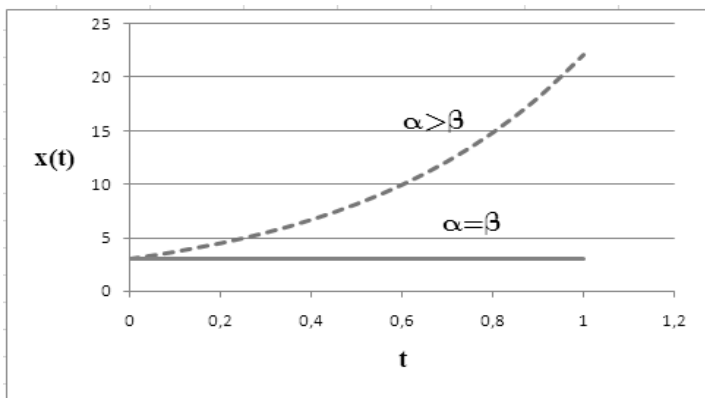
$$x(0) = x_0 \quad (3.2)$$

шартты қанағаттандыратын шешімін табу керек, мұнда x_0 – популяцияның бастапқы саны.

(3.1) – (3.2) Коши есебінің шешімі мынадай:

$$x(t) = x_0 e^{\varepsilon t}. \quad (3.3)$$

Бұл формуладан көрініп тұрғандай, $\alpha = \beta$ болғанда популяция саны тұрақты болып қалады: $x(t) \equiv x_0$ барлық $t \geq 0$ үшін. Алайда ε коэффициент оң болғанда уақыт өте $x(t)$ функцияның бастапқы x_0 мәннен ауытқуы арта түседі және $t \rightarrow \infty$ -да популяция саны экспонента бойынша шексіз артады (3.1-сурет). Бұл жағдай Мальтусқа болашақта Жерді халықтың қоныстану деңгейінің жылдам артуы мен одан келіп шығатын барлық салдарларына алаңдаушылық білдіруіне негіз болды.



3.1-сурет. Мальтус моделіндегі оқшауланған популяция мөлшерінің өзгеруі ($x(0) = 3, \varepsilon = 2$)

Қарастырылған математикалық модель популяция динамикасын дұрыс сипаттамайтындығы көрініп тұр, себебі біз білетін барлық популяцияларда олардың санының шексіз артатындығы байқалмайды. Сондықтан физикалық модельге қайта оралып оны жетілдіру қажет.

3.1.2 Ферхюльст-Пирл моделі

Популяция мөлшерінің өсу жылдамдығының қорек, орын және т.б. үшін ішкі түрлер бәсекелестігінің күресі нәтижесінде азаюын есепке алатын Ферхюльст-Пирл моделі популяция динамикасының нақты жағдайын толығырақ сипаттайды. Сондықтан бастапқы физикалық модельді ондағы бәсекелестік күресті есепке ала отырып жетілдіруге болады. Бұл математикалық модельде қалай көрініс табады? Тіршілік иелері арасындағы кездесу қаншалықты көп болса, ішкі түрлер күресі де соншалықты жоғары болады, ал кездесулер мөлшері $x \cdot x$ көбейтіндіге пропорционал болады, яғни x^2 . Сондықтан популяция мөлшерінің εx өсу жылдамдығы x^2 -қа пропорционал болған шамаға азаяды, ал популяция мөлшері динамикасының теңдеуі мына түрде жазылады:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon x - \gamma x^2. \quad (3.4)$$

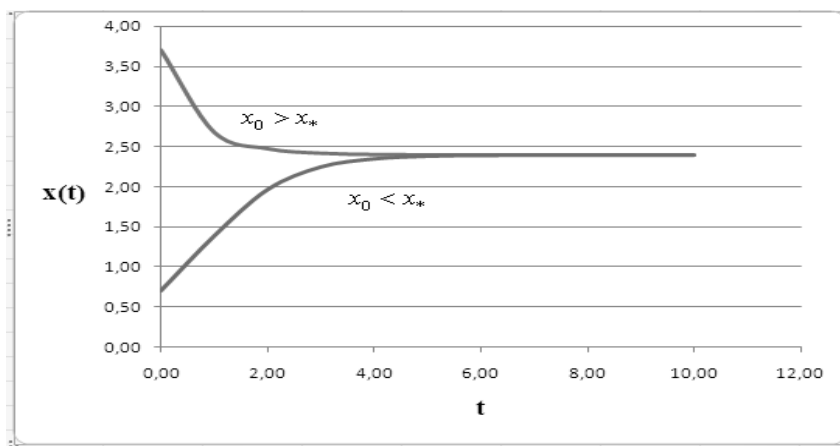
Мұнда $\varepsilon = \text{const} > 0$ – популяция мөлшерінің табиғи өсуінің тума жылдамдығы, $\gamma = \text{const} > 0$ шама *ішкі түрлер бәсекелестігінің коэффициенті* деп аталады.

(3.4) теңдеу сызықтық теңдеу болмаса да, (3.4), (3.2) Коши есебінің шешімін аналитикалық түрде табуға болады:

$$x(t) = \frac{x_0 x_* e^{\varepsilon t}}{x_* + x_0 (e^{\varepsilon t} - 1)}, \quad t \geq 0, \quad (3.5)$$

мұнда $x_* = \varepsilon / \gamma$. (3.5) формуладан $x_0 = x_*$ болғанда популяция мөлшері өзгермейтіндігі келіп шығады: $x(t) \equiv x_0$. Егер $x_0 < x_*$ болса, онда популяция мөлшері $t \rightarrow \infty$ -да x_* -ның мәніне, оған еш уақытта жетпестен, жақындап артады, яғни популяция мөлшері Мальтус моделіндегідей шексіз артпастан, жоғарыдан шенелген болады. Сол себепті x_* шаманы *тіршілік етудің берілген жағдайларында мүмкін болған максимал популяция мөлшері* деп атайды. $x_0 > x_*$

жағдайда популяция мөлшері x_* -ның мәніне монотон жақындай түсіп азаяды (3.2-сурет).



3.2-сурет. Ферхюльст-Пирл моделінде оқшауланған популяция мөлшерінің өзгеруі ($x_0 = 3,7$; $x_0 = 0,7$; $\varepsilon = 1,2$; $\gamma = 0,5$; $x_* = 2,4$)

3.1.3 Ферхюльст-Пирл моделінің жалпылануы

Ферхюльст-Пирл моделін түрлі факторларды есепке ала жалпылау мүмкін. Мысалы, қандай да бір $f > 0$ мөлшердегі тіршілік иелері көрші популяциядан қосылатын, ал $g > 0$ мөлшердегі тіршілік иелері аңшылар тарапынан атып өлтірілетін болсын. Бұл жағдайда популяцияны оқшауланған деп айтуға болмайды, бірақ оның динамикасының мөлшерін сипаттайтын теңдеу (3.4)-теңдеуге ұқсас болып, одан тек қана f және g жаңа қосындылармен айырмашылық етеді:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon x - \gamma x^2 + f - g. \quad (3.6)$$

(3.6) теңдеудегі g шаманы тұрақты немесе популяцияның жалпы мөлшеріне тәуелді болатындай етіп беру мүмкін: $g(t) = \delta x(t)$. Аңшылықтың жыл мезгілдеріне тәуелділігін сипаттайтын модельдерге қызығушылық болуы мүмкін. Бұл жағдайда δ көбейткіш уақытқа тәуелді болады және t айнымалының қандай да бір периодты функциясы түрінде берілуі керек. Популяция мөлшеріне

әсер ететін басқа да механизмдер болуы мүмкін. Мысалы, популяция көбеюінің маусымдық сипатын есепке алайық. Онда туылу коэффициенті α t айнымалының функциясы болады. Зерттелетін популяция мөлшеріне әсер ететін популяция құрылымының жасын, кездейсоқ қобалжытуларды және басқа да көптеген факторларды есепке алу мүмкін.

Сонымен, есептің физикалық қойылымы кезеңінде популяция мөлшеріне әсер ететін көптеген факторларды есепке ала отырып біз математикалық модельдер иерархиясына келеміз. Әдетте, олардың шешімдерін аналитикалық түрде алу көпшілік жағдайда мүмкін болмайды. Алайда, шешімнің кейбір, мысалы, сыптығырлық, бастапқы берілгендерден үзіліссіз тәуелділігі, $t \rightarrow \infty$ -дағы және кейбір ерекше нүктелер маңайындағы жағдайы және т.б. қасиеттерін сапалы зерттеу жолымен кейбір сипаттамаларын анықтауға болады. Ал модельдің мөлшерлік, яғни сандық сипаттамаларын алу математикалық модельдеудің келесі кезеңінде – дискрет модельдерді құру, сандық есептеу алгоритмдерін құру мен зерттеу, олар үшін бағдарламаларды құру, ЭЕМ-де тестілеу мен есептеулер жүргізу және алынған нәтижелерді талдау жұмыстарын жүргізу жүзеге асырылады.

Математикалық модельдеу технологиясы деп аталатын модельдеудің осы кезеңін кітаптың 10-тарауында білімдердің түрлі салаларына тиісті болған математикалық модельдеу есептерін компьютер көмегімен шығару мысалдарында кеңінен қарастыратын боламыз.

3.2 Популяциялардың түрлер арасындағы бәсекелестік модельдері

Жоғарыда атап өтілгендей, математикалық модельдеуде қойылған есеп шешіміне жүргізілетін сапалық талдаудың маңызы зор: есептің шешімі бар ма, есептің шешімі жалғыз ба, бастапқы берілгендердің шешімге әсері қандай, ерекше нүктелер маңайында шешім қандай болады және т.б. Осы сапалық зерттеу кезеңінде анықталған шешім қасиеті математикалық модельдеудің басқа кезеңдерінде пайдалы болуы мүмкін.

3.2.1 Түрлер арасындағы бәсекелестік моделі

Шекті бір аймақта тіршілік ететін, мөлшерлері $x(t)$ және $y(t)$ болған популяциялардың екі түрін қарастырайық. Қорек қоры шек-

сіз және жыртқыштар жоқ деп есептейтін болсақ, популяциялар мөлшерлері динамикасының модельдері Мальтус моделінің теңдеулерімен сипатталады:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \varepsilon_1 x, \quad \varepsilon_1 = \text{const} > 0, \\ \frac{dy}{dt} &= \varepsilon_2 y, \quad \varepsilon_2 = \text{const} > 0,\end{aligned}\tag{3.7}$$

мұнда, $\varepsilon_i (i=1,2)$ – популяциялар өсуінің тума жылдамдықтары. Алайда нақты жағдайда қорек қоры шекті болып, оны тауысып қою аштыққа әкеліп соқтырады және мұның салдары ретінде популяциялар өсуінің жылдамдықтары азаяды.

Әрі қарай біз қарастыратын модельдегі екі түр бір-бірімен бір қорек үшін бәсекелеседі және бірлік уақытта екі түр де қоректенетін тамақ мөлшері қандай да бір теріс болмаған $g(x, y)$ функция арқылы өрнектеледі, сондай-ақ $g(0,0)=0$ және кемінде бір аргументтің шексіз артуында $g \rightarrow \infty$ шарты орынды болады деп есептейміз. $g(x, y)$ функция мәнінің артуымен популяциялар өсуінің жылдамдығы азаюы керек, сондықтан (3.7) Мальтус теңдеулерінің орнына мына теңдеулер жүйелерін пайдалану керек болады:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (\varepsilon_1 - \gamma_1 g)x, \\ \frac{dy}{dt} &= (\varepsilon_2 - \gamma_2 g)y, \quad t > 0,\end{aligned}\tag{3.8}$$

мұнда $\gamma_i (i=1,2)$ – оң тұрақтылар болып, оларды *қорек жетіспеушілігіне сезімталдық коэффициенттері* деп атайды. Бастапқы уақыт моментінде екі популяцияның да мөлшері белгілі болсын:

$$x(0) = x_0 > 0, \quad y(0) = y_0 > 0.\tag{3.9}$$

Алынған (3.8) теңдеулер жүйесі сызықтық емес. Сондықтан бұл жүйенің аналитикалық шешімін кез келген $g(x, y)$ функциямен табу қиынға соғады немесе мүлдем мүмкін болмайды. Мұндай жағдайда шешімнің аналитикалық бейнеленуін пайдаланбастан оны сапалық зерттеу қажет. Қарапайымдылық үшін $g(x, y)$ функция сызықтық функция болған жағдайды қарастырамыз:

$$g(x, y) = m_1 x + m_2 y,\tag{3.10}$$

мұнда $m_i (i=1,2)$ – оң тұрақтылар. Бұл жағдайда (3.8) – (3.10) Коши есебінің $x(t)$ және $y(t)$ шешімдері бар және жалғыз болады [7]. $x(t)$ және $y(t)$ функциялар қатаң оң мәндер қабылдайтындығын көрсетеміз. Айталық, олай болмасын және шешімнің компоненталарының біреуі, мысалы, $y(t)$, қандай да бір $t_0 > 0$ нүктеде нөлге тең болсын, яғни $y(t_0) = 0$. Мұнда шешімнің екінші компонентасы осы уақыт моментінде қандай да бір \tilde{x}_0 мәнді қабылдайды. Сонда біз $x(t)$, $y(t)$ функцияларды (3.8) жүйе үшін бастапқы берілгендері

$$x(t_0) = \tilde{x}_0, \quad y(t_0) = 0, \quad (3.11)$$

болған Коши есебінің шешімі деп қарастыруымызға болады. Осы (3.11) бастапқы берілгендерді (3.8) жүйенің тағы бір шешімі қанағаттандыратындығын тексеріп көруге болады:

$$\tilde{x}(t) = \frac{\tilde{x}_0 x_* e^{\varepsilon_1(t-t_0)}}{x_* + \tilde{x}_0 (e^{\varepsilon_1(t-t_0)} - 1)}, \quad \tilde{y}(t) \equiv 0,$$

мұнда $x_* = \varepsilon_1 / (\gamma_1 m_1)$. Шешімнің жалғыздығы жайлы теоремаға қайшылық алдық. Сондықтан оң болған (3.9) бастапқы шарттар берілген болса, онда $x(t)$ және $y(t)$ функциялар тек қана оң мәндер қабылдайды.

Ал енді екі популяциялар мөлшерлерінің де барлық $t > 0$ болғанда шенелген болатындығын көрсетеміз.

Кері тұжырым жасайық, мысалы, $y(t)$ функция кез келген үлкен мәндерді қабылдайтын болсын. Онда $y(t)$ функция өсетін және $y_* = \varepsilon_2 / (\gamma_2 m_2)$ мәннен үлкен мән қабылдайтын аралық табылады. Бірақ $y(t)$ функция үшін теңдеуден келіп шығады:

$$\frac{dy}{dt} = (\varepsilon_2 - \gamma_2(m_1 x + m_2 y))y < (\varepsilon_2 - \gamma_2 m_2 y)y = \gamma_2 m_2 (y_* - y)y < 0,$$

яғни $y(t)$ функция осы аралықта кемиді. Алынған осы қайшылық қарастырылып жатқан (3.8), (3.9) Коши есебі шешімінің $x(t)$ және $y(t)$ компоненталары уақыттың шенелген функциясы болатындығын көрсетеді.

Қойылған есеп шешімдерін сапалық зерттеу олардың басқа да маңызды қасиеттерін анықтауға мүмкін береді [7, 16]. Дербес бір жағдайды, яғни

$$\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} > \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} \quad (3.12)$$

теңсіздік орынды болған жағдайды қарастырамыз. (3.12) теңсіздік, мысалы, бірінші популяцияның табиғи өсу коэффициенті ε_1 екінші популяцияның табиғи өсу коэффициенті ε_2 үлкен болып, ал олардың қорек жетіспеушілігіне сезімталдығы коэффициенттері бірдей болған жағдайда орынды болады. Бірінші популяцияның өсуі жай болып және оның қорек жетіспеушілігіне сезімталдығы коэффициенті екінші популяцияға қарағанда елеулі кіші болған жағдайда да (3.12) теңсіздік орынды болады.

(3.8) – (3.10) есептің аналитикалық шешімін жазбастан-ақ, (3.12) шарт орынды болғанда екінші популяция мөлшерінің $t \rightarrow \infty$ -да нөлге ұмтылатындығын көрсетеміз. Ол үшін (3.8) теңдеуді қайта жазамыз:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_2}{x} \frac{dx}{dt} &= \varepsilon_1 \gamma_2 - \gamma_1 \gamma_2 g, \\ \frac{\gamma_1}{y} \frac{dy}{dt} &= \varepsilon_2 \gamma_1 - \gamma_1 \gamma_2 g, \end{aligned}$$

біріншісінен екіншісін аламыз:

$$\frac{\gamma_2}{x} \frac{dx}{dt} - \frac{\gamma_1}{y} \frac{dy}{dt} = \varepsilon_1 \gamma_2 - \varepsilon_2 \gamma_1$$

және соңғы теңдеуді (3.9) бастапқы шарттарды есепке ала интегралдаймыз:

$$\frac{x^{\gamma_2}}{y^{\gamma_1}} = \frac{x_0^{\gamma_2}}{y_0^{\gamma_1}} e^{(\varepsilon_1 \gamma_2 - \varepsilon_2 \gamma_1)t}.$$

(3.12) шарт орынды болғанда соңғы теңдеудің оң жағы уақыт өте шексіз артады. Сондықтан оның сол жағы да осындай қасиетке ие болады. Алайда x^{γ_2} функция жоғарыдан қандай да бір тұрақтымен шенелген, сол себепті соңғы теңдіктің сол жағының шексіз артуы $t \rightarrow \infty$ -да $y(t) \rightarrow 0$ ғана мүмкін болады. Бұдан уақыт өте екінші популяция жойылып кетеді деген қорытынды шығаруға болады.

Ал (3.12) шартта бірінші популяция мөлшері қалай өзгеруі мүмкін? Біз әзірше, оның қандай да бір тұрақтымен шенелгендігін

ғана білеміз. Анықталғандық үшін бастапқы уақыт моментінде бірінші популяция мөлшері

$$x_0 < x_* = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1 m_1} \quad (3.13)$$

теңсіздігін қанағаттандыратын жағдайды қарастырамыз. Онда келесі барлық уақыт моменттерінде де $x(t)$ функция жоғарыдан x_* санымен шенелген болады. Расында, егер осы айтқан тұжырым орынды болмаса, онда сондай бір $t_0 > 0$ уақыт моменті табылып, $x(t)$ функция өсе отырып, алғаш рет x_* мәнді қабылдайды, яғни:

$$\frac{dx}{dt}(t_0) \geq 0, \quad x(t_0) = x_*.$$

Бұл жағдайда (3.8) жүйенің бірінші теңдеуінен $y(t_0)$ мәннің ондығын есепке алып, төмендегі теңсіздікті аламыз:

$$0 \leq \frac{dx}{dt}(t_0) = [\varepsilon_1 - \gamma_1(m_1 x(t_0) + m_2 y(t_0))]x(t_0) < [\varepsilon_1 - \gamma_1 m_1 x_*]x_* = 0,$$

яғни $0 \leq \frac{dx}{dt}(t_0) < 0$. Осы қайшылық (3.13) шартта $x(t) < x_*$ теңсіздік барлық $t \geq 0$ үшін орынды болатындығын дәлелдейді.

Ал енді бірінші популяция мөлшері жоғарыдан x_* тұрақтымен шенелген болып қана қалмастан, осы тұрақтыға $t \rightarrow \infty$ -да шексіз жуықтайтындығын көрсетеміз. Кері тұжырым жасайық: сондай оң $\bar{x} < x_*$ саны бар болып, барлық t үшін $x(t) < \bar{x}$ теңсіздік орынды болсын. Төмендегі

$$0 < \delta < \frac{m_1}{m_2}(x_* - \bar{x}) \quad (3.14)$$

теңсіздікті қанағаттандыратын кез келген кіші δ санын аламыз. Онда сондай t_0 уақыт моменті табылатын болып, барлық $t \geq t_0$ үшін $y(t) < \delta$ бағалауы орынды болады.

$x(t_0) = \tilde{x}_0$ болсын. (3.8) жүйенің бірінші теңдеуінен, $x(t) < \bar{x}$, $y(t) < \delta$ теңсіздіктерін есепке алып, төмендегі теңсіздікті аламыз:

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t \geq t_0} = [\varepsilon_1 - \gamma_1(m_1 x + m_2 y)]x > [\varepsilon_1 - \gamma_1 m_1 \bar{x} - \gamma_1 m_2 \delta]x = Cx,$$

мұнда

$$C = \gamma_1 m_1 \left(x_* - \bar{x} - \frac{m_2}{m_1} \delta \right) > 0.$$

Алынған теңсіздіктің екі жағын $e^{-C(t-t_0)}$ функцияға көбейтіп,

$$\left. \frac{du}{dt} \right|_{t \geq t_0} > 0,$$

дифференциалдық теңсіздікті аламыз, мұнда:

$$u(t) = x(t) e^{-C(t-t_0)}.$$

Сонымен, $u(t)$ функция $t > t_0$ -де монотон өсуші функция болады. Сондықтан

$$u(t) > u(t_0) = \tilde{x}_0, \quad t > t_0,$$

немесе

$$x(t) > \tilde{x}_0 e^{C(t-t_0)}, \quad t > t_0,$$

яғни $x(t)$ функция $t \rightarrow \infty$ -да шексіз артады. Бұл біз жоғарыда дәлелдеген $x(t)$ шешімнің шенелгендігі фактісіне қайшы келеді. Сол себепті, бірінші популяция мөлшері $t \rightarrow \infty$ -да төменнен x_* шектік мәнге ұмтылады.

Сонымен, (3.8) – (3.10) Коши есебінің шешіміне жүргізілген сапалық талдау негізінде біз (3.12), (3.13) шарттар орынды болғанда бірінші популяция мөлшері қандай да бір деңгейде тұрақталуын, ал екінші популяцияның жойылып кетуін анықтадық. Тағы да еске сала айта кетейік, біз осы маңызды қорытындыларды есептің дәл шешімін сипаттайтын аналитикалық өрнектерді (формулаларды) пайдаланбай келтіріп шығардық.

Осы анықтаған қасиеттерден маңызды қорытынды шығару мүмкін. Егер қандай да бір көп мөлшерлі популяцияда тума өсу жылдамдығы осы популяциядағыдай ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$) және мөлшері көп болмаған, бірақ аштықты жеңіл көтеретін мутанттар кездейсоқ пайда болатын болса, онда уақыт өте мутанттар алдыңғы түрді толық ығыстырып шығады.

3.2.2 Лотка-Вольтерра моделі

«Жыртқыш-құрбан» түріндегі екі биологиялық популяциялардың бірге тіршілік етуінің математикалық моделін қарастырамыз.

Құрбандардың көбеюін шектейтін жалғыз фактор оларға жыртқыштар тарапынан көрсетілетін қысым, ал жыртқыштардың көбеюі олардың алған олжасы мөлшерімен шектеледі деп есептейміз. Сонда жыртқыштар болмағанда құрбандар мөлшері $x(t)$ α салыстырмалы жылдамдықпен экспоненциалды өсуі, ал жыртқыштар мөлшері $y(t)$ β салыстырмалы жылдамдықпен экспоненциалды кемуі керек, яғни бұл жағдайда $x(t)$, $y(t)$ шамалар Мальтус теңдеулерімен сипатталады:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha x, \\ \frac{dy}{dt} &= -\beta y,\end{aligned}\tag{3.15}$$

мұнда $\alpha = \text{const} > 0$ және $\beta = \text{const} > 0$ – сәйкесінше, құрбандардың туылу және жыртқыштардың өлу коэффициенттері.

Құрбанның жыртқышпен «бәсекелестігі» құрбандар мөлшерінің өзгеруінде болып, ол өз кезегінде жыртқыштар мөлшеріне ықпал етеді. $V(x)$ – бір жыртқыштың бірлік уақыт ішінде қоректенетін құрбандарының мөлшері (биомасса) болсын, осы биомассадан алатын энергияның k – бөлігі өз түрін қайта жалғастыруға, ал қалған бөлігі негізгі зат алмасуды ұстап тұруға жұмсалатын болсын. Сонымен, құрбандардың өсу жылдамдығы $V(x)y$ шамаға кемиді, ал жыртқыштардың өсуі $kV(x)y$ шамамен анықталады.

Сондықтан, «жыртқыш-құрбан» жүйесінің теңдеулерін

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha x - V(x)y, \\ \frac{dy}{dt} &= y(kV(x) - \beta),\end{aligned}\tag{3.16}$$

түрінде жазуымызға болады.

$V(x)$ функцияны *жыртқыштың трофикалық функциясы* деп атайды және ол тәжірибелік жұмыстарда анықталады. Бұл функцияның сипаты мынадай: ол құрбандар саны үлкен болғанда қандай да бір ақырлы оң мәнге асимптотикалық жуықтайды (мұнымен $x \rightarrow \infty$ -да жыртқыштардың тойғандығы фактісін білдіреді). Құрбандардың дерлік барлығы жыртқыштардың (эрқашан аш және қорекке тоймаған, бұл табиғатта жиі кездесетін әдеттегі жағдай) олжасы болатын x -тің кіші мәнінде трофикалық функцияны

құрбандар санына тәуелді сызықтық функция деп есептеуге болады, яғни $V(x) = mx$. Біз дәл осы жағдайды қарастырамыз. Сонымен бірге, $k = \text{const}$ деп есептейміз. Онда (3.16)-теңдеулер жүйесі Лотка-Вольтерр теңдеулері түрінде жазылады:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x - mxy, \\ \frac{dy}{dt} &= kmxy - \beta y, \end{aligned} \quad (3.17)$$

осы теңдеулер жүйесінен (3.9) бастапқы шарттар бойынша кез келген $t > 0$ уақыт моментінде популяциялар мөлшері анықталады.

(3.17) теңдеулер жүйелерінің оң жақтарының Oxy жазықтықтағы кез келген тіктөртбұрышта x және y бойынша шенелген дербес туындылары бар болатындықтан, (3.17), (3.9) Коши есебінің жалғыз шешім бар және ол шешім шексіз дифференциалданушы функция болады. Бірақ бұл шешімді аналитикалық түрде жазу (3.17) жүйенің сызықтық еместігіне байланысты қиынға соғады. Сондықтан тағы да шешім қасиеттерін сапалы зерттеу қажет болады.

Біз қазір популяциялардың түрлер арасындағы бәсекелестік есебінде пайдаланылған сапалы зерттеу тәсілдерінен өзгеше болған тәсілдерді қолдану жолдарын қарастырамыз. Мұндай бірінші тәсіл – есептің өлшемсіз шамалардағы жазуына өтуге қатысты. (3.17) теңдеулер жүйесі төрт параметрге тәуелді: α, β, k, m . Олардың әрбірі шешім түріне әсер етіп зерттеуді күрделендіре түседі. Анықталуға тиіс параметрлер санын азайту мақсатында өлшемсіз шамаларға өтуге әрекет етіп көрейік. Екінші тарауда атап өтілгендей (математикалық модельдерді құру мен зерттеудің жалпы принциптерін қарастыруда) өлшемсіз шамаларға өту бір шешімді ғана емес, осындай шешімдердің үлкен кластарын зерттеуге мүмкіндік береді.

Төмендегідей

$$\xi = \frac{km}{\beta} x, \quad \eta = \frac{m}{\alpha} y, \quad \tau = \alpha t, \quad p = \frac{\beta}{\alpha} \quad (3.18)$$

алмастырулар орындаймыз. Сонда (3.17) Лотка-Вольтерра теңдеулері

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= \xi(1-\eta), \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= p\eta(\xi-1), \end{aligned} \quad (3.19)$$

жалғыз $p > 0$ параметрлі теңдеулер жүйесі түрінде жазылады. Егер p параметрдің қандай да бір мәнінде $\xi(\tau), \eta(\tau)$ шешімдердің қасиеттерін білу мүмкін болса, онда берілген (3.18) созылу түрлендіруіне негізделіп, біз k және m параметрлерінің бірден барлық жарамды мәндері және $\beta/\alpha = p$ теңдігін қанағаттандыратын кез келген α және β үшін (3.17) жүйенің $x(t), y(t)$ шешімдерінің қасиеттерін болжауымыз мүмкін. Сондықтан, өлшемсіз шамаларға өту шешімнің сапалық қасиеттерін зерттеуде жаңа мүмкіндіктер береді.

Модельдерді сапалық зерттеудің басқа бір тәсілі – теңсалмақты жағдайларды зерттеумен байланысты. (3.19) теңдеулер жүйесінің стационар, τ уақыттан тәуелсіз бір теңсалмақты жағдайы бар болады:

$$\xi(\tau) \equiv \xi_* = 1, \quad \eta(\tau) \equiv \eta_* = 1. \quad (3.20)$$

Сонымен, егер бастапқы уақыт моменті $\tau = 0$ ізделінетін ξ, η айнымалылар ξ_*, η_* мәндерді қабылдайтын болса, онда уақыттың келесі барлық моменттерінде де (3.20) теңдік орынды болады. Бұл – (ξ_*, η_*) ерекше нүкте құрбандар мен жыртқыштардың теңсалмақты мөлшеріне жауап беретіндігін білдіреді: туылу есебінен болатын құрбандардың өсуі жыртқыштардың іс-әрекетімен толық теңестіріледі, ал жыртқыштардың өсуі олардың табиғи өлімімен толықтай теңестіріледі.

Стационар емес шешімдердің формулаларын жазу мүмкін болмайды. Алайда фазалық кеңістіктегі шешімнің жағдайына талдау жүргізу мүмкін. Бастапқы шарттары

$$\xi(0) = \xi_0, \quad \eta(0) = \eta_0, \quad (3.21)$$

болған (3.19) теңдеулер үшін Коши есебінің шешімін геометриялық тұрғыдан $(\xi_0, \eta_0, 0)$ нүктеден өтетін және $(\xi(\tau), \eta(\tau), \tau)$ нүктелерден түзілген («шешім графигі») үш өлшемді $O\xi\eta\tau$ кеңістігіндегі қисық ретінде интерпретациялауға болады.

Басқаша геометриялық интерпретациялауда координаталары $(\xi(\tau), \eta(\tau))$ болған нүктелерден түзілген $O\xi\eta$ жазықтығындағы қисық қарастырылады, мұнда уақыт τ параметр болады. Бұл қисық шешім графигінің $O\xi\eta$ жазықтығына проекциясы болып, оны *фазалық траектория* деп, ал $O\xi\eta$ жазықтығы *фазалық жазықтық* деп аталады.

$\xi(\tau), \eta(\tau)$ функциялардың уақыттық динамикасын түсіну үшін (3.19) сызықтық емес жүйенің шешімін ξ, η айнымалылар жазықтығында қарастырамыз, яғни фазалық траекториялардың жағдайын зерттейміз.

Ол үшін екінші теңдеуді біріншісіне бөлеміз:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{p\eta(\xi - 1)}{\xi(1 - \eta)}, \quad (3.22)$$

және алынған теңдеуді

$$\frac{1 - \eta}{\eta} d\eta = p \frac{\xi - 1}{\xi} d\xi$$

түрге келтіреміз. Соңғы теңдеуді ξ және η мәндерінің оң болатындығын есепке алып интегралдайтын болсақ, төмендегі қатынасты аламыз:

$$\ln \eta - \eta = p(\xi - \ln \xi) + C,$$

немесе

$$\ln \eta - \ln e^\eta = p(\ln e^\xi - \ln \xi) + C,$$

мұндағы оң жақтағы C (3.21) бастапқы шарттармен анықталады. Сонымен, (3.22) теңдеу, яғни (3.19) жүйе

$$\Psi(\xi, \eta) = C_1 > 0, \quad (3.23)$$

түрдегі бірінші интегралға ие болады, мұнда

$$\Psi(\xi, \eta) = \left(\frac{\xi}{e^\xi} \right)^p \frac{\eta}{e^\eta}. \quad (3.24)$$

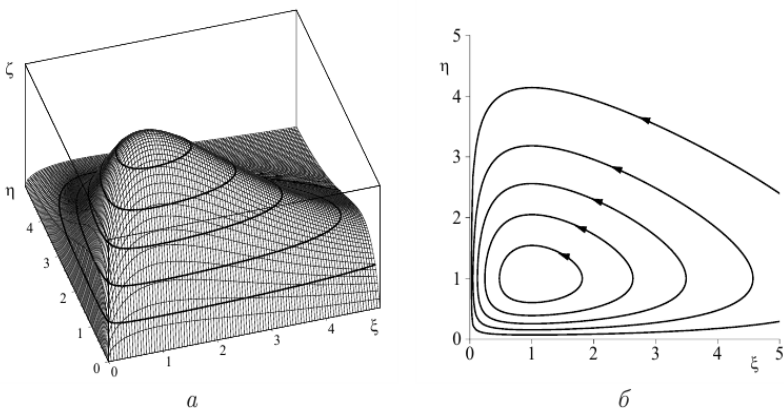
C_1 тұрақтының әрбір

$$C_1 = \left(\frac{\xi_0}{e^{\xi_0}} \right)^p \frac{\eta_0}{e^{\eta_0}}$$

нақты мәні үшін (3.23) интегралға (3.19) жүйенің белгілі бір фазалық траекториясы сәйкес келетін болып, ол Ψ функцияның деңгей сызығы C_1 дәлме-дәл түседі және (ξ_0, η_0) нүктеден өтеді. 3.3 а -суретте

$$\zeta = \Psi(\xi, \eta) \quad (3.25)$$

функцияның графигі бірнеше деңгей сызықтарымен берілген. Оларға сәйкес келетін фазалық траекториялар 3.3 а -суретте бейнеленген.



3.3-сурет. (3.19) жүйенің шешімі: *a* – (3.25) функцияның графигі; *б* – фазалық траекториялар; $p = 0,5$

$\xi > 0, \eta > 0$ жазықтықта Ψ функция тек қана бір нүктеде ($\Psi_{\max} = 1/e^{p+1}, \xi_* = 1, \eta_* = 1$ тыныштық нүктесінде) ең үлкен мән қабылдайтын болғандықтан, Ψ функцияның деңгей сызықтары тұйықталған қисықтар болады. Сол себепті фазалық траекториялар да тыныштық нүктесін өз ішіне алған тұйық қисықтар болады. Бұдан мынадай қорытынды шығаруға болады: $\xi(\tau), \eta(\tau)$ функциялар τ айнымалының периодты функциясы болады, себебі (ξ_0, η_0) нүктеден өтетін фазалық траектория белгілі бір уақыттан кейін осы нүктеден тағы да өтеді.

Уақыт артқанда (ξ, η) нүктенің фазалық траектория бойынша қозғалысының бағытын анықтайық. $\eta < 1$ болсын. Сонда (3.19) жүйенің бірінші теңдеуінен $\frac{d\xi}{d\tau} > 0$ келіп шығады, яғни $\xi(\tau)$ функция фазалық траекторияның төменгі бөлігі бойынша қозғалыста уақыт өте өседі (3.3 *а*-суретте – бұл екінші координатасы $\eta < 1$ болған нүктелерден тұратын траекторияның бөлігі). Осы теңдеуден өзінен, $\eta > 1$ болғанда $\xi(\tau)$ функция кемитіндігі келіп шығады, яғни $\frac{d\xi}{d\tau} < 0$. Дәл осылай $\frac{d\eta}{d\tau}$ туындының таңбасын анықтаймыз. Сонымен, уақыт өте (ξ, η) нүкте фазалық траектория бойынша сағат тіліне қарсы бағытта қозғалады (3.3 *б*-

суретте фазалық траектория бойынша қозғалыс бағыты нұсқарлармен (стрелкалармен) белгіленген).

Есептің биологиялық мазмұны математикалық модель шешімінің анықталған қасиетінің дұрыстығын растайды. Мұны көрсету үшін қандай да бір (3.21) бастапқы шарттарды, оларға сәйкес фазалық траекторияны аламыз және қарастыруды жыртқыштар саны ең аз болған уақыт моментінен бастаймыз. Осы уақыт моментіне фазалық траекторияда (3.3 \acute{a} -суретті қараңыз) координатасы $\xi = 1$, $\eta = \eta_{\min} < 1$ болған ең төменгі нүкте сәйкес келеді.

Осы уақыт моментінде құрбандардың өсуі үшін ең жақсы жағдайлар жасалған (жыртқыштар өте аз), сондықтан құрбандар саны өсуде, бірақ мұнымен қатар, жыртқыштардың саны да арта бастайды (математикалық модельде бұл үдеріс фазалық траекторияның төменгі бөлігі бойынша оң жаққа қозғалыспен сипатталады). Қандай да бір уақыт моментінде жыртқыштар саны ең көп болып ($\eta = 1$), олар құрбандардың барлық өсімін жеп қояды, яғни осы уақыт моментінде жыртқыштардың саны өзінің ξ_{\max} максимумына жетеді және әрі қарай олардың мөлшері азая бастайды (траекторияның жоғарғы бөлігінен солға қарай қозғалыс басталады), ал жыртқыштардың саны өсуін жалғастырады. Соңында, жыртқыштар саны көп артады ($\eta = \eta_{\max} > 1$), ал құрбандар саны тез кемиді ($\xi = 1$), құрбандар мөлшерінің кемуімен бірге жыртқыштар саны да кемиді. Мұндай жағдай құрбандар саны өзінің ξ_{\min} минимумына жеткенге дейін, ал жыртқыштардың аз мөлшері ($\eta = 1$) құрбандарға өздерінің санын арттыруға мүмкіндік беретін уақытқа дейін жалғасады (фазалық траекторияның төменгі бөлігі бойынша оң жаққа қозғалыс басталады).

Сонымен, қарастырылған модель екі популяцияның да ұзақ уақыт бірге тіршілік етуін сипаттайды, ал олардың саны периоды тербеліс сипатында болады. Осы тербелістердің амплитудалары

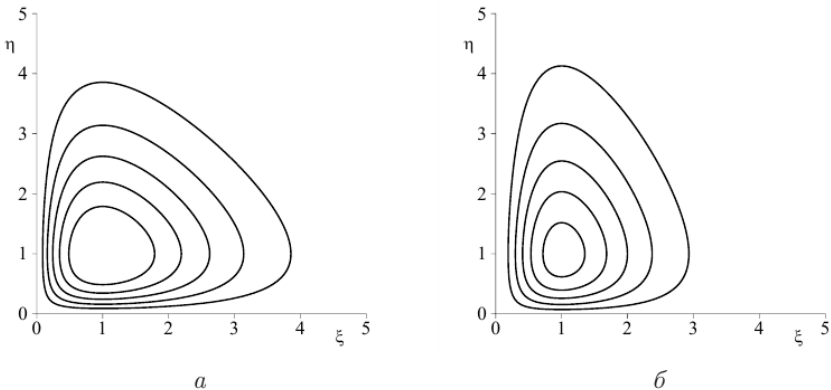
$$a_1 = \xi_{\max} - \xi_{\min}, \quad a_2 = \eta_{\max} - \eta_{\min}, \quad (3.26)$$

популяциялардың бастапқы мөлшеріне, сондай-ақ модельдің анықтаушы параметрлеріне тәуелді болады. Кейбір жағдайларда құрбандар санының тербеліс амплитудасы a_1 жыртқыштар санының тербеліс амплитудасы a_2 үлкен, басқаларында – кіші болуы мүмкін (3.3 \acute{a} және 3.4-суреттерді қараңыз).

Біз (3.19) теңдеулер жүйесіне өлшемсіз шамаларға қатысты сапалы талдау жүргіздік. (3.18) түрлендіру формулаларын пайдалану арқылы популяциялардың өзара әсерлерінің бейнесін тіктеу мүмкін. Мысалы, құрбандар мөлшерінің тербеліс амплитудасының ақиқат мәні

$$x_{\max} - x_{\min} = \frac{\beta}{km} a_1$$

формула бойынша есептеледі, мұнда өлшемсіз a_1 (3.26) амплитуда пайдаланылады.



3.4-сурет. (3.19) теңдеулер жүйесі шешімдерінің фазалық траекториясы:
 $a - p = 1$; $b - p = 2$

3.2.3 Түрлер бәсекелестігінің басқа да модельдері

Жоғарыда қарастырылған (3.17) Лотка-Вольтерра моделінде бір-қатар қосымша факторларды есепке алу арқылы оның көптеген жалпылануларын келтіріп шығаруға болады. Мысалы, құрбандардың жалпы қорек үшін бәсекелестігін есепке алуға болады. Бұл жағдайда математикалық модель мынадай болады:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (\alpha - my - \gamma x)x, \\ \frac{dy}{dt} &= (kmx - \beta)y, \\ x(0) &= x_0, \quad y(0) = y_0, \end{aligned} \tag{3.27}$$

мұнда

$$\gamma = \text{const}, \quad \alpha > \frac{\gamma\beta}{km} \tag{3.28}$$

$x > 0, y > 0$ ширекте бұл жүйе жалғыз тыныштық нүктеге ие:

$$x_* = \frac{\beta}{km}, \quad y_* = \frac{\alpha km - \gamma\beta}{km^2}. \quad (3.28^*)$$

Бәсекелестік күрес жыртқыштар арасында да болуы мүмкін екендігін ескерсек, (3.27) модельді мына түрге түрлендіруге болады:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (\alpha - my - \gamma_1 x)x, \\ \frac{dy}{dt} &= (kmx - \beta - \gamma_2 y)y, \\ x(0) &= x_0, \quad y(0) = y_0, \end{aligned} \quad (3.29)$$

мұнда

$$\gamma_1 = \text{const} > 0, \quad \gamma_2 = \text{const} > 0, \quad \alpha > \frac{\gamma_1 \beta}{km}.$$

Осы жүйе де $x > 0, y > 0$ ширекте жалғыз тыныштық нүктеге ие болады:

$$x_* = \frac{\alpha\gamma_2 + m\beta}{\gamma_1\gamma_2 + km^2}, \quad y_* = \frac{\alpha km - \gamma_1\beta}{\gamma_1\gamma_2 + km^2}. \quad (3.30)$$

Осы екі модельдердің фазалық траекториялары тұйық болуы да, болмауы да мүмкін.

Екі түрлер арасындағы өзара әсерлерді дәлірек математикалық сипаттау үшін күрделі уақыттық және кеңістік өзара әсерлерді есепке алу қажет болады: популяциялар мөлшерлерінің бірқалыпты үлестірілмегендігі, туылу мен түр ретінде қалыптасу аралығындағы уақыттық кешігу, сыртқы әсерлер және т.б. Осындай күрделі есептердің шешімдерін табу үшін сандық әдістерді қолдану қажет болады, бірақ жоғарыда қарастырылған мысалдар көрсеткендей, шешімдердің қасиеттеріне алдын ала сапалы зерттеу жүргізіп алудың маңызы зор, себебі бұл зерттеулер шешімдерге тән ерекшеліктер жайлы бағалы ақпарат беруі мүмкін.

3.3 Популяциялар динамикасының жалпыланған модельдері

Егер құрылған модель сызықтық емес және күрделі болып оның шешімін сапалық зерттеу мүмкін болмаса, онда модельдің сызықтық аналогын қарастыру пайдалы болуы мүмкін. Көптеген жағдайларда осындай зерттеулер нәтижелері бастапқы сызықтық емес модель шешімі жайлы маңызды мәліметтер алуға болатындығын көрсетеміз.

3.3.1 Орнықтылық мәселесі

Көптеген түрлер қауымдастығының құрылымында трофикалық деңгей (тікелей тағамдық байланыстар мүмкін болмаған түрлер тобы) ажыратылып тұрады. Деңгейлер саны бірнеше болуы мүмкін. Бір деңгейге тиісті түрлер тіршілік ресурстары үшін бәсекелестік күрес жағдайында немесе ресурстарды пайдалануда коалиция жағдайында болуы мүмкін. Жер үстіндегі негізгі трофикалық деңгейлердің қауымдастықтары олар – процуденттер (жарық энергиясын және субстрат затын аккумуляциялайтын өсімдіктер), алғашқы консументтер (шөпкоректілер) және екінші (туынды) консументтер (шөпкоректілермен қоректенуші жыртқыштар).

Бір трофикалық деңгейдегі n түрлер қауымдастығы динамикасының теориялық талдауы түрлер мөлшерін жуықтайтын $x_i(t)$ функцияларға қатысты қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесіне негізделген:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.31)$$

мұнда f_i функциялар түрлердің өзара қатынастарының құрылымы және олардың мөлшерлік көрсеткіштерімен анықталады. (3.31) жүйенің биологиялық мағынаға ие болған шешімдері n өлшемді евклид кеңістігінің оң октантына тиісті болады ($x_i \geq 0$).

Егер (3.31) теңдеулерде түрлер мөлшерінің өсу жылдамдықтары t уақыттан айқын тәуелді болмаған сызықтық, ал түрлердің өз-өзін шектеуі мен өзара әсері квадраттық мүшелермен сипатталатын болса, онда n түрдегі қауымдастықтар динамикасының *вольтерралық модельдері* деп аталатын

$$\frac{dx_i}{dt} = \left(\varepsilon_i - \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} x_j \right) x_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.31)$$

модельдер алынады, мұнда ε_i – i -ші түрдің барлық басқа түрлер болмағандағы тума өсу жылдамдығы, γ_{ij} ($i \neq j$) – j -ші түрдің i -ші түрге әсерінің сипаты мен интенсивтілігін білдіреді, ал γ_{ii} – i -ші түр үшін түрлер ішіндегі өзара әсерлер көрсеткіші. Қауымдастық байланыстарының құрылымын бейнелейтін $\tilde{A} = \|\gamma_{ij}\|$ матрицаны *қауымдастық матрицасы* деп атайды.

(3.31) түріндегі теңдеулер жүйесін біз қорек үшін бәсекелестік үдерісінде екі түрлер мөлшерлерінің өзгеру есебін қарастыруда бұ-

рын зерттеген болатынбыз. Ол (3.8) теңдеулер жүйесі болып, оның шешімдерінің қасиеттерін жүйеге сапалық талдау жүргізу арқылы анықтаған едік. Алайда, осы жолмен n теңдеулерден тұратын (3.31) жүйенің шешімін зерттеу қиынға соғады. Фазалық кеңістікте де шешімді зерттеу мүмкін болмайды, себебі кеңістік n өлшемді.

Қазіргі уақытта экологияда экожүйелерді олардың теңсалмақты жағдайлары маңайында орнықтылығы мәселесін зерттеудің маңызы үлкен. Орнықтылық мәселесімен табиғи популяциялар мен қауымдастықтар динамикасы, қоршаған ортаның ластануының шегін бағалау, белгілі бір табиғи-шаруашылық іс-шараларды жүзеге асырудың салдарларын болжау секілді сұрақтар тығыз байланысқан. Кездейсоқ әсерлерге орнықтылығы, мұның нәтижесінде жүйенің бір жағдайдан басқа жағдайға өтуі және жаңа жағдайда әрі қарай дамуын математикалық модель деңгейінде шешімнің бастапқы берілгендер өзгеруіне орнықтылығы ретінде интерпретациялау мүмкін. Популяциялардың қасиеттерін ерекше нүкте немесе ерекше нүктелер маңайында зерттеу аса маңызды болады. Осы жағдайларда (3.31) жүйенің сызықтық аналогтарын зерттеудің көмегі болуы мүмкін, себебі сызықтық модельдері зерттеудің жетілдірілген математикалық әдістері (линеаризация әдісі және т.б.) бар.

Төменде осы айтылғандарға сәйкес мысал қарастырылады, сондай-ақ оған қарама-қарсы болған мысал келтіреміз, себебі кейбір жағдайларда сызықтық модель сызықтық емес модель шешімінің қасиеттерін дұрыс сипаттамауы мүмкін.

3.3.2. Ляпунов бойынша орнықтылық

Мұнда біз (3.31) жүйе шешімінің бастапқы берілгендердің қобалжуына орнықтылығы мәселесін уақыт бойынша шексіз интервалда қарастырамыз. (3.31) теңдеулер жүйесін вектор формада жазамыз

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad t \in (0, \infty), \quad (3.32)$$

және ол үшін Коши есебін қарастырамыз:

$$x(0) = x_0, \quad (3.33)$$

мұнда $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ вектор функциялар. Біз (3.32), (3.33) Коши есебінің шешімі барлық $t > 0$ және R^n арифметикалық кеңістіктің қандай да бір аймағындағы барлық x_0 үшін бар деп есептейміз.

Егер біз есепті уақыт бойынша ақырлы аралықта шешетін болсақ, онда (3.33) бастапқы берілгендер кіші өзгергенде $\mathbf{x}(t)$ шешімнің өзгеруі де осы аралықта кіші болады. Бұл шешімнің бастапқы берілгендерден үзіліссіз тәуелділігі жайлы белгілі теоремадан келіп шығады [42]. Ал егер біз шешімді шексіз уақыттық аралықта іздейтін болсақ, онда мұндай тәуелділік болмауы мүмкін.

$\mathbf{x}_*(t)$ – (3.32) жүйенің

$$\mathbf{x}_*(0) = \mathbf{x}_{*,0}, \quad (3.34)$$

бастапқы шартқа сәйкес келетін шешімі болсын, ал $\mathbf{x}(t)$ – (3.33) бастапқы шартқа сәйкес келетін басқа шешімі.

Анықтама. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ үшін сондай $\delta > 0$ табылып, бастапқы берілгендер үшін орынды болған

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{*,0}\| < \delta \quad (3.35)$$

теңсіздіктен шешім үшін барлық $t \geq 0$ орындалатын

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_*(t)\| < \varepsilon \quad (3.36)$$

теңсіздік келіп шығатын болса, онда $\mathbf{x}_*(t)$ шешім Ляпунов бойынша орнықты деп аталады. Кері жағдайда $\mathbf{x}_*(t)$ шешім орнықсыз деп айтылады.

Мұнда,

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_*(t)\| = \max_{i=1, \dots, n} |x_i(t) - x_{*,i}(t)|, \quad (3.37)$$

$x_{*,i}$ – \mathbf{x}_* вектор-функцияның i -ші компонентасы.

Анықтама. Егер $\mathbf{x}_*(t)$ шешім орнықты болумен қатар $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{*,0}\| < \delta_1$ теңсіздік орынды болғанда,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_*(t)\| = 0 \quad (3.38)$$

шартты да қанағаттандыратын болса, онда $\mathbf{x}_*(t)$ шешім асимптотикалық орнықты деп аталады. Мұнда, δ_1 – қандай да бір оң сан.

Экологияның көптеген математикалық есептерінде теңдеулер жүйесінің оң жақтары уақытқа тәуелді болмайды, яғни (3.32) теңдеу

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (3.39)$$

түрде болады. Мұндай жүйелер *автономды жүйелер* деп аталады. Мысалы, (3.31) теңдеулер жүйелері, сондай-ақ 3.2-пунктке қарастырылған барлық теңдеулер жүйелері автономды болады. Автономдық жүйелер үшін $x_*(t) \equiv x_* = \text{const}$ тұрақты шешімдердің орнықтылығын зерттеу қызығушылық тудырады. Тұрақты шешім үшін $\frac{dx_*}{dt} = 0$ теңдігі орындалатын болғандықтан, ол *тыныштық нүктесі* деп, ал тыныштық нүктесіне сәйкес келуші биологиялық жүйенің жағдайы *теңсалмақты жағдай* деп аталады. Тыныштық нүктесін табу үшін

$$f(x_*) = 0 \quad (3.40)$$

теңдеуді шешу қажет болады.

Мысал ретінде, өлшемсіз түрдегі (3.19) Лотка-Вольтерра автономды теңдеулер жүйесін қарастырамыз. Тәуелді айнымалыларды қайта белгілеп алып, бұл теңдеулерді

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} x(1-y) \\ p(x-1)y \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

вектор-функцияларды пайдаланып, (3.39) түрінде қайта жазамыз.

(3.41) теңдеу бұл жағдайда бірнеше шешімдерге ие және шешімдердің бірі – (3.20) тыныштық нүктелері үшін біз оның маңайында (3.33) бастапқы берілгендерге ($x_0 \neq x_*$) сәйкес келетін фазалық траекториялардың тұйық қисықтар болатындығын анықтаған болатынбыз.

3.3 б-суреттен көрініп тұрғандай, фазалық траектория өтетін x_0 нүктенің тыныштық нүктесі $x_* = (1,1)$ нүктеден ауытқуы шамалы ғана болса, онда барлық фазалық траекторияда одан көп ауытқымайды (осы фактіні қатаң математикалық есептеулер көмегімен дәлелдеу де мүмкін). Бұл – қарастырылып жатқан x_* тұрақты шешімнің Ляпунов бойынша орнықтылығын білдіреді (бірақ асимптотикалық орнықтылығын емес).

Мұндай тыныштық нүктелер *центр* деп, ал центрді қоршаушы тұйық фазалық траекториялар *циклдер* деп аталады.

Ал енді Лотка-Вольтерра теңдеуін $x(t)$ шешім компоненттерінің x_* тыныштық нүктесінің $x_* = 1, y_* = 1$ компоненттерінен

$$\tilde{x}(t) = x(t) - x_*, \quad \tilde{y}(t) = y(t) - y_* \quad (3.42)$$

ауытқуларын енгізу арқылы сызықтандыру жасаймыз. Ауытқулар $\tilde{x}^2, \tilde{x}\tilde{y}, \tilde{y}^2$ шамаларды есепке алмаса да болатындай кіші шамалар деп қарастырамыз. Бұл жағдайда (3.39), (3.41) сызықтық емес теңдеулер жүйесінің орнына тұрақты коэффициентті екі сызықтық теңдеулерден тұратын жүйе аламыз:

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{A}(x - x_*) \quad (3.43)$$

мұнда

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p & 0 \end{pmatrix}.$$

\mathcal{A} матрицаның өзіндік мәндері

$$\lambda_1 = -i\sqrt{p}, \quad \lambda_2 = i\sqrt{p} \quad (3.44)$$

таза жорамал сандар болғандықтан, (3.43) сызықтық теңдеулердің

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \quad (3.45)$$

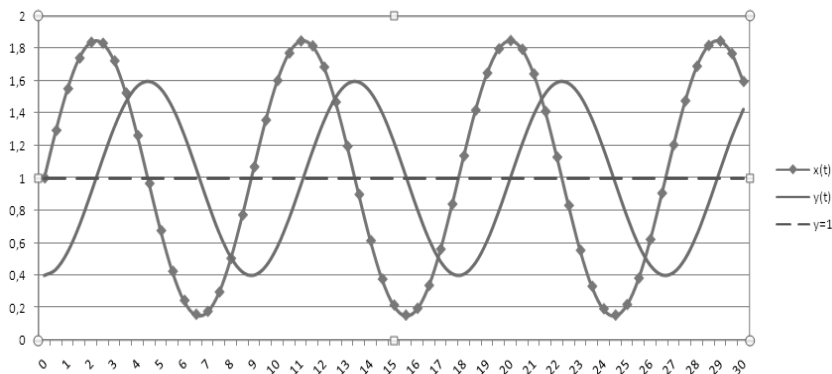
бастапқы шарттарға сәйкес келетін шешімдері мынадай болады [40]:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_* + (x_0 - x_*) \cos(\sqrt{pt}) - \frac{y_0 - y_*}{\sqrt{p}} \sin(\sqrt{pt}), \\ y(t) &= y_* + (y_0 - y_*) \cos(\sqrt{pt}) - (x_0 - x_*) \sqrt{p} \sin(\sqrt{pt}). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Шешім периодты болып, периоды $T = \frac{2\pi}{\sqrt{p}}$ тең екендігі (3.46)

көрініп тұр. Сонымен бірге, популяциялар мөлшерлерінің тербелістері фазада орындалмайды: $x(t)$ функцияның экстремал мәндеріне $y(t)$ функцияның $y_* = 1$ тепе-теңдік мәні сәйкес келеді және керісінше (3.5-сурет). Сондықтан осы аталған қасиеттер сызықтық емес Лотка-Вольтерра теңдеулері және олардың (3.43) сызықтық аналогтары үшін де бірдей болады.

Сонымен қатар, (3.43) сызықтық теңдеулердің шешімі ретіндегі x_* нүкте Ляпунов бойынша орнықты болады (асимптотикалық емес), себебі, (3.45) бастапқы берілгендердің x_* тыныштық нүктесінен кіші ауытқулары шешімнің де кіші ауытқуларын береді, ол тікелей (3.46) формулалардан келіп шығады. Сонымен, орнықтылық қасиеті бойынша сызықтық емес теңдеулер мен олардың (3.43) сызықтандырулары бірдей болады.



3.5-сурет. (3.4.6) интегралдық қисықтар:

$$1-x(t); 2-y(t); x_*=1; y_*=1; x_0=1; y_0=0,4; p=0,5.$$

Тепе-теңдік жағдайы штрихталған сызықпен көрсетілген

(3.43) сызықтық теңдеулер үшін фазалық траекториялардың теңдеуін алу қиын болмайды. Мұны түрлі тәсілдер, мысалы, (3.46) шешімнен уақытты шығарып тастау, арқылы жүзеге асыруға болады. Осы теңдеулерді $\sin(\sqrt{pt})$ және $\cos(\sqrt{pt})$ қатысты шешіп және негізгі тригонометриялық тепе-теңдікті пайдаланып

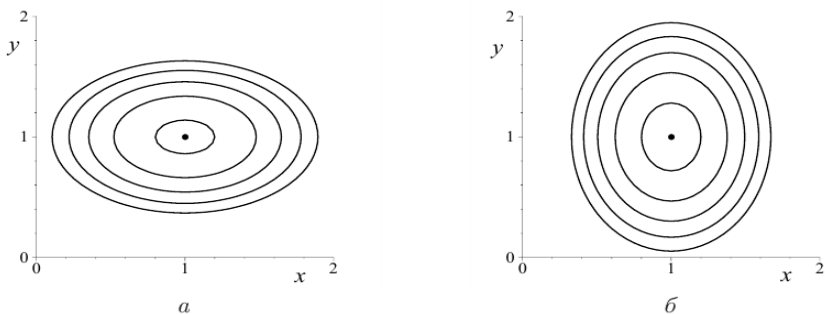
$$(x-x_*)^2 + \frac{(y-y_*)^2}{p} = C, \quad (3.47)$$

теңдеуді аламыз, мұнда

$$C = (x_0 - x_*)^2 + \frac{(y_0 - y_*)^2}{p}.$$

(3.43), (3.45) сызықтық есеп шешімдерінің фазалық траекториялары эллипстер болады (3.6-сурет). Олар сызықтық емес есептің фазалық траекторияларымен дәлме-дәл түспейтін болса да (3.3 б және 3.6 а, сондай-ақ, 3.4 б және 3.6 б суреттерді салыстырыңыз), бұл траекториялар гомеоморфты, яғни лайықты өзара бірмәнді үзіліссіз бейнелеуде бір фазалық траекториялар басқаларына өтеді. Сондықтан фазалық траекториялардың формасы бойынша да салыстырылатын жүйелер пара-пар (эквивалент) деп есептеуге болады.

Қарастырылған екі жүйе үшін де тыныштық нүктесінің типі – центр болады, ал екі жағдайда да фазалық траекториялар циклдер болады.



3.6-сурет. Сызықтық теңдеулер жүйелері шешімдерінің фазалық траекториялары: $a - p = 0,5$; $\dot{a} - p = 2$

Сонымен, (3.39), (3.41) сызықтық емес жүйенің тыныштық нүктесінің орнықтылығы және оның типі жайлы біз ештеңе білмесек те, (3.43) сызықтық теңдеулер үшін x_* нүктенің орнықтылығын зерттеу арқылы біз дұрыс жауап алған болар едік, себебі бұл жүйелер *саялық жағынан пара-пар*: қандай да бір өзара бірмәнді бейнелеуде бірінші жүйенің «фазалық бейнесі» екіншісінің «фазалық бейнесіне» өтеді және керісінше.

3.3.3 Колмогоров моделі

Қазіргі уақыта «құрбан-жыртқыш» түріндегі көптеген модельдер бар болып, олар Лотка-Вольтерраның математикалық моделіне қарағанда жалпылау сипатқа ие болып келеді. Осындай модельдердің бірі

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(x)x - V(x)y, \\ \frac{dy}{dt} &= K(x)y. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Колмогоров моделі. Төмендегі

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} a(x)x - V(x)y \\ K(x)y \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

вектор-функцияларды енгізетін болсақ, (3.48) жүйені (3.39) автономды жүйе түрінде жазсақ болады. Қарастырылатын модельде $a(x)$ құрбандардың, $K(x)$ жыртқыштардың өсуімен байланысты

коэффициент, $V(x)$ – трофикалық функция. Лотка-Вольтерраның (3.17) моделінде $V(x)$ трофикалық функция және $K(x)$ функция x -қа сызықтық тәуелді болатындығын еске түсіре кетейік. Ал қазір $a(x)$, $V(x)$ және $K(x)$ функциялардың түрлері нақтыланбаған, бірақ теңдеулерді келтіріп шығаруда шешімдерге биологиялық мағына беру мақсатында осы функциялардың x айнымалыдан тәуелділігінің сипаты жайлы кейбір сапалық тұжырымдар жасалады:

– $a(x)$, $V(x)$, $K(x)$ барлық $x \geq 0$ анықталған және үзіліссіз дифференциалданушы функциялар;

– жыртқыштар болмаған жағдайда құрбандардың табиғи өсу коэффициенті $a(x)$ олардың мөлшерінің артуымен оң мәндерден теріс мәндерге өтіп монотон кемиді:

$$a'(x) < 0, a(0) > 0 > a(\infty); \quad (3.50)$$

бұл шарт популяцияда ішкі түрлердің шектелген ресурстар үшін күресінде құрбандардың болатындығын көрсетеді;

– құрбандар санының артуымен жыртқыштардың табиғи өсу коэффициенті теріс мәндердің (қорек жетпегенде) оң мәндерге өтіп монотон артады:

$$K'(x) > 0, K(0) < 0 < K(\infty); \quad (3.51)$$

– бірлік уақытта бір жыртқыш қоректенетін құрбандар саны оң, ал құрбандар болмағанда бұл сан нөлге тең болады:

$$V(x) > 0 \quad x > 0 \text{ болғанда, } V(0) = 0. \quad (3.52)$$

(3.48) теңдеулер жүйесінің бірнеше тыныштық нүктелері бар. Олардың барлығы (3.40) теңдеуді шешу жолымен табылады. Орнықтылыққа тыныштық нүктелерінің бірін, атап айтқанда бірінші координатасы x_* $K(x) = 0$ теңдеудің түбірі болған, яғни

$$x_* = K^{-1}(0) > 0, \quad (K(x_*) = 0) \quad (3.53)$$

((3.51) шартқа сәйкес түбір бар және ол жалғыз болады), ал екіншісі

$$y_* = \frac{a(x_*)x_*}{V(x_*)}, \quad (3.54)$$

формуламен берілетін $x_* = (x_*, y_*)$ нүктені зерттейміз.

(3.53), (3.54) формулалардан x_* нүкте бірінші ширекте ($x > 0, y > 0$)

$$a(x_*) > 0 \quad (3.55)$$

шарты орынды болғанда жататындығы келіп шығады. Осы шарт орындалады деп есептейміз.

(3.48) жалпы түрдегі жүйе болғандықтан, тепе-теңдік жағдайының орнықтылығына қатысты нақты бір тұжырым айту қиын, сондықтан (3.39), (3.49) сызықтық емес жүйені (3.42) ауытқулар кіші деп есептеп,

$$\frac{dx}{dt} = f(x_*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_*)(x - x_*)$$

сызықтық теңдеумен алмастырамыз. $f(x_*) = 0$ болғандықтан, жоғарыдағы теңдеуді мынадай жазсақ болады:

$$\frac{dx}{dt} = A(x - x_*), \quad (3.56)$$

мұнда

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_*) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_*) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_*) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & -V(x_*) \\ K'(x_*)y_* & 0 \end{pmatrix}$$

Якоби матрицасы, ал

$$\sigma = a'(x_*)x_* + a(x_*) - V'(x_*)y_*. \quad (3.57)$$

(3.56) сызықтық модель $f(x)$ вектор-функцияны x_* нүкте маңайында Тейлор қатарына жіктеу арқылы алынған. Осы жіктелуде реті бірінші ретті болған (3.42) мүшелер ғана алынған. Сондықтан (3.56) модель сызықтық емес (3.39) модельге қатысты *бірінші ретті аппроксимациялау* немесе *бірінші жуықтау* моделі деп аталады.

(3.33) бастапқы шарттарға сәйкес келетін шешімді ақырлы түрде жазып алып, (3.56) сызықтық теңдеулер жүйесі үшін $x_* = (x_*, y_*)$ тыныштық нүктесін орнықтылыққа зерттейміз.

Шешім түрі A матрицаның $\lambda_{1,2}$ өзіндік мәндерінен тәуелді болып, олар

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \mu = 0 \quad (3.58)$$

сипаттауыш теңдеудің түбірлері болады, мұнда $\mu = V(x_*)K'(x_*)y_*$.

(3.51), (3.52) шарттарға сай

$$\mu > 0 \quad (3.59)$$

теңсіздік орынды болады.

(3.58) квадрат теңдеудің дискриминантын $d = \sigma^2 - 4\mu$ деп белгілейік және ол оң болған жағдайды қарастырамыз, яғни:

$$\sigma < -2\sqrt{\mu} \text{ немесе } \sigma > 2\sqrt{\mu} . \quad (3.60)$$

Бұл жағдайда (3.58) теңдеудің түбірлері

$$\lambda_1 = \frac{\sigma - \sqrt{d}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\sigma + \sqrt{d}}{2} \quad (3.61)$$

нақты және әртүрлі болады, сондықтан (3.56) жүйенің жалпы шешімі

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_* + C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{r}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{r}_2 \quad (3.62)$$

формуламен беріледі [40, 42], мұнда \mathbf{r}_i ($i=1,2$) – λ_i өзіндік мәндерге сәйкес келетін \mathcal{A} матрицаның өзіндік векторлары, мысалы,

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} V(\mathbf{x}_*) \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} V(\mathbf{x}_*) \\ \lambda_1 \end{pmatrix}. \quad (3.63)$$

\mathbf{r}_1 және \mathbf{r}_2 өзіндік векторлар сызықтық тәуелсіз векторлар болатындықтан, C_1, C_2 тұрақтылар (3.33) бастапқы берілгендер арқылы

$$C_1 \mathbf{r}_1 + C_2 \mathbf{r}_2 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_* \quad (3.64)$$

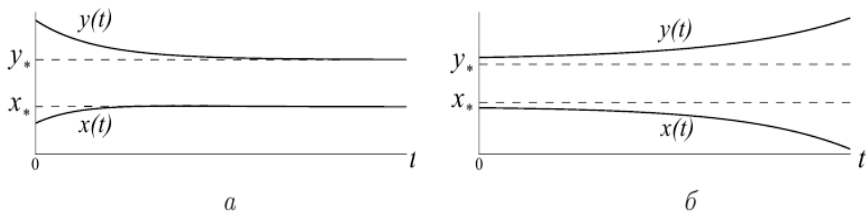
сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешу жолымен бір мәнді анықталады.

(3.59) шарттан λ_1 және λ_2 өзіндік мәндердің таңбалары бірдей екендігі келіп шығады, ал $\lambda_1 + \lambda_2 = \sigma$ теңдікке сәйкес олардың таңбалары σ санының таңбасымен дәл түседі. (3.60) теңсіздікті есепке алатын болсақ, $\sigma < -2\sqrt{\mu}$ болғанда өзіндік мәндердің екеуі де теріс болады, сондықтан

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_*\| = 0 ,$$

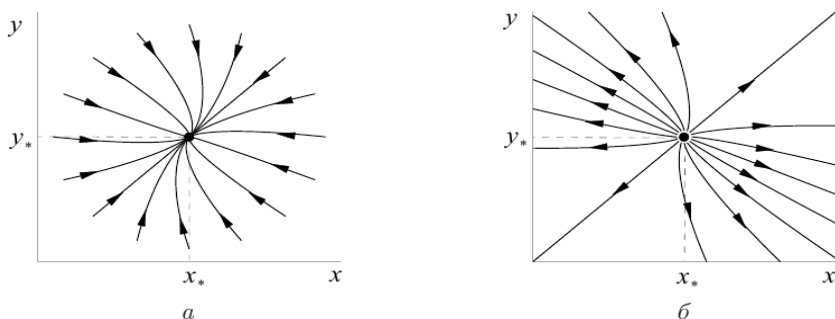
яғни бұл жағдайда тыныштық нүктесі асимптотикалық орнықты болады. Егер $\sigma > 2\sqrt{\mu}$ болса, онда (3.62) шешім $t \rightarrow \infty$ тыныштық нүктесінен шексіз ұзақтайтындығы жайлы қорытынды жасауымыз мүмкін, яғни \mathbf{x}_* нүкте орнықсыз болады.

3.7-суретте қандай да бір \mathbf{x}_0 бастапқы берілгендер үшін (3.62) шешімдердің графиктері, ал 3.8-суретте түрлі \mathbf{x}_0 бастапқы нүктелер үшін фазалық траекториялар көрсетілген.



3.7-сурет. (3.62) интегралдық қисықтар:

$$a - \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0; \quad b - \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$$



3.8-сурет. Өзіндік мәндер түрлі нақты болған (3.61) жағдайда (3.56) сызықтық теңдеулер жүйесінің (3.62) шешімдеріне сәйкес келетін фазалық траекториялар: $a - \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$; $b - \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$

$\lambda_i (i=1,2)$ өзіндік мәндер теріс болған жағдайда барлық траекториялар $t \rightarrow \infty$ \mathbf{x}_* тыныштық нүктеде жинақталады, бұл жағдайда оны *орнықты түйін* деп атайды. Оң өзіндік мәндер үшін керісінше $-\mathbf{x}(t)$ нүктелер фазалық траекторияларда тепе-теңдік жағдайынан ұзақтай отырып қозғалады, сондықтан оны *орнықсыз түйін* деп атайды.

Ал енді дискриминант $d = 0$ болсын, яғни

$$\sigma = \pm 2\sqrt{\mu} . \tag{3.65}$$

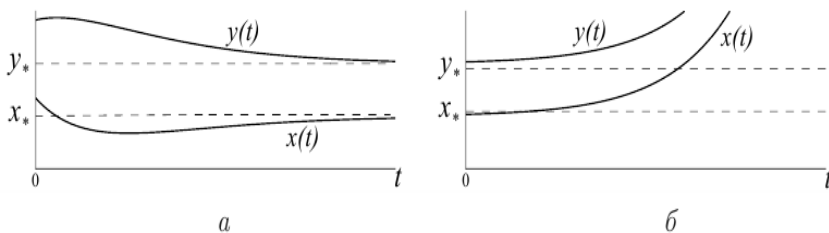
Бұл жағдайда сипаттауыш теңдеудің түбірі

$$\lambda = \frac{\sigma}{2} \neq 0 \tag{3.66}$$

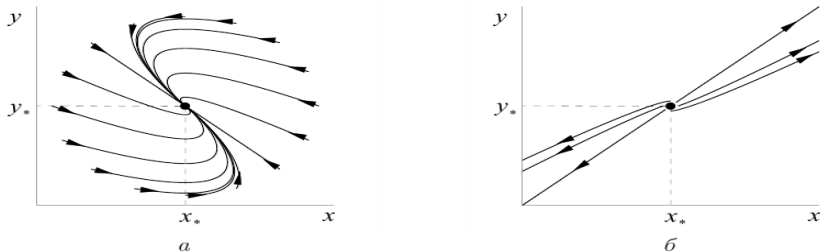
еселі болады және (3.56), (3.33) есептің шешімі мына түрде жазылады [40]:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_* + (\mathcal{I} + t(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}))e^{\lambda t}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_*), \quad (3.67)$$

мұнда \mathcal{I} – бірлік матрица. Бұл формуладан қарастырылып жатқан нүкте $\sigma = -2\sqrt{\mu}$ болғанда асимптотикалық орнықты, ал $\sigma = 2\sqrt{\mu}$ жағдайда орнықсыз болатындығы көрініп тұр. (3.67) шешім компоненттерінің графиктері 3.9-суретте, ал фазалық траекториялар 3.10-суретте келтірілген. Еселік түбір жағдайында да жай түбірдегідей $\lambda < 0$ немесе $\lambda > 0$ байланысты фазалық траекториялар тыныштық нүктесіне жуықтауы немесе одан алшақтауы мүмкін. Сәйкесінше, тыныштық нүктесі орнықты немесе орнықсыз *өзгеше түйін* деп аталады.



3.9-сурет. (3.67) интегралдық қисықтар: $a - \lambda < 0$; $b - \lambda > 0$



3.10-сурет. (3.66) еселі өзіндік мәндер жағдайда (3.56) сызықтық теңдеулер жүйесінің (3.67) шешімдеріне сәйкес келетін фазалық траекториялар: $a - \lambda < 0$; $b - \lambda > 0$

Соңында,

$$-2\sqrt{\mu} < \sigma < 2\sqrt{\mu} \quad (3.68)$$

теңсіздік орынды болғанда дискриминант $d < 0$ болатын жағдайды қарастырамыз. Бұл жағдайда сипаттауыш теңдеудің түбірлері комплексті түйіндес сандар болады:

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}, \quad \lambda_2 = \lambda \equiv \frac{\sigma + i\sqrt{|d|}}{2} \quad (3.69)$$

оларға

$$\mathbf{r}_1 = \bar{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r} \equiv \begin{pmatrix} V(x_*) \\ \bar{\lambda} \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

сызықтық тәуелсіз болған өзіндік векторлар сәйкес келеді, мұнда

$$\mathcal{A}\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r}, \quad \mathcal{A}\bar{\mathbf{r}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{r}},$$

және (3.56) жүйенің жалпы шешімі мынадай болады [40]:

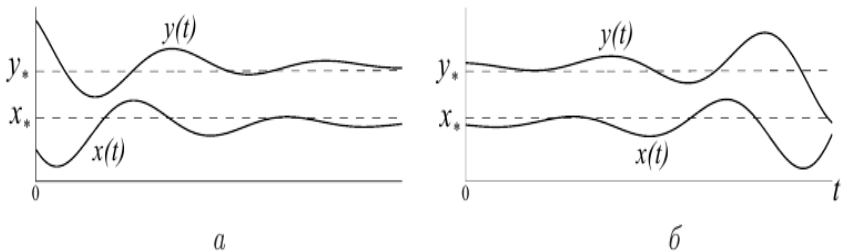
$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_* + C_1 \operatorname{Re}(e^{\lambda t} \mathbf{r}) + C_2 \operatorname{Im}(e^{\lambda t} \mathbf{r}). \quad (3.71)$$

$e^{\lambda t}$ үшін

$$e^{\lambda t} = e^{\sigma t/2} \left(\cos \frac{\sqrt{|d|}t}{2} + i \sin \frac{\sqrt{|d|}t}{2} \right) \quad (3.72)$$

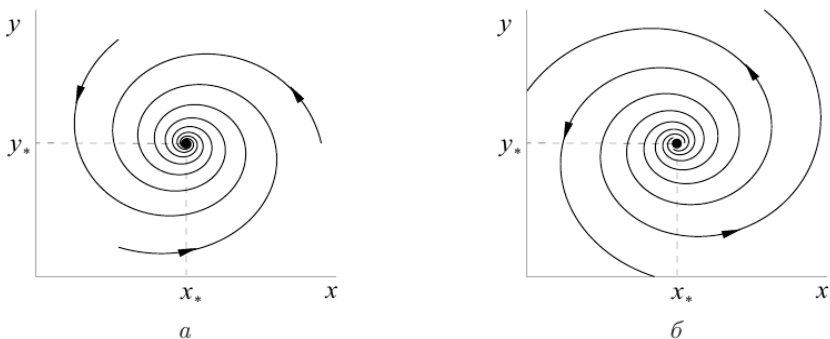
теңдік орынды болғандықтан, $-2\sqrt{\mu} < \sigma < 0$ шартта \mathbf{x}_* тыныштық нүктесі асимптотикалық орнықты, ал $0 < \sigma < 2\sqrt{\mu}$ болғанда – орнықсыз, ал $\sigma = 0$ -де орнықты, бірақ асимптотикалық емес, шешім болады.

3.11-суретте $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ жағдайында қандай да бір \mathbf{x}_0 бастапқы нүкте үшін (3.71) шешім компоненттерінің графиктері көрсетілген. Суреттен $x(t), y(t)$ функциялар тербелетін функциялар екендігі көрінеді, олардың тербеліс амплитудасы $\operatorname{Re} \lambda < 0$ болғанда кемиді, ал $\operatorname{Re} \lambda > 0$ артады.



3.11-сурет. (3.71) интегралдық қисықтар: $a - \operatorname{Re} \lambda < 0$; $b - \operatorname{Re} \lambda > 0$

3.12-суретте $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ жағдайдағы фазалық траекториялар берілген. Мұнда траекториялар λ өзіндік мәнінің нақты бөлігінің таңбасына қарай тыныштық нүктесіне жуықтайды немесе одан алшақтайды. Сәйкесінше, тыныштық нүктесі $\operatorname{Re} \lambda < 0$ жағдайда *орнықты фокус* деп, ал егер $\operatorname{Re} \lambda > 0$ болса, онда *орнықсыз фокус* деп аталады.



3.12-сурет. (3.69) комплексті өзіндік мәндер жағдайында (3.56) сызықтық теңдеулер жүйесінің (3.71) шешімдеріне сәйкес келетін фазалық траекториялар: $a - \operatorname{Re} \lambda < 0$; $b - \operatorname{Re} \lambda > 0$

Соңғы жағдай, егер $\operatorname{Re} \lambda = 0$ болса (яғни, $\sigma = 0$), онда (3.70), (3.72) формулаларды есепке алып, (3.71) шешімнің компоненттері үшін мынадай өрнектерді аламыз:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_* + (x_0 - x_*) \cos pt - (y_0 - y_*) \frac{V(x_*)}{p} \sin pt, \\ y(t) &= y_* + (y_0 - y_*) \cos pt - (x_0 - x_*) \frac{p}{V(x_*)} \sin pt, \end{aligned} \quad (3.73)$$

мұнда, $p = \frac{\sqrt{|d|}}{2}$, $x_0 = (x_0, y_0)$ – интегралдық қисықтың бастапқы нүктесі.

Сонымен, (3.73) шешім компоненталары периодтық функциялар, ал оларға сәйкес келетін фазалық траекториялар – эллипстер болады, олар

$$\frac{(x - x_*)^2}{CV(x_*)/p} + \frac{(y - y_*)^2}{Cp/V(x_*)} = 1$$

теңдеулермен сипатталады, мұнда

$$C = \frac{(x - x_*)^2}{V(x_*)/p} + \frac{(y - y_*)^2}{p/V(x_*)},$$

ал тыныштық нүктесі – центр. Тыныштық нүктесінің мұндай түрі бізге сызықтандырылған Лотка-Вольтерра теңдеулерін зерттеуде кездескен болатын.

Барлық мүмкін болған (3.60), (3.65), (3.68) жағдайларды зерттеулер нәтижелерін қорытындылай, $\sigma < 0$ болғанда тыныштық нүктесі асимптотикалық орнықты, $\sigma > 0$ жағдайда орнықсыз, ал $\sigma = 0$ болғанда орнықты, бірақ асимптотикалық емес деп айтуымызға болады. Қарастырылған есепке қатысты осы қорытынды мынадай болады: егер $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ ($i = 1, 2$) болса, онда тыныштық нүктесі асимптотикалық орнықты, егер $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ болса – орнықсыз, $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$ жағдайда – орнықты, бірақ асимптотикалық емес.

Сонымен, біз (3.56) бірінші жуықтау моделінің шешімінің қасиеттерін x_* тыныштық нүктесі маңайында толық зерттедік.

(3.48) сызықтық емес модель шешімі қарастырылған сызықтық модель шешіміне сипаттары мен қасиеттері жағынан ұқсас болатындығын тұжырымдауға бола ма? Кейбір жағдайларда мұндай тұжырым орынды болуы мүмкін екен. Ол төменде келтірілген Ляпунов теоремаларына негізделген болады.

1-теорема (тыныштық нүктесінің орнықтылығы жайлы).
Егер (3.56) бірінші жуықтау жүйесінің сипаттауыш теңдеуінің түбірлері теріс нақты бөлікке ие болса, онда (3.39) сызықтық емес жүйенің x_ тыныштық нүктесі асимптотикалық орнықты болады. Егер, кемінде бір түбір оң нақты бөлікке ие болса, онда тыныштық нүктесі орнықсыз болады.*

Сонымен, осы теоремаға негізделіп, (3.57) параметрдің $\sigma = 0$ басқа кез келген мәндерінде (3.48) сызықтық емес Колмогоров моделі шешімінің тыныштық нүктесінің маңайындағы қасиеттері (3.56) сызықтық модель шешімінің қасиеттері сипатындай болады деп тұжырым жасауымызға болады: екі шешім де бір уақытта асимптотикалық орнықты немесе орнықсыз, тыныштық нүктесі екі модель үшін де түйін немесе фокус болады.

Ал $\sigma = 0$ болғанда, келтірілген теорема тыныштық нүктесінің маңайында сызықтық емес және сызықтық модельдер шешімдерінің қасиеттерінің сәйкестігі жайлы сұрақтарға жауап бермейді.

Біз сызықтық модель шешімдерінің қасиеттерін зерттеу арқылы кейбір жағдайларда сызықтық емес модель шешімінің қасиеттері жайлы да мәлімет алуға болатынын көрдік. (3.48) Колмогоров моделі үшін параметрдің $\sigma = 0$ мәнінде ғана, яғни (3.56) сызықтық жүйенің (3.58) сипаттауыш теңдеуінің түбірлері таза жорамал сан болғанда шешім қасиеттері қандай болатындығы белгісіз күйінде қалды.

Сызықтық модельдегідей сызықтық емес теңдеулер үшін де тыныштық нүктесі центр, ал фазалық траекториялар – цикл бола ма? (3.39) (3.41) Лотка-Вольтерраның сызықтық емес моделі үшін біз тыныштық нүктесінің типі және фазалық траекториялардың формасы бойынша (3.43) сызықтық теңдеулер жүйесімен сәйкестік алғанымызды еске түсірейік (сызықтық теңдеулер жүйесінің сипаттауыш теңдеуінің түбірлері таза жорамал сан). Алайда, жалпы жағдайда сипаттауыш теңдеуінің түбірлері таза жорамал сан болғанда мұндай сәйкестік болмауы да мүмкін. Сәйкес мысал келтіреміз.

Төмендегі $p = \text{const} > 0$ параметрлі

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -py - x(x^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} &= py - y(x^2 + y^2), \end{aligned} \quad (3.74)$$

автономды теңдеулер жүйесі жалғыз $\mathbf{x}_* = (0, 0)$ қозғалмайтын нүктеге ие және кез келген

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \quad (3.75)$$

бастапқы берілгендер үшін аналитикалық интегралдануы мүмкін. Мұны көрсету үшін поляр координаталарды

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad (3.76)$$

енгіземіз және (3.74) жүйеде жаңа $r = r(t)$ және $\varphi = \varphi(t)$ тәуелді айнымалыларға өтеміз:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} \cos \varphi - \frac{d\varphi}{dt} r \sin \varphi &= -pr \sin \varphi - r^3 \cos \varphi, \\ \frac{dr}{dt} \sin \varphi + \frac{d\varphi}{dt} r \cos \varphi &= pr \cos \varphi - r^3 \sin \varphi. \end{aligned}$$

Осы жүйені туындыларға қатысты шешетін босақ, онда

$$\frac{dr}{dt} = -r^3, \quad \frac{d\varphi}{dt} = p,$$

карапайым теңдеулерді аламыз, олардың шешімдері

$$r(t) = \sqrt{\frac{1}{2t + 1/r_0^2}}, \quad \varphi(t) = pt + \varphi_0, \quad (3.77)$$

болады, мұнда r_0 және φ_0 сандар (3.75)

$$x_0 = r_0 \cos \varphi_0, \quad y_0 = r_0 \sin \varphi_0$$

бастапқы берілгендермен бірмәнді анықталады. Осы табылған (3.77) функцияларды (3.76) формулаларға қойып, (3.74), (3.75) сызықтық емес есептің шешімдерін аламыз:

$$x(t) = \sqrt{\frac{1}{2t+1/r_0^2}} \cos(pt + \varphi_0),$$

$$y(t) = \sqrt{\frac{1}{2t+1/r_0^2}} \sin(pt + \varphi_0).$$

3.12 *a*-суретте осы шешімдердің параметрдің $p=1$ мәніндегі фазалық траекториялары келтірілген. (3.74) сызықтық емес тендеулер жүйесі үшін тыныштық нүктесі орнықты фокус болатындығы көрініп тұр, ал фазалық траекториялар тыныштық нүктесіне экспоненциал көбейткіштері болған (3.71) түрдегі шешімдер траекторияларына қарағанда баяу ұмтылады.

Тыныштық нүктесінің маңайында (3.74) жүйенің бірінші жуықтауын қарастырамыз:

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{A}x, \quad (3.78)$$

мұнда

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -p \\ p & 0 \end{pmatrix}.$$

\mathcal{A} матрицаның өзіндік мәндері таза жорамал комплексті түйіндес болады:

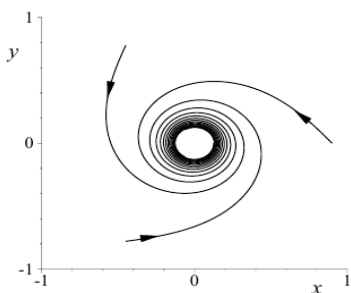
$$\lambda_1 = -ip, \quad \lambda_2 = ip,$$

сондықтан (3.71) формула бойынша (3.78), (3.75) есеп шешімінің компоненттері үшін (3.73) түріндегі қатынастар аламыз:

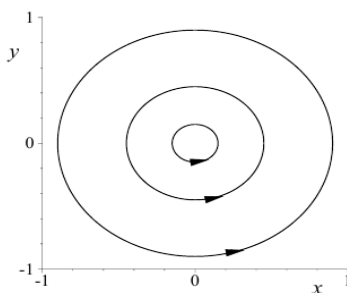
$$x(t) = x_0 \cos pt - y_0 \sin pt,$$

$$y(t) = y_0 \cos pt + x_0 \sin pt. \quad (3.79)$$

Бұдан (3.79) сызықтық жүйенің шешімдеріне сәйкес келетін фазалық траекториялар центрі тыныштық нүктесінде болатын $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$ центрлес шеңберлер (3.13 б-сурет) болатындығы келіп шығады және олар бастапқы сызықтық емес есептің фазалық траекторияларына мүлдем ұқсамайды. Сонымен, бұл жағдайда сызықтық емес модель мен оның сызықтық аналогы сапалық жағынан пара-пар емес, сызықтық жуықтау жүйесі шешімінің қасиеттері бойынша бастапқы сызықтық емес есеп шешімінің қасиеттері жайлы дұрыс тұжырым жасау мүмкін болмайды.



a



б

3.13-сурет. Фазалық траекториялар: *a* – (3.74) сызықтық емес теңдеулер жүйесінің шешімдеріне; *б* – (3.78) сызықтық жуықтау шешімдеріне сәйкес келуші

Сонымен, біз қарапайым мысалдарда бастапқы сызықтық емес математикалық модельдердің сызықтық аналогтары зерттеліп жатқан нақты үдерістер жайлы маңызды ақпарат (толық болмаса да) беруі мүмкін екендігіне көзімізді жеткіздік. Кейбір жағдайларда сызықтық модельді қолданудың өзі оң нәтижеге алып келуі мүмкін, бірақ әрқашан олардың қолданыс аймағы шекті, оның шекарасы толықтау, жетілдірілген модельдер бойынша алынған нәтижелерді салыстыру арқылы ғана анықталатындығын ойдан шығармаған жөн. Сызықтық модельдер кемшіліктеріне қарамастан нақты құбылыстарды, үдерістерді зерттеудегі математикалық модельдер иерархиясы тізбегінде болуы тиіс.

3.4 Экономикалық үдерістердің қарапайым модельдері

Алдыңғы тарауларда бізді қоршаған табиғаттағы түрлі үдерістер мен құбылыстар көптеген жағдайларда бірдей немесе ұқсас теңдеулермен сипатталатындығы айтып өтілген болатын. Сондықтан қандай да бір құбылыстарды математикалық модельдеу үшін құрылған әдістерді «аналогия» бойынша басқа құбылыстардың кең кластарына қолдану мүмкін. Осы параграфте біз биологиялық-экономикалық аналогияларға мысалдар келтіріп оларды зерттеу жолдарын қарастырамыз.

3.4.1 Экономикалық өсудің қарапайым моделі

Әдетте, уақыт бойынша орташа есеппен мемлекеттің нақты табысы артады. Табыс азаятын периодтар да болады (рецессия периодтары), бірақ ұзақ мерзімді сипатта өсу болады. Экономикалық өсу экономикалық теорияның бөлімі макроэкономиканың маңызды мәселесі болып, онда экономика мәселелері жалпы зерттеледі: экономикалық өсім, кризистер, инфляция, жұмыссыздық және т.б.

Белгілі бір экономиканың динамикасын ұзақ мерзімді периодта қарастырамыз. Кез келген t уақыт моментінде оның күйі мынадай шамалармен сипатталады деп есептейміз: $D(t)$ – соңғы өнім көлемі (табыс), $C(t)$ – өндірістік емес тұтыну фонды, $S(t)$ – жинақтау фонды, $y(t)$ – еңбек ресурстары көлемі (бізде – жұмыс істеушілер саны), $X(t)$ – капиталдық ресурстар көлемі (тауарлар мен қызметтерді өндіруде пайдаланылатын бар болған барлық өндіріс құралдары).

Соңғы өнім тұтыну мен жинақтауға толықтай пайдаланылады, яғни $D = C + S$ деп есептейміз, мұнда жинақтау қоры S соңғы өнімнің берілген s бөлігін құрайды, сондықтан

$$\begin{aligned} S &= sD, \\ C &= (1-s)D, \end{aligned} \quad (3.80)$$

мұнда $s = \text{const}$, $0 < s < 1$. Капиталдық ресурстардың тозуы олардың көлеміне пропорционал және жинақтау қоры толығымен тозығы жеткен капиталды қамтуға және капиталдың өсуіне кететін инвестицияға жұмсалады деп есептейміз:

$$S = \delta \cdot X + \frac{DX}{dt}, \quad (3.81)$$

мұнда $\delta = \text{const}$, $0 < \delta < 1$.

Жұмысшылар саны, капитал және соңғы өнім көлемі өзара $f(x)$ өндірістік функция көмегімен байланысқан деп есептейміз:

$$D = y \cdot f(x), \quad (3.82)$$

мұнда $x = X / y$ – жұмыс күшінің капиталдық жабдықталуы, $x \geq 0$, $f(0) = 0$, $f'(x) > 0$.

Сонда (3.81) теңдеуді, (3.80) және (3.82) формулаларды есепке ала отырып, мынадай жазсақ болады:

$$s \cdot y \cdot f(x) = \delta \cdot X + \frac{dX}{dt},$$

немесе

$$\frac{1}{y} \frac{DX}{dt} = s \cdot f(x) - \delta x. \quad (3.83)$$

Төмендегі

$$X = xy \quad (3.84)$$

теңдікке сай

$$\frac{DX}{dt} = x \frac{dy}{dt} + y \frac{dx}{dt}$$

теңдікті аламыз, сондықтан (3.83) теңдеуді мына түрде қайта жазуға болады:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{y} \frac{dy}{dt} + s \cdot f(x) - \delta \cdot x. \quad (3.85)$$

Сонымен қатар, жұмысшылар саны $\varepsilon = \text{const} > 0$ салыстырмалы жылдамдықпен экспоненциал артады деп есептейміз:

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon y. \quad (3.86)$$

Сонда (3.85) теңдеуді мына түрде жазсақ болады:

$$\frac{dx}{dt} = s \cdot f(x) - (\delta + \varepsilon)x. \quad (3.87)$$

Осы теңдеу үшін

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \quad (3.88)$$

бастапқы шарттарды беріп және (3.86) – (3.88) Коши есебінің $x(t), y(t) = y_0 e^{\varepsilon t}$ шешімдерін тауып, (3.84) формула бойынша капиталдық ресурстар көлемін, (3.82) формула бойынша – табысты, (3.80) формула бойынша – тұтыну және жинақтау фондтарын анықтаймыз.

Өндірістік функция сызықтық функция болған қарапайым жағдайды қарастырайық:

$$f(x) = mx, \quad m = \text{const} > 0. \quad (3.89)$$

Сонда жұмыс күшінің капиталмен жабдықталу функциясы (3.87) мына түрде болады:

$$\frac{dx}{dt} = (sm - \delta - \varepsilon)x, \quad (3.90)$$

яғни ол Мальтус моделінің (3.1) теңдеуімен дәлме-дәл түседі. Сондықтан келтірілген экономикалық модель де Мальтустың биологиялық моделіндегідей кемшіліктерге ие болады.

Экономикалық өсу теориясында басқа түрдегі өндірістік функция – Кобб-Дуглас функциясы жиі қолданылады [52]:

$$f(x) = mx^\alpha, \quad m = \text{const} > 0, \quad 0 < \alpha = \text{const} < 1. \quad (3.91)$$

Мұндай функция үшін (3.87) теңдеу Бернулли теңдеуі ретінде жазылады:

$$\frac{dx}{dt} = smx^\alpha - (\delta + \varepsilon)x. \quad (3.92)$$

Тыныштық нүктесі

$$x_* = \left(\frac{sm}{\varepsilon + \delta} \right)^{1/(1-\alpha)} > 0 \quad (3.93)$$

орнықты болады және $t \rightarrow \infty$, $x(t) \rightarrow x_*$. Соңғы қасиеттің орындалатындығын (3.92), (3.88) есептің

$$x(t) = \left[x_*^{1-\alpha} + (x_0^{1-\alpha} - x_*^{1-\alpha}) e^{-(\delta+\varepsilon)(1-\alpha)t} \right]^{1/(1-\alpha)} \quad (3.94)$$

дәл шешімінің $t \rightarrow \infty$ шегін тікелей табу арқылы тексеріп көруге болады.

Жұмысшылар саны $y(t)$ уақыт өте артатын болғандықтан (3.82) формуладан капитал жабдықталудың $x = x_*$ тепе-теңдік күйінде соңғы өнімді шығару артатындығы, тұтыну және жинақтау фондтары ((3.80) формулаларды қараңыз) өсетіндігі келіп шығады, (3.84) капитал ресурстар көлемі де артады, яғни $x = x_*$ тепе-теңдік күйінде D / y еңбек өнімділігі өзгермесе де экономикалық өсу бар болады.

(3.93) формуладан капитал жабдықталудың орнықты x_* деңгейі қабылданған үнемдеудің S нормасына және өндірістік функциядағы m коэффициенттің шамасына тура пропорционал, ал жұмысшылар өсуі қарқынына және δ амортизациялық төлемдерге кері пропорционал болатындығы көрініп тұр. m, α, ε және δ параметрлерді өзгермейді деп есептеп, өсуші экономикадағы $x = x_*$ тепе-теңдік күйінде жинақтаудың қандай нормасында мүмкін болған ең үлкен орташа жан басына шаққандағы $c = C / y$ тұтыну болатындығын анықтаймыз. (3.80), (3.82), (3.91) формулаларды пайдаланып, табамыз:

$$c(s) = \frac{C}{y} = \frac{(1-s)D}{y} = \frac{(1-s) \cdot y \cdot f(x_*)}{y} = (1-s)mx_*^\alpha,$$

сондықтан,

$$\frac{\partial c}{\partial s} = -mx_*^\alpha + (1-s)m\alpha x_*^{\alpha-1} \frac{\partial x_*}{\partial s}.$$

(3.93) өрнекті есепке алып, $s = \alpha$ болғанда $\partial c / \partial s = 0$ деген қорытындыға келеміз. Сонымен, жинақтау нормасы $s = \alpha$ болғанда жұмысшылардың жоғары өмір сүру деңгейі қамтамасыз етіледі. Мүмкін болған максимал тұтыну шамасын қамтамасыз ететін x_*

капитал жабдықталудың орнықты деңгейі *жинақтаудың Алтын ережесіне сәйкес келетін деңгей* деп аталады.

Қарастырылған экономикалық өсу моделі экономикадағы көптеген құбылыстарды түсіндіріп бере алмайды, сондықтан олар әрі қарай жетілдіруді қажет етеді. Экономикалық модельдердің кемел еместігі экономикалық өсу модельдерінің бүтін бір иерархиясын құруға алып келді және қазіргі заманғы экономиканы басқару осы модельдерге негізделген [52].

3.4.2 Макроэкономикалық тепе-теңдік күйін зерттеу

Мұнда біз экономика динамикасын макроэкономикалық тепе-теңдік күйіне жақын болған тоқырау период аралығында қарастырамыз. Тепе-теңдік экономикада тауар және қаржы ағындары, бағаның тұрақтылығы, барлық ресурстар үшін сұраныс пен ұсыныстың теңдігін қамтамасыз ететін мөлшерлік пропорциялар орын алғандығын білдіреді. Нақты экономикада мұндай абсолюттік тепе-теңдік ешқашан болмайтыны түсінікті, сондықтан макроэкономикалық тепе-теңдікті қандай да бір абстракт модельдік идеал ретінде қарастырғанымыз жөн және ол тепе-теңдік нүктесінің маңайында экономикалық жүйенің күйін зерттеуде пайдалы болуы мүмкін. Ол үшін *3.4.1-параграфтағы* модельге қарағанда күрделірек болған математикалық модельді қарастырамыз.

Капитал тозуы оның көлеміне ғана емес, сондай-ақ жұмысшылар санына да пропорционал болсын, яғни (3.81) теңдеудің орнына

$$S = \delta \cdot X \cdot y + \frac{dX}{dt} \quad (3.95)$$

теңдеуді пайдаланамыз. Бұл жағдайда (3.85) теңдеудің аналогы мынадай жазылады:

$$\frac{dx}{dt} = -x \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} + s \cdot f(x) - \delta xy. \quad (3.96)$$

Тоқырау күйінде жұмысшылар санының экспоненциал өсуі болмайды, ол тұрақты болады немесе белгілі бір аралықта өзгереді. Тұтыну фонды ($C = 0$) болмаған жағдайда жұмысшылар өндірістен кетеді және олардың саны салыстырмалы $\beta = \text{const} > 0$ жылдамдықпен экспоненциал кемиді деп есептейміз:

$$\frac{dy}{dt} = -\beta y.$$

Егер C шама оң болса, онда осы фондтың k бөлігі ($k = \text{const}$, $0 < k < 1$) жұмыс күшін қайта тіктеу мен жұмысшылар санын ұстап тұруға кетеді. Сонымен, жұмысшылар саны

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot C - \beta y$$

теңдеумен немесе

$$\frac{dy}{dt} = k(1-s)D - \beta y$$

теңдеумен сипатталады деп есептеуге болады, ал (3.82) теңдікті есепке алатын болсақ, соңғы теңдеу мына түрде жазылады:

$$\frac{dy}{dt} = [k(1-s)f(x) - \beta]y \quad (3.97)$$

ал (3.96) теңдеу мына түрге келеді:

$$\frac{dx}{dt} = -x[k(1-s)f(x) - \beta] + s \cdot f(x) - \delta x. \quad (3.98)$$

Алдымен (3.89) сызықтық өндірістік функцияны қарастырамыз. Бұл жағдайда (3.97), (3.98) теңдеулер жүйелерін:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(x)x - V(x)y, \\ \frac{dy}{dt} &= K(x)y, \end{aligned} \quad (3.99)$$

түрінде жазсақ болады. Мұнда

$$K(x) = k(1-s)mx - \beta, \quad a(x) = sm - K(x), \quad V(x) = \delta x. \quad (3.100)$$

Осы алынған жүйе Колмогоров моделінің (3.48) теңдеулер жүйелерімен толықтай дәлме-дәл түсті және (3.50) – (3.52) шарттар орындалады. Колмогоров моделін зерттеу нәтижелеріне негізделіп, қарастырылып жатқан экономикалық жүйенің сипаты мен қасиеттері жайлы кейбір қорытындыларды жасауға болады.

Оң квадрантта (3.99) жүйе жалғыз тыныштық күйіне ие, оның координаталары (3.53), (3.54) формулалар бойынша есептеледі:

$$x_* = \frac{\beta}{k(1-s)m}, \quad y_* = \frac{sm}{\delta}. \quad (3.101)$$

(3.58) сипаттауыш теңдеуінің коэффициенттері төмендегі:

$$\sigma = -\beta, \quad \mu = s\beta m \quad (3.102)$$

өрнектерімен анықталған.

Осы өрнектен оның түбірлері параметрлердің кез келген жарамды мәндерінде теріс нақты бөлікке ие болатындығы келіп шығады, сондықтан тыныштық нүктесі орнықты түйін, өзгешеленген орнықты түйін немесе орнықты фокус болады, ал фазалық траекториялары 3.8*a*, 3.10*a* немесе 3.12*a* суреттерде келтірілген траекторияларға сәйкесінше ұқсас болады. Сондықтан экономикалық жүйе $t \rightarrow \infty$ әрқашан өзінің тепе-теңдік күйіне тербелістерсіз (3.7*a* немесе 3.9*a* сурет) немесе өшуші тербелістермен (3.11*a* сурет) жақындайды.

Ал енді нақты экономикалық үдерістерге жақын болған Кобб-Дугластың өндірістік функциясын қарастырамыз. Бұл жағдайда (3.97), (3.98) теңдеулер жүйелерінің түрі төмендегідей болады:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -xK(x) + smx^\alpha - V(x)y, \\ \frac{dy}{dt} &= K(x)y, \end{aligned} \quad (3.103)$$

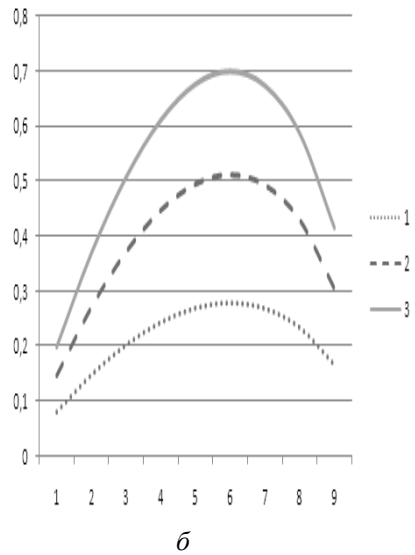
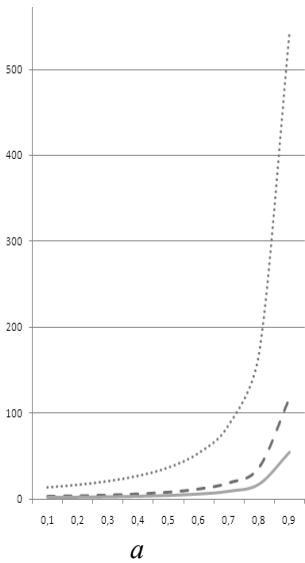
мұнда

$$K(x) = k(1-s)mx^\alpha - \beta, \quad V(x) = \delta x. \quad (3.104)$$

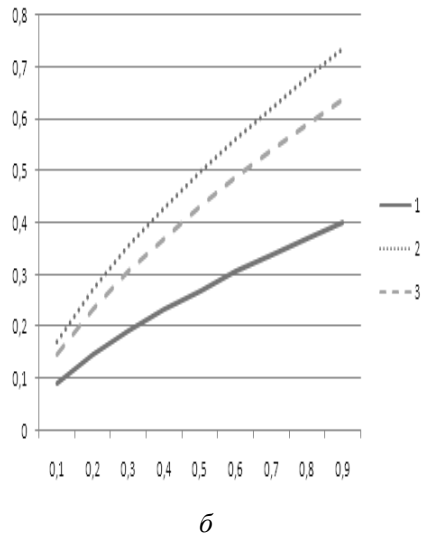
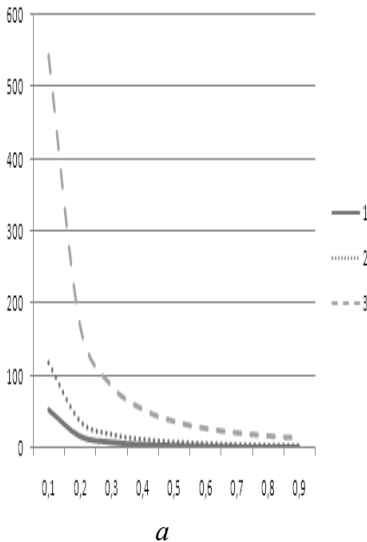
Бұл жүйенің тыныштық нүктесінің координаталары мынадай:

$$x_* = \left(\frac{\beta}{k(1-s)m} \right)^{1/\alpha}, \quad y_* = \frac{sm}{\delta} x_*^{\alpha-1}. \quad (3.105)$$

k және s параметрлердің x_* және y_* көрсеткіштерге әсерін қарастырамыз, ал қалған параметрлер берілген және өзгермейді деп есептейміз. 3.14-суреттен көрініп тұрғандай, егер k параметрді тұрақты деп белгілеп қойсақ, онда s параметр артқанда жұмыс күшінің капитал жабдықталуы өседі, ал жұмыс істеушілердің саны алдымен артады, кейіннен s -тің қандай да бір мәнінен бастап кемиді.



3.14-сурет. s параметрден тәуелділік графиктері: $a - x_*$ капитал жабдықталу; $b - k$ параметрдің 0,2(1); 0,5 (2); 0,8 (3) мәндеріндегі y_* жұмыс істеушілер саны; $m = 0,8$; $\beta = 0,7$; $\delta = 0,35$



3.15-сурет. k параметрден тәуелділік графиктері: $a - x_*$ капитал жабдықталу; $b - s$ параметрдің 0,2(1); 0,5 (2); 0,8 (3) мәндеріндегі y_* жұмыс істеушілер саны; $m = 0,8$; $\beta = 0,7$; $\delta = 0,35$

Егер s параметрді тұрақты деп белгілеп қойсақ, онда k параметр артқанда капитал жабдықталу кемиді, ал жұмыс істеушілердің саны артады (3.15-сурет), яғни x_* және y_* көрсеткіштер қайшылықты болады: біріншісінің өсуі екіншісінің кемуіне алып келеді және керісінше.

3.4.3 Модельдер аналогиясы

Тауарлар мен қызметтер өндірісінде пайдаланылатын экономикалық ресурстардың ішіндегі ең маңыздысы еңбек болып, ол тұтынушының сұраныстарын қанағаттандыру үшін емес, нақты өнім жасап шығару үшін қызмет етеді. Жалпы түрде жұмысшы күшіне деген сұраныс экономиканың белгілі бір мөлшердегі жұмысшыларға әрбір уақыт моментіндегі қажеттілігін бейнелейді. Сұраныс жағында жұмыс берушілер болса, ал жұмыс істеушілер мен потенциал жұмысшылар ұсынысты береді, олардың жұмысқа тұрулары ұсынатын жалақыға тәуелді болады.

$x(t)$ – t уақыт моментіндегі жалақы, ал $y(t)$ – жұмыспен қамтылған жұмысшылар саны болсын. Жұмысшылар болмаған жағдайда жалақы α салыстырмалы жылдамдықпен экспоненциал өседі деп, ал жалақы болмаған жағдайда жұмысшылар саны β салыстырмалы жылдамдықпен экспоненциал кемиді деп есептейміз, яғни $x(t)$, $y(t)$ шамалар осы экстремал жағдайларда

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x, \\ \frac{dy}{dt} &= -\beta y, \end{aligned} \tag{3.106}$$

теңдеулермен сипатталады, мұнда $\alpha = \text{const} > 0$, $\beta = \text{const} > 0$.

y жұмысшылар болғанда жалақының өсу жылдамдығы α ағымдағы жұмысшылар санына пропорционал болып, my шамаға кемиді, мұнда $m = \text{const} > 0$, ал x жалақы болғанда жұмысшылар санының өзгеру жылдамдығы β жалақы шамасына пропорционал болған γx ($\gamma = \text{const} > 0$) шамаға артады. Бұл жағдайда (3.106) жүйені мына түрде жазуға болады:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (\alpha - my)x, \\ \frac{dy}{dt} &= (\gamma x - \beta)y.\end{aligned}\tag{3.107}$$

Осы жүйе (3.17) Лотка-Вольтерра жүйесімен толықтай ұқсас екендігі көрініп тұр. Сондықтан Лотка-Вольтерра моделін талдау үдерісінде алған нәтижелерге негізделіп жұмысшылардың жалақысы мен саны жайлы кейбір қорытындылар жасауымызға болады. Мысалы, оң квадрантта (3.107) жүйенің жалғыз тепе-теңдік нүктесі бар болады:

$$x_* = \frac{\beta}{\gamma}, \quad y_* = \frac{\alpha}{m}.\tag{3.108}$$

Бұл нүктенің типі – центр, ал фазалық траекториялары 3.3 б және 3.4-суреттердегідей цикл болады. Егер бастапқы уақыт моментінде жұмысшылардың жалақысы мен саны (3.108) тепе-теңдік мәндерімен дәлме-дәл түспесе, онда $x(t), y(t)$ функциялар периодты болады, олардың период бойынша орташа мәндері тепе-теңдік мәндерімен дәл түседі. Айта кететін тағы бір ерекшелік, кейбір уақыт моментерінде жалақы максимал болуы мүмкін, ал жұмыс істеп жатқан жұмысшылар саны мүмкін болған максимал жұмысшылар санынан кіші болады және керісінше. Сондай-ақ, жалақы орташа болуы мүмкін, бірақ бұл жағдайда сол уақыт моментінде мүмкін болған потенциал жұмысшылардың барлығы жұмыс істейді.

Сонымен, қарастырылған биологиялық және экономикалық үдерістердің мазмұны түрлі болғанымен, құрылған модельдер бірдей болып шықты. Бұл математикалық модельдердің маңызды қасиеті – әмбебаптығын білдіреді, ол бізді қоршаған дүниені сипаттау принциптерінің әмбебап сипатқа ие болатындығынан келіп шығады және түрлі құбылыстар мен үдерістерді зерттеуде кеңінен қолданылады.

Бақылау сұрақтары

1. Биологияда популяция деп неге айтылады?
2. Көбею периоды үзіліссіз және дискрет болған популяцияларға мысалдар келтіріңіз.

3. Мальтус моделі қандай модель?
4. Популяцияның табиғи өсуінің тума жылдамдығы деп неге айтылады?
5. Ферхюльст-Пирл моделі қандай модель?
6. Түрлер арасындағы бәсекелестік модельдері.
«Жыртқыш-құрбан моделі.
7. Лотка-Вольтерра моделі қандай модель?
8. Трофикалық функция деп қандай функцияға айтамыз?
9. Өлшемсіз шамаларға өту тәсілінің мағынасы неде?
10. Фазалық траектория дегеніміз не?
11. Функция графигінің деңгей сызықтары деп қандай сызықтарға айтылады?
12. Популяциялар қауымдастығы динамикасының вольтерралық модельдері қандай модельдер?
13. Қауымдастық матрицасы нені сипаттайды?
14. Ляпунов бойынша орнықтылық анықтамасын келтіріңіз.
15. Асимптотикалық орнықтылық анықтамасын келтіріңіз.
16. Автономды жүйе деп қандай дифференциалдық теңдеулер жүйесіне айтылады?
17. Центр, цикл дегеніміз не?
18. Сызықтық емес модельдерді линеаризациялау тәсілінің мағынасы неде?
19. Сызықтық емес модельдерді олардың сызықтық аналогтарымен зерттеу жолдары. Мысалдар келтіріңіз.
20. Колмогоров моделі қандай модель?
21. Колмогоров моделінің бірінші жуықтау моделі.
22. Тыныштық нүктесінің орнықтылығы жайлы теорема.
23. Экономикалық өсу моделі қандай модель? Осы модель параметрлерінің мазмұнын сипаттаңыз.
24. Өндірістік функция, Кобб-Дуглас функциясы қандай функция?
25. Макроэкономикалық тепе-теңдік күйінің теңдеуі.
26. Биологиялық және экономикалық аналогия. Мысалдар келтіріңіз.
27. Математикалық модельдерің әмбебаптық қасиетінің мағынасы неде?
28. Модельдер аналогиясы дегенде нені түсінеміз?

Тапсырмалар

1. Балықтардың оқшауланған популяциясы үшін олардың мөлшерінің динамикасын

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \varepsilon x - \gamma x^2 - g, \quad t > 0, \\ x(0) &= x_0 > \varepsilon / \gamma,\end{aligned}\tag{3.80}$$

математикалық модель негізінде зерттеңіз, мұнда $g = \text{const} > 0$ – популяция мөлшеріне тәуелсіз балықтарды аулаудың берілген квотасы. Балықтарды аулаудың мұндай стратегиясы популяцияның жойылып кетуіне алып келмей ме?

2. Егер популяция мөлшеріне тәуелді болған, яғни $g(t) = \delta \cdot x(t)$, мұнда $\delta = \text{const} > 0$, балықтарды аулаудың салыстырмалы квотасы белгіленген болса, (3.80) есептің шешімін $t \rightarrow \infty$ зерттеңіз.

3. Егер

$$\varepsilon = \frac{x}{x_*}, \quad \eta = \frac{y}{y_*}, \quad \tau = \varepsilon_2 t\tag{3.81}$$

өлшемсіз параметрлерді енгізетін болсақ, мұнда $x_* = \varepsilon_1 / \gamma_1 m_1$, $y_* = \varepsilon_2 / \gamma_2 m_2$, онда алты $\varepsilon_i, \gamma_i, m_i$ ($i=1,2$) параметрлерден тәуелді (3.8), (3.10) теңдеулерді $\varepsilon = \varepsilon_1 / \varepsilon_2$, $p = \varepsilon \gamma_2 / \gamma_1$ екі параметрлі

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{d\tau} &= \varepsilon \left(1 - \xi - \frac{\eta}{p} \right) \xi, \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= (1 - p\xi - \eta) \eta,\end{aligned}\tag{3.82}$$

теңдеулер жүйесі түрінде жазуға болатындығын көрсетіңіз. Параметрлердің

$$\varepsilon = 1, \quad p > 1\tag{3.83}$$

мәндерінде (3.82) теңдеуі үшін Коши есебі шешімінің сапалық талдауын

$$0 < \xi(0) = \xi_0 < 1, \quad \eta(0) = \eta_0 > 0$$

бастапқы шарттарда орындаңыз.

4. (3.19) жүйенің (3.23) бірінші интегралын пайдаланып, $\xi(\tau)$ және $\eta(\tau)$ шешімдер тербелістерінің (3.26) амплитудасын және a_1, a_2 шамалардың p параметр мәндері және (3.21) бастапқы берілгендерден тәуелділігінің сипатын анықтаңыз.

5. Бес параметрден тәуелді (3.27) теңдеулер жүйесін тек қана екі

$$p = \frac{\beta}{\alpha} > 0, \quad 0 < q = \frac{\gamma\beta}{k m \alpha} < 1$$

жаңа өлшемсіз параметрлерді пайдаланып,

$$\xi = \frac{x}{x_*}, \quad \eta = \frac{y}{y_*}, \quad \tau = \alpha t$$

жаңа айнымалыларда жазыңыз. x_*, y_* шамалар (3.28*) формуламен анықталған.

6. m, β, k және δ параметрлерді тұрақты деп s жинақтау нормасының (3.99), (3.100) модель шеңберінде сипатталған экономикалық жүйенің өзінің (3.101) тепе-теңдік күйіне жуықтауы сипатына әсерін анықтаңыз.

7. $\alpha, \beta, k, s, m, \delta$ параметрлердің кез келген жарамды мәндерінде (3.105) тыныштық нүктесі (3.103) жүйенің орнықты түйіні немесе орнықты фокусы болатындығын көрсетіңіз.

8. (3.105) тыныштық күйінің α, β, m, δ параметрлері белгіленген тұрақтылар деп есептеп, k және s параметрлерден X капиталдың, D соңғы өнімнің және жан басына шаққандағы $c = (1 - k)C / y_*$ орташа тұтынудың тәуелділік сипатын зерттеңіз.

4-тарау. ТҰТАС ОРТА МЕХАНИКАСЫНЫҢ МОДЕЛЬДЕРІ ЖӘНЕ ИНТЕГРАЛДЫҚ САҚТАЛУ ЗАҢДАРЫ

Бұл тарауда біз математикалық модельдердің маңызды класы – тұтас орта механикасының модельдерін құру үдерісін қарастырамыз. Физикалық кеңістіктің қандай да бір көлемін толтыратын және деформацияланушы денелер (массалар) біз сипаттайтын физикалық объектілер болып табылады. Біз мұндай денелердің қозғалыстарында олардың молекулярлық және атомдық құрылымдарына назар аудармаймыз және олар кеңістікті үзіліссіз (тұтастай) толтырады деп есептейміз. Басқа сөзбен айтатын болсақ, біз макродүниені сипаттаймыз.

Тұтас ортаның математикалық моделін құру оны сипаттаушы сандық параметрлерді анықтау (ажыратып алу) мен осы параметрлер арасындағы қатынастарды (тендеулерді) анықтауға келтіріледі. Тұтас орта механикасының негізінде бірқатар тәжірибелік фактілер жатады, біз оларды аксиомалар түрінде сипаттаймыз. Осы аксиомалар бізге тұтас ортаны сипаттаушы сандық параметрлерді енгізуге және мөлшерлік қатынастарды келтіріп шығаруға мүмкіндік береді және олар тұтас ортаның математикалық модельдерінің бірі болады.

4.1 Кеңістік-уақыт және материалдық континуум аксиомалары

Аффиндік кеңістік дегеніміз – X (нүктелер) жиыны болып, онда басы $x \in X$ және соңы $y \in X$ нүктелерде болған \overline{xy} вектор түсінігі анықталған, яғни $X \times X$ жиынды E сызықтық кеңістікке (E қосалқы кеңістік деп атайды) бейнелейтін $(x, y) \rightarrow \overline{xy}$ бейнелеу анықталған болып, ол төмендегідей қасиеттерге ие болады:

1. Кез келген белгіленген $x \in X$ нүкте үшін $y \rightarrow \overline{xy}$ бейнелеу X -тің E -ге биекциясы (өзара бірмәнді бейнелеуі);
2. $\overline{xy} + \overline{yz} + \overline{zx} = 0 \quad \forall x, y, z \in X$ үшін.

Сонымен, аффиндік кеңістікте кез келген нүкте санақ басы (нөл) бола алады. Егер қосалқы E кеңістік *евклид* кеңістігі, яғни бұл кеңістікте скаляр көбейтінді берілген болса, онда X кеңістік *евклид аффиндік* кеңістік деп аталады.

Осы енгізілген түсініктерді пайдаланып, кеңістік-уақыт аксиомасын келтіреміз:

Кеңістік – үш өлшемді евклид аффиндік кеңістігі, ал уақыт – бір өлшемді евклид аффиндік кеңістігі. Уақыт абсолют.

Біз орындайтын іс-амалдар үшөлшемді \mathbf{R}^3 евклид кеңістігінде болып, оның аффиндік құрылымы $(x, y) \rightarrow y - x$ бейнелеумен беріледі.

\mathbf{R}^3 кеңістіктегі скаляр көбейтінді осы кеңістікте $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ норманы келтіріп шығарады. \mathbf{R}^3 кеңістіктегі норма және скаляр көбейтінді векторлардың ұзындығы мен векторлардың скаляр көбейтіндісін анықтауға мүмкіндік береді:

$$|\overline{xy}| = \|y - x\|, \quad \overline{xy} \cdot \overline{uv} = (y - x) \cdot (u - v).$$

Нақты физикалық орта атомдық-молекулярлық құрылымға ие болады [50]. Біз оны қандай да бір көлемді тұтастай толтыратын орта ретінде қарастырамыз. Осы идеалдауды материалдық континуум аксиомасы ретінде сипаттаймыз:

Тұтас орта әрбір уақыт моментінде материалдық континуум болады.

Бұл аксиома әрбір тұтас орта көлемі үшін масса және ішкі энергия түсініктерінің анықталғандығын білдіреді. \mathbf{R}^3 кеңістіктегі көлем деп шекарасы құрама – сыптығыр қисық болған кез келген аймаққа (байланысты жиын) айтылады. Мұнда кез келген ω көлемнің массасы анықталған, яғни $M: \omega \rightarrow M(\omega)$ жиын функциясы берілген деп есептеледі және осы функция өлшем, яғни саналымды-аддитив функция болады:

$$M\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \omega_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} M(\omega_i), \text{ егер } \omega_i \cap \omega_j = \emptyset \quad \forall i \neq j.$$

Сондай-ақ M функцияны мынадай мағынада үзіліссіз функция деп есептейміз: $M(\omega) \rightarrow 0$, $mes \omega \rightarrow 0$, мұнда $mes \omega - \omega$ жиынның Лебег өлшемі (Лебег өлшемінің қатаң анықтамасы математикалық талдау курсына енгізіледі; осы түсініктің мағынасын көп бұрмаламай $mes \omega - \omega$ аймақтың көлемін береді деп түсінуге болады).

Бұл жағдайда теріс болмаған сондай $\rho: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ функциясы бар болып, кез келген Ω көлем үшін

$$M(\Omega) = \iiint_{\Omega} \rho(x) d\omega \quad (4.1)$$

теңдік орынды болатындығы функционалдық талдау курсына дәлелденеді. Мұнда ω – элементар көлем. Осы функция тұтас ортаның *тығыздығы (меншікті массасы)* деп аталады.

Тұтас ортаның тығыздығы:

$$\rho(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{M[B_\varepsilon(x)]}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3}$$

екендігін көрсетуге болады, мұнда $B_\varepsilon(x)$ – центрі x нүктеде, радиусы ε болған \mathbf{R}^3 кеңістігіндегі шар (ал $\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3$ осы шардың көлемі).

Массадан тығыздыққа өту математикалық мағынада математикалық күрделі объектіден – жиындар функцияларынан (яғни, \mathbf{R}^3 кеңістігінің ішжиындарының жиынында берілген функциялардан) қарапайым математикалық объектке – нүкте функцияларына өтуді білдіреді. Ал сандық функциялар кеңінен зерттелген, оларға математикалық талдау аппаратын қолдану мүмкін.

Дәл осылай, материалдық континуум аксиомасы әрбір көлемнің ішкі энергиясы, яғни E_i үзіліссіз өлшемнің бар екендігін білдіреді.

(4.1) тұтас орта тығыздығы функциясын анықтағанымыздай, e_i *меншікті көлемдік энергия* түсінігін енгізуге болады:

$$E_i(\Omega) = \iiint_{\Omega} e_i(x) d\omega$$

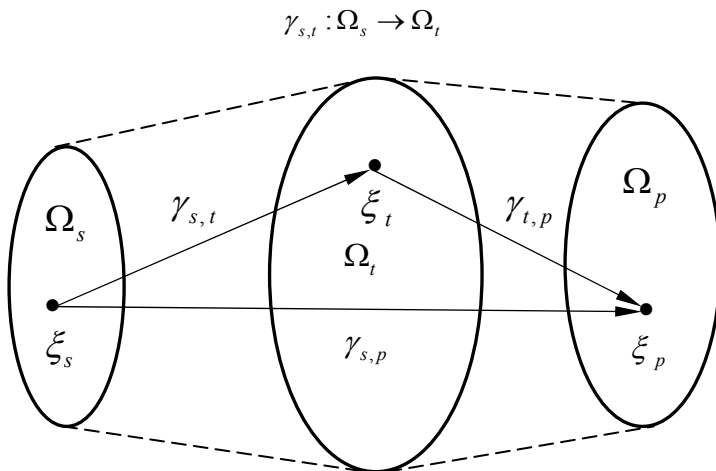
Әдетте, $U(x) \equiv e_i(x) / \rho(x)$ *меншікті ішкі энергияны* пайдалану қолайлы болады, сонымен

$$E_i(\Omega) = \iiint_{\Omega} \rho(x)U(x)d\omega = \iiint_{\Omega} \rho U d\omega. \quad (4.2)$$

4.2 Тұтас ортаның қозғалысы және ортаны сипаттау тәсілдері

Келесі аксиоманы келтіруден бұрын, кейбір түсініктер мен белгілеулерді енгіземіз. Ω_s s уақыт моментіндегі тұтас орта конфигурациясын беретін болсын (яғни, s уақыт моментінде ортаны толтыратын \mathbf{R}^3 кеңістігінің нүктелер жиыны). Эволюция үдерісі кезінде тұтас орта бір материалдық нүктелерден тұратындығы

фактісі математикалық өзара бірмәнді бейнелеулер үйірін енгізу арқылы сипатталады (4.1-сурет):



4.1-сурет. Тұтас ортаның қозғалысы

Осындай әрбір бейнелеу *тұтас ортаның қозғалысын* анықтайды. $\gamma_{s,t}$ бейнелеу s -тен t -ға дейінгі уақыт аралығында бөлшектердің орын алмастыруларын көрсетеді.

Физикалық тәжірибеден түсінікті болатындай, нөлдік уақыт аралығында бөлшектер орындарынан қозғалмауы тиіс: $\gamma_{s,s} = I$ (мұнда $I - \Omega_s$ -ке тепе-теңдік бейнелеу), сондай-ақ s уақыттан t -ға дейін, кейіннен t -дан p -ға дейінгі ығысулардың қорытынды нәтижесі (4.1-сурет) $(p - s) - s$ уақыттан p -ға дейінгі ығысулардың нәтижесі болады:

$$\gamma_{t,p} \circ \gamma_{s,t} = \gamma_{s,p}.$$

Әрі қарай қозғалыстардың бастапқы моменті ретінде $s = 0$ «нөлдік» моментті қарастырамыз, бұл бізге $\gamma_{0,t}(\xi)$ белгілеуден $\gamma_t(\xi)$ белгілеуге өтуге мүмкіндік береді, мұнда $\xi \in \Omega_0$.

Тұтас орта қозғалысының аксиомасын келтіреміз:

γ_t бейнелеу кез келген $t \in \mathbf{R}$ үшін анықталған және бұл бейнелеу Ω_0 -ді Ω_t -ға гомеоморфизм болады, ал $t \rightarrow \gamma_t$ бейнелеу

нақты сандардың аддитив тобының \mathbf{R}^3 -тегі бейнелеулердің мультипликативті тобына изоморфизмі болады. Әрбір $\xi \in \Omega_0$ үшін $t \rightarrow \gamma_t(\xi)$ бейнелеу үзіліссіз және құрама-үзіліссіз дифференциалданушы болады.

$\{\gamma_t\}$ – мультипликатив топ екендігі:

$$\gamma_0 = I; \quad (4.3)$$

$$\gamma_p \circ \gamma_t = \gamma_{t+p}. \quad (4.4)$$

шарттардың орынды болатындығын білдіреді.

Келтірілген аксиома тұтас ортаның ξ материалдық нүктесінің қозғалысы жайлы айтуға мүмкіндік береді; $\{\gamma_t(\xi): t \in \mathbf{R}\}$ $\xi \in \Omega_0$ нүктенің траекториясы деп аталады. Әрі қарай біз $\gamma_t(\xi)$ бейнелеуді $\gamma(\xi, t)$ арқылы белгілейміз және

$$x = \gamma(\xi, t) \quad (4.5)$$

бейнелеуді тұтас ортаның қозғалыс заңы деп атаймыз. Егер (4.5) формулада ξ нүкте белгіленген, ал уақыт t өзгеретін болса, онда қозғалыс заңы белгіленген нүктенің (бөлшектің) траекториясын береді. Егер, керісінше, t уақыт белгіленген, ал ξ нүкте қандай да бір ω_0 көлемді алатын болса, онда қозғалыс заңы қозғалатын ω_t көлемнің t уақыт моментіндегі күйін береді:

$$\omega_t = \{x \in \mathbf{R}^3 : x = \gamma(\xi, t), \xi \in \omega_0 \subset \Omega_0\}. \quad (4.6)$$

Қозғалыс аксиомасы кепілдік беретін траекториялардың құрама-сыптығырлығы t уақыт моментінде ξ бөлшектің жылдамдығы жайлы айтуымызға мүмкіндік береді:

$$v(\xi, t) = \frac{\partial \gamma(\xi, t)}{\partial t}.$$

Қозғалыс аксиомасынан келіп шығатын тағы да кейбір салдарларды келтіріп өтеміз. (4.3) формуладан қозғалыс заңы үшін

$$\xi = \gamma(\xi, 0) \quad (4.7)$$

теңдік орынды болатындығы келіп шығады.

Сонымен қатар, (4.5) бейнелеу өзара бірімәнді және өзгеше емес бейнелеу болады:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^1}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^3} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (4.8)$$

мұнда, J – (4.5) бейнелеудің якобианы, $x = (x^1, x^2, x^3)$, $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$, $x^i = \gamma^i(\xi, t)$ ($i=1,2,3$). Тұтас орта $t > 0$ уақыт моментінде ω_i көлемді алған болса, ортаның $t=0$ бастапқы уақыт моментіндегі ω_0 көлемін

$$\xi = \gamma^{-1}(x, t) \quad (4.9)$$

кері бейнелеу көмегімен анықтауға болады.

Ал енді тұтас ортаны сипаттауды қарастырамыз. Жоғарыда айтылып өтілгендей, тұтас ортаны сипаттау дегеніміз – оның мөлшерлік сипаттамаларын беру болып табылады. Мұны, кемінде екі тәсіл арқылы жүзеге асыруға болады:

1. Сипаттаманы осы уақыт моментінде бөлшекке байланысты ету;
2. Сипаттаманы осы уақыт моментінде бөлшек болатын кеңістіктің нүктесіне байланысты ету.

Осы екі тәсілді тұтас ортаның сәйкесінше *лагранждық* және *эйлерлік* сипатталулары деп атайды. Сонымен, лагранждық сипаттауда барлық сипаттамалар $(\xi, t) \in \Omega_0$ айнымалыларда, ал эйлерлікте – $(x, t) \in \{\Omega_t \times \{t\} : t \in \mathbf{R}\}$ айнымалыларда беріледі. Сондықтан (ξ, t) координаталар *лагранж координаталары* (немесе *айнымалылары*) деп, ал (x, t) – *эйлер координаталары* деп аталады. Осы сипатталулардың әрбірінің артықшылық жақтарымен қоса кемшілік жақтары да болады.

Тұтас ортаның лагранждық және эйлерлік сипатталулары парапар болады. Егер қандай да бір сипаттама лагранждық сипатталуда берілген болса, оның эйлерлік сипатталудағы түрін және керісінше, алуға болады. Мысалы, егер $v^L(\xi, t)$ және $v^E(x, t)$ сәйкесінше

лагранждық және эйлерлік сипатталулардағы жылдамдықтар болатын болса, онда:

$$v^L(\xi, t) = v^E(\gamma(\xi, t), t), \quad (4.10)$$

және керісінше:

$$v^E(x, t) = v^L(\gamma^{-1}(x, t), t) \quad (4.11)$$

мұнда γ^{-1} – (4.9) кері бейнелеу және анықтама бойынша

$$v^L(\xi, t) = \frac{\partial \gamma(\xi, t)}{\partial t}. \quad (4.12)$$

Лагранждық сипатталудағы жылдамдықтар өрісі белгілі болған жағдайда тұтас ортаның (4.5) қозғалыс заңын табу үшін (4.12) жылдамдықтан интеграл алу жеткілікті:

$$\gamma(\xi, t) = \xi + \int_0^t v^L(\xi, s) ds. \quad (4.13)$$

Ал егер жылдамдықтар өрісі эйлерлік сипатталуда берілген болса, онда (4.10), (4.12) теңдіктерді есепке алғанда келіп шығатын

$$\frac{\partial \gamma(\xi, t)}{\partial t} = v^E(\gamma(\xi, t), t), \quad \gamma(\xi, 0) = \xi, \quad (4.14)$$

дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебін шешуге тура келеді. (4.14) теңдеуде ξ шама белгіленгендіктен, бұл есепті үш қарапайым дифференциалдық теңдеулердің жүйесіне қойылған Коши есебі ретінде қарастыруымызға болады:

$$\frac{dx^i}{dt} = v^{E,i}(x^1, x^2, x^3), \quad x^i(0) = \xi^i \quad (i=1,2,3). \quad (4.15)$$

4.3 Тұтас ортаның күштік және энергетикалық сипаттамалары

Тұтас ортаны сипаттауда алдын енгізілген масса және ішкі энергиямен қатар тұтас ортаның кез келген ω көлемінің мынадай мөлшерлік сипаттамалары фундаменталды рөл атқарады:

– импульс (қозғалыс мөлшері)

$$K(\omega) = \iiint_{\omega} \rho(x) \cdot v(x) d\omega = \iiint_{\omega} \rho \cdot v d\omega \quad (4.16)$$

– импульс моменті (қозғалыс мөлшерінің моменті)

$$H(\omega) = \iiint_{\omega} \rho(x) \cdot (x \times v(x)) d\omega = \iiint_{\omega} \rho \cdot (x \times v) d\omega \quad (4.17)$$

(мұнда $x \times v - X$ және v векторлардың \mathbf{R}^3 кеңістіктегі векторлық көбейтіндісі);

– кинетикалық энергия

$$E_k(\omega) = \iiint_{\omega} \frac{1}{2} \rho(x) |v(x)|^2 d\omega \quad (4.18)$$

және толық энергия

$$E(\omega) = E_k(\omega) + E_i(\omega). \quad (4.19)$$

Осы енгізілген сипаттамалар төменде келтірілген теориялық механикадағы түсініктердің тұтас ортаға тікелей жалпыланулары болып табылады [39]:

– n материалдық нүктелер жүйесінің импульсі

$$K = \sum_{i=1}^n m_i v_i$$

(v_i – массасы m_i болған i нүктенің жылдамдығы);

– импульс моменті

$$H = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i \times v_i)$$

($x_i - i$ нүктенің радиус-векторы);

– кинетикалық:

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i |v_i|^2$$

кинетикалық және потенциал (ішкі) энергиялардың қосындысы болатын толық энергия.

Егер тұтас ортаның $\omega_0 \subset \Omega_0$ көлемін белгілейтін және (4.16) - (4.19) сипаттамаларды қозғалатын $\omega_t = \gamma_t(\omega_0)$ көлемде қарастыратын болсақ, онда олар тек қана t уақыттың функциялары болады. Осы сипаттамалардың жағдайы баланс аксиомаларымен беріледі.

Кез келген қозғалушы ω_t көлем үшін көлем массасы өзгермейді (тұрақты):

$$\frac{d}{dt} M(\omega_t) = 0, \quad (4.20)$$

импульстің өзгеру жылдамдығы көлемге қойылған күштің бас векторына тең:

$$\frac{d}{dt} K(\omega_t) = F(\omega_t), \quad (4.21)$$

импульс моментінің өзгеру жылдамдығы күштердің бас моментіне тең:

$$\frac{d}{dt} H(\omega_t) = G(\omega_t), \quad (4.22)$$

толық энергияның өзгеру жылдамдығы берілетін қуатқа тең:

$$\frac{d}{dt} E(\omega_t) = N(\omega_t). \quad (4.23)$$

(4.20) – (4.23) теңдіктердің оң жақтарының мағынасына келесі бөлімдерде тоқталып өтеміз.

4.4 Тұйықтаушы қатынастар және интегралдық сақталу заңдары

4.4.1 Күштер үшін тұйықтаушы қатынастар

Тұтас ортаға әсер етуші күштердің екі класын – *сыртқы массалық* және *ішкі беттік күштерді* қарастырамыз. Осы күштердің біріншісі $F_e(\omega)$ көлем массасына пропорционал болады (мұндай күштерге ауырлық күші мысал бола алады). Егер сыртқы күш үзіліссіз өлшем болуын талап ететін болсақ, онда оның f_e көлемдік тығыздығы бар болады:

$$F_e(\omega) = \iiint_{\omega} f_e(x) d\omega.$$

Көлемдік тығыздықтың орнына $f(x) = \frac{f_e(x)}{\rho(x)}$ *массалық тығыз-*

дықты пайдалану қолайлы болады. Сонда:

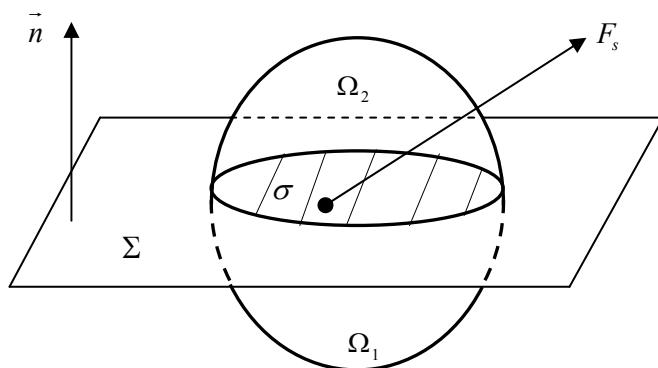
$$F_e(\omega) = \iiint_{\omega} \rho(x) f(x) d\omega = \iiint_{\omega} \rho \cdot f d\omega,$$

ал *сыртқы күш моменті*

$$G_e(\omega) = \iiint_{\omega} \rho \cdot (x \times f) d\omega$$

теңдікпен анықталады.

Тәжірибелер көлемге (массаға) әсер етуші күштерден басқа, $\partial\omega$ бетке әсер ететін күштердің бар екендігін көрсетеді (мысалы, қысым күші, ішкі үйкеліс күші және т.б.). Беттік күштер түсінігі шартты болатындығы белгілі жағдай, себебі ньютондық механика шеңберінде күштер тек қана массаға әсер етуі мүмкін. Мұнда қарастырылатын күштер қалыңдығы кіші болған қабаттарда орналасқан ортаның бөлшектеріне (нүктелеріне) қойылған деп түсінеміз. Осы күштерді анықтау үшін Ω аймақты Σ жазықтықпен Ω_1 және Ω_2 аймақтарға бөлу нәтижесінде алынатын σ қиманы қарастырамыз. n Σ -ға нормаль, айталық, Ω_2 жаққа бағытталған, вектор болсын (4.2-сурет).



4.2-сурет. $F_s(\sigma)$ ішкі беттік күш

Төменде келтірілетін ішкі беттік күштер аксиомасы көлемнің Ω_1 бөлігіне көлемнің Ω_2 жағынан σ жазық аймақ арқылы әсер ететін $F_s(\sigma)$ күштің векторын енгізеді. Егер $F_s(\sigma)$ ішкі беттік күшті үзіліссіз жазық өлшем деп есептейтін болсақ, онда төмендегі:

$$F_s(\sigma) = \iint_{\sigma} p_n(x) d\sigma \quad (4.24)$$

теңдігі орынды болады

$p_n(x)$ шама ішкі беттік күштердің кернеу векторы деп аталады. Ол берілген көлемге x нүктедегі нормаль векторы \vec{n}

болған беттік алаң арқылы әсер ететін ішкі беттік күштердің векторы жайлы айтуымызға мүмкіндік береді.

Ішкі беттік күштер аксиомасын келтіреміз:

$F_s(\sigma)$ ішкі беттік күші Ω аймақтың кез келген σ қимасы үшін анықталған және ол үзіліссіз жазық өлшем болады.

Бұл аксиома беттік күштердің $p_n(x)$ кернеулер векторының бар болуын қамтамасыз етеді, оның көмегімен ω көлемге оның беті арқылы әсер етуші ішкі беттік күштердің бас векторы

$$F_i(\omega) = \iint_{\partial\omega} p_{n(x)}(x) d\sigma = \iint_{\partial\omega} p_n d\sigma,$$

формуламен анықталады, мұнда $n(x)$ – ω көлемнің $\partial\omega$ бетіне x нүктедегі нормаль векторы.

$p_n(x)$ вектордың бар болуы ω көлемге оның $\partial\omega$ беті арқылы әсер етуші ішкі беттік күштердің моментін де анықтауға мүмкіндік береді:

$$G_i(\omega) = \iint_{\partial\omega} (x \times p_{n(x)}(x)) d\sigma = \iint_{\partial\omega} (x \times p_n) d\sigma.$$

Келесі аксиома (күштер және моменттер аксиомасы) берілген модельде жоғарыда қарастырылғандардан басқа күштер мен моменттер болмайтындығын білдіреді.

(4.21) импульс балансы және (4.22) импульс моменті теңдеулерінің оң жақтары сәйкесінше

$$F(\omega) = F_e(\omega) + F_i(\omega) = \iiint_{\omega} \rho f d\omega + \iint_{\partial\omega} p_n d\sigma$$

және

$$G(\omega) = G_e(\omega) + G_i(\omega) = \iiint_{\omega} \rho \cdot (x \times f) d\omega + \iint_{\partial\omega} (x \times p_n) d\sigma$$

өрнектермен анықталады.

4.4.2 Тұйықтаушы энергетикалық қатынастар

Классикалық механикаға ұқсас сыртқы массалық және ішкі беттік күштердің қуаттары түсінігін енгізуге болады:

$$N_e(\omega) = \iiint_{\omega} \rho v \cdot f d\omega, \quad N_i(\omega) = \iint_{\partial\omega} v \cdot p_n d\sigma.$$

Сондай-ақ жылу ағындарының барлығы жайлы аксиома ішкі беттік күштердің аксиомалары сияқты келтіріліп шығарылады. Жылу ағыны аксиомасын келтіреміз:

$Q(\sigma)$ жылу ағыны Ω аймақтың кез келген σ қимасы үшін анықталған және үзіліссіз жазық өлшем болады.

Егер осы аксиома орындалатын болса, онда жылу ағынының q_n беттік тығыздығы анықталған болады:

$$Q(\sigma) = \iint_{\sigma} q_n d\sigma,$$

ал осы беттік тығыздық арқылы ω көлемге $\Omega \setminus \omega$ аймақтан $\partial\omega$ шекара арқылы өтетін жылу ағынын анықтауға болады:

$$Q(\omega) = \iint_{\partial\omega} q_{n(x)}(x) d\sigma = \iint_{\partial\omega} q_n d\sigma.$$

Энергияны ұзату аксиомасы берілген модельдегі энергияны ұзату механизмдерін сипаттауды қорытындылайды:

(4.23) энергия балансы теңдеуінің оң жақтары төмендегі өрнекпен анықталады:

$$N(\omega) = N_e(\omega) + N_i(\omega) + Q(\omega) = \iiint_{\omega} \rho v \cdot f d\omega + \iint_{\partial\omega} v \cdot p_n d\sigma + \iint_{\partial\omega} q_n d\sigma.$$

4.4.3 Интегралдық сақталу заңдары

(4.20) – (4.23) теңдеулерде барлық шамалар анықталды, осы теңдеулер, жоғарыда сипатталған теңдеулердің оң жақтарымен, біз қарастырып жатқан тұтас ортаның математикалық моделін құрайды: кез келген қозғалушы ω_t көлем үшін кез келген t уақыт моментінде төмендегі интегралдық қатынастар орындалады:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\omega_t} \rho d\omega &= 0, \\ \frac{d}{dt} \iiint_{\omega_t} \rho v d\omega &= \iiint_{\omega_t} \rho f d\omega + \iint_{\partial\omega_t} p_n d\sigma, \\ \frac{d}{dt} \iiint_{\omega_t} \rho (x \times v) d\omega &= \iiint_{\omega_t} \rho (x \times f) d\omega + \iint_{\partial\omega_t} (x \times p_n) d\sigma, \\ \frac{d}{dt} \iiint_{\omega_t} \rho \left(\frac{1}{2} |v|^2 + U \right) d\omega &= \iiint_{\omega_t} \rho v \cdot f d\omega + \iint_{\partial\omega_t} v \cdot p_n d\sigma + \iint_{\partial\omega_t} q_n d\sigma. \end{aligned} \tag{IM}$$

Бұл теңдеулерді сәйкесінше *масса*, *импульс (қозғалыс мөлшері)*, *импульс моменті (қозғалыс мөлшерінің моменті)* және *энергияның интегралдық сақталу заңдары* деп атайды.

Осы алынған (ИМ) математикалық модель өзінің жалпылығы нәтижесінде зерттеу үшін өте күрделі. Сондықтан оны мүмкіндігінше ықшамдаған мақсатқа сай болады. Тұтас ортаны сипаттаушы шамалар сыптығыр шамалар болғанда осы (ИМ) модель қандай да бір дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесіне пара-пар болатындығын біз келесі тарауларда көрсететін боламыз. Қарастырылған модельді дифференциалдық теңдеулер жүйесіне келтіру үшін бізге жаңа математикалық түсініктер мен ұғымдар қажет болады. Келесі тарау осы түсініктерді сипаттауға арналған.

Бақылау сұрақтары

1. Тұтас ортаның математикалық моделін құрудың мағынасы неде?
2. Аффиндік, евклид аффиндік кеңістіктері деп қандай кеңістіктерді айтамыз? Мысалдар келтіріңіз.
3. Кеңістік-уақыт аксиомасы деп неге айтылады?
4. Материалдық континуум аксиомасы нені білдіреді?
5. Саналымды-аддитив функция деп қандай функцияны айтамыз?
6. Лебег өлшемінің математикалық анықтамасын келтіріңіз.
7. Массадан тығыздыққа өтудің артықшылық жағы неде?
8. Тұтас ортаның қозғалыс заңы қалай анықталады?
9. Тұтас ортаны сипаттаудың лагранждық және эйлерлік тәсілдері.
10. Тұтас ортаның күштік және энергетикалық сипаттамалары.
11. Тұйықтаушы қатынастар деп қандай қатынастарға айтылады?
12. Жалпы түрдегі интегралдық сақталу заңдары.

5-тарау. АЛГЕБРА, МАТЕМАТИКАЛЫҚ ТАЛДАУ ЖӘНЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУЛЕР ТЕОРИЯСЫНАН ҚЫСҚАША МӘЛІМЕТТЕР

Масса, импульс, импульс моменті және энергияның интегралдық сақталу заңдары түрінде жазылған алдыңғы 4-тарауда алынған тұтас ортаның (ІМ) моделі зерттеу үшін күрделі, бірақ тұтас ортаны сипаттаушы шамалар сыптығыр болғанда (ІМ) модель қандай да бір дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесіне пара-пара болатындығы айтылып өтілді. Осы модельді дифференциалдық теңдеулер жүйесіне келтіру үшін бізге алгебра, математикалық және функционалдық талдау, дифференциалдық теңдеулер теориясынан кейбір түсініктер мен формулалар, тұжырымдар қажет болады. Сондықтан оларды осы тарауда қысқаша қарастырып өтеміз.

5.1 Векторлық кеңістіктер

Мұнда біз сызықтық нормаланған кеңістіктер теориясынан негізгі мәліметтерді келтіреміз [15, 54].

5.1.1 Векторлық кеңістік анықтамасы

Нақты сандар өрісін \mathbf{R} деп белгілейміз. E қандай да бір жиын болсын (оның нүктелері (элементтері) векторлар деп аталады).

Анықтама. E жиыны векторлық (сызықтық) кеңістік деп аталады, егер осы жиында векторларды қосу және векторды санға көбейту амалдары анықталған және кез келген $x, y, z \in E$ және $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ үшін төмендегі аксиомалар орынды болса:

1. $x + y = y + x$;
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$;
3. сондай 0 вектор (*нөл вектор*) бар болып, $x + 0 = x$;
4. сондай $-x$ вектор бар болып, $x + (-x) = 0$;
5. $1 \cdot x = x$;
6. $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$;
7. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$;
8. $(\alpha + \beta)x = \alpha \cdot x + \beta \cdot y$.

Өрі қарай көбейту белгісін қалдырып: $\alpha \cdot x = \alpha x$ жазамыз.

О символы \mathbf{R} нақты сандар жиынындағы нөлді, сондай-ақ E векторлық кеңістіктегі нөл векторын да белгілеуде пайдаланады.

Анықтама. x_1, \dots, x_k ($x_i \in E$, $i = 1, \dots, k$) векторлар *сызықты тәуелді* деп аталады, егер кемінде біреуі нөлге тең болмаған, сондай $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ ($\alpha_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, k$) сандар бар болып, төмендегі теңдік орынды болса

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = 0,$$

кері жағдайда *сызықты тәуелсіз* деп аталады.

Егер E кеңістікте m векторлардың сызықты тәуелсіз жиынтығы бар және $(m+1)$ векторлардың кез келген жиынтығы сызықты тәуелді болса, онда E кеңістік *m өлшемді* деп аталады. m векторлардың кез келген сызықты тәуелсіз жиынтығы осы кеңістіктің *базисі* деп аталады.

Егер $\{e_1, \dots, e_m\} = \{e_i\}_{i=1}^m$ – m өлшемді E кеңістіктің базисі болса, онда кез келген $x \in E$ вектор үшін сондай $\{x_1, \dots, x_m\} = \{x_i\}_{i=1}^m$ нақты сандар табылып, төмендегі теңдік орынды болады:

$$x = \sum_{i=1}^m x_i e_i, \quad (5.1)$$

мұндағы x_1, \dots, x_m сандарды x вектордың $\{e_i\}$ базистегі *координаталары* деп атайды. $x \rightarrow \{x_1, \dots, x_m\}$ сәйкестік m өлшемді E нақты векторлық кеңістікті m нақты сандардың барлық реттелген жиынтықтарының m өлшемді \mathbf{R}^m нақты векторлық кеңістігімен тепе-тең етеді. Сызықтық құрылымы жағынан E және \mathbf{R}^m кеңістіктерде айырмашылық жоқ. Сондықтан m өлшемді кез келген нақты векторлық кеңістікті белгілеу үшін біз \mathbf{R}^m белгілеуді пайдаланамыз.

5.1.2 Скаляр көбейтінді және нормалар

Анықтама. \mathbf{R}^m ($\mathbf{R}^m = E$) кеңістіктегі *скаляр көбейтінді* деп барлық $x, y, z \in \mathbf{R}^m$ және $\alpha \in \mathbf{R}$ үшін төмендегі аксиомаларды қанағаттандыратын $(\cdot, \cdot): E \times E \rightarrow \mathbf{R}$ бейнелеуге айтылады:

1. $(x, y) = (y, x)$;

2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
3. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$;
4. $(x, x) \geq 0$;
5. егер $(x, x) = 0$ болса, онда $x = 0$.

(x, y) орнына әрі қарай біз $x \cdot y$ немесе xu деп жазамыз. Скаляр көбейтінді енгізілген m өлшемді векторлық кеңістікті *евклид кеңістігі* деп атайды. Төменде біз \mathbf{R}^m -ді m өлшемді нақты евклид кеңістігі деп түсінеміз.

Анықтама. \mathbf{R}^m векторлық кеңістіктегі норма деп барлық $x, y \in \mathbf{R}^m$ және $\alpha \in \mathbf{R}$ үшін төмендегі шарттарды қанағаттандыратын кез келген $\|\cdot\|: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}_+$ бейнелеуге айтылады:

1. $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

мұнда \mathbf{R}_+ – теріс емес нақты сандар жиыны.

\mathbf{R}^m нормаланған кеңістіктегі x вектордың нормасы $\|x\|_{\mathbf{R}^m}$ немесе қысқаша $\|x\|$ деп белгіленеді.

\mathbf{R}^m кеңістікте скаляр көбейтіндінің бар болуы вектордың евклид нормасы (ұзындығын) түсінігін енгізуге мүмкіндік береді:

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}.$$

Әрі қарай векторлардың евклид нормасын модуль таңбасымен белгілейміз: $\|x\| = |x|$. Сондай-ақ, евклид кеңістігінде векторлардың ортогоналдығы түсінігін енгізуге болады: егер $x, y \in \mathbf{R}^m$ векторлардың скаляр көбейтіндісі нөлге тең болса, яғни $x \cdot y = 0$, онда олар *ортогонал* векторлар деп аталады.

5.1.3 Базистер және кобазистер

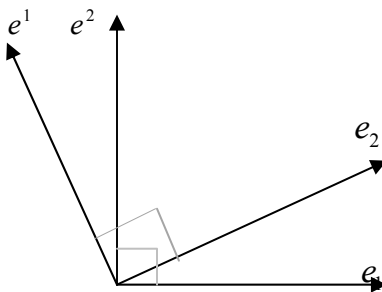
Кез келген $\{e_i\}$ базис үшін $\{e^i\}$ кобазис

$$e^i \cdot e_j = \delta_j^i \quad (i, j = 1, \dots, m), \quad (5.2)$$

қатынастармен бірмәнді анықталады, мұнда δ – Кронекер символы:

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & \text{егер } i = j \text{ болса,} \\ 0, & \text{егер } i \neq j \text{ болса.} \end{cases}$$

(5.2) қатынас геометриялық тұрғыдан кобазистің e^i векторы базистің $e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_m$ векторларына ортогонал болатындығын білдіреді (5.1-сурет). Өзінің кобазисімен дәлме-дәл түсетін базис *ортонормаланған базис* деп аталады: $e_i \cdot e_j = \delta_j^i$.



5.1-сурет. \mathbf{R}^2 -дегі e_1, e_2 базис және e^1, e^2 кобазис

5.1.4 Мылқау индекстер

Осы жерден бастап біз индексті бірмүшеліктердің қосындысы үшін әдеттегі (5.1) белгілеудің орнына жаңа белгілеуді пайдаланамыз (тұтас орта механикасында дәстүрлі белгілеу). x вектордың $\{e_i\}$ базис бойынша жіктелуінде x_i коэффициенттің индексын жоғарыда жазамыз және

$$x = \sum_{i=1}^m x_i e_i \quad (5.3)$$

белгілеудің орнына *мылқау* деп аталатын i индекс бойынша Σ қосындылау белгісін жазбастан

$$x = x^i e_i$$

деп жазамыз. «Мылқау» деп аталу себебі (5.3) теңдікте қосындылау индексі i -ді кез келген басқа әріппен алмастыруға болатындығымен байланысты. Индекс *мылқау* деп аталады, егер ол бірмүшелікке дәл екі рет кіретін болса: біріншісінде жоғары индекс ретінде және екіншісінде төменгі индекс ретінде. Мысалы,

$$x_s = \alpha_{si}^j \alpha_s^i e_j$$

теңдік

$$x_s = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \alpha_{si}^j \alpha_s^i e_j$$

теңдікті білдіреді. Қосындылау шектері, әдетте, мәтін мазмұнынан түсінікті болады.

5.1.5 Ковариант және контравариант компоненттер

Кез келген $x \in \mathbf{R}^m$ векторды кез келген $\{e_i\}$ базис бойынша

$$x = x^i e_i, \quad (5.4)$$

сонымен қатар, оған сәйкес келуші $\{e^i\}$ кобазис бойынша:

$$x = x_i e^i \quad (5.5)$$

жіктеуге болады. Сәйкесінше x_i координаталар x вектордың *ковариант компоненттары*, ал x^i координаталар – оның *контравариант компоненттары* деп аталады. Мысалы, төменде келтірілген

$$x^i = x \cdot e^i; \quad x_i = x \cdot e_i; \quad x \cdot y = x^i y_i = x_i y^i \quad (5.6)$$

теңдіктердің орынды болатындығын тексеріп көру қиынға соқпайды.

\mathbf{R}^m кеңістікте векторлардың $\{e_i\}$ базис бойынша (сәйкес $\{e^i\}$ кобазис бойынша) жіктелуінен олардың жаңа $\{e^i\}$ базистегі (сәйкес $\{e'^i\}$ кобазистегі) жіктелуіне өту

$$e'^i = A_i^j e_j, \quad i=1, \dots, m \quad (5.7)$$

теңдіктермен бірмәнді анықталатын $\mathcal{A} = (A_i^j)$ көшу матрицасы арқылы жүзеге асырылды ((5.7) – A_i^j қатысты m^2 сызықтық теңдеулер жүйесі). Жаңа кобазистің векторлары

$$e'^i = (A^{-1})_j^i e^j, \quad i=1, \dots, m \quad (5.8)$$

формуламен анықталады.

Сондықтан кез келген $b \in \mathbf{R}^m$ вектор үшін жаңа $\{e'^i\}$ базисте және жаңа $\{e'^i\}$ кобазисте оның b'_i ковариант және b'^i контравариант компоненттері бастапқы $\{e_i\}$ базистегі және $\{e^i\}$ кобазистегі сәйкес компоненттері арқылы төмендегі формулаларымен анықталады:

$$b'_i = A_i^j b_j, \quad b'' = (\mathcal{A}^{-1})_j^i b^j, \quad i = 1, \dots, m. \quad (5.9)$$

Әрі қарай біз базистерді бірдей және қарама-қарсы бағытталған деп бір-бірінен айырмашылығын көрсетеміз. $\{e_i\}$ және $\{e'_i\}$ базистер бірдей бағытқа ие деп айтылады, егер (5.7) көшу матрицасының анықтауышы оң болса, яғни $\det \mathcal{A} > 0$, қарама-қарсы бағытқа ие болады, егер $\det \mathcal{A} < 0$ болса.

5.2 Сызықтық бейнелеулер

Мұнда біз сызықтық бейнелеулерге қатысты негізгі түсініктерге қысқаша тоқталып өтеміз [29, 44, 54].

5.2.1 Сызықтық бейнелеулер кеңістігі

\mathbf{R}^m және \mathbf{R}^n нормаланған сызықтық кеңістіктер болсын. $L: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ бейнелеу *сызықтық* деп аталады, егер барлық $x, y \in \mathbf{R}^m$ және $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ үшін

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$$

теңдік орындалатын болса (мұнда және әрі қарай $L(x)$ L бейнелеудің x вектордағы мәнін білдіреді).

Бейнелеулерді қосу және оларды скаляр шамаға көбейту амалдарын енгізу арқылы \mathbf{R}^m кеңістікті \mathbf{R}^n кеңістікке бейнелеулердің барлық жиынын сызықтық кеңістікке айналдыруға болады:

$$(L + K)(x) = L(x) + K(x), \quad \alpha L(x) = L(\alpha x).$$

Бұл кеңістікті әрі қарай $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$ деп белгілейміз. Егер $m = n$ болса, онда $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ белгілеу пайдаланылады.

Егер L бейнелеудің нормасын төмендегідей

$$\|L\| = \sup_{x \in \mathbf{R}^m, x \neq 0} \frac{\|L(x)\|_{\mathbf{R}^n}}{\|x\|_{\mathbf{R}^m}} \quad (5.10)$$

енгізетін болсақ, $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$ кеңістік нормаланған кеңістікке айналады.

5.2.2 Нормаланған кеңістіктердің изометриясы

E_1 және E_2 нормаланған сызықтық кеңістіктер *изометриялық* деп айтылады, егер сондай $\mathfrak{J}: E_1 \rightarrow E_2$ сызықтық бейнелеу бар болып, төмендегі шарты орынды болса

$$\|\mathfrak{J}\langle x \rangle\|_{E_2} = \|x\|_{E_1}. \quad (5.11)$$

\mathfrak{J} бейнелеу *изометрия* деп айтылады. E_1 және E_2 кеңістіктердің изометриялығы « \sim » таңбасымен белгіленеді: $E_1 \sim E_2$. Сызықтық және метрикалық тұрғыдан изометриялық кеңістіктердің бір-бірінен айырмашылықтары болмайды.

Мысал. $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R})$ кеңістік \mathbf{R}^m кеңістіктегі *сызықтық функционалдар кеңістігі* (\mathbf{R}^m -ге түйіндес кеңістік) деп, ал оның элементтері *функционалдар* деп айтылады. Түйіндес кеңістік $(\mathbf{R}^m)^*$ деп белгіленеді.

Егер \mathbf{R}^m кеңістікте евклид нормасы пайдаланылатын болса, онда $(\mathbf{R}^m)^* \sim \mathbf{R}^m$ болады. $(\mathbf{R}^m)^* \rightarrow \mathbf{R}^m$ изометрияны

$$\mathfrak{J}\langle f \rangle = f\langle e_i \rangle e^i \quad (5.12)$$

формуламен беруге болады, мұнда $\{e_i\} - \mathbf{R}^m$ кеңістіктегі кез келген базис, ал $\{e^i\} -$ сәйкес кобазис.

Сонымен, f функционал $\mathfrak{J}\langle f \rangle$ вектормен теңестіріледі. Ал осы вектордың өзі f функционалды

$$f\langle x \rangle = (\mathfrak{J}\langle f \rangle) \cdot x \quad (5.13)$$

формуламен анықтайды.

5.2.3 Сызықтық бейнелеу матрицасы

Екі $a, b \in \mathbf{R}^m$ векторларының $a \otimes b$ диадасы деп

$$(a \otimes b)\langle x \rangle = a(b \cdot x)$$

теңдікпен анықталатын $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ сызықтық бейнелеуге айтылады.

\mathbf{R}^m -дегі кез келген $\{e_i\}$ базис үшін $\{e_i \otimes e^j\}_{i,j=1}^m$ сызықтық бейнелеулер жиынтығы $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ -де базис болады. Оны көрсету үшін L_j^i сандарын

$$L_j^i = e^i \cdot L\langle e_j \rangle \quad (i, j = 1, \dots, m) \quad (5.14)$$

формуламен анықтаймыз. Сонда:

$$\begin{aligned} L_j^i (e_i \otimes e^j) \langle x \rangle &= L_j^i e_i (e^j \cdot x) = L_j^i e_i x^j = (e^i \cdot L\langle e_j \rangle) e_i x^j = \\ &= (e^i \cdot L\langle x^j e_j \rangle) e_i = (e^i \cdot L\langle x \rangle) e_i = L\langle x \rangle. \end{aligned}$$

Сонымен, кез келген $L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ бейнелеу үшін

$$L = L_j^i (e_i \otimes e^j) \quad (5.15)$$

жіктелу орынды және бұл жіктелу жалғыз болады (тексеріп көріңіз).

m^2 элементтен тұратын $\{e_i \otimes e^j\}_{i,j=1}^m$ базистың бар болатындығы $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ m^2 өлшемді сызықтық кеңістік екендігін білдіреді.

$L \rightarrow \{L_j^i\}$ сәйкестік $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ және $m \times m$ өлшемді \mathcal{M}^m квадрат матрицалар арасында изоморфизм орнатады. $\{L_j^i\}$ матрица L бейнелеудің $\{e_i\}$ базистегі бейнелеу матрицасы деп аталады, мұнда жоғарғы индекс i жол нөмерін, ал төменгі индекс j баған нөмірін білдіреді. Осы матрица көмегімен L бейнелеудің кез келген x вектордағы мәнін есептеуге болады:

$$L\langle x \rangle = L_j^i (e_i \otimes e^j) \langle x \rangle = L_j^i e_i (e^j \cdot x) = L_j^i x^j e_i.$$

Екі $K, L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ бейнелеулердің $K \circ L$ суперпозициясының матрицасын да оңай есептеп табуға болады. (5.14), (5.15) формулаларды есепке алып табамыз:

$$\begin{aligned} (K \circ L)_j^i &= e^i \cdot (K \circ L)\langle e_j \rangle = e^i \cdot K\langle L\langle e_j \rangle \rangle = \\ &= e^i \cdot K\langle L_l^k (e_k \otimes e^l) \langle e_j \rangle \rangle = \\ &= e^i \cdot K\langle L_l^k \langle e_k (e^l \cdot e_j) \rangle \rangle = e^i \cdot K\langle L_l^k e_k \delta_j^l \rangle = L_j^k e^i \cdot K\langle e_k \rangle = \\ &= L_j^k e^i \cdot K_s^p (e_p \otimes e^s) \langle e_k \rangle = \\ &= L_j^k e^i \cdot (K_s^p e_p \delta_k^s) = L_j^k e^i \cdot K_k^p e_p = K_k^p L_j^k \delta_p^i = K_k^i L_j^k. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Мұнда және әрі қарай « \circ » белгісі бейнелеулер суперпозициясын білдіреді.

5.2.4 Матрица және сызықтық бейнелеудің ізі

M^m кеңістікте $\{L_j^i\}$ матрицаның диагональ элементтерінің қосындысына тең болған tr (ағылшынның *trace* сөзі – із дегенді білдіреді; оны кейбір жағдайларда Sp деп те белгілейді) сызықтық функционал анықталған:

$$\text{tr}\{L_j^i\} \stackrel{\text{def}}{=} L_i^i = e^i \cdot L\langle e_i \rangle.$$

Бұл функционал $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ сызықтық бейнелеулер жиынында анықталған басқа функционалды анықтайды:

$$\text{tr}\langle L \rangle = \text{tr}\{L_j^i\}.$$

Осы келтірілген анықтама базиске тәуелді болады. Негізінде, матрицаның (және сызықтық бейнелеудің) ізі базисті таңдауға тәуелді болмайды. Осы тұжырымды дәлелдеу үшін алдымен кез келген $a, b \in \mathbf{R}^m$ үшін төмендегі теңдіктің орынды болатындығын көрсетеміз:

$$\begin{aligned} \text{tr}\langle a \otimes b \rangle &= \text{tr}\langle a^i e_i \otimes b_j e^j \rangle = a^i b_j \text{tr}\langle e_i \otimes e^j \rangle = a^i b_j e^k \cdot (e_i \otimes e^j) \langle e_k \rangle = \\ &= a^i b_j (e^k \cdot e_i) (e^j \cdot e_k) = a^i b_j \delta_i^k \delta_k^j = a^k b_k = a \cdot b. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Екіншіден, (5.17) қасиетке ие болған $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ кеңістіктегі сызықтық функционал міндетті түрде із болады: егер $\hat{O} : \mathcal{L}(\mathbf{R}^m) \rightarrow \mathbf{R}$ болып, $\hat{O}(a \otimes b) = a \cdot b$ болса, онда

$$\hat{O}\langle L \rangle = \hat{O}\langle L_j^i (e_i \otimes e^j) \rangle = L_j^i (e_i \cdot e^j) = L_j^i \delta_i^j = L_j^j.$$

Сондықтан іздің пара-пар болған анықтамасы ретінде мынадай анықтаманы алсақ болады: $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ кеңістіктегі \hat{O} сызықтық функционал із деп аталады, егер кез келген $a, b \in \mathbf{R}^m$ үшін төмендегі теңдік орынды болатын болса

$$\hat{O}(a \otimes b) = a \cdot b. \quad (5.18)$$

(5.18) қасиет базисті таңдап алуға тәуелді емес.

5.2.5 Матрицалар және сызықтық бейнелеулердің инварианттары

Базисті таңдап алуға тәуелсіз болған M^m кеңістіктегі функциялар *матрицаның инварианттары* деп аталады. Матрица инва-

рианттарының тәуелсіздігі *сызықтық бейнелеулердің инвариантары* жайлы айтуға мүмкіндік береді. Маңызды инварианттардың бірі – матрицаның ізі tr .

Бізге $\mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ кеңістіктегі бейнелеулер үшін тағы да екі басқа инварианттар қажет болады:

$$J_2 = J_2(L) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\text{tr}^2 \langle L \rangle - \text{tr} \langle L^2 \rangle)$$

және

$$J_3 = J_3(L) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{6}(\text{tr}^3 \langle L \rangle - 3\text{tr} \langle L \rangle \text{tr} \langle L^2 \rangle + 2\text{tr} \langle L^3 \rangle).$$

Белгілеулерді бірыңғай түрге келтіру үшін L бейнелеудің $\text{tr} \langle L \rangle$ ізін $J_1 = J_1(L)$ арқылы белгілейміз.

Жоғарыда, біз $J_1 = L_i^i$ болатындығын көрдік. Қалған инварианттар да $\{L_j^i\}$ матрицаның элементтері арқылы төменде келтірілген формулалармен өрнектеледі:

$$J_2 = \begin{vmatrix} L_1^1 & L_2^1 \\ L_1^2 & L_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} L_1^1 & L_3^1 \\ L_1^3 & L_3^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} L_2^2 & L_3^2 \\ L_2^3 & L_3^3 \end{vmatrix},$$

$$J_3 = \det \{L_j^i\}.$$

L бейнелеудің $p(\lambda)$ сипаттауыш полиномының коэффициенттері инварианттар арқылы өрнектеледі:

$$p(\lambda) = \det(L - \lambda I) = \lambda^3 - J_1 \lambda^2 + J_2 \lambda - J_3.$$

Мұнда I – тепе-теңдік бейнелеу: $I \langle x \rangle \equiv x$. Ал L бейнелеудің инварианттары, керісінше, L бейнелеудің өзіндік мәндері (яғни, сипаттауыш полиномның $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ түбірлері) арқылы есептеледі:

$$J_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad J_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1, \quad J_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3.$$

5.2.6 Түйіндес, өзіне түйіндес (симметриялы), қарсы симметриялы және ортогонал бейнелеулер

Егер барлық $x, y \in \mathbf{R}^m$ үшін

$$L \langle x \rangle \cdot y = x \cdot K \langle y \rangle \tag{5.19}$$

теңдік орынды болатын болса, онда $K \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ бейнелеу $L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ бейнелеуге *түйіндес* деп айтылады. L -ге түйіндес бейнелеу L^* арқылы белгіленеді.

Егер $\{K_j^i\}$ матрицаны L бейнелеудің $\{e_i\}$ ортонормаланған базистегі $\{L_j^i\}$ матрицасын транспонирлеу арқылы анықтайтын болсақ, яғни $K_j^i = L_i^j$ деп алсақ, онда сәйкес $K = K_j^i (e_i \otimes e^j)$ бейнелеу L бейнелеуге түйіндес болады. Бұл $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ кеңістіктегі кез келген бейнелеуге түйіндес бейнелеу бар болатындығын дәлелдейді.

Егер $L^* = L$ болса, онда $L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ бейнелеу *өзіне түйіндес* немесе *симметриялы*, ал егер $L^* = -L$ болса, *қарсы симметриялы* деп айтылады.

Егер L бейнелеуге L^{-1} кері бейнелеу бар болса және ол L^* түйіндес бейнелеумен дәлме-дәл түсетін, яғни $L^{-1} = L^*$ немесе $L^* \circ L = L \circ L^* = I$ болса, онда $L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ бейнелеу *ортогонал* деп аталады.

5.2.7 Бейнелеулер үйірткісі

$\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ кеңістікте арнайы скаляр көбейтіндіні енгізу арқылы оны евклид кеңістігіне айналдыру мүмкін болады. $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ кеңістіктегі K және L бейнелеулердің осы скаляр көбейтіндісі *үйірткі* деп аталады және ол мынадай енгізіледі:

$$K : L = \overset{\text{def}}{\text{tr}} \langle K^* \circ L \rangle. \quad (5.20)$$

Үйірткі скаляр көбейтінді болатындығын көрсету үшін үйірткінің «коэффициенттік» түрін табамыз. Егер $\{e_i\}$ – кез келген ортонормаланған базис болса, онда (5.20) анықтамаға және (5.15) формулаға сәйкес төмендегі теңдікті аламыз:

$$K : L = \text{tr} \langle K^* \circ L \rangle = (K^* \circ L)_i^i = (K^*)_j^i L_i^j.$$

Осыдан кейін үйірткінің симметриялы болатындығын дәлелдеу қиын болмайды:

$$K : L = (K^*)_j^i L_i^j = K_i^j (L^*)_j^i = \text{tr} \langle L^* \circ K \rangle = L : K$$

Әрі қарай

$$L : L = (L^*)_j^i L_i^j = \sum_{i,j=1}^m (L_j^i)^2 \geq 0$$

және $L=0$ болғанда ғана $L:L=0$. Үйірткінің екі аргумент бойынша сызықтық болуы іздің сызықтық болуының қарапайым салдары болады.

5.2.8 Векторлық көбейтінді

\mathbf{R}^3 кеңістікте *векторлық көбейтінді* деп аталатын $\times: \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ бинарлық амалды енгіземіз. \mathbf{R}^3 кеңістікте кез келген L сызықтық бейнелеу аламыз және оның негізінде $\ell: \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ жаңа бейнелеуді төмендегі теңдік арқылы анықтаймыз:

$$\begin{aligned} \ell(L)\langle x, y, z \rangle &= \\ &= x(y \cdot L\langle z \rangle - y \cdot L^*\langle z \rangle) + y(z \cdot L\langle x \rangle - z \cdot L^*\langle x \rangle) + z(x \cdot L\langle y \rangle - x \cdot L^*\langle y \rangle). \end{aligned}$$

$\{e_i\}$ – кез келген базис, ал L бейнелеу үшін

$$\ell(L)\langle e_1, e_2, e_3 \rangle \neq 0$$

теңсіздік орынды болсын.

$$\times_{\{e_i\}}: \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 \text{ бейнелеуді}$$

$$x \times_{\{e_i\}} y = \ell(x \otimes y)\langle e_1, e_2, e_3 \rangle \mid \ell(L)\langle e_1, e_2, e_3 \rangle \mid$$

теңдік арқылы анықтаймыз.

Екі $\{e_i\}$ және $\{e'_i\}$ базистері үшін

$$x \times_{\{e_i\}} y = x \times_{\{e'_i\}} y \quad (5.21)$$

теңдік осы базистер бірдей бағытталған болғанда, ал кері жағдайда

$$x \times_{\{e_i\}} y = -x \times_{\{e'_i\}} y \quad (5.22)$$

болатындығын көрсету қиын емес. Сонымен, $\times_{\{e_i\}}$ бейнелеу таңба дәлдігіне дейін базисті таңдауға тәуелді болмайды.

Ал енді кез келген базисті белгілейміз және L бейнелеуді төмендегі шарт орынды болатындай етіп аламыз:

$$\left| \ell(L)\langle e_1, e_2, e_3 \rangle \right| = \frac{1}{\text{Vol}(e_1, e_2, e_3)},$$

мұнда $\text{Vol}(e_1, e_2, e_3)$ – базис векторлары арқылы түзілген параллелепипед көлемі. Оларға сәйкес келуші $\times_{\{e_i\}}$ бейнелеу векторлық көбейтіндінің анықтамасы болады. Осы векторлық көбейтіндіні біз \times таңбасымен белгілейміз.

$x \times y$ вектор x және y векторларға ортогонал, яғни

$$x \cdot (x \times y) = y \cdot (x \times y) = 0, \quad (5.23)$$

сондай-ақ,

$$|x \cdot (y \times z)| = \text{Vol}(x, y, z) \quad (5.24)$$

теңдік орынды болатындығын көрсету қиын емес. Сонымен қатар,

$$e_1 \cdot (e_2 \times e_3) = \text{Vol}(e_1, e_2, e_3). \quad (5.25)$$

(5.23) – (5.25) қасиеттер векторлық көбейтіндіні бірмәнді анықтайды және оның аксиоматикалық анықтамасы болып табылады.

Кез келген $\{e_i\}$ ортонормаланған базисте векторлық көбейтіндіні мына түрде жазуға болады:

$$x \times y = \mathcal{A}(x) \langle y \rangle, \quad (5.26)$$

мұнда \mathcal{A} – төмендегі теңдікпен берілген матрица

$$\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} 0 & -x^3 & x^2 \\ x^3 & 0 & -x^1 \\ -x^2 & x^1 & 0 \end{pmatrix}$$

және $x = x^i e_i$.

5.3 Тензорлар

Тұтас ортаның көптеген сипаттамалары тензорлар – \mathbf{R}^3 -тегі полисызықтық бейнелеулер болады [10, 29]. Мұнда біз тензор түсінігіне анықтама беріп мысалдар келтіреміз.

5.3.1 Тензор анықтамасы

$(\mathbf{R}^m)^r = \overbrace{\mathbf{R}^m \times \dots \times \mathbf{R}^m}^r$ және $T: (\mathbf{R}^m)^r \rightarrow \mathbf{R}$ бейнелеу өзінің векторлы r аргументтерінің әрбірі бойынша қалған $(r-1)$ аргументі белгіленген жағдайда сызықтық бейнелеу болсын. Мұндай бейнелеулер (полисызықтық функционалдар) \mathbf{R}^m кеңістіктегі *тензорлар*, ал r саны T тензордың *рангі* немесе *валенттілігі* деп аталады.

Рангі r болған тензорлар жиынын $\mathbb{T}^r(\mathbf{R}^m)$ деп белгілейміз және осы жиын табиғи қосу және скаляр шамаға көбейту амалдарымен сызықтық кеңістік құрайды.

$\{e_i\} - \mathbf{R}^m$ кеңістіктегі базис, ал $\{e^i\} -$ оның кобазисі болсын. $T\langle x_1, \dots, x_r \rangle$ түрдегі кез келген сан T тензордың компонентасы деп айтылады, мұнда $x_s \in \{e_i\} \cup \{e^i\}$ ($s=1, \dots, r$). Егер барлық $x_s \in \{e_i\}$ болса, онда компонента *ковариантты*, ал егер $x_s \in \{e^i\}$ болса – *контравариантты* деп аталады; қалған компоненталар *аралас* деп аталады. Рангі r тензордың берілген базисте $(2m)^r$ түрлі компоненталары болады, олардың ішінде m^r ковариантты және m^r контравариантты. Тензордың түрлі типті компоненттерінің саны 2^r тең (біз олардың ішінен екі түрін ажыратып қарастырдық – ковариантты және контравариантты).

Тензордың $T\langle e_{i_1}, \dots, e_{i_r} \rangle$ ковариантты компоненталарын, әдетте, T_{i_1, \dots, i_r} , ал $T\langle e^{i_1}, \dots, e^{i_r} \rangle$ контраварианттыларын T^{i_1, \dots, i_r} деп белгілейді. Тензордың аралас компоненталарын белгілеуде жоғарғы және төменгі индекс те пайдаланылады. Мысалы,

$$T_{.i}^{.j.k} = T\langle e^j, e_i, e^k \rangle; \quad T_{.i.i}^{.j.k.l} = T\langle e^j, e^k, e_i, e^l \rangle.$$

5.3.2 Тензорларға мысалдар

Анықтама бойынша *нөлінші рангі тензор* – нақты сан (скаляр).

Бірінші рангі тензор – \mathbf{R}^m -дегі сызықтық функционалдар, яғни $(\mathbf{R}^m)^*$ кеңістігінің элементтері. $(\mathbf{R}^m)^* \sim \mathbf{R}^m$ (изоморфизм) болғандықтан, бірінші рангі тензорларды \mathbf{R}^m -дегі векторлармен теңестіруге болады.

Екінші рангі тензорға универсал (әмбебап) тензор деп аталатын

$$T\langle x_1, x_2 \rangle = x_1 \cdot \mathcal{T}\langle x_2 \rangle \quad (5.28)$$

тензорды келтіру мүмкін, мұнда $\mathcal{T} - \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ кеңістіктегі қандай да бір бейнелеу. Тензордың атауындағы «универсал» сөзінің мағынасын келесі пунктте анықтаймыз.

Екінші рангі тензорға тағы да бір мысал – \mathbf{R}^m кеңістіктің *фундаменталды метрикалық тензоры* деп аталатын $g\langle x_1, x_2 \rangle$ тензорды келтіруге болады: $g\langle x_1, x_2 \rangle = x_1 \cdot x_2$.

5.3.3 $T^2(\mathbf{R}^m) \sim \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ изоморфизмі

Алдыңғы пункттегі (5.28) тензордың универсалдығы мағынасы мынадай: екінші рангті кез келген T тензорды (5.28) түрде жазу мүмкін. Егер T тензорда x_2 екінші аргументті белгілейтін болсақ, онда $T_1: x_1 \rightarrow T\langle x_1, x_2 \rangle$ бейнелеу бірінші рангті тензор болады. $(\mathbf{R}^m)^* \sim \mathbf{R}^m$ изометрияға және осы изометрияны беретін (5.12), (5.13) формулаларға сай сондай $T\langle x_2 \rangle = \tilde{\mathcal{J}}\langle T_1 \rangle$ вектор (бұл вектор әрбір $x_2 \in \mathbf{R}^m$ үшін өзінікі) табылып, төмендегі теңдік орынды болады:

$$T\langle x_1, x_2 \rangle = x_1 \cdot T\langle x_2 \rangle.$$

$x_2 \rightarrow T\langle x_2 \rangle$ бейнелеудің сызықтық болатындығын тексеру қиын емес.

$T^2(\mathbf{R}^m)$ -нен $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ -ге $\tilde{\mathcal{J}}: T \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ бейнелеу $T^2(\mathbf{R}^m)$ және $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ кеңістіктері арасында изоморфизмді жүзеге асырады. Осыған сай екінші рангті тензор нормасы, оның инварианттары және т.б. жайлы айтуымызға болады. $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m) \sim \mathcal{M}^m$ изоморфизм орынды болғандықтан, $T^2(\mathbf{R}^m) \sim \mathcal{M}^m$ изоморфизмі де орынды болады. Сондықтан тензор матрицасы және матрицаға қатысты барлық түсініктерді айтуға болады.

Негізінде, тензорлар – сызықтық алгебрадағы белгілі объектілер – полисызықтық функционалдарды белгілеудің басқаша терминологиясы. «Тензорлық» терминология тұтас орта механикасында қабылданған.

5.4 Скаляр, векторлық және тензорлық өрістер

Тұтас ортаның көптеген сандық сипаттамаларын өрістер, яғни белгілі бір жиындарда берілген және скаляр, векторлық немесе тензорлық мәндер қабылдайтын функциялар түрінде сипаттайды [29]. Мұнда біз осы түсініктерге байланысты қажет анықтамалар мен фактілерге қысқаша тоқталып өтеміз.

5.4.1 Үзіліссіз өріс

$U \subset \mathbf{R}^k$ – ашық ішжиын болсын, яғни әрбір $x \in U$ нүктемен қатар U -да центрі x нүктеде және радиусы r болған қандай да бір

$B(x, r)$ шар да жатады ($B(x, r) = \{y \in \mathbf{R}^k : \|y - x\|_{\mathbf{R}^k} < r\}$). Төменде E арқылы $\mathbf{R}, \mathbf{R}^m, (\mathbf{R}^m)^*, \mathcal{L}(\mathbf{R}^m), \Gamma(\mathbf{R}^m)$ сызықтық нормаланған (евклид) кеңістіктерінің бірін белгілейміз. Егер $E = \mathbf{R}$ болса, онда $f: U \rightarrow E$ бейнелеу *скаляр*, ал кері жағдайда *тензорлық өріс* деп аталады (сәйкесінше бірінші немесе екінші рангті). Егер $E = \mathbf{R}^m$ немесе $E = (\mathbf{R}^m)^*$ болса, онда f бейнелеу *векторлық өріс* деп айтылады.

Егер $\|h\|_{\mathbf{R}^k} \rightarrow 0$ ұмтылғанда

$$\|f(x+h) - f(x)\|_E \rightarrow 0$$

шарт орындалатын болса, онда f өріс $x \in U$ нүктеде *үзіліссіз* деп аталады.

5.4.2 Дифференциалданушы өрістер

f өріс $x_0 \in U$ нүктеде *дифференциалданушы* деп айтылады, егер $L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^k, E)$ бейнелеу табылып, $\|h\|_{\mathbf{R}^k} \rightarrow 0$ ұмтылғанда

$$\frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - L(h)\|_E}{\|h\|_{\mathbf{R}^k}} \rightarrow 0$$

шарт орынды болса.

L бейнелеу f өрістің x_0 нүктедегі *туындысы* деп айтылады және ол

$$f'_{x_0} \text{ немесе } \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0}$$

арқылы белгіленеді.

$E = \mathbf{R}$ болғанда f'_{x_0} туындыны $\nabla f(x_0)$ немесе $\text{grad } f(x_0)$ деп белгілейді және оны f өрістің x_0 нүктедегі *градиенті* деп атайды.

Әрбір нүктедегі скаляр өрістің градиенті $(\mathbf{R}^k)^* = \Gamma^1(\mathbf{R}^k)$ кеңістіктің элементі болады, сондықтан скаляр өрістің градиенті бірінші рангті тензорлар өрісі болады.

Егер f өріс U -дың әрбір нүктесінде дифференциалданушы болса, онда f *дифференциалданушы* деп айтады. Егер $x \rightarrow f'_x$

бейнелеу U -дан $L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^k, E)$ -ға үзіліссіз бейнелеу болса, онда өріс *үзіліссіз дифференциалданушы* деп аталады.

Егер $f: U \rightarrow E$, ал $g: E \rightarrow E_1$ (E, E_1 – сызықтық нормаланған кеңістіктер) және бұл бейнелеулер үзіліссіз дифференциалданушы болса, онда олардың $g \circ f: U \rightarrow E_1$ суперпозициясы да үзіліссіз дифференциалданушы болады, сондай-ақ кез келген $x_0 \in U$ үшін

$$\left. \frac{\partial g \circ f}{\partial x} \right|_{x=x_0} = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x=x_0} \circ \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0}.$$

5.4.3 Бағыт бойынша туындылар және дербес туындылар

$y \in \mathbf{R}^k$ және $|y| = 1$ болсын. Төмендегі шек

$$\lim_{s \rightarrow +0} \frac{f(x+sy) - f(x)}{s} = \left. \frac{d}{ds} f(x+sy) \right|_{s=0}$$

f өрістің y бағыт бойынша x нүктедегі туындысы деп аталады және ол

$$\frac{\partial f(x) \langle y \rangle}{\partial x} \text{ немесе } f'_y(x)$$

арқылы белгіленеді.

Егер \mathbf{R}^k және E -де $\{p_i\}$ және $\{q_i\}$ базистерді белгілейтін болсақ және f -ті $\{q_i\}$ базис бойынша жіктесек: $f(x) = f^j(x) q_j$, онда $f^j(x)$ функциялардың p_i базистік векторлардың бағыттары бойынша туындылары f функцияның дербес туындылары деп аталады. Егер $x = x^i p_i$ болса, онда

$$\frac{\partial f^j(x) \langle p_i \rangle}{\partial x}$$

дербес туынды әдеттегідей

$$\frac{\partial f^j(x)}{\partial x}$$

болып белгіленеді.

$\frac{\partial f}{\partial x}$ сызықтық бейнелеуге қандай да бір матрица сәйкес келеді

(ол үшін $\frac{\partial f}{\partial x}$ белгілеуді қалдырамыз). Бұл матрица *Якоби*

матрицасы деп аталады және оның элементтері f функцияның дербес туындылары болады:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i^j = \frac{df^j(x + sp_i)}{ds} \Big|_{s=0} = \frac{\partial f^j}{\partial x^i} = (f^j)'_x \langle p_i \rangle.$$

Егер $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i^j$ туындылар бар және олар үзіліссіз болса, онда f өріс үзіліссіз дифференциалданушы болатындығы математикалық талдау курсынан белгілі [31].

Егер $E = \mathbf{R}$ болса, онда f өріс градиентінің Якоби матрицасы (оның өлшемі $m \times 1$) мынадай болады:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^k} \right)^T, \quad (5.29)$$

мұнда, T – матрицаны транспонирлеу амалын білдіреді.

5.4.4 Векторлық өрістің дивергенциясы

Егер $E = \mathbf{R}^m$ және $m = k$ болса, онда $\frac{\partial f}{\partial x} \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ кеңістіктің элементі болады. Осы бейнелеудің ізі f векторлық өрістің X нүктедегі дивергенциясы деп айтылады:

$$\operatorname{div} f \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{tr} \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle.$$

Бейнелеу ізінің анықтамасына сәйкес f векторлық өрістің дивергенциясы $\partial f / \partial x$ бейнелеудің Якоби матрицасының ізі ретінде анықталады:

$$\operatorname{div} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i^i = \frac{\partial f^i}{\partial x^i}. \quad (5.30)$$

5.4.5 Тензорлық өрістің дивергенциясы

Егер $E = \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ немесе изоморфизмге дейінгі дәлдікпен $E = T^2(\mathbf{R}^m)$ және $k = m$ болса, онда $f: U \rightarrow E$ тензорлық өрістің дивергенциясы

$$\operatorname{div} f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f(x)\langle e_i \rangle}{\partial x} \langle e^i \rangle, \quad (5.31)$$

мұнда $\{e_i\}$ – \mathbf{R}^m -дегі кез келген базис. $\operatorname{div} f$ дивергенция әрбір $x \in U$ үшін \mathbf{R}^m -дегі вектор болады.

(5.31) анықтама базисті таңдап алуға тәуелді болмайды. Расында, кез келген $y \in \mathbf{R}^m$ вектор үшін $f^*(x)\langle y \rangle$ вектор функцияның дивергенциясы мынадай есептеледі (5.4.4-пунктті қараңыз):

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f^*(x)\langle y \rangle) &= \frac{\partial (f^*(x)\langle y \rangle)_i}{\partial x^i} = \frac{d}{ds} \left(e^i \cdot f^*(x + se^i)\langle y \rangle \right) \Big|_{s=0} = \\ \lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^i \cdot [f^*(x + se^i) - f^*(x)]\langle y \rangle}{s} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{y \cdot [f(x + se_i) - f(x)]\langle e^i \rangle}{s} = \\ &= y \cdot \frac{d}{ds} (f(x + se_i)\langle e^i \rangle) \Big|_{s=0} = y \cdot \left(\frac{\partial f(x)\langle e_i \rangle}{\partial x} \right) \langle e^i \rangle. \end{aligned}$$

Осы тізбектің сол жағы базисті таңдауға тәуелді болмағандықтан, оң жағы да оны таңдап алуға тәуелді болмайды. Сонымен, барлық $y \in \mathbf{R}^m$ үшін

$$\operatorname{div}(f^*(x)\langle y \rangle) = y \cdot \frac{\partial f(x)\langle e_i \rangle}{\partial x} \langle e^i \rangle. \quad (5.32)$$

(5.32) теңдікті тензорлық өріс дивергенциясының анықтамасы ретінде алуға болады: $\operatorname{div} f(x)$ – ол сондай $z \in \mathbf{R}^m$ вектор болып, кез келген $y \in \mathbf{R}^m$ вектор үшін $\operatorname{div}(f^*(x)\langle y \rangle) = y \cdot z$.

5.4.6 Гаусс-Остроградский формуласы

Математикалық талдау курсынан *Гаусс-Остроградский формулалары* деп аталатын төменде келтірілген тепе-теңдіктер белгілі. f – векторлық, F – тензорлық үзіліссіз дифференциалданушы өрістер, ω – \mathbf{R}^m -дегі шекарасы құрама-сыптығыр аймақ, ал $n - \partial\omega$ -ға сыртқы нормаль болсын, мұнда $\partial\omega - \omega$ аймақтың шекарасы. Сонда төмендегі Гаусс-Остроградский формулалары орынды болады:

$$\iint_{\partial\omega} f \cdot n d\sigma = \iiint_{\omega} \operatorname{div} f d\omega, \quad (5.33)$$

$$\iint_{\partial\omega} F \langle n \rangle d\sigma = \iiint_{\omega} \operatorname{div} F d\omega, \quad (5.34)$$

$$\iint_{\partial\omega} f \cdot F \langle n \rangle d\sigma = \iiint_{\omega} \operatorname{div} F \langle f \rangle d\omega, \quad (5.35)$$

мұнда

$$\operatorname{div} F \langle f \rangle = f \cdot \operatorname{div} F + \operatorname{tr} \left\langle F \circ \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle. \quad (5.36)$$

5.4.7 Лаплас операторы

Дифференциалдау және дивергенция амалдарының суперпозициясы *Лаплас операторы* деп аталады және ол Δ таңбамен белгіленеді. f – скаляр немесе векторлық өріс болсын. Онда $\operatorname{div}(\partial f / \partial x)$ Δ Лаплас операторының f өрістегі мәні деп аталады және Δf деп белгіленді.

Егер f скаляр өріс боса, онда

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \operatorname{div} \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^m} \right) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2}. \quad (3.37)$$

Осы жоғарыдағы теңдіктің орынды болатындығын көрсетеміз.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \nabla f(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

СОНДЫҚТАН:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \operatorname{tr} \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2}.$$

Егер f – векторлық өріс болса, онда

$$\Delta f = (\Delta f^1, \dots, \Delta f^m) = \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f^1}{(\partial x^i)^2}, \dots, \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f^m}{(\partial x^i)^2} \right) \quad (5.38)$$

теңдіктің орынды болатындығын көрсету қиын емес.

5.5 Қарапайым дифференциалды теңдеулер

Осы параграфте бізге қажет болатын қарапайым дифференциалды теңдеулер шешімдерінің бастапқы берілгендер бойынша дифференциалдануы жайлы теореманы еске түсіреміз және Эйлер формуласын келтіріп шығамыз [4, 40].

5.5.1 Коши есебі

$f: \mathbf{R}^m \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^m$ – үзіліссіз дифференциалданушы бейнелеу болсын. Төмендегі

$$x' = f(x, t), \quad t \geq 0, \quad (5.39)$$

$$x(0) = \xi \in \mathbf{R}^m, \quad (5.40)$$

Коши есебін қарастырамыз, мұнда ξ – векторлық параметр. Бұл жағдайда қандай да бір $[0, T]$ аралықта (5.39), (5.40) Коши есебінің шешімі бар және ол жалғыз болатындығы дифференциалдар теңдеулер курсынан белгілі (*классикалық Коши-Пикар теоремасы*). Егер қосымша f бейнелеудің x бойынша туындысының шенелгендігін талап ететін болсақ:

$$\left| \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right| \leq M < \infty, \quad \forall (x, t) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R},$$

онда Коши есебінің шешімі \mathbf{R} нақты сандар жиынында бар және жалғыз болады.

5.5.2 Вариациялы теңдеу

(5.39), (5.40) Коши есебінің шешімін $x(\xi, \cdot)$ арқылы белгілейік. Шешімдердің бастапқы берілгендер бойынша дифференциалдануы жайлы теорема тұжырымы мынадай: $(\xi, t) \rightarrow x(\xi, t)$ бейнелеу

үзіліссіз дифференциалданушы және әрбір ξ -де $t \rightarrow \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial \xi}$ функция

$$x' = \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x(\xi, t)} \langle x \rangle \quad (5.41)$$

қарапайым дифференциалды теңдеуді қанағаттандырады. (5.41) теңдеу *вариациялы теңдеу* деп аталады, яғни төмендегі:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x} \left\langle \frac{\partial x}{\partial \xi} \right\rangle.$$

тепе-теңдігі орынды болады

5.5.3 Эйлер формуласы

Мұнда біз $\frac{\partial x}{\partial \xi}$ бейнелеудің J_3 инварианты қанағаттандыратын дифференциалдық теңдеуді сипаттаймыз.

1-лемма. (J_3 инвариант үшін Эйлер формуласы жайлы). Төмендегі

$$J = J(\xi, t) = \det \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)$$

функция үшін Эйлер формуласы орынды болады:

$$\frac{dJ}{dt} = J \operatorname{div} f. \quad (5.42)$$

Д ә л е л д е у. X және F – сәйкесінше $\frac{\partial x(\xi, t)}{\partial \xi}$ және $\frac{\partial f(x, t)}{\partial x}$

бейнелеулердің $\{e_j\}$ базистегі матрицалары болсын:

$$X_j^i = e^i \cdot \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial \xi} \langle e_j \rangle, \quad F_j^i = e^i \cdot \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \langle e_j \rangle.$$

(5.41) теңдеуге сай:

$$\frac{d}{dt} X_j^i = F_k^i X_j^k.$$

Біз

$$\frac{d}{dt} \det X = \det X \cdot \operatorname{tr} F$$

теңдік орынды болатындығын көрсетуіміз керек.

A_k^j арқылы X матрицада X_j^k элементке дейінгі алгебралық толықтауышты белгілейміз (орындары алмастырылып қойылған индекстерге көңіл бөліңіз). Сонда

$$\det X = \begin{cases} X_j^k A_i^j, & \text{егер } i = k, \text{ болса,} \\ 0, & \text{егер } i \neq k, \text{ болса,} \end{cases}$$

немесе Кронекер символын пайдаланып, қысқаша жазатын болсақ

$$X_j^k A_i^j = \delta_i^k \cdot \det X.$$

Осы теңдіктен келіп шығады:

$$\frac{\partial \det X}{\partial X_j^i} = A_i^j.$$

Нәтижеде (мылқау индекстер жайлы келісімді еске түсіреміз):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det X &= \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial \det X}{\partial X_j^i} \cdot \frac{d}{dt} X_j^i = A_i^j \frac{d}{dt} X_j^i = A_i^j F_k^i X_j^k = \\ &= (X_j^k A_i^j) F_k^i = \det X \cdot F_k^i \delta_i^k = \det X \cdot F_i^i = \det X \cdot \operatorname{tr} F. \blacksquare \end{aligned}$$

Бақылау сұрақтары

1. Векторлық кеңістік деп қандай кеңістік айтылады? Мысалдар келтіріңіз.
2. Сызықты тәуелсіз және сызықты тәуелді векторлар деп қандай векторларды айтамыз?
 1. Сызықтық кеңістік өлшемі деп неге айтылады?
 2. Сызықтық кеңістіктің базисі дегеніміз не?
 3. Сызықтық кеңістіктегі скаляр көбейтінді қалай анықталады?
 4. Евклид кеңістігі қандай кеңістік?
 5. Сызықтық кеңістіктегі норма түсінігі қалай анықталады?
 6. Ортогонал векторлар деп қандай векторларға айтамыз?
 7. Кобазис векторлар деп қандай векторларға айтылады және олардың геометриялық тұрғыдағы мағынасы қандай?
 10. Ортонормаланған базис деп қандай базиске айтылады?
 11. Мылқау индекс дегенде нені түсінеміз? Мылқау деп аталуының себебі неде?
 12. Векторлардың ковариант және контрвариант компоненталары деп неге айтылады?
 13. Сызықтық бейнелеу деп қандай бейнелеуге айтамыз?
 14. Сызықтық бейнелеудің нормасын қалай енгізуге болады?
 15. Нормаланған кеңістіктердің изометриясы деп неге айтылады?
 16. Сызықтық бейнелеу матрицасы қандай матрица?
 17. Сызықтық бейнелеудің ізі дегеніміз не?
 18. Матрица және бейнелеулер инварианттары дегенде нені түсінеміз? Мысалдар келтіріңіз.
 19. Түйіндес және өзіне түйіндес бейнелеулер қандай бейнелеулер?
 20. Бейнелеулер үйірткісі қалай анықталады?
 21. Векторлық көбейтінді анықтамасын келтіріңіз.
 22. Тензор және оның рангі дегеніміз не? Мысалдар келтіріңіз.
 23. Скаляр, векторлық және тензорлық өрістер деп қандай өрістерге айтылады?
 24. Өрістердің (функциялардың) бағыт бойынша және дербес туындылары қалай анықталады?
 25. Өріс градиенті және Якоби матрицасы деп неге айтылады?
 26. Лаплас операторы қалай анықталады?

27. Вариациялы және Эйлер теңдеулері деп қандай теңдеулерге айтамыз?

Тапсырмалар

1. (5.6) формулалардың орынды болатындығын дәлелдеңіз.
2. Екі $\{e_i\}$ және $\{e'_i\}$ базистер (5.7) қатынастармен өзара байланысқан болсын. (5.8) векторлар жүйесі $\{e'_i\}$ базис үшін кобазис болатындығын дәлелдеңіз.
3. (5.9) формулаларын келтіріп шығарыңыз.
4. $\{e_i\}$ ($i=1,2$) векторлар жүйесі \mathbf{R}^2 -де базис,

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

матрица берілген, ал $\{e'_i\}$ ($i=1,2$) векторлар $e'_i = A_i^j e_j$ формуласымен анықталған болсын. θ параметрдің қандай мәндерінде $\{e'_i\}$ векторлар жүйесі \mathbf{R}^2 -де базис болады?

5. $\{e_i \otimes e^j\}_{i,j=1}^m$ бейнелеулер $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ кеңістікте сызықтық тәуелсіз, ал осы жүйе бойынша $\mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ -дегі кез келген бейнелеудің (5.15) жіктелуі жалғыз болатындығын дәлелдеңіз.

6. Векторлық көбейтіндінің (5.23) – (5.25) қасиеттерінің орынды болатындығын дәлелдеңіз.

7. Анықтама бойынша фундаменталды метрикалық тензордың ковариантты және контравариантты компоненталары

$$g_{ij} = g\langle e_i, e_j \rangle = e_i \cdot e_j, \quad g^{ij} = g\langle e^i, e^j \rangle = e^i \cdot e^j,$$

формулалармен есептеледі. Фундаменталды метрикалық тензордың мынадай қасиеттерін дәлелдеңіз:

$$g_{ij} = g_{ji}, \quad g^{ij} = g^{ji}, \quad g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i, \quad g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k.$$

Соңғы екі теңдік біріншісінің элементтері g_{ij} ковариантты компоненталар, екіншісінің элементтері контравариантты компоненталар болатын екі матрица өзара кері матрицалар болатындығын білдіреді.

8. Базис және кобазис векторларының төмендегі жіктелу формулаларын дәлелдеңіз

$$e^i = g^{ij} e_j, \quad e_i = g_{ij} e^j.$$

9. $\{e_i\}$ – \mathbf{R}^3 -тегі қандай да бір базис болсын.

$$f(x) = (x^1)^2 + 2x^1x^2 - (x^3)^2$$

өрістің градиентін, дербес туындыларын және $y = \frac{2}{7}e_1 - \frac{3}{7}e_2 - \frac{6}{7}e_3$ бағыт бойынша туындысын есептеңіз.

6-тарау. ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ САҚТАЛУ ЗАҢДАРЫ

Екінші және төртінші тарауларда айтылып өтілгендей, тұтас орта v жылдамдық, ρ тығыздық, U меншікті ішкі энергия, f массалық күштердің тығыздығы, нормаль векторы n болған элементар беттегі p_n беттік күштердің кернеуі және осы бет арқылы өтетін q_n жылу ағынының тығыздығымен сипатталады. Егер осы шамаларды сипаттайтын функциялар жеткілікті сыптығыр функциялар болатын болса, онда (IM) модель дербес туындылы қандай да бір дифференциалдық теңдеулер жүйесіне пара-пар болатындығын төменде көрсетеміз [8, 25, 30, 38, 39, 50]. Олар тұтас ортаның сақталу заңдарының дифференциалдық (DM) моделі болады.

6.1 Массаның сақталу заңының дифференциалдық аналогы

6.1.1 Анықталу облысы және функциялардың сыптығырлығы

Біз v, ρ, U, p_n және q_n шамалар Эйлерлік сипатталуда берілген, яғни қандай да бір $D \subset \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$ жиында өзгертін (x, t) айнымалылардың функциясы деп қарастырамыз. Сондай-ақ, p_n және q_n функциялар n нормаль вектордан да тәуелді болады. n нормаль вектордың өзгеру аймағы $S = \{x \in \mathbf{R}^3 : |x| = 1\}$ бірлік сфера болады. Сондықтан p_n және q_n функциялардың анықталу аймағы $D \times S$ болады.

Төменде v, ρ, U, p_n және q_n функциялар әрбір белгіленген $n \in S$ үшін D -да үзіліссіз дифференциалданушы, p_n және q_n функциялар $D \times S$ -те үзіліссіз, ал f функция D аймақта үзіліссіз деп есептейміз.

6.1.2 Интегралдық сақталу заңдарын түрлендірудің жалпы сызбанұсқасы

Төртінші тараудағы (IM) модельдің әрбір теңдеуін

$$\iiint_{\omega_t} F d\omega = 0 \quad (6.1)$$

түрінде қайта жазып аламыз. Бұл теңдік кез келген қозғалушы ω , көлем үшін орынды болуы керектігінен D аймақта

$$F \equiv 0 \quad (6.2)$$

шартын аламыз. (6.2) түрдегі теңдік (DM) модель болады. (6.1) \Rightarrow (6.2) импликация төмендегі леммадан келіп шығады.

2-лемма. $D \subset \mathbf{R}^m$ аймақта үзіліссіз болған $F : D \rightarrow \mathbf{R}^k$ функция үшін центрі x нүктеде, радиусы r болған кез келген $B = B(x, r) \subset D$ шарда

$$\int_B F(x) d\omega = 0$$

теңдігі орынды болсын. Сонда D аймақта $F(x) \equiv 0$ болады.

Д э л л д е у. Мәндері ақырлы кеңістікте болатын функциядан алынатын интеграл әрбір координатасы бойынша анықталатын болғандықтан, лемманы скаляр функциялар, яғни $k=1$ жағдай үшін дәлелдеу жеткілікті. Айталық, D аймақта $F(x) \equiv 0$ шарты орынды болмасын. Онда сондай $x_0 \in D$ нүктесі табылып, $F(x_0) \neq 0$. Анықтық үшін $F(x_0) > 0$ болсын. F функцияның үзіліссіздігінен сондай $r > 0$ саны табылып, $B(x_0, r)$ шарда

$|F(x) - F(x_0)| \leq F(x_0)/2$ теңсіздігі орындалады. Бірақ сонда:

$$\begin{aligned} F(x) &= F(x_0) - [F(x_0) - F(x)] \geq F(x_0) - |F(x_0) - F(x)| \geq \\ &\geq \frac{1}{2} F(x_0), \quad \forall x \in B(x_0, r). \end{aligned}$$

Сондықтан

$$\int_B F(x) d\omega \geq \frac{1}{2} \int_B F(x_0) d\omega = \frac{1}{2} F(x_0) \cdot \text{mes } B > 0,$$

ал бұл теңсіздік лемма шартына қайшы келеді. ■

6.1.3 Толық туынды

$v = v(x, t)$ тұтас ортаның жылдамдықтарының өрісі, ал $f = f^E(x, t)$ – скаляр, векторлық немесе тензорлық функция болсын (мұндағы, E индекс функцияның Эйлер айнаымалыларында берілгендігін білдіреді). f функцияның толық туындысы деп

$$(x, t) \rightarrow \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \langle v(x, t) \rangle$$

функцияға айтылады. Толық туынды $\dot{f}(x, t)$ немесе $\frac{d}{dt} f(x, t)$ арқылы белгіленеді.

Тұтас ортаның қозғалыс заңы $x = \gamma(x, t)$ бейнелеумен берілген және $f^L(\xi, t) - f$ функцияның лагранж айнымалыларындағы түрі:

$$f^L(\xi, t) = f^E(x, t) = f[\gamma(\xi, t), t].$$

болсын.

Осы тепе-теңдікті t бойынша дифференциалдау ($v = \partial \gamma / \partial t$ екендігін еске түсіреміз) толық туындыны Лагранж айнымалыларында өрнектейтін төмендегі формулаға алып келеді:

$$\frac{d}{dt} f(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} f^L(\xi, t).$$

6.1.4 Дифференциалдау және интегралдау амалдарының орындарын алмастыру

Мұнда біз жоғары шегі айнымалы болған интегралды дифференциалдау формуласының көпөлшемді аналогы болған

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\omega_t} F(x, t) d\omega = \iiint_{\omega_t} \left(\frac{dF}{dt} + F \operatorname{div} v \right) d\omega \quad (6.3)$$

теңдігінің кез келген F функция үшін орынды болатындығын көрсетеміз. Ол үшін (6.3) теңдіктің сол жағындағы интегралда $x = \gamma(\xi, t)$ алмастыру орындаймыз. Бұл алмастыру ω_t аймақты ω_0 аймаққа өткізеді және нәтижеде интегралдау аймағы t уақыттан тәуелсіз болады:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\omega_t} F(x, t) d\omega = \frac{d}{dt} \iiint_{\omega_0} F^L(\xi, t) J^L(\xi, t) d\omega,$$

мұнда $J - x \rightarrow \xi$ алмастырудың якобианы, яғни $J(\xi, t) = \det(\partial x / \partial \xi)$. Интегралдау аймағы енді t уақытқа тәуелді болмағандықтан, дифференциалдауды интеграл астына қолдансақ болады. Интеграл астындағы өрнекті (5.42) Эйлер формуласын

$$\frac{dJ}{dt} = J \operatorname{div} v,$$

немесе оның өзі болған

$$\frac{dJ^L}{dt} = J^L \operatorname{div} v^L$$

формуланы пайдаланып дифференциалдайтын болсақ, төмендегі теңдіктер тізбегін аламыз:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\omega_t} F^L J^L d\omega &= \iiint_{\omega_t} \frac{\partial}{\partial t} (F^L J^L) d\omega = \\ &= \iiint_{\omega_t} \left(\frac{\partial F^L}{\partial t} J^L + F^L \frac{\partial J^L}{\partial t} \right) d\omega = \iiint_{\omega_t} \left(\frac{\partial F^L}{\partial t} J^L + F^L J^L \operatorname{div} v^L \right) d\omega = \\ &= \iiint_{\omega_t} \left(\frac{\partial F^L}{\partial t} + F^L \operatorname{div} v^L \right) J^L d\omega. \end{aligned}$$

Кері $\xi \rightarrow x$ алмастыру 6.3-теңдіктің орынды болатындығын дәлелдейді:

$$\iiint_{\omega_t} \left(\frac{\partial F^L}{\partial t} + F^L \operatorname{div} v^L \right) J^L d\omega = \iiint_{\omega_t} \left(\frac{dF}{dt} + F \operatorname{div} v \right) d\omega.$$

6.1.5 Үзілісті еместік теңдеуі

(6.3) теңдікте F функцияны ρ функциямен алмастыратын болсақ

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\omega_t} \rho(x, t) d\omega = \iiint_{\omega_t} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} v \right) d\omega$$

тепе-теңдікті аламыз. Осы тепе-теңдіктің сол жағы массаның интегралдық сақталу заңына сай нөлге тең болатындықтан, оң жағы да кез келген қозғалушы ω_t көлем үшін нөлге тең болады:

$$\iiint_{\omega_t} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} v \right) d\omega = 0.$$

Жоғарыдағы теңдік, мысалы, егер ω_0 ретінде γ_t бейнелеудегі кез келген B шардың түпбейнесін алғанда кез келген белгіленген t үшін орынды болады, яғни $\omega_0 = \gamma^{-1}(B)$ болса, онда берілген t -да $\omega_t = B$. Осы айтылғандардан әрбір t -да соңғы тепе-теңдік кез келген шарда орынды болатындығы келіп шығады. 2-лемманы қолдану *үзілісті еместік теңдеуі* деп аталатын төмендегі теңдеуге алып келеді:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} v = 0, \quad (6.4)$$

ал осы теңдеу массаның сақталу заңының дифференциалдық аналогы болады.

6.2 Импульстің сақталу заңы

6.2.1 Импульстің интегралдық сақталу заңы жазылуының жаңа түрі

Егер (6.3) теңдікте F функцияны ρF функциямен алмастыратын болсақ және үзілісті еместік теңдеуі орындалады деп есептесек, онда біз мынадай теңдікті аламыз:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\omega_t} \rho F d\omega = \iiint_{\omega_t} \rho \frac{dF}{dt} d\omega. \quad (6.5)$$

Сондықтан импульстің интегралдық сақталу заңы (4-тарау, 4.4.3-пунктті қараңыз, IM)

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\omega_t} \rho v d\omega = \iiint_{\omega_t} \rho f d\omega + \iint_{\partial\omega_t} p_n d\sigma$$

(6.5) формула көмегімен мынадай түрде жазылуы мүмкін:

$$\iint_{\partial\omega} p_n d\sigma = \iiint_{\omega_t} \rho \left(\frac{dv}{dt} - f \right) d\omega. \quad (6.6)$$

Ал енді (6.6) импульстың интегралдық сақталу заңында сол жақтағы беттік интегралды көлемдік интегралға түрлендіру, әрі қарай алдыңғы параграфта сипатталған интегралдық заңдарды түрлендірудің жалпы сызбанұсқасы бойынша (6.6) сақталу заңының дифференциалдық түрін алу қажет. Ол үшін алдымен ішкі беттік күштердің p_n кернеулер векторының түрін тауып алу керек.

6.2.2 Кернеу тензоры

Мұнда біз кернеу тензорының бар болуы жайлы Коши теоремасын дәлелдейміз.

2-теорема. (тұтас орта механикасының негізгі теоремасы).
Сондай $P: D \rightarrow \mathbb{T}^2(\mathbf{R}^3)$ тензорлық өріс бар болып, барлық $(x, t, n) \in D \times S$ үшін:

$$p_n(x, t) = P(x, t) \langle n \rangle. \quad (6.7)$$

теңдігі орынды болады

Д ә л е л д е у. \mathbf{R}^3 -те кез келген ортонормаланған $\{e_i\}$ базисті және $(x, t) \in D$ нүктені белгілеп аламыз. Егер біз кез келген $v = v^i e_i \in S$ вектор үшін

$$p_v = v^i p_{e_i} \quad (6.8)$$

теңдік орындалатындығын көрсетсек (біз $p_v(x, t)$ функцияның (x, t) аргументтерін жазған жоқпыз), онда S -те ізделініп жатқан P тензорды

$$P\langle v \rangle = v^i p_{e_i}$$

теңдігі арқылы анықтауға болады. Әрі қарай P тензорды S бірлік сферадан \mathbf{R}^3 кеңістікке

$$P\langle a \rangle = |a| P \left\langle \frac{a}{|a|} \right\rangle, \quad a \in \mathbf{R}^3,$$

сызықтық бойынша жалғастырамыз.

(6.8) теңдіктің орынды болатындығын (6.6) түрінде қайтадан жазылған импульстың интегралдық сақталу заңын пайдаланып көрсетеміз.

Алдымен кез келген $v \in S$ вектор үшін

$$p_v = -p_{-v} \quad (6.9)$$

теңдік орынды болатындығын көрсетеміз.

Σ нормаль векторы v болған $x \in \Omega_t$ нүктеден өтетін жазықтық, $y \in \Sigma \cap \Omega_t$, $B = B(y, \varepsilon)$ – центрі y нүктеде, радиусы ε болған толықтай Ω_t -да жататын шар, B_1, B_2 – Σ жазықтық бөлетін осы шардың бөліктері (B_2 және v Σ жазықтықтың бір жағында жатады), $\beta = \partial B_1 \cap \partial B_2 = B \cap \Sigma$ болсын (6.1-сурет).

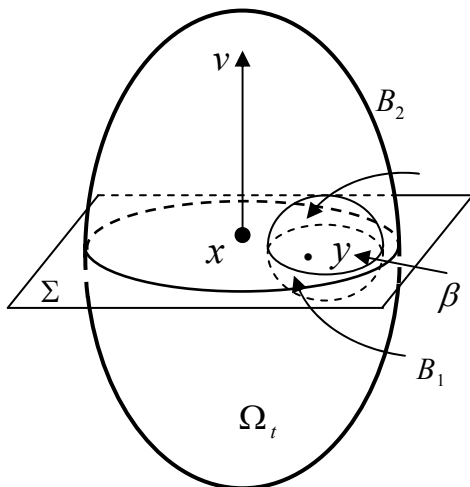
(6.6) сақталу заңын B_1, B_2, B көлемдер үшін жазамыз, алынған тепе-теңдіктердің алдыңғы екеуін қосамыз және үшіншісін азайтамыз:

$$\left(\iint_{\partial B_1} + \iint_{\partial B_2} - \iint_{\partial B} \right) p_n d\sigma = \left(\iiint_{B_1} + \iiint_{B_2} - \iiint_B \right) \rho \left(\frac{dv}{dt} - f \right) d\omega = 0.$$

Осы теңдіктің сол жағындағы B шардың шекарасы бойынша интегралдар өзара жойылады, ал қалған β бойынша бірінші интегралда $p_n = p_v$, ал екіншісінде $p_n = p_{-v}$. Сонымен,

$$\iint_{\beta} [p_v(y, t) + p_{-v}(y, t)] d\sigma = 0.$$

β толықтай $\Sigma \cap \Omega_t$ ішінде жататын кез келген дөңгелек, ал $p_v(y, t) + p_{-v}(y, t)$ үзіліссіз функция болғандықтан, 2-леммадан (6.9) теңдік келіп шығады.



6.1-сурет. (6.9) теңдікті дәлелдеуде пайдаланылатын белгілеулер

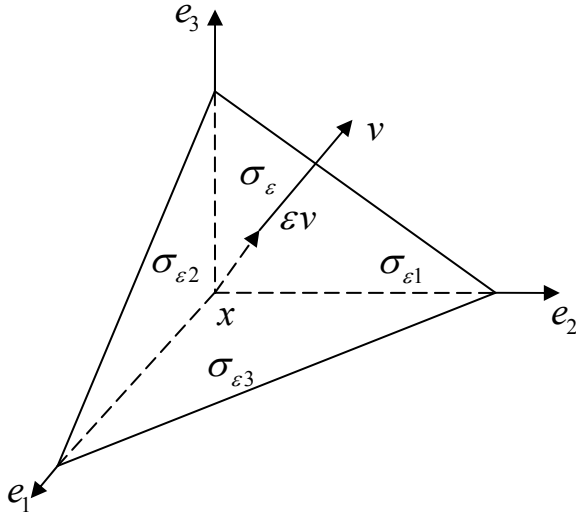
Ал енді (6.8) теңдіктің орынды екендігін дәлелдейміз. $v = v^i e_i$ болып, барлық v^i нөлден үлкен болсын. Δ_ε арқылы координаталық бұрыштан $x + \varepsilon v$ вектордың соңы арқылы өтетін v векторға ортогонал болған жазықтықты, сондай-ақ басы x нүктеде орналасқан базистің координаталық жазықтықтарының қиылысуынан түзілген тетраэдрді белгілейміз (6.2-сурет).

σ_ε тетраэдрдің v векторға перпендикуляр болған жағы, ал $\sigma_{\varepsilon i}$ – тетраэдрдің сәйкесінше, e_i векторларға перпендикуляр жақтары болсын. ε жеткілікті кіші болғанда бұл тетраэдр толықтай Ω_t ішінде жатады. (6.6) формуланы Δ_ε қолданып, төмендегі теңдікті аламыз:

$$\left(\iint_{\sigma_\varepsilon} + \sum_{i=1}^3 \iint_{\sigma_{\varepsilon i}} \right) p_n d\sigma = \iiint_{\Delta_\varepsilon} \rho \left(\frac{dv}{dt} - f \right) d\omega ,$$

немесе σ_ε -да $n = v$ және $\sigma_{\varepsilon i}$ -де $n = -e_i$ екендігін есепке алатын болсақ, соңғы теңдікті мынадай жазуға болады:

$$\iint_{\sigma_\varepsilon} p_v d\sigma + \sum_{i=1}^3 \iint_{\sigma_{\varepsilon i}} p_{-e_i} d\sigma = \iiint_{\Delta_\varepsilon} \rho \left(\frac{dv}{dt} - f \right) d\omega . \quad (6.10)$$



6.2-сурет.(6.8) теңдікті дәлелдеуде пайдаланылатын белгілеулер

Жоғарыдағы суреттен көрініп тұрғандай,

$$\begin{aligned} \text{mes } \sigma_\varepsilon &= \varepsilon^2 \cdot \text{mes } \sigma_1, \\ \text{mes } \sigma_{\varepsilon i} &= \varepsilon^2 \cdot \text{mes } \sigma_{1i}, \\ \text{mes } \Delta_\varepsilon &= \varepsilon^3 \cdot \text{mes } \Delta_1, \end{aligned} \quad (6.11)$$

мұнда $\text{mes } \sigma - \sigma$ жиынның Лебег өлшемі (алғашқы екі жағдайда жазық, яғни аудан, ал соңғысы – көлемдік).

(6.10) орта мән жайлы теореманы қолданамыз:

$$p_v(\theta_\varepsilon, t) \cdot \text{mes } \sigma_\varepsilon + \sum_{i=1}^3 p_{-e_i}(\theta_{\varepsilon i}, t) \cdot \text{mes } \sigma_{\varepsilon i} = \left[\rho \left(\frac{dv}{dt} - f \right) \right](\mathcal{G}_\varepsilon, t) \cdot \text{mes } \Delta_\varepsilon,$$

мұнда $\theta_\varepsilon \in \sigma_\varepsilon, \theta_{\varepsilon i} \in \sigma_{\varepsilon i}$, ал $\mathcal{G}_\varepsilon \in \Delta_\varepsilon$. (6.11) соңғы теңдікке қоямыз, теңдіктің екі жағын да ε^2 бөлеміз және $\varepsilon \rightarrow 0$ $p_v(\theta_\varepsilon, t) \rightarrow p_v(x, t)$ ал $p_{-e_i}(\theta_{\varepsilon i}, t) \rightarrow p_{-e_i}(x, t)$ болатындығын есепке алып (себебі, $\varepsilon \rightarrow 0$ $\theta_\varepsilon, \theta_{\varepsilon i}, \mathcal{G}_\varepsilon \rightarrow x$) $\varepsilon \rightarrow 0$ шекке өтеміз. Нәтижеде мына теңдікті аламыз:

$$\text{mes } \sigma_1 p_v + \sum_{i=1}^3 \text{mes } \sigma_{1i} p_{-e_i} = 0,$$

ал (6.9) теңдікті есепке алатын болсақ, соңғы теңдіктен төмендегі теңдікті аламыз:

$$\text{mes } \sigma_1 p_v - \sum_{i=1}^3 \text{mes } \sigma_{1i} p_{e_i} = 0.$$

Төмендегі теңдіктерден

$$\text{mes } \sigma_{1i} = \text{mes } \sigma_1 \cdot \cos(v, e_i) = \text{mes } \sigma_1 \cdot (v, e_i) = v^i \text{mes } \sigma_1$$

(6.8) теңдік $v^i > 0$ жағдай үшін орынды болатындығы келіп шығады. Қалған $v^i \neq 0$ жағдайлар дәл осы жолмен дәлелденеді. Бір немесе бірнеше v^i коэффициенттер нөлге тең болатын соңғы жағдайда (6.8) теңдік p үзіліссіздігі мен алдын дәлелденген жағдайдан келіп шығады. ■

Жоғарыда келтірілген 2-теоремада бар болуы жайлы айтылған P тензор тұтас орта механикасында фундаменталды рөл атқарады және ол *кернеулер тензоры* деп аталады. Осы тензордың бар болуы импульс пен импульс моменттерінің сақталу заңдарындағы беттік интегралдарды көлемдік интегралдарға түрлендіруге мүмкіндік береді.

6.2.3 Импульстің сақталу заңы

Негізгі 2-теоремаға сай мынадай теңдік орынды болады:

$$\iint_{\partial \omega_t} p_{n(x)}(x, t) d\sigma = \iint_{\partial \omega_t} P(x, t) \langle n(x) \rangle d\sigma,$$

немесе қысқартылған түрде

$$\iint_{\partial \omega_t} p_n d\sigma = \iint_{\partial \omega_t} P \langle n \rangle d\sigma.$$

Ал (5.34) Гаусс-Остроградский формуласына сай

$$\iint_{\partial \omega_t} P \langle n \rangle d\sigma = \iiint_{\omega_t} \text{div} P d\omega.$$

Сондықтан импульстің интегралдық сақталу заңы (6.6) мына түрде жазылуы мүмкін:

$$\iiint_{\omega_t} \left[\rho \left(\frac{dv}{dt} - f \right) - \text{div} P \right] d\omega = 0.$$

Ал 2-леммадан импульстің сақталу заңының теңдеуі:

$$\rho \frac{dv}{dt} = \text{div} P + \rho f \quad (6.12)$$

келіп шығады

6.2.4 Импульс моментінің сақталу заңы

Импульс моментінің интегралдық сақталу заңы мына түрде болатын (4.4.3-параграфті қараңыз, ІМ-модель):

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\omega_t} \rho(x \times v) d\omega = \iiint_{\omega_t} \rho(x \times f) d\omega + \iint_{\partial\omega_t} (x \times p_n) d\sigma. \quad (6.13)$$

Осы теңдікте беттік интегралды көлемдік интегралға түрлендіреміз:

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\omega_t} [x \times p_{n(x)}(x, t)] d\sigma &= \iint_{\partial\omega_t} [x \times P(x, t) \langle n(x) \rangle] d\sigma = \\ &= \iint_{\partial\omega_t} \mathcal{A}(x) \circ P \langle n(x) \rangle d\sigma = \iiint_{\omega_t} \operatorname{div}(\mathcal{A}(x) \circ P) d\omega. \end{aligned}$$

Мұнда (5.34) Гаусс-Остроградский формуласы және кез келген $\{e_i\}$ базисте (5.27) матрицамен берілген және векторлық көбейтіндіні (5.26) түрде жазуға мүмкіндік беретін $\mathcal{A}: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ сызықтық бейнелеу пайдаланылды. Сондықтан (6.5) формуланы пайдаланып, (6.13) импульс моментінің сақтау заңын мынадай түрде қайтадан жазуға болады:

$$\iiint_{\omega_t} \rho \left(x \times \frac{dv}{dt} \right) d\omega - \iiint_{\omega_t} \operatorname{div}(\mathcal{A}(x) \circ P) d\sigma - \iiint_{\omega_t} \rho(x \times f) d\omega = 0.$$

2-лемманы соңғы теңдікке қолдану арқылы импульс моментінің сақталу заңының теңдеуін аламыз:

$$\rho \left(x \times \frac{dv}{dt} \right) = \operatorname{div}(\mathcal{A}(x) \circ P) + \rho(x \times f). \quad (6.14)$$

Ал енді (6.12) импульс теңдеуін пайдаланып, (6.14) теңдеуде $\rho dv/dt$ орнына $\operatorname{div}P + \rho f$ өрнекті қоятын болсақ, импульс моменті теңдеуінің қарапайым түрін аламыз:

$$\operatorname{div}(\mathcal{A}(x) \circ P) = x \times \operatorname{div}P. \quad (6.15)$$

6.2.5 Кернеулер тензорының симметриялығы

Мұнда біз (6.15) теңдеу кернеулер тензорының симметриялық шартына пара-пар болатындығын көрсетеміз.

3-теорема (кернеулер тензорының симметриялығы жайлы). Импульс моментінің (6.15) теңдеуі кернеулер тензоры P симметриялы $P = P^*$ болғанда ғана орынды болады.

Дәлелдеу. (6.15) теңдеу орынды, ал $\{e_i\}$ – ортонормаланған базис болсын. Тензор дивергенциясының анықтамасын, бейнелеулер композициясын дифференциалдаудың қасиеттерін және \mathcal{A} анықтамасын пайдалана отырып, (6.15) теңдіктің сол жағын түрлендіреміз:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathcal{A}(x) \circ P(x, t)) &= \left. \frac{d}{ds} (\mathcal{A}(x + se_i) \circ P(x + se_i, t) \langle e^i \rangle) \right|_{s=0} = \\ &= \left(\left. \frac{d}{ds} \mathcal{A}(x + se_i) \right|_{s=0} \right) \langle P(x, t) \langle e^i \rangle \rangle + \\ &+ \mathcal{A}(x) \left\langle \left(\left. \frac{d}{ds} P(x + se_i) \right|_{s=0} \right) \langle e^i \rangle \right\rangle = \\ &= \mathcal{A}(e_i) \langle P(x, t) \langle e^i \rangle \rangle + \mathcal{A}(x) \langle \operatorname{div} P(x, t) \rangle = e_i \times P \langle e^i \rangle + x \times \operatorname{div} P. \end{aligned}$$

Сондықтан (6.15) сай

$$e_i \times P \langle e^i \rangle = 0.$$

Соңғы теңдік P тензор симметриялы болғанда ғана орынды болады. Расында,

$$\begin{aligned} 0 &= e_i \times P \langle e^i \rangle = \mathcal{A}(e_i) \langle P \langle e^i \rangle \rangle = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{21} \\ p_{22} \\ p_{23} \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{31} \\ p_{32} \\ p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{23} - p_{32} \\ p_{31} - p_{13} \\ p_{12} - p_{21} \end{pmatrix} = 0, \end{aligned}$$

яғни p симметриялығын білдіреді.

Жоғарыда келтірілген дәлелдеудегі барлық түрлендірулер мен ой қорытулар керіленетін болғандықтан, теоремадағы кері қорытынды да орынды болады. ■

Сонымен, (6.15) теңдеу мен кернеулер тензорының симметриялығы шарты пара-пар болады. Сондықтан біз келтіріп шығаратын нәтижелік дифференциалдық теңдеулер жүйесіне (6.15) теңдеуді емес, кернеулер тензорының симметриялығы шартын қояды.

6.3 Жылу ағынының теңдеуі

6.3.1 Жылу ағынының векторы

Сонымен, ІМ модельдегі соңғы теңдеуді – энергияның интегралдық сақталу заңын қарастырамыз:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\omega_t} \rho \left(\frac{1}{2} |v|^2 + U \right) d\omega = \iiint_{\omega_t} \rho v \cdot f d\omega + \iint_{\partial\omega_t} v \cdot p_n d\sigma + \iint_{\partial\omega_t} q_n d\sigma.$$

Келесі теорема кернеулер тензорының «энергетикалық» аналогын – жылу ағынының векторы түсінігін енгізеді.

4-теорема. (жылу ағыны векторының бар болуы жайлы). Сондай $q: D \rightarrow \mathbf{R}^3$ векторлық өріс бар болып, әрбір $(x, t) \in D$ нүктеде кез келген $n \in S$ нормаль үшін нормаль векторы n болған элементар аудан арқылы өтетін q_n жылу ағынының тығыздығы төмендегі формуламен беріледі:

$$q_n(x, t) = -q \cdot n. \quad (6.16)$$

Д э л е л д е у. 2-теореманы дерлік сөзбе-сөз қайталаудан тұрады. Өзгеріс тек қана q_n қатысты болып, ол p_n айырмашылығы ретінде векторлық функция болмастан, скаляр функция болады. Сондай-ақ, (6.16) жылу ағынының векторын анықтауда «←» таңбасы бар, ол теореманы дәлелдеуге әсер етпейді және ол q вектор жылу энергиясы тасымалының ақиқат бағытын көрсету үшін ғана алынған: $n - q_n$ тығыздықпен жылу ағыны кіретін ω көлемнің $\partial\omega$ шекарасына сыртқы нормаль векторының орты. ■

6.3.2 Деформация жылдамдықтарының тензоры

Жылу ағыны векторының бар болуы, жоғарыдағыдай, энергия балансы теңдеуін дифференциалдық түрге келтіруге мүмкіндік береді. Оны сипаттау үшін бізге жаңа түсінік қажет болады.

Тұтас ортаның деформация жылдамдықтарының тензоры деп төмендегі екінші рангті тензорға айтылады:

$$D = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + \left(\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right)^* \right]. \quad (6.17)$$

Осы тензор кернеулер тензорымен қатар тұтас орта механикасында фундаменталды рөл атқарады және келесі тарауларда кеңірек қарастырылады.

6.3.3 Жылу агынының теңдеуі

(6.16) және (5.33) Гаусс-Остроградский формуласын есепке алып, төмендегі теңдіктерді жазсақ болады:

$$\iint_{\partial\omega_i} q_n d\sigma = - \iint_{\partial\omega_i} q \cdot n d\sigma = - \iiint_{\omega_i} \operatorname{div} q d\omega,$$

$$\iint_{\partial\omega_i} v \cdot p_n d\sigma = \iiint_{\omega_i} \operatorname{div}(P\langle v \rangle) d\omega.$$

Сондықтан (6.5) формуланы есепке алып, энергияның интегралдық сақталу заңын мына түрде жазуға болады:

$$\iiint_{\omega_i} \left[\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |v|^2 + U \right) - \operatorname{div}(P\langle v \rangle) - \rho v \cdot f + \operatorname{div} q \right] d\omega = 0.$$

2-лемманы соңғы теңдікке қолдану арқылы төмендегі теңдікті аламыз:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |v|^2 + U \right) - \operatorname{div}(P\langle v \rangle) - \rho v \cdot f + \operatorname{div} q = 0. \quad (6.18)$$

Әрі қарай

$$\frac{d}{dt} |v|^2 = 2v \cdot \frac{dv}{dt}, \quad (6.19)$$

формуланы және

$$\operatorname{div}(P\langle v \rangle) = v \cdot \operatorname{div} P + P : D. \quad (6.20)$$

теңдікті пайдаланамыз. Соңғы (6.20) теңдіктің орынды болатындығын көрсетеміз. Төмендегі

$$\frac{\partial(P\langle v \rangle)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} \langle v(x,t) \rangle + P(x,t) \circ \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}$$

теңдікті орынды болатындығы көрініп тұр.

Әрі қарай (P симметриялық тензор екендігін еске аламыз)

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \left(P \circ \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= P_j^i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_i^j = \frac{1}{2} P_j^i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_i^j + \frac{1}{2} P_j^i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_i^j = \\ &= \frac{1}{2} P_j^i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_i^j + \frac{1}{2} P_j^i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_j^i = \frac{1}{2} P_j^i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_i^j + \frac{1}{2} (P^*)^j_i \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^* \right]^j_i = \\ &= \frac{1}{2} P_j^i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_i^j + \frac{1}{2} P_j^i \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^* \right]^j_i = \frac{1}{2} P_j^i \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^* \right]^j_i = \end{aligned}$$

$$= P_j^i D_i^j = (P^*)^i_j D_i^j = P : D,$$

ал

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \langle v \rangle \right) &= e^i \cdot \left(\frac{d}{ds} P(x + s e_i) \langle v \rangle \Big|_{s=0} \right) = \\ &= e^i \cdot \left(\frac{d}{ds} P(x + s e_i) \Big|_{s=0} \langle v \rangle \right) = v \cdot \left(\frac{d}{ds} P^*(x + s e_i) \Big|_{s=0} \langle e^i \rangle \right) = \\ &= v \cdot \left(\frac{d}{ds} P(x + s e_i) \Big|_{s=0} \langle e^i \rangle \right) = v \cdot \operatorname{div} P. \end{aligned}$$

Сонымен, (6.20) теңдік орынды болатындығын көрсеттік.

(6.19), (6.20) теңдіктерді пайдаланып, (6.18) теңдеуді мына түрде қайта жазамыз:

$$\rho \left(v \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{dU}{dt} \right) - v \cdot \operatorname{div} P - P : D - \rho v \cdot f + \operatorname{div} q = 0$$

және осы соңғы теңдеуден (6.12) импульстың сақталу заңының теңдеуін пайдаланып $\frac{dv}{dt}$ туынды бар болған мүшені жоямыз.

Нәтижеде (6.18) жылу ағыны теңдеуінің қарапайым түрін аламыз:

$$\rho \frac{dU}{dt} = P : D - \operatorname{div} q. \quad (6.21)$$

6.4 Тұтас органның дифференциалдық моделі

Егер 6.1.1-пунктте сипатталған функциялардың сыптығырлығы шарттары орынды болатын болса, онда D аймақта кернеулердің симметриялық тензорларының P тензорлық және q жылу ағынының векторлық сондай өрістері анықталған болып, (IM) интегралдық модель төмендегі дифференциалдық модельге пара-пар болады:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} v = 0,$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = \operatorname{div} P + \rho f, \quad (\text{DM})$$

$$\rho \frac{dU}{dt} = P : D - \operatorname{div} q$$

Құрылған (DM) модельдің екі маңызды кемшілігі бар. Біріншіден, бұл модель әлі де өте күрделі, себебі ол тұтас ортаның кең кластарын – газдардан бастап қатты денелерге дейін сипаттайды. Мұндай жалпылық деңгейінде тұтас орта жайлы белгілі бір мағыналы тұжырым жасау мүмкін емес. Екіншіден, бұл модель *тұйықталмаған*, яғни модельдегі теңдеулер саны ондағы белгісіздер санынан кіші. Бұл модельде бес скаляр теңдеулер бар. Сонымен қатар, (DM) модель екі скаляр (ρ және U), екі векторлық (v және q) белгісіздер (үш өлшемді) және бір тензорлық P белгісізді өз ішіне алады. P тензордың симметриялық тензор болуы талабына сай ол алты скаляр параметрлермен сипатталады. Сонымен, (DM) модельде 14 скаляр параметрлер бар. Сондықтан ол тұтас ортаның белгілі бір нақты қасиеттерін сипаттайтын теңдеулермен толықтырылуы керек. Мұндай теңдеулерді *анықтаушы теңдеулер* деп атайды.

Бақылау сұрақтары

1. Интегралдық сақталу заңдарын дифференциалдық түрге келтірудің жалпы жолы қандай?
2. f (f – скаляр, векторлық немесе тензорлық функция) функцияның толық туындысы қалай анықталады?
3. Жоғары шегі айнымал болған көпөлшемді интегралды дифференциалдау қалай жүзеге асырылады?
4. Массаның сақталу заңының дифференциалдық формасы.
5. Үзілісті еместік теңдеуі қандай теңдеу?
6. Импульстің интегралдық сақталу заңынан дифференциалдық формасы қалай алынады?
7. Кернеулер тензоры деп неге айтылады? Тұтас орта механикасының негізгі теоремасын сипаттаңыз.
8. Импульс моментінің интегралдық сақталу заңынан дифференциалдық формасы қалай алынады?
9. Кернеулер тензорының симметриялығы жайлы теорема.
10. Жылу ағыны векторының бар болуы жайлы теорема.
11. Деформация жылдамдықтарының тензоры деп қандай тензорға айтамыз?
12. Тұтас ортаның DM моделі.

13. Тұйықталмаған және тұйықталған модельдер деп қандай модельдерге айтылады?
14. Анықтаушы модельдер қандай теңдеулер және олар не үшін қажет болады?

Тапсырмалар

1. (6.4) үзілісті еместік теңдеуін мына түрде жазуға болатындығын дәлелдеңіз:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho v = 0 . \quad (6.22)$$

2. Тұтас ортаның қозғалыс жылдамдығы

$$x = \gamma(\xi, t) = \left(e^t \xi^1, \xi^1 (1 - e^{2t}) + e^t \xi^2, e^{3t} \xi^3 \right)$$

бейнелеумен берілген. Эйлер және Лагранжев айнымалыларында ортаның жылдамдықтар өрісін табыңыз.

3. Тұтас ортаның қозғалыс заңы $x = \gamma(\xi, t) = (t+1)\xi$ бейнелеумен берілген. $\operatorname{div} v$ табыңыз.

4. Жылдамдықтар өрісі $v = (x^1)^2 t e_1 + x^2 t^2 e_2 + x^1 x^3 t e_3$ вектормен берілген. $t=1$ уақыт моментінде $x = (1, 3, 2)$ нүктеде болған бөлшектің жылдамдығы мен үдеуін табыңыз.

5. Жылдамдықтар өрісі $v = (4x^1 - 3x^2, 3x^1, -4x^1)$ бейнелеумен берілген. Үдеу векторының компоненталарын табыңыз.

6. Жылдамдықтар өрісі $v = (-\xi^2 e^{-t}, -\xi^3, 2t)$ вектормен берілген. Үдеу векторының компоненталарын Эйлер айнымалыларында табыңыз.

7. Тұтас ортаның қозғалыс заңы мынадай ($q = \text{const}$):

$$x = \gamma(\xi, t) = \left(\xi^1 \sqrt{\frac{2qt}{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2} + 1}, \xi^2 \sqrt{\frac{2qt}{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2} + 1}, \xi^3 \right).$$

Жылдамдықтар өрістерін Лагранж және Эйлер айнымалыларында табыңыз.

8. Тұтас ортаның қозғалысы

$$x = \gamma(\xi, t) = \left(\xi^1 \left(1 + \frac{t}{\tau} \right), \xi^2 \left(1 + 2 \frac{t}{\tau} \right), \xi^3 \left(1 + \frac{t^2}{\tau^2} \right) \right), \quad \tau = \text{const}$$

заң бойынша өзгереді. Жылдамдықтар өрісі мен үдеуді лагранждық сипатталуда табыңыз. $t = \tau$ уақыт моментінде кеңістіктің координатасы (a, b, c) нүктесінде болған бөлшек $t = 3\tau$ уақыт моментінде қай нүктесінде болатынын анықтаңыз.

9. $\{e_i\} \in \mathbf{R}^3$ ортонормаланған базисте кернеулер тензоры P қандай да бір x нүктеде

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

матрицамен берілген болсын. $n = -\frac{3}{5}e_1 + \frac{4}{5}e_3$ нормалды бірлік векторлы элементар ауданда кернеулер векторы $p_n(x)$ анықтаңыз.

10. $\{e_i\} \in \mathbf{R}^3$ ортонормаланған базисте кернеулер тензоры P қандай да бір x нүктеде

$$P = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

матрицамен берілген болсын. $n = \frac{2}{3}e_1 - \frac{2}{3}e_2 + \frac{1}{3}e_3$ нормалды бірлік векторлы элементар ауданда кернеулер векторы $p_n(x)$ анықтаңыз.

11. $\{e_i\} \in \mathbf{R}^3$ ортонормаланған базисте кернеулер тензоры P қандай да бір x нүктеде

$$P = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

матрицамен берілген болсын. $n = \frac{2}{3}e_1 - \frac{2}{3}e_2 + \frac{1}{3}e_3$ нормалды бірлік векторлы элементар ауданда кернеулер векторы $p_n(x)$ анықтаңыз.

7-тарау. ТҰТАС ОРТА ТЕРМОДИНАМИКАСЫ

Анықтаушы теңдеулерді келтіріп шығаруды үйрену үшін біз тұтас ортаның термодинамикалық қасиеттерін сипаттауды білуіміз керек. Термодинамикада қолданылатын негізгі түсінік – тұтас ортаның күйі түсінігі [25, 30, 38, 50]. Бұл түсінік күй параметрлерін енгізу арқылы сипатталады. Осы параметрлердің кейбіреулерімен біз алдыңғы тарауларда таныстық. Олар, мысалы, ρ меншікті тығыздық және U ішкі энергия. Мұнда біз *абсолют температура*, *энтропия* және *қысым* түсініктерімен танысамыз. Параметрлер жиынтығы қарастырылатын орта, модельдер және зерттеу есептеріне байланысты болатындығы түсінікті. Ал енді осы жаңа түсініктерді қарастыруды бастаймыз.

7.1 Термодинамиканың бірінші бастамасы

7.1.1 Тұтас орталардағы термодинамикалық эффектiлер

Физикалық тәжірибелер тұтас орталар таза механикалық құбылыс еместігін көрсетеді. Мысалы, тұтас ортаның эволюциясы (оны сипаттаушы параметрлердің өзгеруі) үдерісінде энергиялар бір түрден басқа түрге айналады (мысалы, металдардың қыздырғандағы ұзаруы, газдардың сығудағы қызуы және т.б.).

Термодинамика – физиканың жылу және басқа түрдегі энергиялар арасындағы байланыстарды зерттейтін бөлімі. Бізді, ең алдымен, жылу және механикалық энергиялар арасындағы байланыстар қызықтырады. Егер дәлірек айтатын болсақ, біз термодинамиканы емес, *термостатиканы* зерттеуді қарастырамыз, себебі бастапқы кезеңде математика тілінде тұтас ортаның тек қана *термодинамикалық тең салмақты* (уақыт өтуімен өзгермейтін) күйлерін сипаттаймыз. Ал теңсалмақты болмаған жылу үдерістерін сипаттау үшін біз арнайы аксиома көмегімен термодинамикалық параметрлерді уақыт өтуімен өзгеретіндей етеміз.

7.1.2 Күй параметрлері

Термодинамиканың, яғни бүкіл тұтас орта механикасының негізі болған жүйенің *күйі* және *күй параметрлері* түсініктерімен танысудан бастаймыз. Егер жүйенің (ортаның) бізді қызықтыратын барлық сипаттамаларын толық анықтайтын μ^1, \dots, μ^n параметрлердің

кейбірлерінің мәндері берілген болса, жүйенің (мысалы, тұтас ортаның қандай да бір көлемі) күйі берілген деп айтамыз. Жалпы, қандай да бір аралықтарда кез келген мәндерді қабылдауы мүмкін болған μ^i анықтаушы параметрлер *күй параметрлері* деп аталады.

Егер тұтас орта күйі күй параметрлерінің $\mu = \{\mu^1, \dots, \mu^n\}$ жиынтығымен сипатталатын болса, онда орта болуы мүмкін болған барлық жарамды μ жиынтықтардың жиыны \mathbf{P} *күйлер кеңістігі* деп аталады. Әдетте, күйлер кеңістігі – көпбейнелік болады. Оның өлшемі $\dim \mathbf{P}$ (яғни, сандық параметрлердің минимал мөлшері болып, көпбейнелік олардың көмегімен параметрленуі мүмкін) тұтас ортаның күй параметрлерінің нақты санын анықтайды: егер $\dim \mathbf{P} = k$ болса, онда орта k – параметрлі деп аталады. Сонымен, біз нақты тұтас орта күй параметрлерінің μ жиынтығымен толық сипатталады деп есептейміз. Термодинамикалық жүйенің түрлі күйлеріне күйлер кеңістігінің түрлі нүктелері сәйкес келеді. Күйлер параметрлерінің жиынтығы мен олардың саны тұтас ортаның түрлі модельдері үшін түрлі болады.

Ортаның күйін білу нені білдіреді? – деген сұраққа жауап беруге тырысып көрейік. Жауап мынадай болуы мүмкін. Барлық денелер атомдар мен молекулалардан тұрады, егер әрбір уақыт моментінде осы денені құрайтын барлық элементар бөлшектердің жағдайы мен қозғалысы белгілі болса, онда дененің де күйі белгілі деп айтуымызға болады. Бірақ бұл жауап бізді қанағаттандырмауы мүмкін. Мысалы, егер біз тыныштық күйіндегі ауаның бір кубтық сантиметрдегі күйін бергіміз келетін болса, онда бізге уақыттың $3 \cdot 27 \cdot 10^{19}$ функцияларын – молекулалардың (материал нүктелер деп саналатын) координаталарын беруімізге тура келеді, себебі, тыныштық күйіндегі газдың да молекулалары қозғалыста болады. Сонымен қатар, макроскопиялық тұрғыдан көптеген жағдайларда тыныштықтағы ауаның күйі екі параметрді ғана – p қысым және ρ тығыздықты беру арқылы анықталады.

Дискрет жүйе ретінде қарастырылатын ортаның күйін анықтайтын көп санды параметрлерден аз санды және ортаның макроскопиялық күйін анықтайтын параметрлерге (газ үшін p қысым және ρ тығыздыққа өту сияқты) өту сұйықтықтар, газдар және қатты денелер физикасының маңызды мазмұнын құрайды.

Макроскопиялық параметрлер жалпы жағдайда қозғалысы және орналасуы әртүрлі болған үлкен санды молекулалардың жиынтықтарына қатысты кейбір ұйғарымдарда есептелген статистикалық

орта шамалар ретінде құрылуы мүмкін. Мысалы, газдарда v макроскопиялық жылдамдықты физикалық кіші көлемдегі молекулалар жиынтығының ауырлық орталығының жылдамдығы ретінде; T температураны – бір еркіндік дәрежесіне тура келетін макроскопиялық қозғалысқа қатысты атомдар мен молекулалардың тәртіпсіз (хаостық) қозғалыстарының орташа энергиясы ретінде; қандай да бір элементар аудандағы p_n кернеуді – молекулалардың тәртіпсіз қозғалысында осы элементар ауданнан олар алып өтетін импульстің орташа сипаттамасы ретінде енгізуге болады.

Жалпы жағдайда, анықтаушы параметрлер қарастырылатын белгілі есептер кластары үшін гипотезалар көмегімен енгізіледі және мұнда тәжірибелік берілгендер мен теориялық зерттеулерге сүйенеді. Көптеген күрделі жағдайларда анықтаушы параметрлерді енгізу мәселесі қазіргі күнге дейін толық өз шешімін таппаған, мысалға, тұтқыр-пластикалық қатты денелер модельдері үшін, теңсалмақты емес құбылыстар модельдері және т.б.

7.1.3 Тұтас орталар үшін күй параметрлерінің саны жайлы

Материалдық континуумның кіші бөлшегінің ішкі күйін элементар бөлшектердің дискрет жүйесіне қарағанда ақырлы және саны анағұрлым кіші болған анықтаушы параметрлермен сипаттау мүмкін. Мысалы, классикалық серпімділік теориясында деформацияланған қатты дене бөлшегінің күйі тек қана жеті айнымалы параметрлермен – ε деформация тензорының алты компоненталары және T температурамен, сондай-ақ берілген нақты орта үшін – Юнг модулі, Пуассон коэффициенті және жылусыйымдылық деп аталатын физикалық тұрақтылармен сипатталады. Сонымен қатар, қандай да бір тұтас ортаның моделінде континуумның шексіз кіші бөлшегінің күйін анықтаушы параметрлер санының шексіз болуына шек қойылмайды. Мұндай модельдерге мысал ретінде, мұрагерлік сипаттағы денелер модельдерін келтіруге болады. Осындай модельдерді енгізуде, кернеу берілген уақыт моментінде тек қана деформация мен температурадан тәуелді болмастан, дене деформациясының барлық алдыңғы уақыт моменттеріндегі жағдайына да, яғни деформация тензорының $\varepsilon(t)$ және температураның $T(t)$ функцияларына тәуелді деп есептейді. Бұл – кернеу ε, T және олардың уақыт бойынша барлық туындыларына тәуелді, яғни мұндай орталар күйлерінің параметрлері шексіз дегенді білдіреді.

Тұтас ортаның ақырлы көлемінің күйін анықтау үшін, жалпы жағдайда, әрқашан функцияларды (сандарды емес) – деформациялардың, температураның және т.б. үлестірімдерін беру керек. Функцияны беру шексіз санды параметрлерді берумен пара-пар (мысалы, осы функция үшін Фурье коэффициенттері). Сондықтан ақырлы көлем үшін анықтаушы параметрлер саны жалпы жағдайда тұтас ортаның кез келген моделі үшін әрқашан шексіз болады.

Бірақ дененің күйін беретін барлық функцияларды жуықтап, оларды сызықтық, квадраттық немесе дәрежесі жоғары болмаған полином деп есептеуге болады. Сондықтан осы полиномдардың коэффициенттері тұтас ортаның шекіз кіші элементтерінің күйін беретін ақырлы санды параметрлерін құрайды. Тұтас ортаның механикасын құруда шексіз кіші бөлшектер термодинамикалық жүйелер ретінде, олар үшін орны және қозғалыс сипаттамалары жайлы механикалық түсініктер, сондай-ақ ішкі күй жайлы физикалық түсінік анықталған деп қарастырылады.

Шексіз кіші бөлшек үшін анықтаушы параметрлердің ақырлы жүйесі бар деп есептейміз.

7.1.4 Анықтаушы параметрлердің толық жүйесі

μ^i арқылы айнымал болуы мүмкін параметрлерді, ал k^i арқылы физикалық тұрақтыларды белгілеуге келісіп аламыз. Анықтама бойынша, белгіленген кіші бөлшек үшін $\mu^1, \dots, \mu^n, k^1, \dots, k^m$ шамалар анықтаушы параметрлердің толық ортонормаланған базисін құрайды, яғни олар тәуелсіз берілуі және белгілі бір аралықтағы өзгерулері кез келген болуы мүмкін, ал олардың жиынтығы сондай қасиетке ие болып, берілген класс есептерінде қарастырылатын күйлер мен қозғалыстардың барлық басқа сипаттамаларын нақты дербес есепке тәуелді болмайтын әмбебап түрде олар арқылы өрнектеуге болады. Мысалы, газдың бөлшегі үшін тығыздық пен температураны белгілі дәрежеде өз қалауымызша беруімізге болады, ал басқа термодинамикалық функциялар, мысалы, энтропия мен қысым, анықтаушы параметрлер арқылы анықталады.

Берілген нақты есептегі анықтаушы параметрлер жүйесі мен орта күйін анықтайтын параметрлер жүйесін бір-бірінен ажыратып алған жөн. Бірінші жағдайда – бұл теңдеулер жүйелері және шекаралық және басқа да шарттар негізінде ақырлы денелер үшін бірлік глобал құбылыстарды ажырататын, есеп шартын сипаттайтын пара-

метрлер жүйесі; ал екінші жағдайда – бұл күй сипаттамалары болып, олар үшін мүмкін болған барлық нақты есептер үшін орындалатын теңдеулерді құру қажет. Орта элементтерінің физикалық күйін анықтайтын параметрлер жүйесін белгілеу маңызды болады және логикалық мағынада тұтас орта моделін анықтауда алғашқы кезең болып табылады.

Математикалық тұрғыдан, $\mu^1, \dots, \mu^n, k^1, \dots, k^m$ күй параметрлері орта жағдайын сипаттаушы тұйықталған теңдеулер жүйесіне кіретін функциялардың аргументтері болады. Осы функциялар тәуелсіз айнымалылардың түрлі жиынтығына тәуелді болуы, осыған сәйкес тұтас ортаның нақты моделін белгілейтін анықтаушы параметрлер жүйесі түрлі шамалардан құрылуы мүмкін. Мысалы, газ үшін бұл p және ρ немесе p және T , немесе ρ және T және т.б. болуы мүмкін.

7.1.5 Үдерістер және циклдер

Кез келген $\mu_1, \mu_2 \in \mathbf{P}$ үшін $C_p(\mu_1, \mu_2)$ арқылы μ_1 -ден μ_2 -ге алып баратын барлық жолдар жиынын (\mathbf{P} -да жататын бағытталған қисықтар), ал

$$C_p = \bigcup \{ C_p(\mu_1, \mu_2) : \mu_1, \mu_2 \in \mathbf{P} \}$$

арқылы \mathbf{P} -дағы барлық жолдар жиынын белгілейміз. C_p -да *үдерістер* деп аталатын қандай да бір \mathcal{E}_p ішжиын ажыратылады. Үдерістер физикалық жүзеге асырылатын тұтас ортаның μ_1 күйінен μ_2 күйіне өту үдерістеріне жауап береді. $\mathcal{E}(\mu_1, \mu_2) \in \mathcal{E}_p$ үдеріс *керіленетін* деп айтылады, егер осы қисық бойлап кері бағытта жүретін $\mathcal{E}(\mu_1, \mu_2)$ жол да үдеріс болатын болса. Мысалы, бір ұшы қыздырылған металл сым бойлап жылудың диффузия үдерісі керіленуші үдеріс болмайды, ал цилиндрдегі газдың сығылу үдерісі керіленуші үдеріс болады.

Берілген бөлшек үшін μ^1, \dots, μ^n күйлер жиынтығы күйлер кеңістігінде үзіліссіз қисық құратын болса, онда үдеріс *үзіліссіз* деп аталады.

Өзгеруші параметрлер мен олардың сипаттары түрлі үдерістер үшін әртүрлі болады. Мысалы, табиғаты механикалық болмаған

барлық параметрлер тұрақты мәндерін сақтағанда, үдерістер таза механикалық болуы мүмкін.

Күйлер кеңістігінде үдеріс нәтижесінде өзінің бастапқы жағдайына қайтып келетін үдерісті *цикл* деп атайды. Үзіліссіз үдерістер жағдайында циклге күйлер кеңістігінде тұйық қисық сәйкес келеді.

Қандай да бір A күйді белгілеп алу және осы A күй арқылы өтетін мүмкін болған барлық үзіліссіз циклдерді және қандай да бір B күйді қарастыру мүмкін. Түрлі үдерістер немесе циклдерге түрлі сыртқы шарттар сәйкес келеді. Бұл μ^1, \dots, μ^n күйлерді анықтаушы теңдеулерде әртүрлі функциялар бар болуында көрініс табады, яғни соның нәтижесінде оларды таңдап алу мүмкін болып, қарастырылатын үдерістерге әсер етуімізге болады.

7.1.6 Жүйенің сыртқы объектілермен әсері

Қандай да бір үдерісті жүзеге асыра отырып, жүйе жалпы жағдайда сыртқы денелер және өрістермен өзара әсерде болады. Тұтас ортаның модельдерін құрудағы негізгі мәселе тұтас ортаның ажыратылып алған бөлшегінің оған қатысты сыртқы болған денелермен және өрістермен, сондай-ақ осы ортаның көршілес бөлшектерімен өзара әсерінің заңдары мен механизмдерін орнату болып табылады. Тұтас орта механикасын қолдануда анықтаушы параметрлер саны аз болған макроскопиялық қатынастар қажет. Тұтас орта модельдерін құруда әрқашан қандай да бір түрде феноменологиялық гипотезаларды сипаттау және пайдалану қажет болады, олардың тәжірибелердегі күзетулерді сипаттау үшін пайдалылығы тексеруден өткен соң табиғат заңдары деп аталады.

Тұтас орта механикасында бөлшектің көрші бөлшекпен, сыртқы денелермен және өрістермен өзара энергия алмасуын есепке алудың маңызы зор. Энергия түсінігі энергияның әртүрлі түрлері жайлы түсініктермен тығыз байланысқан. Бұл бөлшектердің кинетикалық энергиясы, бөлшектердің салыстырмалы орналасуына қатысты потенциалдық энергия, жылу энергиясы, электромагниттік энергия, химиялық байланыстар энергиясы және т.б. энергиялар болуы мүмкін.

Ақырлы санды анықтаушы параметрлермен сипатталатын жүйені, мысалы, тұтас ортаның шексіз кіші бөлшегін немесе V шекті көлемді осы көлемнің барлық бөлшектері бірдей үдерістер

жүзеге асырады деген шартта қарастырайық (бұл жағдайда күй параметрлері көлемі бойынша тұрақты).

Бөлшектің ішкі μ^1, \dots, μ^n күйлері және олардың шексіз кіші $d\mu^1, \dots, d\mu^n$ өзгерулерінің сипаттамалары бойынша бөлшекке сырттан келетін түрлі қосынды макроскопиялық энергия ағындары жайлы ұйғарым жасауға болады деп есептейміз.

Осы жақын уақытқа дейін механикада бөлшекке табиғаты механикалық болған энергия ағынының, яғни көлемдік немесе массалық макроскопиялық сыртқы күштер және бөлшекке әсер етуші сыртқы беттік күштердің жұмысы және жылуөткізгіштік, сәулелену, электр тогының ағысы және басқа да механизмдер есебіне бөлшек алуы мүмкін болған жылу энергиясының ағынының маңызы үлкен болды. Қазіргі күнде көпшілік жағдайларда электрмагниттік өзара әсерлерді есепке алуды қажет етеді: бөлшектің сыртқы ортамен энергия алмасуында өзара әсерлердің күрделі механизмдерін есепке алу қажеттіліктері туындайды, мысалы, құрылымдық және фазалық алмасулар есебінен болатын энергия алмасулары, т.б.

Қандай да бір $d\mu^1, \dots, d\mu^n$ үдеріс үшін кіші бөлшекке келетін толық сыртқы энергия құйылысын (ағынын) $dA^{(e)} + dQ^{(e)} + dQ^*$ түрде жазуға болады, мұнда $dA^{(e)}$ – сыртқы макроскопиялық массалық және беттік күштердің жұмысы, $dQ^{(e)}$ – жылу ағыны (приток тепла – жылу құйылысы), dQ^* – макроскопиялық күштер жұмысы және жылуалмасудан басқа, түрлі өзара әсерлер механизмдері есебінен бөлшекке сырттан келетін, мысалы, ортаның магниттелуі мен электрлік поляризациялануына кететін энергияны есепке алған жағдайдағы электрмагниттік өріспен өзара әсері есебінен келетін энергия құйылысы және басқа да себептер.

Сыртқы күштердің элементар күші үшін анықтаушы параметрлер жүйесінің негізгі мағынасына және тұтас орта моделінің анықтамасына кіретін кейбір ұйғарымдарға сәйкес $d\mu^1, \dots, d\mu^n$ параметрлердің өзгеруіне сәйкес келетін шексіз кіші элементар үдеріс үшін мынадай түрдегі формуланы жазуға болады:

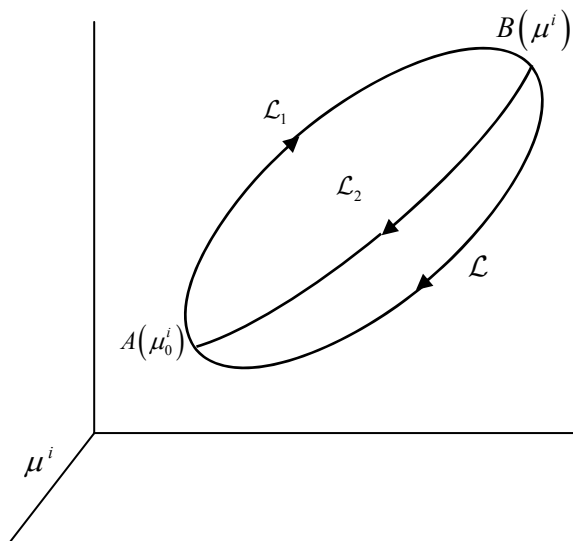
$$dA^{(e)} = P_i (\mu^1, \dots, \mu^n, k^1, \dots, k^m) d\mu^i .$$

Бұл формулада сыртқы күштердің жұмысы $dA^{(e)}$ қарастырылатын бөлшектің ішкі параметрлері мен олардың өсімшелері арқылы

берілген. P_i функциялардың түрі, негізінен модельді анықтау үшін қажет болатын негізгі постулаттарды сипаттаумен байланысты болады.

7.1.7 Термодинамиканың бірінші бастамасы. Энергияның сақталу заңы

Күйлер кеңістігінде \mathcal{L}_1 қисық бойлап күйлер параметрлерінің мәндері μ_0^i болған A нүктеден күйлер параметрлерінің мәндері μ^i болған B нүктеге дейін өтетін үдеріс бар болсын деп есептейміз (7.1-сурет).



7.1-сурет. Энергияның сақталу заңы

Осы үдерісте жүйе сырттан алатын энергияның толық құйылысы түсінігін енгіземіз. Ол мынаған тең:

$$A^{(e)} + Q^* = \int_{AB(\mathcal{L}_1)} P_i d\mu^i + \int_{AB(\mathcal{L}_2)} Q_i d\mu^i \quad (7.1)$$

және бірінші қарағанда, үдеріске, яғни күйлер кеңістігінде \mathcal{L}_1 интегралда жолына тәуелді болуы керек сияқты.

Термодинамиканың бірінші бастамасын немесе энергияның сақталу заңын бірінші текті мәңгі қозғалтқышты, яғни сыртқы энергия көзін пайдаланбастан пайдалы энергия көзі бола алатын циклді жұмыс істейтін машинаны жүзеге асыру мүмкін еместігі ретінде сипаттауға болады. Бұл тұжырымды барлық белгілі тәжірибелік берілгендер растайтын заң ретінде қарастырған жөн.

Ал енді жүйе цикл орындайтын болсын, мысалы, C . Онда термодинамиканың бірінші бастамасы немесе энергияның сақталу заңы бойынша жүйеге сырттан келетін кез келген жүзеге асырылатын цикл орындайтын энергияның толық құйылысы нөлге тең болады, яғни

$$\oint_C (P_i + Q_i) d\mu^i = 0. \quad (7.2)$$

(7.2)-ден жүйеге сырттан келетін энергияның толық құйылысы (7.1) \mathcal{L}_1 үдеріске тәуелді болмайтындығы, ол жүйенің бастапқы және соңғы күйлеріне ғана тәуелді болатындығы тікелей келіп шығады. Оны көрсету үшін A және B күйлерінің арасында қарастырылып жатқан кез келген \mathcal{L}_1 үдерістен басқа \mathcal{L}_2 үдерісті және B күйден A күйге өтетін \mathcal{L} үдерісті қарастырамыз. $\mathcal{L}_1\mathcal{L}$ және $\mathcal{L}_2\mathcal{L}$ үдерістер тұйық цикл құрайды және энергияның сақталу заңы бойынша төмендегі теңдіктер орынды болады:

$$A^{(e)} + Q^* = \int_{\mathcal{L}_1} (P_i + Q_i) d\mu^i = \int_{\mathcal{L}_2} (P_i + Q_i) d\mu^i = - \int_{\mathcal{L}} (P_i + Q_i) d\mu^i.$$

Сондықтан, егер жүйенің бастапқы күйі A белгіленген болса, онда жүзеге асырылатын барлық үдерістер үшін жүйеге сырттан құйылатын энергияның толық құйылысы жүйенің соңғы күйіне тәуелді болмайды, яғни

$$A^{(e)} + Q^* = E(\mu^1, \dots, \mu^k) - E(\mu_0^1, \dots, \mu_0^k),$$

мұнда E – жүйенің күй параметрлерінің бірімәнді функциясы болып, оны жүйенің толық энергиясы деп атайды. Сонымен, термодинамиканың бірінші заңынан жүзеге асырылуы мүмкін үдерістер үшін толық дифференциалы макроскопиялық сыртқы массалық және беттік күштердің $dA^{(e)}$ элементар жұмыстарының және жүйеге сырттан басқа түрдегі энергиялардың элементар құйылыстарының қосындысына тең болатын $E(\mu^1, \dots, \mu^k)$ күй функциясы бар болатындығы келіп шығады:

$$dE = dA^{(e)} + dQ^* = (P_i + Q_i)d\mu^i .$$

Жүйенің $E(\mu^1, \dots, \mu^k)$ толық энергиясы аддитив тұрақтыға дейінгі дәлдікпен анықталған – жүйенің бастапқы күйі A -дағы мәні E .

Егер жүйеге сыртқы энергия құйылыстары белгілі болса, онда термодинамиканың (7.2) бірінші бастамасы жүйенің E толық энергиясын анықтау үшін негіз бола алады. Керісінше, қандай да бір жақтан энергия белгілі болса, онда энергияның сақталу заңын қарастырылатын бөлшектің сыртқы денелермен өзара әсерінің механизмдерін, яғни $dA^{(e)} + dQ^*$ анықтау үшін пайдалануға болады.

7.1.8 Жүйенің ішкі энергиясы

Жүйенің меншікті ішкі энергиясы U аддитив тұрақтыға дейінгі дәлдікпен анықталады және ол әрбір термодинамикалық жүйе үшін бар болады. Егер кеңістік пен уақытты біртекті деп есептейтін болсақ, онда меншікті ішкі энергия U кеңістік координаталары мен уақыттан айқын тәуелді болмайды. Біртектілік қасиеті кеңістіктің барлық нүктелерінде және барлық уақыт моменттерінде бірдей сыртқы шарттарда берілген термодинамикалық жүйеде үдерістер бірдей өтетіндігін білдіреді.

Толық энергияны және ішкі энергияны бүтіндей дене үшін, сондай-ақ оның жекеленген бөліктері үшін де енгізуге болады. Дененің ақырлы бөлігінің немесе бүтіндей дененің ішкі энергиясы, жалпы жағдайда, аддитивтік қасиетке ие болмайды, яғни дененің ішкі энергиясы осы денені құрайтын оның бөліктерінің ішкі энергияларының қосындысына тең болмайды. Бірақ көптеген жағдайларда ішкі энергияны аддитив деп қарастыруға, мысалы, беттік керілуді есепке алмаса болатын жағдайларда су үшін болады.

Энергияның сақталу заңын өрнектейтін әмбебап қатынасты мына түрде жазуға болады:

$$dE + dU = dA^{(e)} + dQ^* + dQ^{**} ,$$

мұнда dU – қарастырылатын дененің ішкі энергиясының өзгеруі, dE – оның кинетикалық энергиясының өзгеруі, $dA^{(e)}$ – сыртқы мак-

роскопиялық күштердің элементар жұмысы, dQ^* – денеге сырттан жылудың элементар құйылысы, dQ^{**} – макроскопиялық механикалық күштердің жұмысынан өзгеше денеге сырттан жылу емес түрдегі энергия түрлерінен келетін жылудың элементар құйылысы.

7.1.9 Термодинамикалық тепе-теңдік

Жүйенің ішкі күйлерінің барлық сипаттамалары сыртқы шарттар сақталған жағдайда өздерінің мәндерін жеткілікті ұзақ уақыт сақтап тұратын күйін жүйенің термодинамикалық теңсалмақты күйі деп атайды. Күйлер кеңістігінде термодинамикалық теңсалмақтылық нүктемен кескінделеді.

Термодинамикалық үдерістер жылдам, сондай-ақ баяу өтуі де мүмкін. Үдерістің шектік жағдайын қарастыру мүмкін, яғни үдеріс соншалықты баяу өтетін болып, ондағы барлық параметрлердің өзгеру жылдамдықтары шексіз кіші болады. Күйлер кеңістігінде мұндай үдеріс қисықпен кескінделеді, оның әрбір нүктесі тепе-теңдік нүктесі болады. Әрбір аралық күйі тепе-теңдік күйі болатын шексіз баяу үдерістер теңсалмақты үдерістер деп аталады. Тең салмақты үдерістерді сипаттаушы қатынастарда параметрлердің өзгеру жылдамдықтары шамасының маңызы елеулі болмайды, бірақ теңсалмақты үдерістерде анықтаушы параметрлердің өзгеру бағыттары маңызды болуы мүмкін.

Ақырлы жылдамдықтарда өтетін үдерістер (егер жылдамдықтар физикалық байланыстарға әсер ететін болса) тең салмақты емес деп аталады.

Егер әрбір аралық күй үшін параметрлердің шексіз кіші өсімшелерінің барлық теңдеулері осы өсімшелердің таңбаларын қарама-қарсы таңбаға алмастырғанда да қанағаттандыратын болса, онда қандай да бір A күйден B күйге өтетін үдеріс керіленуші деп аталады. Сонымен, егер қандай да бір күйлер тізбегі күйлер кеңістігінде керіленуші үдеріс құрайтын болса, онда осы тізбекті жүйе тура және кері бағытта да жүріп өтеді. Сондай-ақ, тура және кері үдерісте жолдың әрбір элементіне сәйкес келетін сыртқы $dA^{(e)}$, dQ^* және dQ^{**} энергия құйылыстарының тек қана таңбаларынан айырмашылық болады. Егер үдеріс осындай қасиетке ие болмаса, онда үдеріс керіленбейтін деп аталады.

7.2 Термодинамиканың екінші бастамасы. Энтропия

Мұнда біз термодинамиканың екінші заңын қарастырамыз. Бұл заң да термодинамиканың бірінші заңындай әмбебап тұжырым болып, оның дұрыстығы физикалық құбылыстардың механизмдері жайлы барлық белгілі тәжірибелер және теориялық зерттеулерге негізделген. Термодинамиканың екінші заңы температурасы төмен болған денеден температурасы жоғары болған денеге жылуды басқа денелерде ешқандай бір өзгертулерсіз беретін құрылғы мүмкін еместігін тұжырымдайды. Термодинамиканың екінші заңын мынадай да сипаттауға болады: екінші текті мәңгі қозғалтқыш деп аталатын, термодинамиканың бірінші заңына сәйкес қандай да бір цикл бойынша жұмыс жасай отырып белгілі бір температурадағы жылу көзінен тек қана оны суыту есебінен периодты жұмыс жасайтын машинаны құру мүмкін емес (тұрақты температуралы резервуардан жылу алу).

Алдыңғы 6.1.7-пунктте қарастырылғандай, механикалық және жылу энергияларының бір-біріне алмасулары термодинамиканың бірінші заңымен сипатталады. Термодинамикалық үдерісте жылу мен жұмыстың сәйкесінше кинетикалық және ішкі энергияларға өтуін өрнектейтін қатынастар энергия теңдеуінде жатыр. Алайда, термодинамиканың бірінші заңы осы өту үдерісі керіленуші немесе керіленбейтін бола ма деген сұраққа жауап бермейді. Барлық нақты үдерістер керіленбейтін үдерістер болады, бірақ керіленетін үдерістер пайдалы жуықтау болуы мүмкін, себебі көптеген жағдайларда энергияның диссипациясын (жұтылуын) есепке алмаса болатын кіші шама деп қарастыруға болады.

Термодинамиканың екінші заңы екі түрлі күй функцияларының – Θ абсолют температура және S энтропияның бар болуын тұжырымдайды. Θ абсолют температура – оң шама болып, ол эмпирикалық температураның ғана функциясы болады. Энтропия аддитивтік қасиетке ие деп есептейміз, яғни жүйенің толық энтропиясы оның бөліктерінің энтропияларының қосындысына тең. Тұтас орта механикасында меншікті энтропияны (бірлік массаға) және S энтропия тығыздығын енгізеді, нәтижеде S толық энтропия $\int_V \rho s dV$ интегралға тең болады. Жүйенің энтропиясы қоршаған ортамен өзара әсерден немесе жүйенің өзінің ішінде жүретін

өзгерулер есебінен болуы мүмкін, сондықтан төмендегі теңдікті жазуымызға болады:

$$ds = ds^{(e)} + ds^{(i)},$$

мұнда ds – меншікті энтропияның өсімшесі, $ds^{(e)}$ – сыртқы ортамен әсерден туындайтын өсімше, $ds^{(i)}$ – ішкі өзгеру өсімшесі. $ds^{(i)}$ өсімше еш уақытта теріс болмайды. Ол керіленетін үдерістерде нөлге тең, ал керіленбейтін үдерістерде оң болады.

7.2.1 Жылу мөлшері

Жылу мөлшері Q немесе *жылу энергиясы* физикалық денедегі молекулалардың броундық қозғалыстарының энергиясы ретінде анықталады. Ортаның осы сипаттамасын күй параметрі деп есептеуге болмайды, себебі μ_1 күйден μ_2 күйге $\varepsilon(\mu_1, \mu_2)$ жол арқылы өтуде ортаның алған немесе ажыратқан Q жылу мөлшері осы жолға тәуелді болады. Керіленетін үдерісте жылу құйылысы мынадай дифференциалдық формада берілуі мүмкін:

$$dQ(\mu) = \sum_{j=1}^k B_j(\mu) d\mu^j,$$

сонда

$$\varepsilon(\mu_1, \mu_2) = \{ \mu(s) : s \in [0, 1], \mu(0) = \mu_1, \mu(1) = \mu_2 \}$$

жол арқылы μ_1 күйден μ_2 күйге өтудегі жылу құйылысы

$$Q = \int_{\varepsilon(\mu_1, \mu_2)} dQ(\mu) = \int_0^1 \sum_{j=1}^k B_j[\mu^1(s), \dots, \mu^k(s)] \mu^j(s) ds. \quad (7.3)$$

dQ дифференциалдық форманың физикалық мағынасы – элементар үдерістегі элементар жылу құйылысы.

7.2.2 Абсолют температура және энтропия

μ_1 күйден μ_2 күйге өтуде Q жылу құйылысының $\varepsilon(\mu_1, \mu_2)$ жолға тәуелді болатындығының себебі мынадай: (7.3)-тегі интеграл ішіндегі $dQ(\mu)$ қандай да бір функцияның толық дифференциалы болмайды. *Абсолют температура* деп аталатын Θ күй параметрі бар болып, dQ/Θ қатынас кез келген керіленетін үдеріс үшін қандай да бір S функцияның толық дифференциалы болады. Сонда кез келген керіленетін үдеріс үшін

$$S_2 - S_1 = S(\mu_2) - S(\mu_1) = \int_{\varepsilon(\mu_1, \mu_2)} \frac{dQ}{\Theta}.$$

7.2.3 Термодинамиканың екінші бастамасы

Физикалық тәжірибелер барлық жылу үдерістері мүмкін емес-тігін көрсетеді (мысалы, жоғарыда сипатталған бір ұшы қыздырылған метал стержендегі жылудың диффузиясы үдерісіне кері үдеріс).

Термодинамиканың екінші бастамасы (немесе заңы) болуы мүмкін жылу үдерістерін ажыратады.

Егер тұтас орта оқшауландырылған (яғни, сырттан жылудың құйылуы мен денеден жылудың берілуі болмаған жағдайда) болса, онда ортаның энтропиясы кемімейді.

Математикалық бұл мынадай теңсіздікпен өрнектеледі:

$$\Theta dS \geq dQ. \quad (7.4)$$

Осы физикалық заңның сипатталауының тарихи эволюциясы төменде келтірілген.

1850 ж. Клаузиус: *Жалғыз нәтижесі суық денеден жылылау денеге жылуды беру болған үдеріс мүмкін емес.*

1851 ж. Кельвин: *Жалғыз нәтижесі жылуды жұмысқа айналдыратын үдеріс мүмкін емес.*

1909 ж. Каратеодори: *Кез келген μ_1 күйдің кез келген маңайында μ_2 күй бар болып, ол жылу құйылысы нөл болған $\varepsilon(\mu_1, \mu_2)$ үдерістің соңғы күйі бола алмайды.*

Керіленетін үдерістер үшін термодинамиканың екінші заңынан төмендегі теңдік келіп шығады:

$$\Theta dS = dQ, \quad (7.5)$$

немесе

$$\Theta dS = dU + dA. \quad (7.6)$$

(7.6) теңдікті *негізгі термодинамикалық тепе-теңдік* деп атайды.

7.3 Термодинамика аксиомалары

7.3.1 Термодинамиканың негізгі аксиомасы

Тұтас ортаға термодинамикалық талап мынадай термодинамикалық аксиома түрінде сипатталауы мүмкін:

Тұтас орта үшін термодинамиканың бірінші және екінші бастамасы орындалады.

7.3.2 Локаль тепе-теңдік аксиомасы

Жоғарыда сипатталған үдеріс түсінігі идеалдау болатындығы түсінікті жағдай, себебі тұтас ортаның теңсалмақты күйлерін (уақыт бойынша өзгермейтін) үзіліссіз тізбекті алмастыруды тек жуық түрде жүзеге асыру мүмкін болады. Алайда теңсалмақты болмаған жылу үдерістерін сипаттау үшін термодинамикалық теңсалмақты күйлер үшін енгізілген түсініктерді пайдалануға болады. Тек қана тұтас ортаның энтропия және абсолют температурасы түсініктерін нақтылау қажет. Біз бұл түсініктерді аксиоматикалық анықтаймыз.

\mathbf{R}^3 -тегі үзіліссіз өлшем тұтас ортаның *энтропиясы* деп аталады. Сонымен, теріс болмаған саналымды-аддитив $S: \omega_i \rightarrow S(\omega_i)$ жиындар функциясы берілген деп қарастырылады. Бұл, бұрын айтылып өтілгендей, *меншікті энтропияның* бар болуын қамтамасыз етеді, яғни сондай $s: D \rightarrow \mathbf{R}$ функция бар болып, кез келген ω_i көлем үшін

$$S(\omega_i) = \iiint_{\omega_i} s(x, t) \rho(x, t) d\omega = \iiint_{\omega_i} s \rho d\omega \quad (7.7)$$

теңдік орынды болады.

Сондай-ақ, *абсолют температура* деп аталатын теріс болмаған $\Theta: D \rightarrow \mathbf{R}_+$ функция бар деп есептеледі.

Тұтас орта термостатикалық толық сипатталған, яғни ортаның тең салмақты күйлерін толық сипаттайтын күй параметрлерінің $\boldsymbol{\mu} = \{\mu^1, \dots, \mu^k\}$ жиынтықтары жататын \mathbf{P} күйлер кеңістігі белгілі болсын деп қарастырайық. Бұл U меншікті ішкі энергия, ρ тығыздық, s меншікті энтропия, Θ абсолют температура және т.б.

$\mu = \{\mu^1, \dots, \mu^k\}$ күйлер параметрлерінің берілген функциялары болатындығын білдіреді.

Термостатикалық сипаттаудан термодинамикалыққа өту мүмкіндігін локаль тепе-теңдік аксиомасы тұжырымдайды:

Тұтас ортаның кез келген x бөлшегінің кез келген t уақыт моментіндегі күйі толықтай $\mu = \{\mu^1, \dots, \mu^k\}$ параметрлермен сипатталады, бөлшектің барлық (U, ρ, s, Θ және т.б) термодинамикалық параметрлері μ бойынша термостатикалық сипаттаудағы функциялардың өздері арқылы анықталады.

Интуитивтік деңгейде бұл аксиома тұтас ортаның әрбір бөлшегі әрбір уақыт моментінде $\mu = \{\mu^1, \dots, \mu^k\}$ күйлер параметрлерімен сипатталатын тең салмақты термодинамикалық жүйемен теңестірілетіндігін білдіреді.

7.3.3 Клаузиус-Дюгем теңсіздігі

Термодинамиканың (7.4) екінші бастамасын динамикалық (тең салмақты емес) жағдайда басқаша жазу мүмкін. Мысалы, мынадай теңсіздік орынды болады деп қарастырылады:

$$\frac{d}{dt} S(\omega_t) \geq - \iint_{\partial \omega_t} \frac{q \cdot n}{\Theta} d\sigma. \quad (7.8)$$

Осы теңсіздіктің орынды болатындығын көрсету үшін ω_t көлем оқшауландырылған, яғни $\partial \omega_t$ -да $q \cdot n = 0$ шарты орынды болсын деп есептейміз, сонда

$$\frac{d}{dt} S(\omega_t) \geq 0,$$

ал бұл теңсіздік «термостатикалық» термодинамиканың екінші бастамасымен толықтай дәлме-дәл түседі (7.2.3-пункттің басын қараңыз).

Егер (7.8) теңсіздікте S -ті (7.7) формула бойынша алмастыратын болсақ және әрі қарай интеграл ішінде дифференциалдау формуласын және Гаусс – Остроградский формуласын пайдаланатын болсақ, онда төмендегі теңсіздікті аламыз:

$$\iiint_{\omega_t} \left(\rho \frac{ds}{dt} + \operatorname{div} \frac{q}{\Theta} \right) d\omega \geq 0.$$

2-лемманың (6.1.2-пункт) аналогын қолданатын болсақ, термодинамиканың (7.8) екінші бастамасының локаль (интегралдық емес) эквиваленті болған *Клаузиус – Дюгем теңсіздігі* деп аталатын төмендегі теңсіздік келіп шығады:

$$\rho \frac{ds}{dt} + \operatorname{div} \frac{q}{\Theta} \geq 0 \quad (7.9)$$

7.3.4 Фурье аксиомасы

Фурье аксиомасы (6.21) энергияның сақталу теңдеуіндегі жылу ағыны векторын абсолют температура арқылы өрнектеуге мүмкіндік береді.

Жылу ағыны векторы температура градиентіне пропорционал болады:

$$q = -\chi \cdot \nabla \Theta, \quad (7.10)$$

мұнда χ – жылуөткізгіштік коэффициенті деп аталатын теріс емес күй параметрі.

Фурье аксиомасы – физикалық күзетулердің жалпыламасы ретінде алынған физикалық Фурье заңының математикалық эквиваленті. (7.10) формуладағы «–» таңбасы физикалық күзетілетін жылудың «ыстық» аймақтардан «суық» аймақтарға берілетіндігін білдіреді. Төменде біз Фурье аксиомасын анықтаушы теңдеулердің санақ жүйесінен тәуелсіздігінің жалпы принциптерінен келтіріп шығаруға болатындығын көрсетеміз.

χ жылуөткізгіштік коэффициенті нақты тұтас орта модельдерінде күйдің басқа параметрлерінің белгілі функциясы болады. Көптеген орталар үшін ол тұрақты шама болады.

Фурье аксиомасы (6.21) энергияның сақталу заңының теңдеуінде q векторлық белгісізді екі Θ және χ скаляр шамаларға алмастыру арқылы (DM) дифференциалдық модельде белгісіздер санын біреуге азайтуға мүмкіндік береді:

$$\rho \frac{dU}{dt} = P : D + \operatorname{div}(\chi \nabla \Theta).$$

Бақылау сұрақтары

1. Физиканың термодинамика бөлімі нені зерттейді?
2. Қандай жағдайда жүйенің күйі берілген деп айтамыз?
3. Күй параметрлері, күй кеңістігі деп неге айтылады?

4. Макроскопиялық параметрлерді қалай енгізуге болады? Мысалдар келтіріңіз.
5. Күй параметрлерінің саны қандай болуы мүмкін?
6. Үдерістер мен циклдер деп неге айтылады?
7. Керіленетін және керіленбейтін үдерістер деп қандай үдерістерге айтылады? Мысалдар келтіріңіз.
8. Термодинамиканың бірінші бастамасын (заңын) сипаттаңыз.
9. Жүйе сырттан алатын энергияның толық құйылысы түсінігі және ол қандай формуламен анықталады?
10. Жүйенің ішкі энергиясы түсінігі. Кеңістік пен уақыттың біртектілігі дегенде нені түсінеміз?
11. Жүйенің термодинамикалық тең салмақты күйі деп қандай күйге айтамыз?
12. Термодинамиканың екінші бастамасын (заңын) сипаттаңыз.
13. Абсолют температура және энтропия түсініктері.
14. Клаузиус-Дюгем теңсіздігі.
15. Фурье аксиомасы.

8-тарау. ТҰТАС ОРТАНЫҢ ДЕФОРМАЦИЯСЫ ЖӘНЕ АНЫҚТАУШЫ ТЕНДЕУЛЕР

Анықтаушы теңдеулерді келтіріп шығаруды білу үшін біз тұтас ортаның фундаменталды сипаттамасы болған деформация тензорын тереңірек қарастырып шығуымыз қажет болады. Сондай-ақ, бұл тарауда біз анықтаушы теңдеулерді құрудың негізгі принциптеріне де тоқтала кетеміз.

8.1 Деформация және деформация жылдамдықтарының тензорлары

8.1.1 Тұтас ортаның деформациясы

$x = \gamma(\xi, t)$ – тұтас ортаның қозғалыс заңы болсын. Қозғалыста тұтас ортаның бастапқы Ω_0 конфигурациясы «деформацияланған» Ω_t конфигурацияға өтетін болып, тұтас орта бөлшектерінің өзара орналасуы өзгертіні белгілі. Қандай да бір $P_0 \in \Omega_0$ бөлшекті белгілеп аламыз. Сонда оның бастапқы (нөлдік) уақыт моментіндегі орны ξ_0 , ал t уақыт моментіндегі орны $x_0 = \gamma(\xi_0, t)$ болады (8.1-сурет). $w_0 = x_0 - \xi_0$ вектор P_0 бөлшектің *орын алмастыру векторы* деп аталады. $e_1 \in S$ – кез келген орт, $\xi_1 = \xi_0 + se_1 (s > 0)$, ал $x_1 = \gamma(\xi_1, t)$ болсын.

e_1 бағыттағы салыстырмалы ұзарту деп

$$l(e_1) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{|x_1 - x_0| - |\xi_1 - \xi_0|}{|\xi_1 - \xi_0|}$$

санға айтылады.

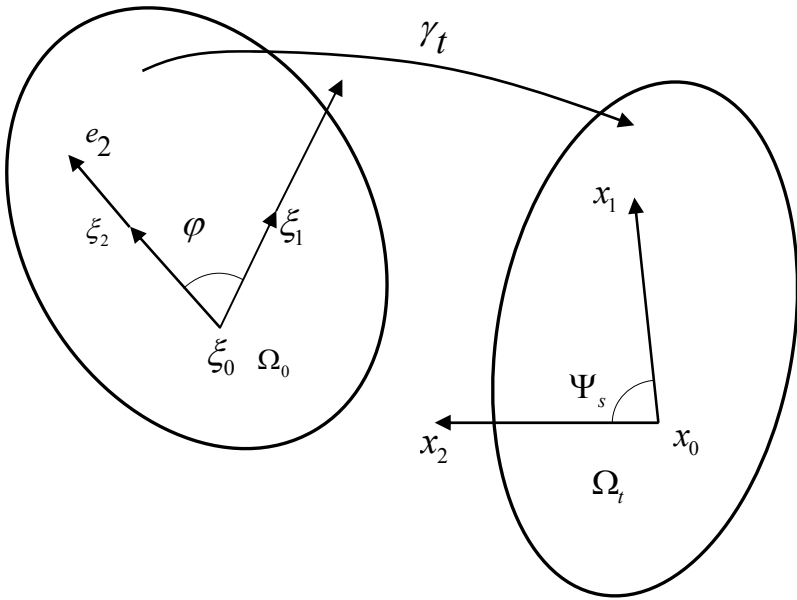
Ал енді $e_2 \in S$, $\xi_2 = \xi_0 + se_2$, $x_2 = \gamma(\xi_2, t)$, $\varphi = \xi_1 - \xi_0$ және $\xi_2 - \xi_0$ векторлары арасындағы (e_1 және e_2 орттары), ал $\psi_s = x_1 - x_0$ және $x_2 - x_0$ векторлары арасындағы бұрыш болсын:

$$\cos \psi_s = \frac{(x_1 - x_0) \cdot (x_2 - x_0)}{|x_1 - x_0| \cdot |x_2 - x_0|}.$$

e_1 және e_2 бағыттардың салыстырмалы ығысуы деп

$$\tau(e_1, e_2) = \lim_{s \rightarrow 0} \psi_s - \varphi$$

санға айтылады.



8.1-сурет. Қозғалыстағы тұтас ортаның деформациясы

Салыстырмалы ұзарту мен ығысу P_0 бөлшектің кіші аймағының деформациясын толықтай сипаттайды, себебі, тұтас ортаның қозғалысында қашықтық пен бұрыштардың қалай өзгеретіндігін сипаттайды.

8.1.2 Лагранждың деформация тензоры

Тұтас ортаның қозғалыс заңы γ дифференциалданушы болған жағдайда деформацияны аналитикалық сипаттау үшін \mathbb{T} тензорды

$$\mathbb{T} = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \gamma(\xi_0, t)$$

теңдікпен анықтаймыз. \mathbb{T} тензор *дисторсия тензоры* деп аталады (distortion – бұрмалану). Сонда:

$$x_1 - x_0 = \gamma(\xi_0 + s e_1, t) - \gamma(\xi_0, t) = \mathbb{T} \langle s e_1 \rangle + o(s). \quad (8.1)$$

Лагранждың \mathcal{L} деформация тензорын

$$2\mathcal{L} = \mathbb{T}^* \circ \mathbb{T} - I$$

теңдік арқылы анықтаймыз. Сонда (8.1)-ден мына теңдіктер келіп шығады:

$$l(e_1) = \sqrt{2e_1 \cdot \mathcal{L}\langle e_1 \rangle + 1} - 1, \quad (8.2)$$

$$\cos\left(\lim_{s \rightarrow 0} \psi_s\right) = \frac{e_1 \cdot e_2 + 2e_1 \cdot \mathcal{L}\langle e_2 \rangle}{[l(e_1) + 1][l(e_2) + 1]}. \quad (8.3)$$

Осы теңдіктердің орынды болатындығын көрсетейік:

$$\begin{aligned} l(e_1) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{|x_1 - x_0| - |\xi_1 - \xi_0|}{|\xi_1 - \xi_0|} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{|\mathbb{T}\langle se_1 \rangle + o(s)| - |se_1|}{|se_1|} = \\ &= |\mathbb{T}\langle e_1 \rangle| - 1 = \sqrt{\mathbb{T}\langle e_1 \rangle \cdot \overline{\mathbb{T}\langle e_1 \rangle}} - 1 = \sqrt{e_1 \cdot (\mathbb{T}^* \circ \mathbb{T})\langle e_1 \rangle} - 1 = \\ &= \sqrt{e_1 \cdot (2\mathcal{L} + I)\langle e_1 \rangle} - 1 = \sqrt{2e_1 \cdot \mathcal{L}\langle e_1 \rangle + 1} - 1. \end{aligned}$$

Дәл осылай:

$$\begin{aligned} |x_1 - x_0| &= |\mathbb{T}\langle se_1 \rangle + o(s)| = |\mathbb{T}\langle se_1 \rangle| + o(s) = \\ &= \sqrt{\mathbb{T}\langle se_1 \rangle \cdot \overline{\mathbb{T}\langle se_1 \rangle}} + o(s) = s\sqrt{e_1 \cdot (\mathbb{T}^* \circ \mathbb{T})\langle e_1 \rangle} + o(s) = \\ &= s\sqrt{e_1 \cdot (2\mathcal{L} + I)\langle e_1 \rangle} + o(s) = s\sqrt{2e_1 \cdot \mathcal{L}\langle e_1 \rangle + 1} + o(s) = \\ &= s(l(e_1) + 1) + o(s). \end{aligned}$$

Сондықтан:

$$\begin{aligned} \cos\left(\lim_{s \rightarrow 0} \psi_s\right) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(x_1 - x_0) \cdot (x_2 - x_0)}{|x_1 - x_0| \cdot |x_2 - x_0|} = \rangle\rangle \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{[\mathbb{T}\langle se_1 \rangle + o(s)][\mathbb{T}\langle se_2 \rangle + o(s)]}{[s(l(e_1) + 1) + o(s)][s(l(e_2) + 1) + o(s)]} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(\mathbb{T}\langle e_1 \rangle + O(s)) \cdot (\mathbb{T}\langle e_2 \rangle + O(s))}{[(l(e_1) + 1) + O(s)] \cdot [(l(e_2) + 1) + O(s)]} = \\ &= \frac{\mathbb{T}\langle e_1 \rangle \cdot \mathbb{T}\langle e_2 \rangle}{[l(e_1) + 1] \cdot [l(e_2) + 1]} = \frac{e_1 \cdot e_2 + e_1 (\mathbb{T}^* \circ \mathbb{T})\langle e_2 \rangle - e_1 \cdot e_2}{[l(e_1) + 1] \cdot [l(e_2) + 1]} = \\ &= \frac{e_1 \cdot e_2 + 2e_1 \cdot \mathcal{L}\langle e_2 \rangle}{[l(e_1) + 1] \cdot [l(e_2) + 1]}. \end{aligned}$$

$\mathcal{L}(\xi, t)$ тензорлық функцияны білу тұтас ортаның Ω_t конфигурациясын толықтай анықтауға мүмкіндік беретіндігін көрсетуге болады.

8.1.3 Эйлердің деформация тензоры

Алдыңғы пункттегідей Эйлердің деформация тензорын

$$2\mathcal{E} = I - \perp^* \circ \perp$$

теңдік арқылы анықтауға болады, мұнда

$$\perp = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \gamma^{-1}(x, t) .$$

\mathcal{L} және \mathcal{E} тензорлар түрлі айнымалылар функциялары екендігін айта кеткен жөн: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\xi, t)$, ал $\mathcal{E} = \mathcal{E}(x, t)$. Сондай-ақ, $\mathcal{L} = \mathbb{T}^* \circ \mathcal{E} \circ \mathbb{T}$ теңдік орынды болатындығын тексеріп көру қиын емес.

8.1.4 Деформация тензоры

Кейбір тұтас орталарды сипаттауда деформацияны емес деформация жылдамдығын білген қолайлы болады. Бұл жылдамдық $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$ шамамен сипатталады. Ол дисторсия тензоры мен деформация жылдамдықтарының тензоры арқылы оңай есептеледі.

$\frac{\partial \gamma(\xi, t)}{\partial t} = v^L(\xi, t)$ болғандықтан,

$$\frac{\partial \mathbb{T}}{\partial t} = \frac{\partial v^L}{\partial \xi} = \frac{\partial v}{\partial x} \circ \mathbb{T} .$$

Сондықтан

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \mathbb{T}^* \circ D \circ \mathbb{T} ,$$

мұнда D – деформация жылдамдықтарының (6.17) тензоры.

8.2 Анықтаушы теңдеулер

Осы уақытқа дейін біз қарастырылып жатқан модель шеңберінде біртұтас ортаны басқасынан айырмашылық ететін ешқандай да бір нақты білімдерді пайдаланған жоқпыз. Сондықтан біздің модель әмбебап сипатқа ие және газдардың, сұйықтықтардың, қатты

денелердің және т.б. кең кластарын қамтиды. Тұтас орталардың нақты кластарының күйі жоғарыда сипатталған әмбебап заңдарға бағынумен қатар, дәл осы нақты кластарды сипаттайтын қосымша теңдеулерді де қанағаттандырады. Бұл теңдеулер *анықтаушы теңдеулер* немесе *күйлер теңдеулері* деп аталады. Әдетте, бұл теңдеулер кернеулер тензорын ортаның деформациясымен (мысалы, деформация тензоры немесе деформация жылдамдықтарымен) байланыстырады.

Физикалық тұрғыдан әртүрлі болған тұтас орталардың көптігіне байланысты бұл теңдеулер саны мен түрі көп болуы мүмкін. Алайда, олар барлығы үшін жалпы болған қандай да бір шарттарға немесе принциптерге бағынады. Осы принциптердің ең маңыздыларын осы тарауда қысқаша сипаттап өтеміз.

8.2.1 Себептік принципі

Кернеулер тензорларының өрісі $P(x, t)$ Ω_t тұтас ортада ортаның алдыңғы күйлерінің эволюциясымен бірмәнді анықталады.

$\gamma_t = \gamma(\cdot, t): \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$ – тұтас ортаның қозғалыс заңы, ал $P: D \rightarrow \mathbf{R}^k$ – осы ортаны сипаттаушы параметрлер жиынтығы болсын. Себептік принципінің символдық жазылуы мынадай:

$$P[\gamma(\xi, t), t] = \mathcal{F}\left(\xi, t, \bigcup_{\eta, \zeta \in \Omega_0} \left\{ \gamma(\eta, \cdot) \Big|_{[0, t]}, P[\gamma(\zeta, \cdot), \cdot] \Big|_{[0, t]} \right\}\right) \quad (8.4)$$

мұнда $\gamma(\eta, \cdot) \Big|_{[0, t]}$ және $P[\gamma(\zeta, \cdot), \cdot] \Big|_{[0, t]}$ – сәйкес функциялардың $[0, t]$ аралыққа тарылтуы. Басқа сөзбен айтатын болсақ, P тензор ортаның алдыңғы эволюциясы (дамуы) қалай болғандығына ғана тәуелді болады және басқа эффектілер мен оның келешектегі күйіне тәуелді болмайды.

8.2.2 Кеңістік төңіректеу принципі

(8.4) формулада $\eta, \zeta \in \Omega_0$ орнына $\eta, \zeta \in \mathcal{V}_\xi$ деп жазуымызға болады, мұнда \mathcal{V}_ξ – ξ нүктенің Ω_0 – дегі қандай да бір аймағы.

Бұл принцип берілген бөлшектегі кернеулер тензоры осы бөлшектің қандай да бір аймағында ортаның күйімен ғана анықталатындығын білдіреді. Егер ортаның барлық параметрлерін

аналитикалық функциялар деп есептейтін болсақ, онда кеңістік төңіректеу принципін мынадай қайта сипаттауымызға болады.

Берілген бөлшектегі кернеулер тензоры P параметрлер мен олардың туындыларының алдыңғы эволюциясына ғана тәуелді болады:

$$P[\gamma(\xi, t), t] = \mathcal{F} \left(\xi, t, \bigcup_{\eta, \zeta \in \Omega_0} \left\{ \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} \gamma(\eta, \cdot) \Big|_{[0, t]}, \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} P[\gamma(\zeta, \cdot), \cdot] \Big|_{[0, t]} \right\} \right).$$

Соңғы теңдіктің оң жағында тек нөлінші (яғни, функцияларды өздері) және бірінші ретті туындылары ғана

$$P[\gamma(\xi, t), t] =$$

$$= \mathcal{F} \left(\xi, t, \gamma(\xi, \cdot) \Big|_{[0, t]}, \frac{\partial}{\partial \xi} \gamma(\xi, \cdot) \Big|_{[0, t]}, P[\gamma(\xi, \cdot)] \Big|_{[0, t]}, \frac{\partial}{\partial \xi} P[\gamma(\xi, \cdot)] \Big|_{[0, t]} \right)$$

қатысатын тұтас орта *қарапайым* деп аталады.

Егер жоғарыда келтірілген теңдеулердің оң жақтарында $f|_{[0, t]}$ функцияның $[0, t]$ аралыққа барлық тарылтуларында тек қана t «нүктеге» $f|_{[t, t]} = f|_{\{t\}} = f(t)$ тарылту қатысатын болса, онда тұтас орта *шексіз қысқа жадты орта* (нөлдік жадты орта, *мұрагерліксіз орта*) деп аталады. Мысалы, шексіз қысқа жадты қарапайым ортада анықтаушы теңдеулер мынадай болады:

$$P[\gamma(\xi, t), t] = \\ = \mathcal{F} \left(\xi, t, \gamma(\xi, t), \frac{\partial}{\partial \xi} \gamma(\xi, t), P[\gamma(\xi, t), t], \frac{\partial}{\partial \xi} P[\gamma(\xi, t), t] \right)$$

немесе қысқа түрде

$$P[\gamma(\xi, t), t] = \mathcal{F} \left(\xi, t, \gamma, \frac{\partial \gamma}{\partial \xi}, P(\gamma, t), \frac{\partial P(\gamma, t)}{\partial \xi} \right).$$

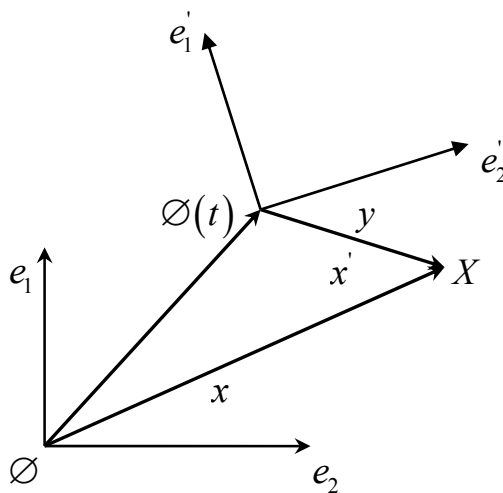
8.2.3 Санақ басы

Санақ басынан тәуелсіздік принципі күрделірек болып, ол қосымша түсініктерді қажет етеді.

Бір нүктеден шығатын бірлік ұзындықтағы векторлардан тұратын базис *репер* деп аталады. Сағаты бар репер *санақ басы* деп аталады.

\emptyset нүктеге орналастырылған, t уақытты көрсететін сағаты бар $\{e_i\}$ репер – қандай да бір санақ басы (қозғалмайтын) болсын. $t \rightarrow \emptyset(t)$ үзіліссіз қисық және анықтауышы оң болған t -дан үзіліссіз тәуелді $O(t)$ ортогонал түрлендірулер үйірі берілген болсын. $\emptyset(t)$ нүктеге $\{e'_i\} = \{O(t)\langle e_i \rangle\}$ реперді және $t' = t + \alpha$ уақытты көрсетуші сағатты орналастырамыз. Олар қозғалушы жаңа санақ басын құрайды және оны біз $(\emptyset(t), O(t), \alpha)$ арқылы белгілейміз. Ортогонал түрлендірулер бұрыштар мен қашықтықтарды сақтайтын болғандықтан, екінші реперді абсолют қатты дене сияқты қозғалатын бірінші репер деп көз алдымызға келтіруге болады.

Бірінші санақ басында x радиус вектормен берілген X нүкте екінші санақ басында x' радиус-вектормен беріледі (8.2-сурет). Бір санақ басынан басқасына өту формуласын анықтаймыз.



8.2-сурет. Санақ басы

$y = x - \emptyset(t)$ деп белгілейік. Сонда

$$y = y^i e_i = y^i O^{-1}(t) \langle e'_i \rangle = y^i O^*(t) \langle e'_i \rangle = y^i \alpha^j e'_j ,$$

мұнда $(\alpha_i^j) - O^*(t)$ түрлендірудің $\{e_i^j\}$ базистегі матрицасы. y -ті екінші базис бойынша жіктеу арқылы $y = x'^j e_j'$ теңдікті аламыз. Бұл жерден $x'^j = \alpha_i^j y^i$. Сонымен,

$$x' = O^*(t)\langle x - \emptyset(t) \rangle, \quad t' = t + \alpha.$$

Егер $z = y - x$ – бірінші санақ басында басы x нүктеде және соңы y нүктеде болған вектор болса, онда екінші санақ басында оған сәйкес вектор $z' = O^*(t)\langle z \rangle$ болады (тексеріп көріңіз).

Егер A – бірінші санақ басындағы векторлардың сызықтық бейнелеуі болса, онда екінші санақ басында оған төмендегі сызықтық бейнелеу сәйкес келеді:

$$A' = O^*(t)AO(t).$$

D -дағы s скаляр, v векторлық және T тензорлық өрістер анықтама бойынша (санақ басының өзгеруіне қатысты) *индифферентті* деп айтылады, егер кез келген қозғалушы $(\emptyset(t), O(t), \alpha)$ санақ басы үшін төмендегі теңдіктер орынды болса,

$$s'(x', t') = s(x, t),$$

$$v'(x', t') = O^*(t)\langle v(x, t) \rangle,$$

$$T'(x', t') = O^*(t) \circ T(x, t) \circ O(t).$$

8.2.4 Санақ басынан тәуелсіздік принципі

(8.4) теңдік санақ басының кез келген үзіліссіз алмастыруына қатысты инвариант:

$$P'[\gamma'(\xi', t'), t'] = \mathcal{F}\left(\xi', t', \bigcup_{\eta', \zeta' \in \Omega'_\alpha} \left\{ \gamma'(\eta', \cdot) \Big|_{[\alpha, t']}, P'[\gamma'(\zeta', \cdot), \cdot] \Big|_{[\alpha, t']} \right\}\right).$$

Анықтаушы теңдеулерді құруда күй параметрлері *индифферентті* деп, сондай-ақ бұл теңдеулер санақ басынан тәуелсіз деп есептейміз.

8.2.5 Негізгі тензорлардың индифференттілігі

Бұрын енгізілген \mathcal{E}, P, D тензорлар да индифферентті болады.

5-теорема (негізгі тензорлардың индифференттілігі жайлы). *Эйлердің \mathcal{E} деформация, P кернеулер және деформация жылдамдықтарының D тензорлары индифферентті болады.*

Дәлелдеу. $\xi' = O^*(0)\langle\xi\rangle$ және $x = O(t)\langle x'\rangle$ болғандықтан,

$$\perp' = \frac{\partial \xi'}{\partial x'} = \frac{\partial \xi'}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} = O^*(0) \circ \perp \circ O(t).$$

Бұл жағдайда

$$\begin{aligned} 2\mathcal{E} &= I - \perp'^* \circ \perp' = O^*(t) \circ O(t) - [O^*(0) \circ \perp \circ O(t)]^* \circ [O^*(0) \circ \perp \circ O(t)] = \\ &= O^*(t) \circ O(t) - [O^*(0) \circ \perp^* \circ O(t)] \circ [O^*(0) \circ \perp \circ O(t)] = \\ &= O^*(t) \circ [I - \perp^* \circ O(0) \circ O^*(0) \circ \perp] \circ O(t) = \\ &= O^*(t) \circ (I - \perp^* \circ \perp) O(t) = 2O^*(t) \circ \mathcal{E} \circ O(t), \end{aligned}$$

сонымен, \mathcal{E} индифференттігін дәлелдедік.

Әрі қарай

$$p_n = P\langle n\rangle, p'_n = P'\langle n'\rangle, n' = O^*(t)\langle n\rangle, p'_n = O^*(t)\langle p_n\rangle,$$

болғандықтан,

$$P'\langle n'\rangle = p'_n = O^*(t)\langle p_n\rangle = [O^*(t) \circ P]\langle n\rangle = [O^*(t) \circ P \circ O(t)]\langle n'\rangle,$$

ал бұл теңдік P кернеулер тензорының индифференттілігін білдіреді.

Ал енді соңында, деформация жылдамдықтарының D тензорының индифференттілігін дәлелдейміз. Жоғарыда енгізілген жаңа санақ басына өту формулаларына сәйкес ξ бөлшектің $\gamma(\xi, t)$ қозғалыс заңы $(o(t), O(t), \alpha)$ санақ басында

$$\gamma' = (\xi', t') = O^*(t)\langle \gamma(\xi, t) - 0(t) \rangle$$

функциямен беріледі, мұнда $\xi' = O^*(0)\langle\xi\rangle$. Соңғы теңдікті $t' (t' = t + \alpha)$, сондықтан $d/dt' = d/dt$ бойынша дифференциалдайтын болсақ, $v'(x', t')$ жылдамдықтың жаңа санақ басындағы өрнегін аламыз:

$$\begin{aligned} v'(x', t') &= \frac{\partial \gamma'(\xi', t')}{\partial t'} = \\ &= \frac{dO^*(t)}{dt} \langle \gamma(\xi, t) - 0(t) \rangle + O^*(t) \left\langle \frac{\partial \gamma(\xi, t)}{\partial t} - \frac{d0(t)}{dt} \right\rangle = \quad (8.4) \\ &= \frac{dO^*(t)}{dt} \langle x - 0(t) \rangle + O^*(t) \left\langle v(x, t) - \frac{d0(t)}{dt} \right\rangle. \end{aligned}$$

Бірақ бұл жағдайда:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v'}{\partial x'} &= \frac{dO^*(t)}{dt} \circ \frac{\partial x}{\partial x'} + O^*(t) \circ \frac{\partial v}{\partial x} \circ \frac{\partial x}{\partial x'} = \\ &= \frac{dO^*(t)}{dt} \circ O(t) + O^*(t) \circ \frac{\partial v}{\partial x} \circ O(t).\end{aligned}$$

Сондықтан:

$$\left(\frac{\partial v'}{\partial x'}\right)^* = O^*(t) \circ \frac{dO(t)}{dt} + O^*(t) \circ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^* \circ O(t).$$

Ал $O^*(t) \circ O(t) = I$ екендігін ескеретін болсақ, онда

$$O(t) \circ \frac{dO^*(t)}{dt} + \frac{dO(t)}{dt} \circ O^*(t) = 0,$$

(мұнда оң жақтағы нөл оператор). Ал енді $\partial v' / \partial x'$ және $(\partial v' / \partial x')^*$ үшін алынған өрнектерді қосып, төмендігі теңдікті аламыз:

$$\begin{aligned}D' &= \left(\frac{\partial v'}{\partial x'}\right)^* + \frac{\partial v'}{\partial x'} = \\ &= O^*(t) \circ \frac{dO(t)}{dt} + O^*(t) \circ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^* \circ O(t) + \frac{dO^*(t)}{dt} \circ O(t) + O^*(t) \circ \frac{\partial v}{\partial x} \circ O(t) = \\ &= O^*(t) \circ \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^* + \frac{\partial v}{\partial x}\right] \circ O(t) = O^*(t) \circ D \circ O(t).\end{aligned}$$

Осымен деформация жылдамдықтарының D тензорының индифференттілігін дәлелдедік. ■

8.2.6 Мысалдар: сұйықтықтар және газдар

Сұйықтықтар мен газдар онай деформацияланатын, қозғалушы тұтас орталар екендігі белгілі: оларды тепе-теңдік күйінен шығару үшін кішкене күш болса жеткілікті. Осыған байланысты ішкі кернеу (кернеулер тензоры) ортаның деформациясына өте әлсіз тәуелді болады. Сонымен қатар, физикалық тәжірибелер кернеулер тензоры деформация жылдамдықтарының тензорына елеулі тәуелді болатындығын көрсетеді. Сондықтан сұйықтықтар мен газдарды кернеулер тензоры деформация жылдамдықтарының тензорына тәуелді болған және деформация тензорынан тәуелсіз болған тұтас орталар ретінде анықтауға болады. Сондай-ақ, ол негізгі термодинамикалық пара-

метрлерден тәуелді болуы мүмкін. Дәлірек айтатын болсақ, сұйықтықтар мен газдар сондай орталар болып, олар үшін

$$P = F(D, P),$$

мұнда $P = (\rho, U, \Theta, s)$ – негізгі термодинамикалық скаляр параметрлер.

Негізгі термодинамикалық P параметрлердің индифференттілігі және жоғарыда дәлелденген P және D тензорлардың индифференттілігінен төмендегі тепе-теңдіктің орынды болатындығы келіп шығады:

$$O^*(t) \circ P \circ O(t) = F(O^*(t) \circ D \circ O(t), P).$$

Сонымен, $\Phi: T \rightarrow F(T, P)$ функция әрбір белгіленген P -да кез келген O ортогонал түрлендіру үшін

$$\Phi(O^* \circ T \circ O) = O^* \circ \Phi(T) \circ O$$

шартты қанағаттандыруы қажет. Мұндай тензорлық функциялар *изотроп* деп айтылады. Анықтаушы теңдеулердегі функциялардың изотропты болуы талабы санақ басынан тәуелсіздік принципінің салдары болады.

8.2.7 Мысал: серпімді денелер

Серпімді деформацияланатын денелерде кернеулер тензоры деформация тензорынан және негізгі термодинамикалық параметрлерден тәуелді болады:

$$P = F(\mathcal{E}, P).$$

Санақ басынан тәуелсіздік принципінен F функцияның бірінші аргументі бойынша изотропты болуы талабы келіп шығады. Серпімді орталарда ішкі энергия үшін күй теңдеуі мынадай болады:

$$U = f(\mathcal{E}, P).$$

Санақ басынан тәуелсіздік принципіне сай төмендегі тепе-теңдік орынды болуы қажет

$$U' = f(\mathcal{E}', P').$$

Осы тепе-теңдіктен, жоғарыдағыдай, $\Phi: T \rightarrow f(T, P)$ скаляр функцияның кез келген O ортогонал түрлендіру үшін *изотропты* болуы талабы келіп шығады:

$$\Phi(T) = \Phi(O^* \circ T \circ O).$$

8.2.8 Мысал: жылу агынының векторы үшін анықтаушы теңдеу

Көптеген тұтас орталарда мына түрдегі

$$q = F(\nabla\Theta, \mathbf{P}) \quad (8.5)$$

анықтаушы теңдеу орынды болады.

Егер скаляр α функция индифферентті болса, онда $\nabla\alpha$ вектор функция да индифферентті болады. Сондықтан (8.5) теңдеуде жаңа санақ басына өту арқылы мына теңдеуді алуға болады:

$$q' = F(\nabla\Theta', \mathbf{P}').$$

Ал соңғы теңдіктен $\Phi : x \rightarrow f(x, \mathbf{P})$ векторлық функцияның кез келген O ортогонал түрлендіру үшін *изотроптығы* талабы келіп шығады, яғни

$$O^* \langle \Phi(x) \rangle = \Phi(O^* \langle x \rangle).$$

8.3 Изотроп функциялар

Жоғарыда келтірілген мысалдардан көргеніміздей, күй теңдеулеріндегі скаляр, векторлық және тензорлық функциялар изотроп функциялар болуы керек. Сондықтан осы функциялардың изотроп функциялар болуы талабының маңыздылығы изотроп функциялар класын үйренуді қажет етеді.

8.3.1 Изотроп функция түсінігі

Біз тензорлық функцияларды қарастырудан бастаймыз. \mathbf{R}^3 -те кез келген ортонормаланған $\{e_i\}$ базисті белгілейміз. Сонда \mathbf{R}^3 -тегі әрбір екінші рангті T тензорға (осы тензорды біз \mathbf{R}^3 -тегі сызықтық бейнелеу деп қабылдаймыз) $T : T_j^i = e^i \cdot T \langle e_j \rangle$ матрицаны сәйкес қоятын \mathcal{I} бейнелеу анықталған болады (5.3.3-пунктің қараңыз). \mathcal{I} бейнелеу сызықтық және керілететін бейнелеу болатындығы белгілі, сондай-ақ \mathcal{I} және \mathcal{I}^{-1} бейнелеулер суперпозиция және түйіндестіру амалдарын сақтайды:

$$\mathcal{I}(T \circ S) = \mathcal{I}(T) \circ \mathcal{I}(S), \quad \mathcal{I}(T^*) = [\mathcal{I}(T)]^*. \quad (8.6)$$

Әрбір $\Phi: T^2(\mathbf{R}^3) \rightarrow T^2(\mathbf{R}^3)$ тензорлық функция $\phi = \mathcal{I} \circ \Phi \circ \mathcal{I}^{-1}$ формула бойынша $\phi: M^3 \rightarrow M^3$ матрицалық функцияны келтіріп шығарады. ϕ матрицалық функция *изотроп* деп аталады, егер кез келген $O \in M^3$ ортогонал матрица үшін

$$\phi(O^* \circ T \circ O) = O^* \circ \phi(T) \circ O \quad (8.7)$$

теңдік орынды болса, яғни

$$O^* \circ O = O \circ O^* = I.$$

Φ тензорлық функция ϕ матрицалық функция изотроп болғанда ғана изотроп болатындығын дәлелдеу қиынға соқпайды.

Сондықтан әрі қарай біз матрицалық және тензорлық функцияларды, сондай-ақ T матрицаны және T тензорды тепе-тең деп қарастырамыз және T белгілеуді матрица үшін де қолданамыз.

Біздің мақсатымыз изотроп функцияларды тензорлардың инварианттарының функциясы ретінде көрсету жайлы тұжырым болып табылады.

8.3.2 Симметриялық функцияларды өрнектеу

Алдымен бізге қажет болатын екі лемманы дәлелдейміз.

3-лемма (\mathbf{R}^2 -де симметриялық функцияларды өрнектеу жайлы). *Егер $\alpha: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ функция симметриялы болса, яғни $\alpha(x, y) = \alpha(y, x)$, онда оны мына түрде өрнектеу мүмкін*

$$\alpha(x, y) = \beta(x + y, xy),$$

мұнда $\beta: D \rightarrow \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}^2$.

Д ә л е л д е у. $D - (b, c) \in \mathbf{R}^2$ нүктелердің сондай жиыны болып, олар үшін $\lambda^2 - b\lambda + c = 0$ квадраттық теңдеу x, y нақты түбірлерге ие болсын. $\beta(b, c) = \alpha(x, y)$ деп алайық. α функцияның симметриялығы β коррект анықталуын қамтамасыз етеді. Лемманың тұжырымы Виет теоремасынан келіп шығады. ■

4-лемма (\mathbf{R}^3 -те симметриялық функциялардың кескіні жайлы). *Егер $\alpha: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ функция симметриялы, яғни аргументтерінің орындары кез келген алмастыруларда өзгермейтін болса, онда оны мына түрде өрнектеу мүмкін:*

$$\alpha(x, y, z) = \beta(x + y + z, xy + yz + zx, xyz)$$

$$\alpha(x, y, z) = \beta(x + y + z, xy + yz + zx, xyz),$$

мұнда $\beta: D \rightarrow \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}^3$.

Д ә л е л д е у. Бұл лемма дәл жоғарыдағы леммадай дәлелденеді. D жиыны $(b, c, d) \in \mathbf{R}^3$ нүктелер жиыны ретінде анықталып, олар үшін $\lambda^3 - b\lambda^2 + c\lambda - d = 0$ кубтық теңдеу x, y, z нақты түбірлерге ие болады, ал $\beta(b, c, d) = \alpha(x, y, z)$ теңдікпен анықталады. ■

8.3.3 Изотропты тензорлық функцияларды олардың инварианттары арқылы өрнектеу

Мұнда біз кез келген изотропты тензорлық функцияны осы тензордың инварианттары арқылы өрнектеуге болатындығы жайлы тұжырымды дәлелдейміз.

6-теорема (изотропты тензорлық функцияның өрнектелуі жайлы). $\mathcal{S}^3 - 3 \times 3$ симметриялық матрицалар кеңістігі, ал $\phi: \mathcal{S}^3 \rightarrow \mathcal{S}^3 -$ изотропты матрицалық (немесе тензорлық) функция болсын. Онда сондай $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ функциялар табылып, кез келген $T \in \mathcal{S}^3$ матрица үшін

$$\phi(T) = \varphi_0^T I + \varphi_1^T T + \varphi_2^T T^2$$

теңдігі орынды болады, мұнда $\varphi_i^T = \varphi_i(J_1, J_2, J_3)$ ($i = 0, 1, 2$), ал $J_i = J_i(T)$ ($i = 1, 2, 3$) – T матрицаның инварианттары.

Д ә л е л д е у. $S = \phi(T)$ болсын. T симметриялы болғандықтан, T -ны D_T диагональ матрицаға келтіретін O_1 ортогональ матрица бар болады:

$$D_T = O_1^* \circ T \circ O_1 = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

мұнда, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 - T$ матрицаның өзіндік сандары. $D_S = O_1^* \circ S \circ O_1$ деп аламыз.

ϕ функция изотропты болғандықтан:

$$D_S = O_1^* \circ \phi(T) \circ O_1 = \phi(O_1^* \circ T \circ O_1) = \phi(D_T).$$

$\text{diag}(1, -1, -1)$ және $\text{diag}(-1, -1, 1)$ диагональ матрицаларды сәйкесінше O_1 және O_2 арқылы белгілейік. $O_2^* = O_2$ және $O_3^* = O_3$ болатындығы көрініп тұр, сондай-ақ төмендегі теңдік орынды болады:

$$O_2^* \circ D_T \circ O_2 = O_3^* \circ D_T \circ O_3 = D_T$$

(O_2, O_2^* және O_3, O_3^* матрицаларды диагональ матрицаларға қолдану диагональдағы сәйкес коэффициенттердің таңбаларын ғана өзгертеді). Әрі қарай, ϕ функцияның изотроптығын есепке алатын болсақ

$$O_2^* \circ D_S \circ O_2 = O_2^* \circ \phi(D_T) \circ O_2 = \phi(O_2^* \circ D_T \circ O_2) = \phi(D_T) = D_S \quad (8.8)$$

және дәл осылай

$$O_3^* \circ D_S \circ O_3 = D_S. \quad (8.9)$$

(8.8), (8.9) тікелей есептеулер жүргізу төмендегі теңдіктердің орынды болатындығын көрсетеді (біз D_S матрицаның элементтері үшін s_j^i белгілеуді пайдаланамыз):

$$O_2^* \circ D_S \circ O_2 = \begin{pmatrix} s_1^1 & -s_2^1 & -s_3^1 \\ -s_1^2 & s_2^2 & s_3^2 \\ -s_1^3 & s_2^3 & s_3^3 \end{pmatrix},$$

$$O_3^* \circ D_S \circ O_3 = \begin{pmatrix} s_1^1 & s_2^1 & -s_3^1 \\ s_1^2 & s_2^2 & -s_3^2 \\ -s_1^3 & -s_2^3 & s_3^3 \end{pmatrix}.$$

Осы және (8.8), (8.9) теңдіктерден D_S матрицаның диагональ емес барлық элементтерінің нөлге теңдігі келіп шығады. Сонымен, D_S – диагональ матрица: $D_S = \text{diag}(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ ал η_1, η_2, η_3 – оның өзіндік мәндері.

Ал енді $D_S = \phi(D_T)$ теңдікті «координаталық формада» жазайық: $s_j^i = \phi_{ij}(t_j^i)$ немесе тек қана нөл емес координаталарды қалдырып, $s_i^i = \phi_{ii}(t_j^i)$. ϕ_{ii} функцияның «диагональ элементтерге» тарылтуын Φ_i арқылы белгілеп, D_T және D_S матрицалар үшін соңғы тепе-теңдікті мынадай түрде қайта жазамыз:

$$\eta_i = \Phi_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

Төмендегі матрицаны енгіземіз:

$$O_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ϕ функцияның изотроптығынан $O_4^* \circ D_S \circ O_4 = \phi(O_4^* \circ D_T \circ O_4)$ теңдік келіп шығады, ал тікелей есептеулер

$$O_4^* \circ D_T \circ O_4 = \text{diag}(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3), \quad O_4^* \circ D_S \circ O_4 = \text{diag}(\eta_2, \eta_1, \eta_3)$$

болатындығын көрсетеді.

Сондықтан

$$\text{diag}(\eta_2, \eta_1, \eta_3) = \phi(\text{diag}(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3)), \quad (8.10)$$

ал дербес жағдайда, осы теңдіктен төмендегі теңдікті аламыз:

$$\eta_3 = \Phi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \Phi_3(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3).$$

3-леммаға сай, сондай Ψ_3 функция табылатын болып, мына теңдік орынды болады:

$$\Phi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \Psi_3(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 \lambda_2, \lambda_3). \quad (8.11)$$

$J_1 = J_1(T)$, $J_2 = J_2(T)$, $J_3 = J_3(T)$ инварианттар матрицаның өзіндік мәндері арқылы

$$J_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad J_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1, \quad J_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (8.12)$$

формулалармен өрнектелетіндігін есепке алып, (8.11) теңдікті мына түрде жазуға болады:

$$\Phi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \Psi_3(J_1 - \lambda_3, J_2 - \lambda_3(J_1 - \lambda_3), \lambda_3) \stackrel{\text{def}}{=} \psi_3(J_1, J_2, \lambda_3). \quad (8.13)$$

Дәл осы жолмен ψ_i ($i=1,2$) функциялардың бар екендігі дәлелденеді:

$$\Phi_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \psi_i(J_1, J_2, \lambda_i). \quad (8.14)$$

Ал енді (8.10) теңдіктен мына теңдіктер келіп шығады:

$$\psi_2(J_1, J_2, \lambda_2) = \psi_1(J_1, J_2, \lambda_2), \quad (8.15)$$

$$\psi_2(J_1, J_2, \lambda_1) = \psi_1(J_1, J_2, \lambda_1). \quad (8.16)$$

Теореманы, алдымен T матрицаның барлық өзіндік мәндері әртүрлі болған жағдайында дәлелдейміз. ϕ_i^T ($i=0,1,2$) сандарды

$$\phi_0^T + \phi_1^T \lambda_i + \phi_2^T \lambda_i^2 = \Phi_i = \Phi_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \eta_i, \quad (i=0,1,2) \quad (8.17)$$

теңдеулер жүйесінің шешімдері ретінде анықтаймыз. Оның шешімі, мысалы ϕ_0^T , төмендегі формуламен анықталады (λ_i өзіндік мәндердің әртүрлі екендігінен бұл жүйенің анықтаушы Вандермонд анықтаушы болады және ол нөлге тең емес):

$$\phi_0^T = \begin{vmatrix} \Phi_1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ \Phi_2 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ \Phi_3 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{vmatrix}^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}_0(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3). \quad (8.18)$$

Төмендегі теңдік орынды

$$\mathcal{F}_0(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \mathcal{F}_0(\Phi_2, \Phi_1, \Phi_3, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_3).$$

Әрі қарай, (8.13) және (8.14)-ті (8.18) формулаға қойып, төмендегі формуланы аламыз:

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_0(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \\ & = \mathcal{F}_0(\Phi_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \Phi_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \Phi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \\ & = \mathcal{F}_0(\psi_1(J_1, J_2, \lambda_1), \psi_2(J_1, J_2, \lambda_2), \psi_3(J_1, J_2, \lambda_3), \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \stackrel{\text{def}}{=} \\ & \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\mathcal{F}}_0(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3). \end{aligned}$$

(8.15), (8.16) сай

$$\bar{\mathcal{F}}_0(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \bar{\mathcal{F}}_0(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3).$$

Қалған аргументтердің де орын алмастырымдылығын, яғни $\bar{\mathcal{F}}_0$ функцияның симметриялығын дәл осылай көрсетуге болады. Осы жоғарыда келтірілген жолмен (8.17) жүйенің қалған $\varphi_i^T = \bar{\mathcal{F}}_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ ($i=1, 2$) шешімдерінің бар болатындығын және симметриялығын көрсетуге болады. Алайда бұл жағдайда 4-леммаға сай сондай φ_i функциялар бар болып, $\varphi_i^T = \varphi_i(J_1, J_2, J_3)$.

Диагональ матрицалардан бастапқы матрицаларға қайту ғана қалды. (8.17) жүйе матрицалық түрде мынадай болады:

$$\text{diag}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \varphi_0^T I + \varphi_1^T \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + \varphi_2^T [\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)]^2,$$

немесе

$$D_S = \varphi_0^T I + \varphi_1^T D_T + \varphi_2^T D_T^2.$$

Соңғы теңдікті солжақтан O_1 матрицаға, ал оң жақтан – O_1^* матрицаға көбейтіп, аламыз:

$$\phi(T) = S = \varphi_0^T I + \varphi_1^T T + \varphi_2^T T^2$$

және сонымен теореманы T матрицаның өзіндік мәндері әртүрлі болған жағдай үшін дәлелдедік.

Егер $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ болса, онда (8.17) жүйенің орнына екі теңдеуден тұратын

$$\phi_0^T + \phi_1^T \lambda_i = \Phi_i \quad (i=1,3)$$

жүйені қарастыру жеткілікті болады және

$$\phi(T) = S = \varphi_0^T I + \varphi_1^T T$$

теңдікті қанағаттандыратын φ_0, φ_1 функциялардың бар екендігі жоғарыдағыдай көрсетіледі.

T матрицаның барлық өзіндік мәндері бірдей болған соңғы жағдайда теореманың тұжырымы тривиал болады:

$$F(T) = \varphi_0^T I$$

(бұл жағдайда φ_1 және φ_2 функциялар нөлге тең болады). ■

8.3.4 Изотроп скаляр функцияларды өрнектеу

7-теорема (изотроп скаляр функцияларды өрнектеу жайлы).

S^3 – 3×3 симметриялық матрицалар кеңістігі, ал $\phi: S^3 \rightarrow \mathbf{R}$ – изотропты функция болсын. Онда сондай $\varphi: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ функция табылып,

$$\phi(T) = \varphi[J_1(T), J_2(T), J_3(T)].$$

Д э л е л д е у. Жоғарыдағы теоремада дәлелденгендей, $\phi(T)$ функция T матрицаның өзіндік мәндерінен ғана (симметриялы) тәуелді болады. Сондықтан теореманың тұжырымы 4-леммадан келіп шығады. ■

8.3.5 Изотроп векторлық функцияларды өрнектеу

8-теорема (изотроп векторлық функцияларды өрнектеу жайлы).

Кез келген $\phi: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ изотроп функция үшін сондай $\varphi: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ функция бар болып,

$$\phi(x) = \varphi(|x|)x. \quad \phi(x) = \varphi(|x|)x. \quad (8.19)$$

Д э л е л д е у. ϕ функцияны төмендегі теңдік арқылы анықтаймыз

$$\phi(|x|) = \begin{cases} 0, & \text{егер } \phi(x) = 0 \text{ немесе } x = 0, \\ \frac{x \cdot \phi(x)}{|x|^2}, & \text{егер } \phi(x) \neq 0. \end{cases}$$

Біз, біріншіден, ϕ функцияның коррект анықталғандығын, яғни егер $|x| = |y|$ болса, онда $\phi(|x|) = \phi(|y|)$ болатындығын және екіншіден, ϕ функция ізделінді функция екендігін, яғни (8.19) теңдікті дәлелдеуіміз керек.

Корректілік ϕ функцияның изотроптығынан келіп шығады. Расында, егер $|x| = |y|$ болса, онда сондай O ортогонал түрлендіру табылып, $y = O\langle x \rangle$.

Бұл жағдайда:

$$\begin{aligned} \phi(|y|) &= y \cdot \phi(y) \frac{1}{|y|^2} = O\langle x \rangle \cdot \phi(O\langle x \rangle) \frac{1}{|x|^2} = O\langle x \rangle \cdot O\langle \phi(x) \rangle \frac{1}{|x|^2} = \\ &= (O^* \circ O\langle x \rangle) \cdot \phi(x) \frac{1}{|x|^2} = x \cdot \phi(x) \frac{1}{|x|^2} = \phi(|x|). \end{aligned}$$

(8.19) орынды екендігін дәлелдейміз. Егер $x = 0$ болса, онда $\phi(x) = 0$. Расында,

$$\phi(0) = O^* \langle \phi(0) \rangle = O\langle \phi(0) \rangle,$$

және сондықтан $\phi(0) = 0$, себебі O – кез келген айналу. Егер $\phi(x) = 0$ болса, онда $\phi(|x|) = 0$, яғни (8.19) орындалады. Ал егер x сондай болып, $\phi(x) \neq 0$ болса, онда алдымен $\phi(x) = ax$ ($a \in \mathbf{R}$) болатындығын көрсетеміз. O_α – x вектор маңайында α бұрышқа айнарудың ортогонал түрлендіруі болсын. ϕ функцияның изотроптығынан

$$O_\alpha^* \langle \phi(x) \rangle = \phi(O_\alpha^* \langle x \rangle) = \phi(x),$$

яғни $\phi(x)$ вектор x маңайында айналуға өзгермейді. Бұл тек қана $\phi(x) = ax$ жағдайда орынды болуы мүмкін. Бірақ онда:

$$\phi(x)x = \frac{x \cdot \phi(x)}{|x|^2} x = \frac{x \cdot ax}{|x|^2} x = ax = \phi(x). \blacksquare$$

Бақылау сұрақтары

1. Вектордың салыстырмалы ұзартуы және векторлардың салыстырмалы ығысуы қалай анықталады?
2. Дисторсия тензоры қандай тензор?
3. Лагранждың және Эйлердің деформация тензорлары қалай анықталады?
4. Анықтаушы немесе күйлер теңдеулері қандай теңдеулер? Олардың мағынасы неде?
5. Себептік принципі дегеніміз не?
6. Кеңістік төңіректеу принципін сипаттаңыз.
7. Қандай тұтас орта карапайым деп аталады?
8. Шексіз қысқа жадты тұтас орта деп қандай ортаға айтылады?
9. Репер, санақ басы дегеніміз не?
10. Индифферент өрістер деп неге айтылады?
11. Негізгі тензорлардың индифференттілігі жайлы теореманы сипаттаңыз.
12. Изотроп функция түсінігі.
13. Симметриялық функцияларды өрнектеу.
14. Изотропты тензорлық функцияны өрнектеу жайлы теореманы сипаттаңыз.
15. Изотропты векторлық функцияны өрнектеу жайлы теореманы сипаттаңыз.

Тапсырмалар

1. Эйлер және Лагранждың деформация тензорлары $\mathcal{L} = \mathbb{T}^* \circ \mathcal{E} \circ \mathbb{T}$ теңдікпен байланысқандығын дәлелдеңіз.

2. Тұтас ортаның қозғалыс заңы

$$x = \gamma(\xi, t) = \left(e^t \xi^1 + 2t(\xi^2)^2 + t(\xi^3)^2, e^{2t} \xi^2 + 2t\xi^3, e^{2t} \xi^3 + 3t\xi^2 \right)$$

бейнелеумен берілген. Лагранждың деформация тензорын табыңыз.

3. Тұтас ортаның қозғалыс заңы

$$x = \gamma(\xi, t) = \left(e^{-t} \xi^1, e^{-t} \xi^2, -2t\xi^1 - 2t\xi^2 + \xi^3 \right)$$

бейнелеумен берілген. Эйлердің деформация тензорын табыңыз.

9-тарау. СҰЙЫҚТЫҚТАР МОДЕЛЬДЕРІ

Алдыңғы тарауларда айтылып өтілгендей, (DM) дифференциалдық модельді тұйықтау үшін анықтаушы теңдеулер деп аталатын қосымша теңдеулер қажет болады. Бұл теңдеулер барлық тұтас орталар үшін әмбебап болмайды және нақты орталардың белгілі бір физикалық қасиеттерін есепке алады. Сондай-ақ сұйықтықтар мен газдарда кернеулер тензоры деформация жылдамдықтарының тензорына елеулі тәуелді, ал деформация тензорынан тәуелсіз болатындығымен сипатталатындығы да айтылған болатын. Бұл тарауда біз *сұйықтықтар* деп аталатын тұтас орталардың бір тобының түрлі модельдерін қарастырамыз.

9.1 Сұйықтықтың дифференциалдық моделінің тұйықталуы

9.1.1 Күйдің негізгі теңдеуі

Сұйықтықтар үшін күй теңдеуі

$$P = F(D, P, x, t) \quad (9.1)$$

түрде берілген деп есептейміз. Мұнда біз (9.1) теңдеу себептік және кеңістік төңіректеу принциптерін қанағаттандырады, сондай-ақ санақ басынан тәуелсіздік принципі орындалады деп қарастырамыз. Сонымен қатар, (9.1) теңдеуде біз әзірше P термодинамикалық параметрлерді нақтылаған жоқпыз; оны келесі пункттерде орындаймыз.

9.1.2 Күй теңдеуінің біртектілігі

Біртектілік сұйықтық бағынатын физикалық заңдар уақыт және кеңістікте өзгермейтіндігін білдіреді.

5-лемма (күйдің негізгі теңдеуінің біртектілігі жайлы). *Сұйықтық біртекті, яғни (9.1) күй теңдеуіндегі F функция айқын түрде x және t тәуелді болмайды.*

Дә л е л д е у. Санақ басынан тәуелсіздік принципіне сай

$$P' = F(D', P', x', t'),$$

немесе

$$O^*(t) \circ P \circ O(t) = F(O^*(t) \circ D \circ O(t), P, O^*(t) \langle x \rangle, t + \alpha).$$

Негізгі тензорлардың индифференттілігі жайлы 5-теоремаға сай соңғы теңдікті мына түрде жазуымызға болады:

$$P = F(D, \mathbf{P}, O^*(t)\langle x \rangle, t + \alpha).$$

Сонымен, кез келген O ортогонал түрлендіру мен кез келген α сан үшін

$$F(D, \mathbf{P}, O^*\langle x \rangle, t + \alpha) \equiv F(D, \mathbf{P}, x, t) \quad (9.2)$$

тепе-теңдік орындалады.

Сондықтан, егер $O = I$ деп алатын болсақ, кез келген t_1 және t_2 үшін

$$F(D, \mathbf{P}, x, t_1) \equiv F(D, \mathbf{P}, x, t_2)$$

тепе-теңдікті аламыз, ал бұл F -тің t -дан тәуелсіздігін білдіреді. Ал егер кез келген $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^3$ үшін (9.2)-де O ретінде x_1 -ді x_2 -ге сәйкес қоятын ортогонал түрлендіруді, ал α ретінде нөлді алатын болсақ, онда төмендегі тепе-теңдікті аламыз:

$$F(D, \mathbf{P}, x_2, t) \equiv F(D, \mathbf{P}, x_1, t),$$

ал бұл F -тің x аргументтен тәуелсіздігін білдіреді. ■

Сонымен, F функцияның соңғы екі аргументін қалдырып жазатын болсақ, (9.1) күй теңдеуі мына түрге келеді:

$$P = F(D, \mathbf{P}). \quad (9.3)$$

Санақ басынан тәуелсіздік принципіне сай F функцияның бірінші аргументі бойынша изотроптығы келіп шығады. Сондықтан 6-теоремаға сай оны мынадай түрде жазсақ болады:

$$F(D, \mathbf{P}) = \varphi_0 I + \varphi_1 D + \varphi_2 D^2, \quad (9.4)$$

мұнда φ_i ($i = 0, 1, 2$) коэффициенттер D тензордың инварианттарынан және күй параметрлерінен тәуелді болады:

$$\varphi_i = \varphi_i [J_1(D), J_2(D), J_3(D), \mathbf{P}]. \quad (9.5)$$

9.1.3 Күй теңдеуіне қатысты аксиомалар

Біз қарастырып жатқан сұйықтықтың моделіндегі күй теңдеуі қанағаттандыруы тиіс негізгі аксиомаларды сипаттаймыз.

Идеалдық аксиомасы. *Тыныштықтағы сұйықтық идеал, яғни ондағы кернеулер тензоры тепе-тең тензорға пропорционал.*

Бұл аксиома математикалық

$$F(0, P) = -pI,$$

мағынаны білдіреді, мұнда p – пропорционалдық коэффициенті. p шама *қысым* деп аталады. Идеал орталардағы элементар жұмыс

$$dA = pdV, \quad (9.6)$$

мұнда $V = 1/p$ – *меншікті көлем*.

Сұйықтықтың термодинамикалық күйі бес параметрмен сипатталады: $P = (\rho, U, \Theta, s, p)$, бұл параметрлер (9.3) күй теңдеуінің (9.5) коэффициенттеріне кіреді. Келесі термодинамикалық күй аксиомасы олардың ішінен тәуелсіздерін ажыратады:

Сұйықтықтар екі параметрлі орталар болады.

Бұл аксиома P жиынтықтан тек қана екі параметр тәуелсіз болып, қалғандары олар арқылы өрнектелетіндігін білдіреді. Әдетте, күй кеңістігі P ρ (меншікті тығыздық) және s (меншікті энтропия) шамалармен параметрленеді. Термодинамикалық күй аксиомасы U, Θ және p функцияларды ρ және s арқылы өрнектейтін функциялар белгілі болуын талап етеді. Ал егер біз $U = U(\rho, s)$ функцияны білетін болсақ, онда термодинамиканың негізгі (7.6) тепе-теңдігіне сай, ол идеал сұйықтықтар үшін

$$\Theta ds = dU + pdV \quad (9.7)$$

түрде болады ((9.6) қараңыз), қалған функцияларды U арқылы өрнектеу мүмкін болады.

Расында, $U = U(\rho, s)$ және $V = 1/\rho$ функцияларды негізгі термодинамикалық (9.7) тепе-теңдікке қойсақ

$$\Theta ds = \frac{\partial U(\rho, s)}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial U(\rho, s)}{\partial s} ds - p \frac{1}{\rho^2} d\rho$$

теңдігі келіп шығады, ρ және s тәуелсіздігін есепке алатын болсақ, мына өрнекті аламыз:

$$\Theta(\rho, s) = \frac{\partial U(\rho, s)}{\partial s}, \quad p(\rho, s) = \rho^2 \frac{\partial U(\rho, s)}{\partial \rho}. \quad (9.8)$$

χ жылуөткізгіштік коэффициенті де (ρ, s) -тің функциясы деп есептеледі. Сонымен қатар, (9.5) коэффициенттердің деформация

жылдамдықтары тензорының $J = (J_1, J_2, J_3)$ инварианттарынан және ρ, s күй параметрлерінен тәуелділігін сипаттау қажет болады:

$$\varphi_i = \varphi_i(J, \rho, s) \quad (i = 0, 1, 2). \quad (9.9)$$

Идеалдық аксиомасы φ_0 коэффициентті $J = 0$ болғанда есептеуге мүмкіндік береді:

$$\varphi_0(0, \rho, s) = -p. \quad (9.10)$$

9.1.4 Сұйықтықтың бірінші тұйық моделі

Тәжірибелік берілгендерден немесе қандай да бір теориялық тұжырымдардан (9.9) функциялар және $\chi(\rho, s)$ функция белгілі болсын. Онда төмендегі теңдеулер

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} v = 0, \\ \rho \frac{dv}{dt} = \operatorname{div} P + \rho f, \\ \rho \frac{dU}{dt} = P : D + \operatorname{div}(\chi \nabla \Theta), \\ P = \varphi_0 I + \varphi_1 D + \varphi_2 D^2 \end{array} \right. \quad (9.11)$$

тұйық модель құрайды. Расында, осы жүйеден соңғы теңдеуді пайдаланып P тензорды жойғаннан соң бес скаляр белгісіздер – жылдамдық векторының үш компоненталарын, тығыздық және меншікті энтропия үшін бес скаляр теңдеулерді аламыз.

9.2 Сұйықтықтың классикалық моделі

Жоғарыдағы (9.11) модель әлі де пайдалану үшін қиын, себебі, біріншіден, математикалық объекті ретінде жүйе өте күрделі, екіншіден, көп (U, χ, φ_i) күй функцияларын білуді қажет етеді.

Бұл функциялар (әсіресе, алғашқы екеуі) нақты сұйықтық үшін тәжірибелік берілгендерді өңдеу нәтижелері болады. Нәтижесі осы функцияларды білу болған тәжірибелерді құру мен жүргізудің өзі күрделі және шығыны елеулі болған ғылыми мәселе. Сондықтан біз қосымша аксиомаларға негізделіп, модельді ықшамдаймыз. Мұның

нәтижесінде қарастырылатын сұйықтықтар кластары тарылуы мүмкін, бірақ, бір жағынан модельде сұйықтықтардың көптеген түрлерін қалдырады, екінші жағынан математикалық модельді елеулі ықшамдайды.

9.2.1 Сызықтық аксиомасы

Осындай қосымша аксиомалардың бірі – *сызықтық аксиомасы*.

Кернеулер тензоры P деформация жылдамдықтарының D тензорынан сызықты тәуелді болады.

Бұл аксиомадан (9.4) кернеулер тензорының (9.5) коэффициенттеріне қатысты төмендегі үш қорытынды келіп шығады:

- $\varphi_2 \equiv 0$;
- φ_1 коэффициент D тензордың инварианттарына тәуелді емес, сондықтан:

$$\varphi_1 = \varphi_1(\rho, s) \stackrel{\text{def}}{=} 2\mu(\rho, s);$$

- тензордың тек қана бір инварианты, дәлірек айтатын болсақ, $\text{tr } D (= \text{div } v)$ D -дан сызықты тәуелді болатындықтан, φ_0 коэффициент тек қана $\text{tr } D$ -дан тәуелді болады. Сондықтан,

$$\varphi_0 = \varphi_0(\text{tr } D, \rho, s) = \varphi_0(0, \rho, s) + \lambda(\rho, s) \text{tr } D =$$

$$= -p(\rho, s) + \lambda(\rho, s) \text{div } v.$$

Сонымен, кернеулер тензоры үшін өрнек мына түрде болады:

$$P = (-p + \lambda \text{div } v)I + 2\mu D . \quad (9.12)$$

$\lambda = \lambda(\rho, s)$ және $\mu = \mu(\rho, s)$ коэффициенттер *бірінші* және *екінші тұтқырлық коэффициенттері* деп аталады.

9.2.2 Сұйықтықтың классикалық моделінің теңдеуі

Сызықтық аксиомасы, дәлірегі, оның (9.12) салдары, (9.11) модельде $\text{div } P$ және $P : D$ өрнектерді есептеуге мүмкіндік береді.

Олардың біріншісі үшін төмендегі формуланы аламыз:

$$\text{div } P = -\nabla p + \nabla(\lambda \text{div } v) + \text{div}(2\mu D)$$

(мұнда біз кез келген сыптығыр $\varphi: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ функция үшін орынды болатын $\operatorname{div}(\varphi(x)I) = \operatorname{grad} \varphi$ қарапайым теңдікті пайдаландық).

$P: D$ есептеу үшін D тензордың девиаторын

$$D' = D - \frac{1}{3}(\operatorname{div} v)I$$

формуламен енгіземіз және Φ диссипативті функцияны төмендегі формуламен анықтаймыз:

$$\Phi = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) (\operatorname{div} v)^2 + 2\mu D' : D.$$

Сонда, $\operatorname{tr} D = \operatorname{tr} D^* = \operatorname{div} v$, сондай-ақ,

$$D' : D = \operatorname{tr} \left[\left(D - \frac{1}{3}(\operatorname{div} v)I \right)^* \circ D \right] = \operatorname{tr} D^* \circ D - \frac{1}{3}(\operatorname{div} v)^2$$

екендігін есепке алатын болсақ, төмендегі өрнекті аламыз:

$$\begin{aligned} P : D &= \operatorname{tr} (P^* \circ D) = \operatorname{tr} \left(\left[(-p + \lambda \operatorname{div} v)I + 2\mu D \right]^* \circ D \right) = \\ &= \operatorname{tr} (-pD) + \operatorname{tr} [\lambda (\operatorname{div} v)D] + \operatorname{tr} (2\mu D^* \circ D) = \\ &= -p \operatorname{div} v + \lambda (\operatorname{div} v)^2 + 2\mu \operatorname{tr} (D^* \circ D) = \\ &= -p \operatorname{div} v + \lambda (\operatorname{div} v)^2 + \frac{2}{3}\mu (\operatorname{div} v)^2 + 2\mu \operatorname{tr} (D^* \circ D) - \frac{2}{3}\mu (\operatorname{div} v)^2 = \\ &= -p \operatorname{div} v + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) (\operatorname{div} v)^2 + 2\mu D' : D = -p \operatorname{div} v + \Phi. \end{aligned}$$

Негізгі термодинамикалық тепе-теңдікті t бойынша дифференциалдап және нәтижені ρ көбейтіп, мына теңдікті аламыз:

$$\rho \frac{dU}{dt} = \rho \Theta \frac{ds}{dt} - p \rho \frac{dV}{dt}.$$

Оң жақтағы $p \rho dV / dt$ қосылғыш үзілісті еместік теңдеуі көмегімен есептелінеді:

$$p \rho \frac{dV}{dt} = p \rho \frac{d(1/\rho)}{dt} = p \rho \left(-\frac{1}{\rho^2} \right) \frac{d\rho}{dt} = -p \frac{1}{\rho} (-\rho \operatorname{div} v) = p \operatorname{div} v,$$

сондықтан

$$\rho \frac{dU}{dt} = \rho \Theta \frac{ds}{dt} - p \operatorname{div} v .$$

Осы есептелген өрнектерді (9.11) модельге қойып, сұйықтықтың *классикалық* моделі деп аталатын төмендегі модельді аламыз:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} v = 0, \\ \rho \frac{dv}{dt} = -\nabla p + \nabla(\lambda \operatorname{div} v) + \operatorname{div}(2\mu D) + \rho f, \\ \rho \Theta \frac{ds}{dt} = \operatorname{div}(\chi \nabla \Theta) + \Phi. \end{array} \right. \quad (9.13)$$

Бұл модельде U, λ, μ, χ тәуелсіз (ρ, s) күй параметрлерінің берілген функциялары деп есептелінеді, ал p, ρ, Θ, s (9.8) қатынастармен байланысқан. (9.13) модель (9.8) бірге бес ρ, v, s скаляр белгісіздер үшін бес скаляр тендеулерді құрайды.

9.3 Сығылмайтын сұйықтықтар модельдері

(9.13) классикалық модель әлі де болса математикалық тұрғыдан да, сондай-ақ нақты сұйықтықтарды сипаттау тұрғысынан да күрделі. Себебі, төрт күй функцияларын – U, λ, μ, χ білуді қажет етеді. Бұл функцияларды тәжірибелер немесе жалпы теориялық зерттеулер нәтижесінде ғана алу мүмкін және оларды анықтаудың өзі жеке күрделі мәселе болып табылады. Сондықтан біз осы модельмен сипатталатын сұйықтықтар класын тарылта отырып, дербес жағдайларды қарастырамыз.

9.3.1 Сығылмайтын сұйықтық

Тәжірибелер көптеген сұйықтықтар ағыстарының кең кластарында қысымның үлкен өзгерістері тығыздықтың елеулі өзгеруіне алып келмейтіндігін көрсетеді. Сондықтан мұндай сұйықтықтар класында тығыздықты тұрақты деп есептеуге болады. Тығыздықтың тұрақты $(\rho = \text{const})$ болуының математикалық салдары қандай болатындығын көрейік.

Біріншіден, орта бірден термодинамикалық мағынада *бір параметрлі* болады. Бұл жағдайда тәуелсіз параметр ретінде, әдетте, Θ абсолют температура таңдалады.

Екіншіден, қысым күйдің термодинамикалық параметрі болудан қалады, себебі негізгі термодинамикалық тепе-теңдікте қатыспайды. Расында, $V = 1/\rho = \text{const}$ болғандықтан, $dV = 0$ болады және pdV қосылғыш негізгі термодинамикалық тепе-теңдікте болмайды. Сондай-ақ, негізгі термодинамикалық тепе-теңдік

$$dU = \Theta ds \quad (9.14)$$

түріне келеді. Бұл теңдік жылудың ортаға құйылысы оның ішкі энергиясын арттыруға ғана кететіндігін білдіреді. Ал бұл жылудың құйылысы теңдеуін модельден ажыратып алып, оны тәуелсіз шешуге мүмкіндік беретінін біз төменде көрсетеміз. Әзірше біз оны модельден шығарып тастаймыз.

$\rho = \text{const}$ болғандықтан, үзілісті еместік теңдеуі мына түрде жазылады:

$$\text{div } v = 0,$$

сондықтан λ тұтқырлық модельде ешқандай рөл атқармайды (ол $\text{div } v$ көбейткішпен импульстың сақталу теңдеуінде ғана қатысады). Сонымен, тек қана μ тұтқырлық қалады. μ орнына $v = \mu/\rho$ кинематикалық тұтқырлық коэффициентін енгізу қолайлы және солай қабылданған. Жалпы жағдайда кинематикалық тұтқырлық коэффициенті $v = v(\Theta)$ температурадан күшті тәуелді болуы мүмкін (мысалы, магматикалық балқытпаларда тұтқырлық температураға байланысты бірнеше ретке айырмашылық етуі мүмкін). Алайда, біз қарастыратын қарапайым модельде $v = \text{const}$ деп есептейміз. Мұндай шектеу сипатталатын сұйықтықтар класының жеткілікті кең болуына көп әсерін тигізбейді.

Импульстың сақталу теңдеуін ықшамдаймыз. Ол үшін төмендегі

$$\text{div} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^* = \nabla(\text{div } v), \quad \text{div} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \Delta v$$

теңдіктердің орынды екендігін (мұнда Δ – Лаплас операторы) ескереміз, сондықтан μ тұрақтылығын пайдаланып, мына теңдікті аламыз:

$$\text{div}(2\mu D) = \text{div} \left[2\mu \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^* \right) \right] = \mu \Delta v.$$

Үзілісті еместік теңдеуі және импульстің сақталу теңдеуі (оны ρ бөлгеннен кейін) *тұтқыр сығылмайтын сұйықтықтың математикалық моделін* құрайды:

$$\begin{cases} \operatorname{div} v = 0, \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + v \Delta v + f. \end{cases} \quad (9.15)$$

Осы теңдеулер жүйесі *Навье-Стокс теңдеулер жүйесі* деп аталады және ол төрт скаляр v, p белгісіздер үшін төрт скаляр теңдеулерден тұратын жүйе болады. (9.15) модель – сұйықтықтардың кең қолданылатын модельдерінің бірі.

9.3.2 Жылу құйылысының теңдеуі

Жылудың құйылысы тек қана ішкі энергияның өзгеруіне жұмсалатындығы орта тұрақты көлемде жылу энергиясын қабылдау қасиетіне ие болатындығын білдіреді. Бұл қасиет *жылу сыйымдылық* деп аталады және

$$C_V = \frac{\partial U(\Theta, V)}{\partial \Theta}$$

шамамен сипатталады. C_V функция тәжірибеден анықталады және орталардың кең спектрі үшін ол белгілі. Сонымен, $dU = C_V d\Theta$. Бұл жағдайда жылудың құйылыс теңдеуін мына түрде жазу мүмкін болады:

$$\rho C_V \frac{d\Theta}{dt} = \operatorname{div}(\chi \nabla \Theta) + 2\nu\rho (D' : D)$$

(мұнда біз $\operatorname{div} v = 0$ екендігін есепке алдық). Соңғы теңдікте екі жағын да ρC_V бөлсек

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{1}{\rho C_V} \operatorname{div}(\chi \nabla \Theta) + \Phi'$$

теңдікті аламыз, мұндағы диссипативті Φ' функция мынадай формуламен анықталған:

$$\Phi' = \frac{2\nu}{C_V} D' : D. \quad (9.16)$$

Сондықтан ортадағы жылу ағындары ортаның қозғалысына әсер етпейді және v, p анықтап болғаннан кейін оларды табуға болады.

Құрылған Навье-Стокс моделінің оның кең қолданылуының себебі болған көптеген артықшылық жақтары бар. Олардың ішінде ең бастысы, модельде тәжірибе арқылы анықтауды қажет ететін екі тұрақты (функция емес) ғана қатысады: бұл ρ тығыздық және ν кинематикалық тұтқырлық. Ал осы тұрақтылар үлкен дәлдік және сенімділікпен тәжірибеде анықталады.

9.3.3 Идеал сұйықтықтың моделі

Біз қарастыратын тұтас ортаның соңғы қарапайым моделінде тұтқырлық есебінен пайда болатын әсерлерден бас тартамыз. Кейбір сұйықтықтардың ағысында тұтқыр эффектiлер, яғни сұйықтықтардың ығысу кернеулеріне қарсылық ету қасиетімен байланысты эффектiлер елеулі болмайды. Мұндай модельдерде ν кинематикалық тұтқырлықты нөлге тең деп алуға болады. Мұндай сұйықтықтар *идеал сұйықтықтар* деп аталады. Нәтижеде біз *идеал сығылмайтын сұйықтықтың математикалық моделін* аламыз:

$$\begin{cases} \operatorname{div} v = 0, \\ \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p = f. \end{cases} \quad (9.17)$$

Бұл теңдеулер жүйесі *Эйлер теңдеулер жүйесі* деп аталады.

(9.16) формуладан идеал сығылмайтын сұйықтық үшін $\Phi' \equiv 0$ екендігі келіп шығады, сондықтан жылу құйылысының теңдеуі мына түрде жазылады:

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{1}{\rho C_V} \operatorname{div}(\chi \nabla \Theta).$$

Егер χ және C_V коэффициенттер тұрақты болған (бұл ұйғарым сұйықтықтардың кең класы үшін орындалады) сұйықтықтарды қарастыратын болсақ, онда соңғы теңдеу қарапайым жылуөткізгіштік теңдеуіне айналады:

$$\frac{d\Theta}{dt} = K \Delta \Theta, \quad (9.18)$$

мұнда $K = \chi / \rho C_V$ *температура өткізгіштік коэффициенті* деп аталады.

Бақылау сұрақтары

1. Сұйықтықтың біртектілік қасиетінің мағынасы қандай?
2. Идеалдық аксиомасын сипаттаңыз.
3. Термодинамикалық күй аксиомасын сипаттаңыз.
4. Сұйықтықтың бірінші тұйық моделі.
5. Сызықтық аксиомасын сипаттаңыз.
6. Сызықтық аксиомасынан келіп шығатын салдарлар.
7. Сұйықтықтың классикалық моделінің теңдеуі.
8. Деформация тензорының девиаторы қалай анықталады?
9. Сығылмайтын сұйықтық.
10. Кинематикалық тұтқырлық коэффициенті қалай анықталады?
11. Навье-Стокс теңдеулер жүйесін сипаттаңыз.
12. Тұтас ортаның жылусыйымдылық қасиеті және ол қалай анықталады?
13. Идеал сұйықтықтың математикалық моделі (Эйлер теңдеулер жүйесі).
14. Температура өткізгіштік коэффициенті қалай анықталады?

Тапсырмалар

1. $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0$ үзілісті еместік теңдеуін

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \nabla \rho + \rho \operatorname{div} v = 0$ түрге келтіріңіз.

2. Сығылмайтын сұйықтық

$$v = A \left(\frac{x^2 - y^2}{r^4}, \frac{2xy}{r^4}, 0 \right), \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad A = \text{const}$$

жылдамдықтар өрісімен қозғалады. Осындай жылдамдықтар өрісі үзілісті еместік теңдеуін қанағаттандыратындығын дәлелдеңіз.

3. $v = A \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right), \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad A = \text{const}$ жылдамдықтар

өрісі сығылмайтын сұйықтықтың үзілісті еместік теңдеуін қанағаттандыратындығын көрсетіңіз.

10-тарау. КОМПЬЮТЕРЛІК МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ ЭЛЕМЕНТТЕРІ

Бұл тарауда математикалық модельдерді құру және оларды зерттеудегі есепті сипаттау мен математикалық моделін құрудан оны компьютерде бағдарламалық жүзеге асыру мен нақты нәтижелер алуға дейінгі барлық кезеңдері қарастырылған.

Алдыңғы тарауларда айтылып өтілгендей, математикалық модельдеу үдерісі мынадай кезеңдерден тұрады:

- Зерттеу есебін бізді қызықтыратын сұрақтарға қатысты мағыналы деңгейде сипаттау.

- Есепті нақтылау, есептің концептуалдық қойылымы – пәндік аймақтағы терминологиямен танысу, есепке қойылатын шектеулерді дұрыс таңдау, модельдің p_i параметрлерін, x_i кіріс және y_i шығыс айнамамыларын, осы шамалар арасындағы негізгі теориялық немесе тәжірибелік тәуелділіктерді анықтау.

- Есепті формальдау – нақты құбылысты сипаттайтын $M(p_i, x_i, y_i) = 0$ математикалық модельді құру. Мұнда, әдетте, сақталу заңдары немесе тәжірибелік тәуелділіктер пайдаланылады. Көпшілік жағдайда модельдер қарапайым немесе дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер, тиімдеу функционалдары және т.б жиынтықтары болады.

- Математикалық есепті оны өлшемсіз түрге келтіру арқылы жалпылау. Бұл процедура есеп параметрлерінің санын қысқартуға мүмкіндік береді.

- Құрылған модельдің нақты құбылысты дұрыс сипаттайтындығын тексеру және тестілеу. Ол үшін тәжірибелік берілгендер, сақталу заңдары мен аналитикалық өрнектер түріндегі шешімге ие болған модельдердің қарапайым нұсқалары пайдаланылады.

- Құрылған математикалық есепті шешудің тиімді әдісін таңдау. Әдіс түрлі қателіктерге орнықты, үнемді және қарапайым алгоритмге ие болуы тиіс.

- Есепті шешу алгоритмін компьютерде жүзеге асыратын бағдарламаны құру.

- Бағдарлама көмегімен біз құрған математикалық модель сипаттайтын нақты құбылысты, үдерісті зерттеу.

Осы тарауда жоғарыда келтірілген кезеңдерді жүзеге асыру ерекшеліктерін кейбір нақты есептерді шешу мысалдарында көрсетеміз.

10.1 Қыздырылған денелердің суынуын модельдеу

Қыздырылған денеден оны қоршаған ортаға жылу тасымалының табиғаты күрделі болып, мұнда конвекция, сәулелену, булану және жылуөткізгіштік құбылыстары қатысады. Алайда, қыздырылған дене мен қоршаған орта арасындағы температуралар айырмашылығы үлкен болмаған жағдайда алғаш рет И. Ньютон ұсынған қарапайым модельді пайдалануға болады. Мұндай модельде қоршаған ортаның (тоңазытқыштың) температурасы тұрақты, ал қыздырылған денеден жылудың қоршаған ортаға берілу жылдамдығы олардың температураларының айырымына пропорционал деп алынады. Осы тұжырымның математикалық сипатталуы дифференциалдық теңдеулер арқылы төмендегідей жазылады:

$$\frac{dT}{dt} = -r(T - T_s), \quad (10.1)$$

мұнда T – қыздырылған дененің температурасы, T_s – қоршаған ортаның температурасы, r – «суыну коэффициенті». «Суыну коэффициентінің» мәні жылу тасымалы механизмі, қыздырылған дене көлемі және дененің өзінің жылулық қасиеттеріне тәуелді болады. (10.1) теңдеудің оң жағындағы минус таңбасы $T > T_s$ болғанда физикалық сипатқа дұрыс келмейтін дене температурасының артуы эффектсінен құтылуда пайда болады. (10.1) қатынас *Ньютонның жылуөткізгіштік заңы* деп айтылады.

(10.1) теңдеу – бірінші ретті қарапайым дифференциалдық теңдеу, себебі теңдеуге белгісіз $T(t)$ функцияның тек қана бірінші ретті туындысы кіреді. Табиғаттағы көптеген құбылыстар дифференциалдық теңдеулермен сипатталатындығына байланысты оларды шешу әдістерін білу қажет болады. Бірінші ретті қарапайым дифференциалдық теңдеуге қатысты мәліметтерді қысқаша келтіріп өтеміз.

Анықтама. Тәуелсіз x айнымалыны, белгісіз $y(x)$ функцияны және оның $y'(x)$ туындысын байланыстыратын

$$F(x, y, y') = 0 \quad (10.2)$$

теңдеуді *бірінші ретті қарапайым дифференциалдық теңдеу* деп атайды.

Егер (10.2) теңдеуді

$$y' = f(x, y) \quad (x_0 \leq x \leq L) \quad (10.3)$$

түрде жазу мүмкін болса, онда дифференциалдық теңдеу *туындыға қатысты шешілген* деп айтылады. Бұл теңдеуді кейбір жағдайларда

$dy = f(x, y)dx$ түрде немесе жалпы мынадай дифференциалдық формада жазу мүмкін

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің *шешімі* (немесе *интегралы*) деп сондай кез келген $y = \varphi(x)$ функцияға айтылады, оны теңдеуге қойғанда теңдеу тепе-теңдікке айналатын болса. Бұл жағдайда $y = \varphi(x)$ функция графигі *интегралдық қисық* деп аталады. Берілген дифференциалдық теңдеудің шешімдерін табу процесін осы теңдеуді *интегралдау* деп атайды.

Бірінші ретті (10.3) дифференциалдық теңдеудің

$$y(x_0) = y_0 \quad (10.4)$$

бастапқы шартты қанағаттандыратын шешімін табу есебін *Коши есебі* деп атайды.

Коши есебінің геометриялық мағынасы мынадай: (10.3) теңдеудің $M_0(x_0, y_0)$ нүктеден өтетін интегралдық қисығын табу керек.

(10.3) теңдеудің *жалпы шешімі* деп сондай

$$y = \varphi(x, C) \quad (C - const) \quad (10.5)$$

функцияға айтылады, ол үшін:

1) C -ның кез келген нақты мәнінде ол осы теңдеудің шешімі болса;

2) кез келген $y(x_0) = y_0$ бастапқы жарамды шешім үшін C тұрақтының сондай $C = C_0$ мәні табылып, ол үшін $\varphi(x_0, C_0) = y_0$ шарттар орынды болса.

Кейбір жағдайларда дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін $\Phi(x, y, C) = 0$ айқын емес түрде жазуға тура келеді. Бұл жағдайда $\Phi(x, y, C) = 0$ қатысты осы теңдеудің *жалпы интегралы* деп атайды.

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің *дербес шешімі* деп (10.5) жалпы шешімнен C тұрақтының нақты бір $C = C_0$ мәнінде алынатын $y = \varphi(x, C_0)$ функцияға айтылады.

(10.3), (10.4) Коши есебінің шешімі бар және жалғыздығы жайлы теореманы дәлелдеусіз келтіреміз [40].

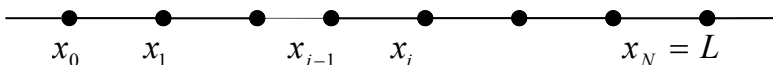
Теорема. $y' = f(x, y)$ дифференциалдық теңдеуде $f(x, y)$ функция және оның $f'_y(x, y)$ дербес туындысы *Оху жазықтықтағы қандайда бір D аймақта үзіліссіз болсын. Онда кез келген*

$M(x_0, y_0) \in D$ нүкте үшін бұл теңдеудің $y(x_0) = y_0$ бастапқы шартты қанағаттандыратын шешімі бар болып, ол жалғыз болады.

Жалпы жағдайда (10.3) теңдеудің элементар функциялар арқылы өрнектелген шешімін табу қиынға соғады, сондықтан көптеген қолданбалы есептердің математикалық модельдері болатын дифференциалдық теңдеулердің жуық сандық шешімдерін табуға тура келеді. Сондай-ақ, теңдеудің аналитикалық шешімі бар болған жағдайдың өзінде шешімнің сипатын білу мақсатында оны графикалық бейнелеу қажет болады.

(10.3), (10.4) Коши есебін сандық шешу жолындағы алғашқы кезең тәуелсіз $\tilde{\delta}$ айнымалының үзіліссіз өзгеру аймағы - $[x_0, L]$ кесіндіні ақырлы санды $x_0 < x_1 < \dots < x_N = L$ нүктелерден тұратын $\bar{\omega}^h$ жиынмен аламастыру болып табылады. $\bar{\omega}^h$ жиынды *тор*, ал x_i нүктелердің өзін *тордың түйіндері*, $h_n = x_n - x_{n-1}$ шаманы *тор қадамы* деп атайды (10.1-сурет). Қолайлылық үшін біз *бірқалыпты торларды*, яғни h_n қадам тұрақты болған торларды қарастырамыз. Бұл жағдайда $h_n = h = (L - x_0) / N$ және $x_n = x_0 + nh, n = 1, 2, \dots, N$.

Үзіліссіз аргументті функциялармен қатар біз *торлық функцияларды*, яғни тек қана $\bar{\omega}^h$ тордың түйіндерінде ғана анықталған, қарастырамыз. Торлық функцияларды үзіліссіз аргументті функциялардан ажырату үшін біз оларды h индексмен белгілейміз. Мысалы, y^h – торлық функция. Ықшамдылық үшін y^h торлық функцияның $\bar{\omega}^h$ тордың $\tilde{\delta}_n$ түйіндегі $y^h(x_n)$ мәнін y_n арқылы белгілейміз.



10.1-сурет. Бірқалыпты тор

(10.3), (10.4) Коши есебін сандық шешудің қарапайым және алғашқысы Эйлер әдісі болып табылады. Ол үшін x айнымалының өзгеруаймағы $[x_0, L]$ кесіндіні $\bar{\omega}^h = \{x_n \mid x_n = x_0 + nh, n = 0, 1, \dots, N\}$ тормен алмастырамыз. Функцияның x_1 нүктедегі мәнін есептеу үшін $y = y(x)$ функцияны x_0 нүкте маңайында Тейлор қатарына жіктейміз:

$$y(x_1) = y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2!} y''(x_0) + \dots$$

h қадам шамасы жеткілікті кіші болғанда жіктеудегі реті екі және одан жоғары болған мүшелерді есепке алмасақ болады және $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ екендігін ескеріп, $y = y(x)$ функцияның x_1 нүктедегі мәнін жуықтап есептеу үшін мына формуланы аламыз:

$$y(x_1) = y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

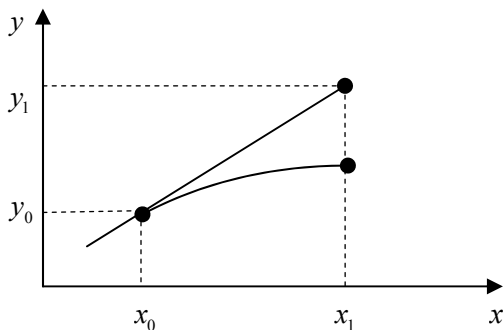
Табылған (x_1, y_1) нүктені Коши есебі үшін бастапқы шарт ретінде қарастырып, $y = y(x)$ функцияның x_2 нүктедегі мәнін табу үшін жоғарыда келтірілген формулаға ұқсас формуланы жазсақ болады:

$$o_2 = o_1 + hf(x_1, y_1).$$

Осы процесті қайталай отырып, x_i нүктелердегі y_i мәндер тізбегін төмендегі формула бойынша келтіріп шығамыз:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (10.6)$$

x_i түйін нүктелердегі функцияның y_i мәндерін (10.6) формула бойынша табу процесін *Эйлер немесе жанамалар әдісі* деп атайды. Эйлер әдісі x аргументтің Δx өсімшесі жеткілікті кіші шама болғанда $y(x)$ функцияның «дәл» мәніне жақсы жуықтаулар беретіндігін күтуге болады. Бұл әдісте $y(x)$ функцияның x_{i-1} -ден x_i -ге дейінгі аралықтағы өзгеру жылдамдығы тұрақты деп алынады, ал жанаманың көлбеуі кесіндінің бастапқы нүктесінде есептеледі. (10.6) қатынастың графикалық мағынасы 10.2-суретте келтірілген.



10.2-сурет. Эйлер әдісінің 1-ші қадамының геометриялық мағынасы

Ыстық дене температурасының төмендеуі үдерісін модельдеу үшін стақандағы кофенің суынуын мысал ретінде қарастырамыз [24]. Біздің моделіміз ыстық дене суынуы үдерісін дұрыс сипаттауын анықтау үшін тәжірибе арқылы табылған стақандағы кофе температурасының төмендеуі жайлы берілгендерді келтіреміз (10.1-кесте).

10.1-кесте. Керамикалық стақандағы кофе температурасының төмендеуі. Қоршаған орта температурасы $T_s = 22^\circ\text{C}$

р/н	Уақыт, минут	$T, ^\circ\text{C}$	р/н	Уақыт, минут	$T, ^\circ\text{C}$
1	0	83.0	9	8.0	64.7
2	1.0	77.7	10	9.0	63.4
3	2.0	75.1	11	10.0	62.1
4	3.0	73.0	12	11.0	61.0
5	4.0	71.1	13	12.0	59.9
6	5.0	69.4	14	13.0	58.7
7	6.0	67.8	15	14.0	57.8
8	7.0	66.4	16	15.0	56.6

Сонымен, стақандағы кофе температурасының төмендеуі үдерісін компьютерлік модельдеу үшін төмендегі Коши есебін қарастырамыз:

$$\frac{dT}{dt} = -r(T - T_s), \quad 0 < t \leq 15, \quad (10.7)$$

$$T(0) = 83^\circ\text{C}. \quad (10.8)$$

(10.7), (10.8) Коши есебін сандық шешу үшін $0 \leq t \leq 15$ аралықта $\bar{\omega}^h = \{t_i \mid t_i = i \cdot h, i = 0, 1, \dots, 15, h = 1\}$ тор құрамыз, ал dT/dt туындыны оң жақ айырымдық туындымен алмастырамыз:

$$\frac{dT}{dt} \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{h},$$

мұнда $u_i = u(t_i) - \bar{\omega}^h$ торда анықталған торлық функция. Нәтижеде (10.7), (10.8) Коши есебі үшін төмендегі айырымдық есепті аламыз:

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{h} = -r(u_i - T_s), \quad i = 1, \dots, 15,$$

$$u_0 = 83^\circ\text{C},$$

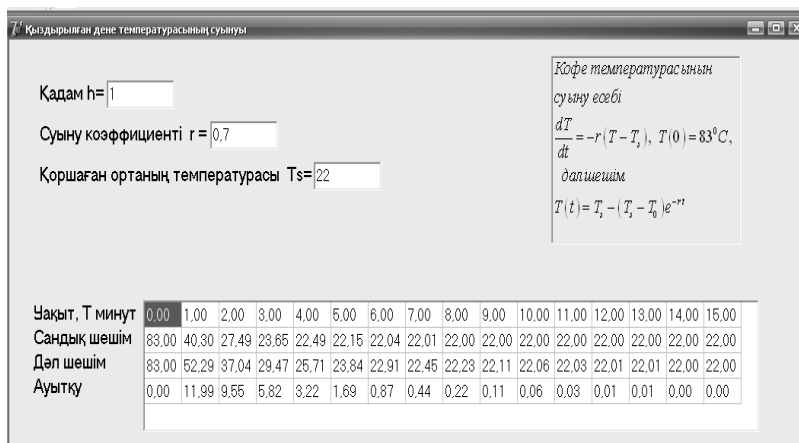
немесе

$$u_{i+1} = (1 - rh)u_i + rh \cdot T_s, \quad i = 0, \dots, 14, \quad (10.9)$$

$$u_0 = 83 \text{ } ^\circ\text{C} . \quad (10.10)$$

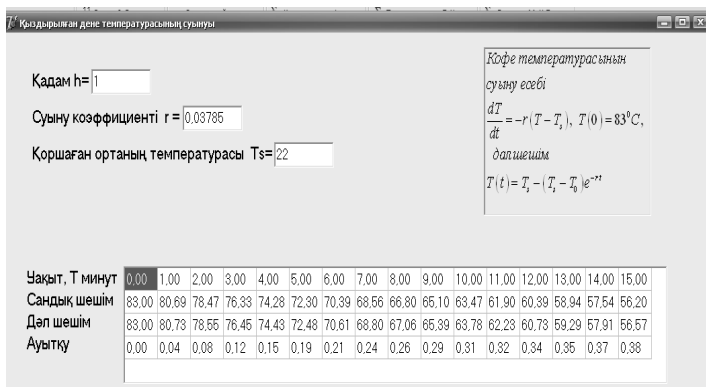
Кофенің кейінгі t_i ($i=1, \dots, 15$) уақыт моменттеріндегі температурасы оның бастапқы температурасын пайдаланып, (10.9) формула арқылы есептеліп табылады (еске сала кетеміз, T_s – қоршаған орта температурасы, біздің мысалымызда $T_s = 22 \text{ } ^\circ\text{C}$).

Төменде кофе температурасының төмендеуі есебін Эйлер әдісімен сандық шешу алгоритмінің Delphi визуалды бағдарламалау ортасындағы нәтижесі келтірілген (10.3-сурет).



10.3-сурет. Кофе температурасының төмендеуі есебін Эйлер әдісімен сандық шешу нәтижесі

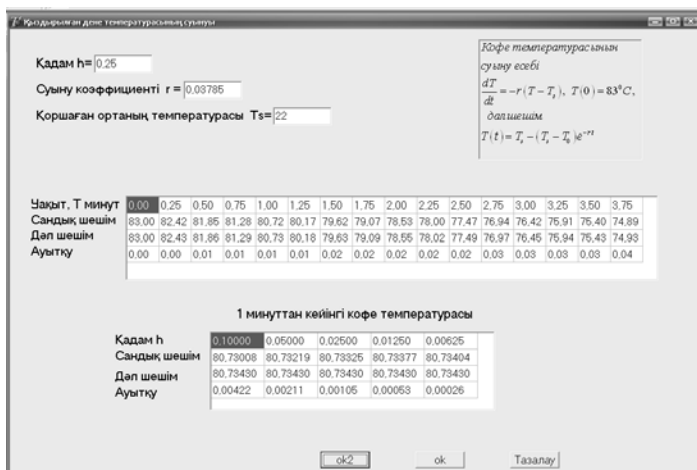
Мұнда біз «суыну коэффициентін» $r = 0,7$ деп алдық. Суреттен көрініп тұрғандай, суыну коэффициентінің $r = 0,7$ мәні кофе температурасының төмендеуінің нақты үдерісіне тура келмейді. Себебі, алынған сандық шешім мен дәл шешім мәндері тәжірибе арқылы анықталған стақандағы кофе температурасының төмендеуі жайлы «нақты» берілгендерге (10.1-кесте) мүлдем сәйкес келмейді. Сондықтан «есептеу тәжірибесін», яғни «суыну коэффициенті» r және h қадамның түрлі мәндерінде есептеулер жүргізу арқылы r -дің нақты физикалық үдеріске жақын келетін мәнін анықтауға болады. Осындай есептеу тәжірибелері арқылы табылған r «суыну коэффициентінің» мәні $r = 0,03785$ болды. Төменде $r = 0,03785$ мәнде алынған есептеу нәтижелері келтірілген (10.4-сурет).



10.4-сурет. r «суыну коэффициентінің» $r = 0,03785$ мәнінде есептелген кофе температурасы төмендеуінің берілгендері

Осы суреттен көрініп тұрғандай, есептелген сандық шешім мен дәл шешім мәндері тәжірибе арқылы анықталған кофе температурасының төмендеуі жайлы «нақты» берілгендерге (10.1-кесте) жақын келеді. Бұл – r «суыну коэффициентінің» $r = 0,03785$ мәні кофе температурасының нақты суыну коэффициентіне жақсы «жуықтау» екендігін білдіреді.

h қадам шамасы кішірейгенде Эйлер әдісі арқылы табылған сандық шешімдер дәл шешім мәндеріне жақын болатындығы және h қадамның $h = 0,1; 0,05; 0,025; 0,0125; 0,00625$ мәндерінде кофе-нің бір минуттан кейінгі есептелген температурасы төменде келтірілген (10.5-сурет).



10.5-сурет. h қадамның түрлі мәндерінде есептелген кофе температурасы

Жоғарыда келтірілген есептеу нәтижелерінен h қадам шамасы кіші болғанда сандық шешім мәні дәл шешімге жуықтайтындығы көрініп тұр. Төменде h қадам шамасына қатысты есептелген кофе температурасының төмендеуінің графигі келтірілген (10.6-сурет).



10.6-сурет. h қадамға қатысты кофе температурасының өзгеруі

Төменде кофе температурасының төмендеуі есебін Эйлер әдісімен сандық шешудің Delphi визуалды программалау ортасындағы бағдарламасының программалық коды келтірілген.

```

unit Unit1;
interface
uses
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls,
  Forms,
  Dialogs, StdCtrls, Grids, OleCtrls;
type
  TForm1 = class(TForm)
    Label1: TLabel;
    Label3: TLabel;
    Edit1: TEdit;
    Edit3: TEdit;
    StringGrid1: TStringGrid;
  end;

```

```

StringGrid2: TStringGrid;
Button1: TButton;
Button2: TButton;
Label2: TLabel;
Label4: TLabel;
Label5: TLabel;
Label6: TLabel;
OleContainer1: TOleContainer;
Label7: TLabel;
Edit2: TEdit;
Button3: TButton;
Label8: TLabel;
Label9: TLabel;
Label10: TLabel;
Label11: TLabel;
Label12: TLabel;
procedure Button3Click(Sender: TObject);
procedure Button1Click(Sender: TObject);
procedure Button2Click(Sender: TObject);
private
  { Private declarations }
public
  { Public declarations }
end;
var
  Form1: TForm1;
implementation
  {$R *.dfm}
  procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
  var i:integer;
  r,Ts, h: real;
  TSS,TD,TA,t1: array [0..10000] of real;
  begin
  h:= strtofloat(edit2.text);
  r:=strtofloat(edit1.text);
  Ts:=strtofloat(edit3.text);
  TSS[0]:=83; TD[0]:=83; TA[0]:=0;
  for i:=0 to 15 do
  begin
  t1[i]:=i*h;
  TSS[i+1]:=(1-r*h)*TSS[i]+r*h*Ts;

```



```

end;
for i:=1 to 15 do
begin
TD[i]:=Ts-(Ts-TD[0])*exp(-r*t1[i]);
TA[i]:=abs(TD[i]-TSS[i]);
end;
for i:=0 to 15 do
begin
stringgrid1.cells[i,0]:=floattostrF(t1[i],ffFixed,5,2);
stringgrid1.cells[i,1]:=floattostrF(TSS[i],ffFixed,5,2);
stringgrid1.cells[i,2]:=floattostrF(TD[i],ffFixed,5,2);
stringgrid1.cells[i,3]:=floattostrF(TA[i],ffFixed,5,2);
end;
end;

procedure TForm1.Button2Click(Sender: TObject);
var i:integer;
begin
edit1.Text:=""; edit2.Text:=""; edit3.Text:="";
for i:=1 to 16 do
begin
StringGrid1.Cells[i-1,0]:="";
StringGrid1.Cells[i-1,1]:="";
StringGrid1.Cells[i-1,2]:="";
StringGrid1.Cells[i-1,3]:="";
end;
for i:=1 to 5 do
begin
StringGrid2.Cells[i-1,0]:="";
StringGrid2.Cells[i-1,1]:="";
StringGrid2.Cells[i-1,2]:="";
StringGrid2.Cells[i-1,3]:="";
end;
end;
procedure TForm1.Button3Click(Sender: TObject);
label 10, 20;
var m,j,k:integer;
r2, Ts1, n2, h2: real;
TSS2,TD2,TA2,t2: array [0..10000] of real;
begin
r2:= 0.03785; m:=0;

```

```

Ts1:=22;
TSS2[0]:=83; TD2[0]:=83; TA2[0]:=0;
h2:=0.1;
10:n2:=1/h2; k:=trunc(n2);
for j:=0 to k do
t2[j]:=j*h2;
TD2[k]:=Ts1-(Ts1-TD2[0])*exp(-r2*t2[k]);
for j:=1 to k do
TSS2[j]:=(1-r2*h2)*TSS2[j-1]+r2*h2*Ts1;
TA2[k]:=abs(TD2[k]-TSS2[k]);
stringgrid2.cells[m,0]:=floattostrF(h2,ffFixed,7,5);
stringgrid2.cells[m,1]:=floattostrF(TSS2[k],ffFixed,7,5);
stringgrid2.cells[m,2]:=floattostrF(TD2[k],ffFixed,7,5);
stringgrid2.cells[m,3]:=floattostrF(TA2[k],ffFixed,7,5);
if h2>=0.005 then
begin h2:=h2/2; m:=m+1;goto 10;
end
else goto 20;
20:end;
end.

```

Біз кофе температурасының төмендеуі үдерісінің математикалық моделі болған (10.1) теңдеуді ең қарапайым әдіс саналатын Эйлер әдісімен сандық шештік. Мұнда біз (10.1) теңдеуді оның (10.9) «айырымдық» аналогымен алмастырдық. Сондықтан сандық шешім бастапқы дифференциалдық теңдеудің дәл шешімінен ауытқуы мүмкін. Жалпы жағдайда, дәл шешімнен ауытқу екі себепке байланысты болады. Біріншіден, компьютерлер дәлдігі шексіз болған нақты сандармен амалдар орындамайды, сандар компьютер жадында ондық цифрлардың қандайда бір ақырлы санымен бейнеленеді, ал бұл компьютердің аппараттық құралдары немесе бағдарламалық қамтамасыздандырумен анықталады. Сондай-ақ, компьютерде нақты сандармен арифметикалық амалдарды орындау нәтижесінде *дөңгелектеу қателігі* деп аталатын қосымша қателік пайда болады. Мысалы, егер бізде тек қана екі мәнді цифрлармен жұмыс жасайтын компьютер бар болса, онда 2.3×3.1 көбейтудің нәтижесі 7.1 санына тең болған болар еді. Есептеу көлемі артқанда дөңгелектеу қателігі де арта түседі.

Сандық шешімнің дәл шешімнен ауытқуының екінші себебі, бастапқы есепті сандық шешу үшін таңдалған әдіске байланысты болады. Осы қателікті кейбір жағдайларда «жуықтау қателігі» деп те атайды. Бастапқы есепті сандық шешу үшін оған белгілі бір ма-

ғынада «жуық» болған және *айырымдық сұлба* (айырымдық есеп) деп аталатын теңдеу құрылады. Мұнда осындай айырымдық сұлбаларды құру әдістері, айырымдық сұлбаның берілген есепті аппроксимациялау (жуықтау) қателігі, дәлдігі, олардың орнықтылығы мен жинақтылығы сынды мәселелерді тереңірек қарастыруға тура келеді. Осы айтылған мәселелер «Сандық әдістер», «Есептеу математикасына кіріспе», «Математикалық физика теңдеулерін сандық шешу әдістері» курстарында жан-жақты қарастырылатын болғандықтан оқырман оларды [6, 22, 34, 48, 49] әдебиеттерден және осы оқулықтар мен оқу құралдарында келтірілген әдебиеттерден өз беттерінше оқып-үйренулеріне болады.

Әдіс қателігін бағалауда локаль және глобал қателіктер болуын ескерген жөн. Ағымдағы бір қадамда пайда болатын қателіктерді *локаль қателіктер* деп атайды, осы қадамдағы нәтижені алуда бастапқы есептің дәл мәндері пайдаланылады. Ал қателіктердің көршілес қадамдардағы сипатын зерттеу арқылы n -ші қадамда жинақталған қателік жайлы түсінік алуға болады. Осы қателікті *глобал қателік* деп атайды.

Біз қарастырған Эйлер әдісінің глобал қателігінің реті h қадамға қатысты бірге тең болады.

10.2 «Жыртқыш-құрбан» биожүйесінің моделі

10.2.1 Есептің қойылымы

«Жыртқыш-құрбан» принципі бойынша өзара әрекеттесетін екі биологиялық популяциялар саны динамикасының математикалық моделін құру және модель параметрлеріне қатысты оның өзгеру сипатын зерттеу керек.

Осы есептің математикалық моделін құруда төменде келтірілген ұйғарымдарды басшылыққа аламыз:

- жыртқыштар болмағанда құрбандардың өзгеру жылдамдығы олардың санына пропорционал, осы пропорционалдық коэффициенті олардың табиғи өлімі және туылуымен ғана анықталады;

- жыртқыштар болғанда құрбандардың кемуі жылдамдығы құрбандар мөлшеріне, сонымен қатар жыртқыштар мөлшеріне де пропорционал болады;

- оқшауланған жыртқыштардың табиғи кемуінің жылдамдығы олардың санына пропорционал, ал құрбандарды жеу есебінен болатын өсу жылдамдығы екі түрдің де санына пропорционал.

10.2.2 Биологиялық жүйенің математикалық моделі

Жоғарыда келтірілген ұйғарымдарда «жыртқыш-құрбан» био-жүйесіндегі популяциялар санының өзгеруін Лотка-Вольтерра моделінің [7,16] дифференциалдық теңдеулер жүйесімен сипаттауға болады:

$$\frac{dx}{dt} = x(a_1 - b_1 y), \quad \frac{dy}{dt} = -y(a_2 - b_2 x), \quad (10.11)$$

мұнда, $a_i, b_i > 0 (i=1,2)$ және олардың өлшемі $[a_i], [b_i] \approx [1/t]$.

Бұл модельде ресурстар үшін ішкі түрлер бәсекелестігі есепке алынбайды, ал жыртқыштар болмағанда шексіз қорек мөлшеріне ие болған құрбандардың өсу жылдамдығы шексіз болуы мүмкін.

(10.11) теңдеулер жүйелерінің оң жақтарын нөлге теңестіріп, био-жүйенің екі тепе-теңдік нүктелерін аламыз:

$$x_p = 0, y_p = 0, \quad x_p = \frac{a_2}{b_2}, y_p = \frac{a_1}{b_1}.$$

Бұл нүктелерді *стационар* немесе *ерекше* нүктелер деп атайды. Алғашқы стационар нүкте $(x_p = 0, y_p = 0)$ бізді қызықтырмайды, себебі есептің бастапқы қойылымына сәйкес келмейді. Алынған тепе-теңдік нүктесінің координаталарын пайдаланып, жаңа өлшемсіз шамаларды енгіземіз:

$$t \equiv ta_2, \quad x \equiv \frac{x}{x_p}, \quad y \equiv \frac{y}{y_p}, \quad q = \frac{a_1}{a_2}. \quad (10.12)$$

Сонда (10.11) теңдеулер жүйесін мына түрде жазсақ болады:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= q x(1 - y) \equiv F_1(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= -y(1 - x) \equiv F_2(x, y). \end{aligned} \quad (10.13)$$

10.2.3 Математикалық модельді зерттеу

Жаңа салыстырмалы айнымалыларда био-жүйенің нөл болмаған тепе-теңдік нүктесі $x_p = 1, y_p = 1$ болады. Осы нүкте маңайында био-жүйенің жағдайын зерттейміз. Ол үшін $\delta x = x - x_p, \delta y = y - y_p$ айнымалыларды енгіземіз және (10.13) жүйенің оң жақтарын тепе-теңдік нүкте маңайында $O(\delta x, \delta y)$ ретке дейінгі мүшелермен шектелген жағдайда қатарларға жіктейміз. Сонда $\delta x, \delta y$ айныма-

лылар үшін төмендегі сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйелерін аламыз:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta x}{dt} &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_p \delta x + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)_p \delta y, \\ \frac{d\delta y}{dt} &= \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)_p \delta x + \left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)_p \delta y, \end{aligned} \quad (10.14)$$

мұнда

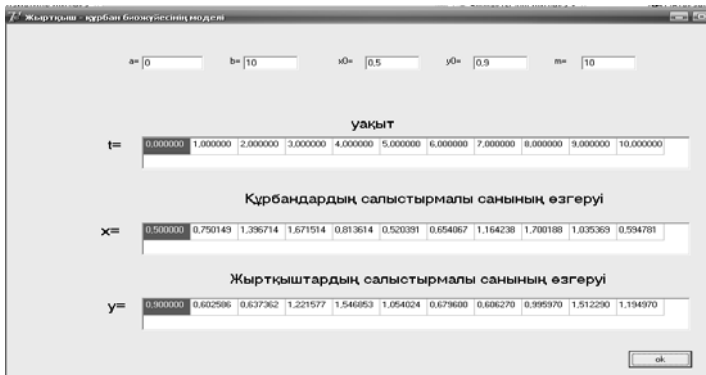
$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_p &= q(1 - y_p) = 0, \quad \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)_p = -qx_p = 0, \quad \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)_p = y_p = 1, \\ \left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)_p &= -(1 - x_p) = 0. \end{aligned}$$

(10.14) жүйенің

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -q \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

сипаттауыш теңдеуі екі таза жорамал түбірге ие: $\lambda_1 = i\sqrt{q}$, $\lambda_2 = -i\sqrt{q}$.

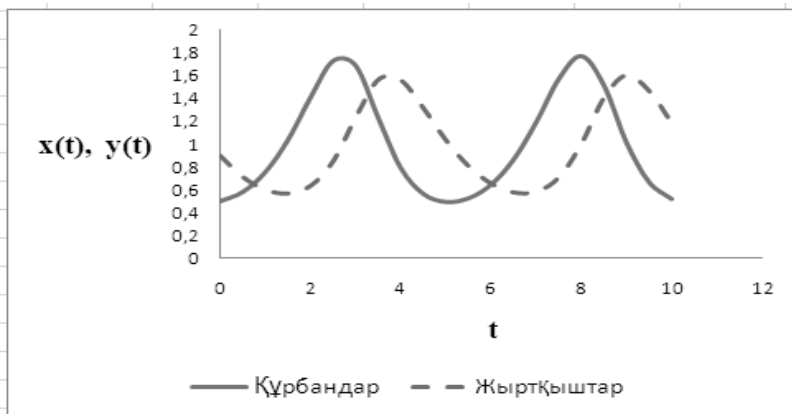
Бұл – биожүйенің x_p, y_p тепе-теңдік нүктесі центр, x, y фазалық кеңістікте осы нүкте маңайында тұйық фазалық траекториялар орналасатындығын, ал популяциялар санының өзгеруі толқындық сипатқа ие болатындығын білдіреді. Осы айтылғандардың дұрыстығын параметрдің $q = 1,5$ және бастапқы шарттардың $x_0 = 0,5, y_0 = 0,9$ мәндері үшін табылған (10.13) жүйенің шешімдері (10.7-сурет) және олар арқылы құрылған графиктерден көруге болады (10.8 және 10.9-суреттер).



10.7-сурет. «Жыртқыш-күрбан» биожүйесінің математикалық моделі болған (10.13) жүйені Рунге-Кутта әдісімен Delphi ортасында сандық шешу нәтижесі



10.8-сурет. $q = 1,5$, $x_0 = 0,5$ және $y_0 = 0,9$ жағдайлар үшін фазалық траектория



10.9-сурет. Құрбандар ($x_0 = 0,5$) мен жыртқыштардың ($y_0 = 0,9$) салыстырмалы санының өзгеруі ($q = 1,5$)

Төменде (10.13) жүйені дәлдік реті төртке тең болған Рунге-Кутта әдісімен Delphi ортасында сандық шешу бағдарламасының программалық коды келтірілген.

```
unit Unit1;
interface
uses
Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls,
Forms,
```

```

Dialogs, StdCtrls, Grids;
type
 TForm1 = class(TForm)
 Edit2: TEdit;
 Edit3: TEdit;
 Edit4: TEdit;
 Label2: TLabel;
 Label3: TLabel;
 Label4: TLabel;
 Label5: TLabel;
 Label6: TLabel;
 Edit5: TEdit;
 Label7: TLabel;
 StringGrid1: TStringGrid;
 StringGrid2: TStringGrid;
 StringGrid3: TStringGrid;
 Label9: TLabel;
 Label10: TLabel;
 Button1: TButton;
 Edit1: TEdit;
 Label8: TLabel;
 Label11: TLabel;
 Label111: TLabel;
 Label12: TLabel;
 procedure Button1Click(Sender: TObject);
 private
 { Private declarations }
 public
 { Public declarations }
 end;
 var
 Form1: TForm1;
 implementation
 {$R *.dfm}

 procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
 const
 c:array[1..4] of real=(0,0.5,0.5,1);
 type
 coef2=array[0..4,1..2] of real;
 vect=array [1..2] of real;
 var
 i,j,n,m:integer;

```

```

a,b,h,x:real;
y,y1:vect;
k:coef2;
x3,y2,y3: array[0..1000] of real;

function f(i:integer; x:real;y:vect):real;
begin
case i of
1: f:=1.5*y[1]*(1-y[2]);
2: f:=-y[2]*(1-y[1]);
end;
end;

begin
a:=strtofloat(edit1.Text);
b:=strtofloat(edit2.Text);
y1[1]:=strtofloat(edit3.Text);
y1[2]:=strtofloat(edit4.Text);
m:=strtoint(edit5.Text);
x:=a; h:=(b-a)/m;
x3[0]:=x; y2[0]:=y1[1]; y3[0]:=y1[2];
for i:=1 to m do
begin
for j:=1 to 4 do
begin
for n:=1 to 2 do
y[n]:=y1[n]+c[j]*k[j-1,n];
for n:=1 to 2 do
k[j,n]:=h*f(n,x+c[j]*h,y);
end;
for n:=1 to 2 do
y1[n]:=y1[n]+(k[1,n]+2*k[2,n]+2*k[3,n]+k[4,n])/6;
x3[i]:=x+h; y2[i]:=y1[1]; y3[i]:=y1[2];
x:=x+h;
end;
for i:=0 to m do
begin
stringgrid1.Cells[i,0]:=floattostrF(x3[i],ffFixed,6,3);
stringgrid2.Cells[i,0]:=floattostrF(y2[i],ffFixed,6,3);
stringgrid3.Cells[i,0]:=floattostrF(y3[i],ffFixed,6,3);
end;
end;

end.

```


10.2.4 «Жыртқыш-құрбан» моделін кеңейту

Бастапқы модельде екі популяция үшін де шектелген ресурстарда ішкі түрлер бәсекелестігін есепке алатын жағдайды қарастырамыз. Бір түрге тиісті популяция өкілдерінің бір-бірімен соқтығысуы олардың санының квадратына пропорционал популяцияның өсу жылдамдығының кемуіне алып келеді. Осыған сәйкес (10.11) теңдеулер жүйесінде қосымша қосылғыштар пайда болады:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(a_1 - b_1 y - c_1 x), \\ \frac{dy}{dt} &= -y(a_2 - b_2 x + c_2 y),\end{aligned}\tag{10.15}$$

мұнда ($c_1 \geq 0, c_2 \geq 0$).

Бұл жүйе алдыңғы (10.12) өлшемсіз айнымалылар көмегімен мына түрге келтіріледі:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= qx(1 - y - p_1 x) \equiv F_1(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= -y(1 - x + p_2 y) \equiv F_2(x, y),\end{aligned}\tag{10.16}$$

мұнда

$$p_1 = \frac{c_1 a_2}{a_1 b_2}, \quad p_2 = \frac{c_2 a_1}{a_2 b_1}, \quad q = \frac{a_1}{a_2}.\tag{10.17}$$

10.2.5 «Жыртқыш-құрбан» биоэжүйесінің кеңейтілген моделін зерттеу

(10.16) модель үшін $F_1(x, y) = 0, F_2(x, y) = 0$ шарттардан анықталатын нөлге тең болмаған тепе-теңдік нүктесі

$$x_p = \frac{1 + p_2}{1 + p_1 p_2}, \quad y_p = \frac{1 - p_1}{1 + p_1 p_2}.\tag{10.18}$$

координаталармен беріледі. Популяциялардың бірі ерекшеленетін қалған тепе-теңдік нүктелері бізді қызықтырмайды. Осы себепке байланысты ($y_p > 0$ талабы) параметрлердің біріне $0 \leq p_1 < 1$ шарты келіп шығады. (10.16) жүйені осы тепе-теңдік нүкте маңайында қатарға жіктеу арқылы (10.14) түрдегі жүйе аламыз, ондағы туындылар мына формулалармен анықталады:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_p &= q(1 - y_p - p_1 x_p) - qp_1 x_p = -qp_1 x_p = -qp_1 \frac{1 + p_2}{1 + p_1 p_2}, \\ \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)_p &= -qx_p = -q \frac{1 + p_2}{1 + p_1 p_2}, \\ \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)_p &= y_p = \frac{1 - p_1}{1 + p_1 p_2}, \\ \left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)_p &= -(1 - x_p + p_2 y_p) - p_2 y_p = -p_2 y_p = -p_2 \frac{1 - p_1}{1 + p_1 p_2}. \end{aligned} \tag{10.19}$$

Осы жағдай үшін (10.14) жүйенің сипаттауыш теңдеуін жазамыз:

$$\begin{vmatrix} -qp_1 \frac{1 + p_2}{1 + p_1 p_2} - \lambda & -q \frac{1 + p_2}{1 + p_1 p_2} \\ \frac{1 - p_1}{1 + p_1 p_2} & -p_2 \frac{1 - p_1}{1 + p_1 p_2} \end{vmatrix} = 0,$$

немесе

$$\lambda^2 + \lambda \frac{qp_1(1 + p_2) + p_2(1 - p_1)}{(1 + p_1 p_2)} + q \frac{(1 - p_1)(1 + p_2)}{(1 + p_1 p_2)} = 0. \tag{10.20}$$

Осы теңдеудің түбірлері мынадай болады:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-[qp_1(1 + p_2) + p_2(1 - p_1)] \pm \sqrt{D}}{2(1 + p_1 p_2)}, \tag{10.21}$$

мұнда

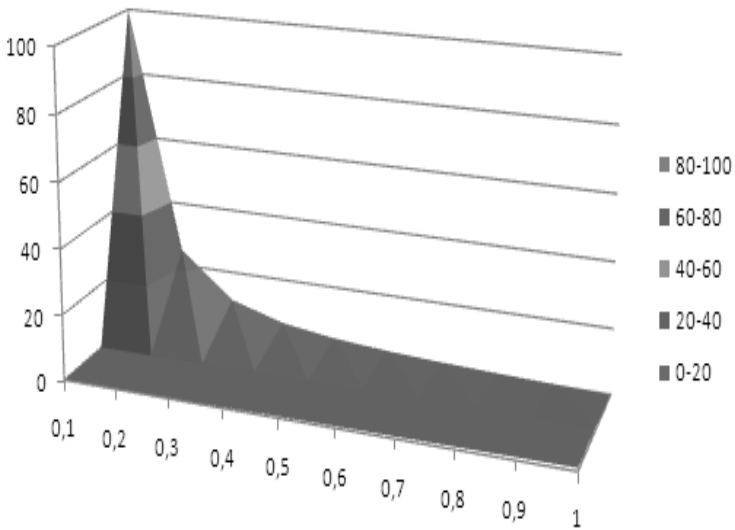
$$D = [qp_1(1 + p_2) + p_2(1 - p_1)]^2 - 4q(1 + p_1 p_2)(1 - p_1)(1 + p_2).$$

q, p_1, p_2 параметрлердің мәндеріне байланысты түбірлер екі түрлі болуы мүмкін: нақты бөлігі теріс болған комплексті-түйіндес ($D(q, p_1, p_2) < 0$ болғанда) немесе нақты теріс ($D(q, p_1, p_2) \geq 0$ болғанда).

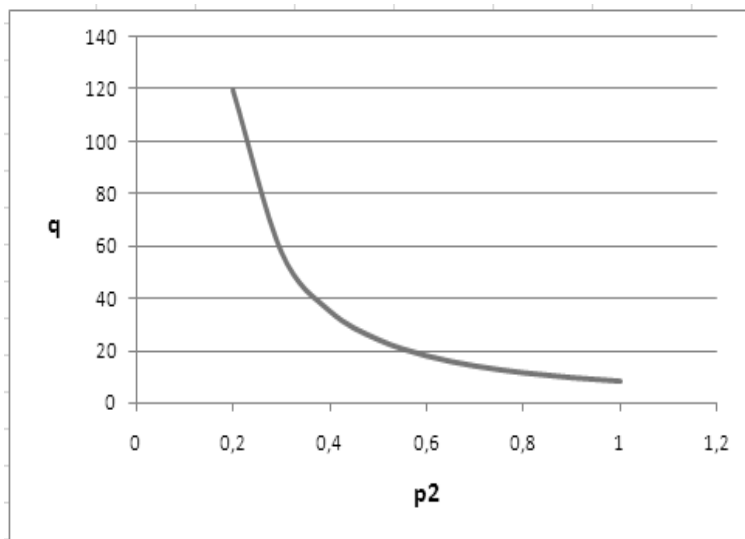
q, p_1, p_2 параметрлердің үш өлшемді кеңістігінде комплексті-түйіндес түбірлер жататын бірінші аймақ нақты түбірлер жататын екінші аймақтан $D(q, p_1, p_2) = 0$ теңдеумен берілетін бет арқылы ажыратылады. Ал беттің ашып жазылған теңдеуі мынадай:

$$q = 4 \frac{(1 + p_1 p_2)(1 - p_1)(1 + p_2)}{[p_1(1 + p_2) + p_2(1 - p_1)]^2}.$$

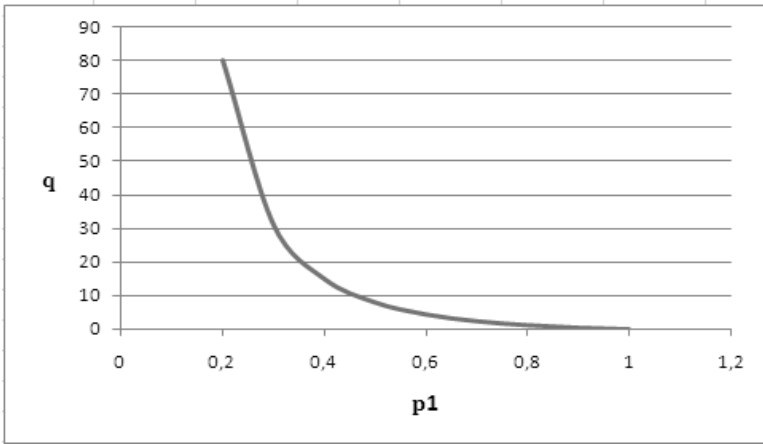
Осы бет және популяциялардың бірінде ішкі түрлер бәсекелестігі болмаған дербес жағдайлар үшін оның қималарының көріністері 10.10, 10.11 және 10.12-суреттерде келтірілген.



10.10-сурет. $D(q, p_1, p_2) = 0$ тендеумен анықталатын бет графигі

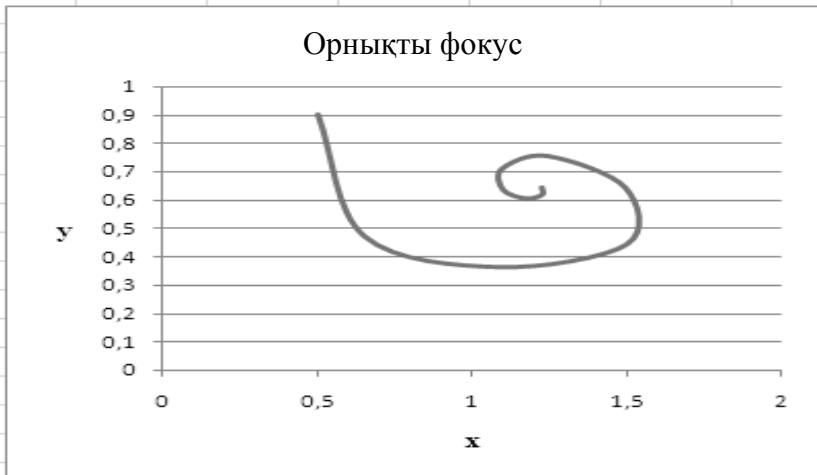


10.11-сурет. $D(q, p_1, p_2) = 0$ беттің $p_1 = 0$ жазықтықпен қимасы

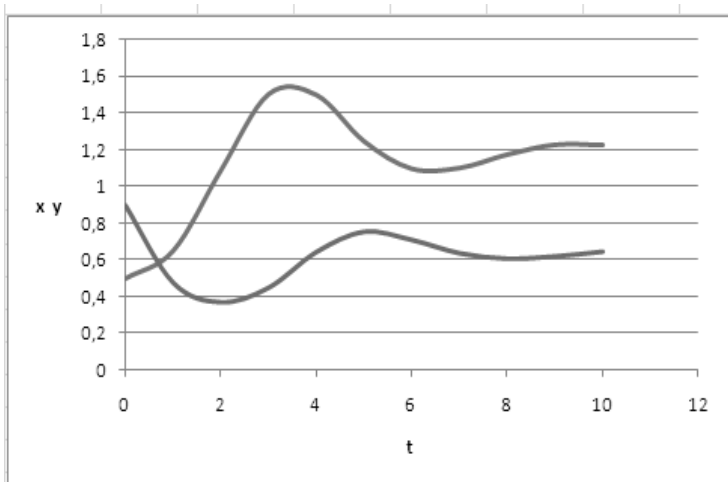


10.12-сурет. $D(q, p_1, p_2) = 0$ беттің $p_2 = 0$ жазықтықпен қимасы

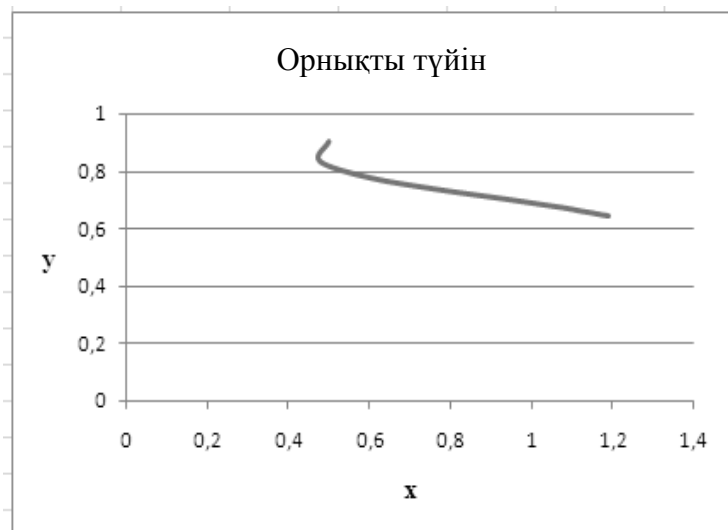
Егер q, p_1, p_2 параметрлер бірінші аймаққа тиісті болатын болса (10.10-суреттегі графикте бұл аймақ беттің төменгі жағында жатады, мұнда $D(q, p_1, p_2) < 0$), онда (10.18) координаталармен берілген тепе-теңдік нүктесі x, y фазалық кеңістікте орнықты фокус болады (10.13-сурет), популяциялар санының өзгеруі өшуші толқындар сипатына ие болады (10.14-сурет).



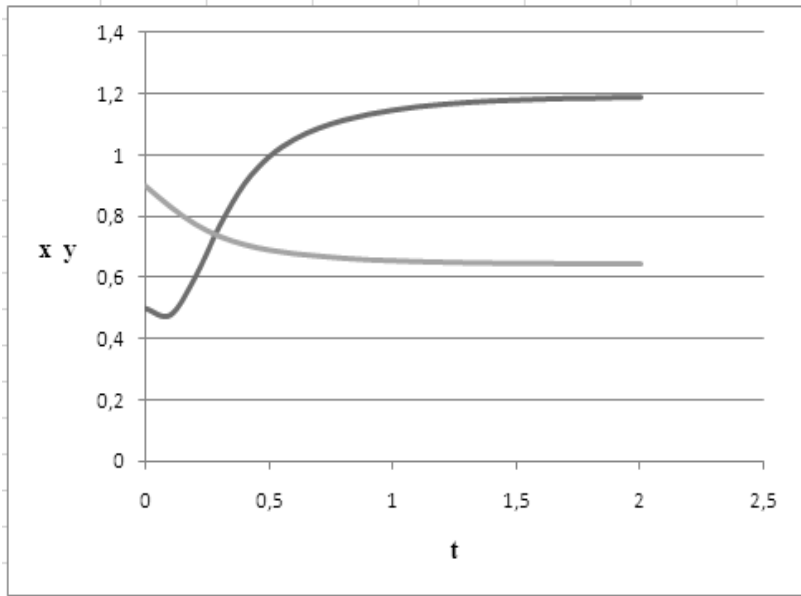
10.13-сурет. Орнықты фокус жағдайы үшін фазалық қисық
 $(q = 1,5, p_1 = 0,3, p_2 = 0,3, x(0) = 0,5, y(0) = 0,9, x_p = 1,19, y_p = 0,64)$



10.14-сурет. Орнықты фокус жағдайы үшін популяциялар санының өзгеру қисықтары
 $(q = 1,5, p_1 = 0,3, p_2 = 0,3, x(0) = 0,5, y(0) = 0,9, x_p = 1,19, y_p = 0,64)$



10.15-сурет. Орнықты түйін жағдайы үшін фазалық қисық
 $(q = 60, p_1 = 0,3, p_2 = 0,3, x(0) = 0,5, y(0) = 0,9, x_p = 1,19, y_p = 0,64)$



10.16-сурет. Орнықты түйін жағдайы үшін популяциялар санының өзгеру қисықтары

$$(q = 60, p_1 = 0,3, p_2 = 0,3, x(0) = 0,5, y(0) = 0,9, x_p = 1,19, y_p = 0,64)$$

Сонымен, ішкі түрлер бәсекелестігі болған жағдайда биологиялық жүйедегі популяциялар саны стационар болады. Популяциялар санының кез келген қобалжуларында биологиялық жүйе осы тепе-теңдік жағдайына қайтып оралады. Қайта оралу жылдамдығы координаталары q, p_1, p_2 параметрлердің мәндерімен берілетін нүкте қай аймақта орналасатындығына байланысты болады.

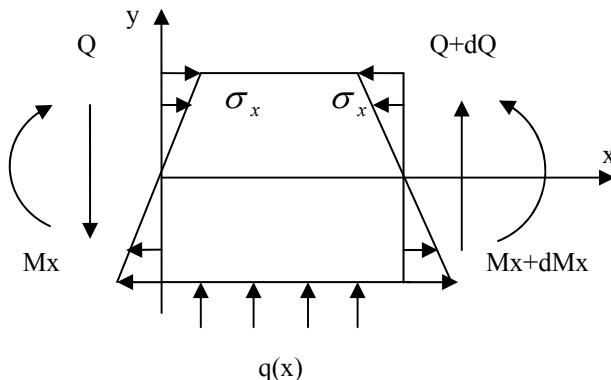
10.3 Балка параметрлерін тиімдеу есебі

10.3.1 Есептің қойылымы

Берілген жүк үшін балка қимасының максимал иілуінің минимумын қамтамасыз ететін инерция моментінің тиімді бойлық үлестірімін табу керек. Балка ұштарын берік етіп қоюдың екі нұсқасын қарастыру керек: 1) екі ұшы да қатты беріктелген; 2) бір ұшы бос, ал екіншісі қатты беріктелген.

10.3.2 Есептің математикалық моделін құру

Үлестірім тығыздығы $q(x)$ болған көлденең қойылған жүкке байланысты балканың орта сызығының майысуын сипаттайтын дифференциалдық теңдеуді алуды қарастырамыз (10.17-сурет).



10.17-сурет. Жүк қойылған балка элементі

Ол үшін алдымен балканың dx элементар бөлігінің тепе-теңдік шартын сыртқы қойылған жүк және деформацияланған балканың жазық қималарындағы ішкі жанама және нормаль кернеулер келтіріп шығаратын күштерді есепке ала отырып жазамыз [53]:

$$\sum Y = -Q + (Q + dQ) + qdx = 0,$$

$$\sum M = -M_z + (M_z + dM_z) + qdx^2 / 2 + (Q + dQ)dx = 0.$$

Осы келтірілген қатынастарда dx -қа қатысты аздығы екінші ретті болған мүшелерді тастап кететін болсақ, төмендегі теңдіктерді алуымызға болады:

$$\frac{dQ}{dx} = -q, \quad \frac{dM_z}{dx} = -Q \Rightarrow \frac{d^2 M_z}{dx^2} = q. \quad (10.22)$$

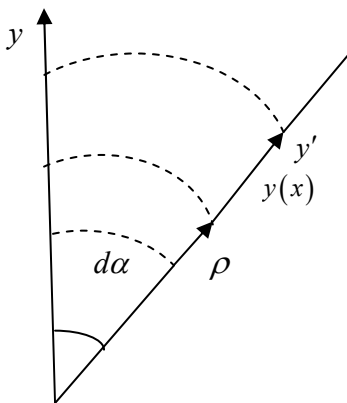
Екінші жағынан, $\sigma_x = E \varepsilon_x$, мұнда $\sigma_x, \varepsilon_x, E$ – нормаль кернеу (балка қималарының жазықтығында әсер етеді), салыстырмалы деформация және Юнг модулі, белгілі тәжірибелік тәуелділікті (Гук заңы) есепке алып, төмендегі теңдікті жазуымызға болады:

$$M_z = \int_y \sigma_x(y') y' l(y') dy' = E \int_y \varepsilon_x(y') y' l(y') dy'. \quad (10.23)$$

Мұнда y' – сәйкес локаль координата, $l(y')$ – қиманың ағымдық ені.

Кіші майысу жағдайларында балканың қимасы жазық күйінде қалады, ал оның бейтарап қабаты деформацияланбайды деп есептеуге болады. Сондықтан $\varepsilon_x(y')$ салыстырмалы деформацияны ρ бейтарап сызықтың қисықтығымен мынадай байланыстыру мүмкін (10.18-сурет):

$$\varepsilon_x(y') = \frac{(\rho + y')d\alpha - \rho d\alpha}{\rho d\alpha} = \frac{y'}{\rho}. \quad (10.24)$$



10.18-сурет. Балка элементінің иілуі

(10.24) формуламен анықталған $\varepsilon_x(y')$ салыстырмалы деформацияны (10.23) қойып табамыз:

$$M_z = \frac{E}{\rho} J, \quad (10.25)$$

мұнда $J(x) = \int_{y'(x)} (y')^2 I(y') dy'$ – балканың ағымдық қимасының инерция моменті.

Дифференциалдық геометрия курсынан бейтарап сызықтың қисықтық радиусын оның $y(x)$ теңдеуімен байланыстыру мүмкін екендігі белгілі:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \approx \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad (10.26)$$

мұнда $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \ll 1$ екендігі есепке алынды.

(10.25), (10.26)-формуларды есепке алып, (10.22)-өрнектен балканың жүк әсерінде майысуын сипаттайтын дифференциалдық теңдеуді аламыз:

$$E \frac{d}{dx^2} \left(J(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = q(x). \quad (10.27)$$

Бұл теңдеуге шекаралық шарттарды қою керек:

1. Балканың екі ұшы да беріктелген

$$x = 0; \quad x = L; \quad y = \frac{dy}{dx} = 0. \quad (10.28)$$

2. Бір ұшы ($x = 0$) беріктелген, ал екіншісі ($x = L$) бос

$$\left(M_z \approx \frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \quad Q \approx \frac{d^3 y}{dx^3} = 0 \right)$$

$$x = 0, \quad y = \frac{dy}{dx} = 0; \quad x = L, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^3 y}{dx^3} = 0. \quad (10.29)$$

10.3.3 Есепті өлшемсіз түрге келтіру

Есепті бастапқы параметрлерден тәуелсіз ету үшін өлшемсіз шамаларды енгіземіз:

$$x \equiv x/L, \quad q(x) \equiv q(x)/q_0, \quad J(x) \equiv J(x)/J_0, \quad u(x) = y(x)/F, \quad (10.30)$$

мұнда $q_0 = \frac{1}{L} \int_0^L |q(x)| dx$, $J_0 = \frac{1}{L} \int_0^L J(x) dx$, $F = \frac{q_0 L^4}{EJ_0}$.

Жаңа өлшемсіз параметрлер үшін

$$\int_0^1 |q(x)| dx = 1, \quad \int_0^1 J(x) dx = 1. \quad (10.31)$$

интегралдық қатынастар орынды болады.

Сонда шекаралық шарттардың (10.28), (10.29) екі нұсқалары үшін екі өлшемсіз шеттік есепті аламыз (мұнда және әрі қарай төмен қарай бағытталған жүкті біз оң деп есептейміз).

1-есеп

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(J(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right) = -q(x), \quad x \in [0, 1], \quad (10.32)$$

$$x = 0, \quad x = 1, \quad u = \frac{du}{dx} = 0.$$

2-есеп

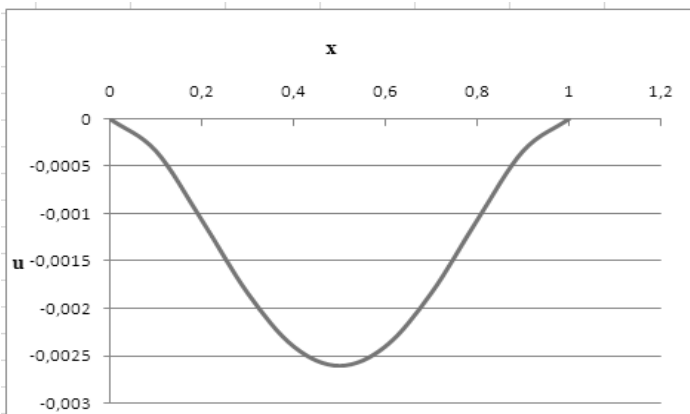
$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left(J(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right) &= -q(x), \quad x \in [0, 1], \\ x=0, \quad u &= \frac{du}{dx} = 0, \\ x=1, \quad \frac{d^2 u}{dx^2} &= \frac{d^3 u}{dx^3} = 0. \end{aligned} \tag{10.33}$$

10.3.4 Математикалық модельдің есепті дұрыс сипаттауын тексеру

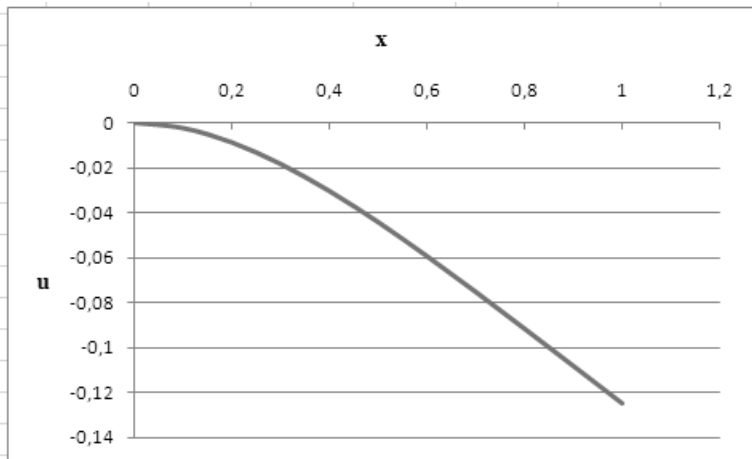
Балка ұзындығы тұрақты, қима инерциясының моменті $J(x) = 1$ және бірқалыпты үлестірілген $q(x) = 1$ жүк үшін 1 және 2 есептердің аналитикалық шешімдері бар болып, олар төменде келтірілген өрнектер арқылы анықталады:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= -\frac{(x^2 - 2x^3 + x^4)}{24}, \\ u_2(x) &= -\frac{(6x^2 - 4x^3 + x^4)}{24}. \end{aligned}$$

Төмендегі 10.19- және 10.20-суреттерде осы функциялардың графиктері келтірілген. Қисықтардың сипаты балканың оған қойылған жүк әсерінен болатын иілуінің нақты күзетулеріне сәйкес келеді. Бұл – құрылған математикалық модель балканың оған қойылған жүк әсерінен иілуін дұрыс сипаттайтындығын білдіреді.



10.19-сурет. Қимасы тұрақты ұштары беріктелген балканың иілуі



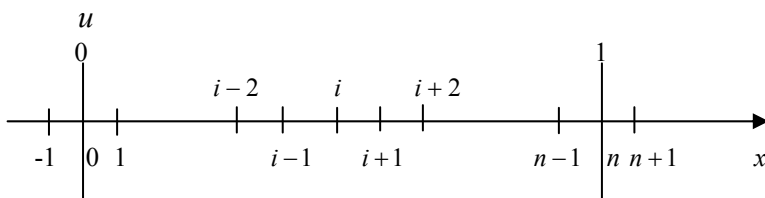
10.20-сурет. Қимасы тұрақты сол жақ ұшы беріктелген балканың иілуі

10.3.5 Шеттік есепті шешу әдісін таңдау

(10.32), (10.33) есептерді шешу үшін айырымдық әдісті қолданамыз. Бұл жағдайда есеп коэффициенттер матрицасы бес диагоналды болған сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешуге келтіріледі. Мұндай жүйелерді шешуде үнемді және орнықты болатын кума әдісі пайдаланылады.

Сызықтық теңдеулер жүйесін келтіріп шығаруды (10.32) 1-есеп мысалында қарастырамыз.

$x \in (0, 1)$ аралықты $i \in (-1, n+1)$ нүктелердің кеңейтілген жүйесімен алмастырамыз, қадам h тең (10.21-сурет).



10.21-сурет. Балканың дискрет моделі

$i \in (1, n-1)$ нүкте үшін есеп теңдеуіндегі дифференциалдық оператордың дискрет аналогын мынадай жазуымыз мүмкін:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(J(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \approx \frac{\left(J \frac{d^2 u}{dx^2} \right)_{i+1} - 2 \left(J \frac{d^2 u}{dx^2} \right)_i + \left(J \frac{d^2 u}{dx^2} \right)_{i-1}}{h^2} \approx \quad (10.34)$$

$$\approx \frac{J_{i+1}(u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i) - 2J_i(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + J_{i-1}(u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2})}{h^4}.$$

Сонымен, есептің дискрет аналогы мына түрде болады:

$x = 0$ -дегі ($i = 0$) шекаралық шарттар

$$u_0 = 0, \frac{u_1 - u_{-1}}{2h} = 0 \Rightarrow u_0 = 0, u_1 = u_{-1}, \quad (10.35)$$

$i \in (1, n-1)$ теңдеу

$$a_i u_{i-2} + b_i u_{i-1} + c_i u_i + d_i u_{i+1} + e_i u_{i+2} = f_i, \quad (10.36)$$

$x = 1$ -дегі ($i = n$) шекаралық шарттар

$$u_n = 0, \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} = 0 \Rightarrow u_n = 0, u_{n+1} = u_{n-1}, \quad (10.37)$$

мұнда

$$a_i = J_{i-1}, b_i = -2(J_i + J_{i-1}), c_i = J_{i+1} + 4J_i + J_{i-1},$$

$$d_i = -2(J_{i+1} + J_i), e_i = J_{i+1}, f_i = -q_i h^4.$$

(10.35), (10.36) шекаралық шарттарды (10.36) теңдеуге i -дің $i = 1, 2, n-2, n-1$ мәндері үшін қойып, берілген нүктелер жүйесінде балканың иілу мәндерін анықтау үшін коэффициенттер матрицасы бес диагоналды болған сызықты теңдеулер жүйесін аламыз:

$$(a_1 + c_1)u_1 + d_1 u_2 + e_1 u_3 = f_1, \quad i = 1;$$

$$b_2 u_1 + c_2 u_2 + d_2 u_3 + e_2 u_4 = f_2, \quad i = 2;$$

$$a_i u_{i-2} + b_i u_{i-1} + c_i u_i + d_i u_{i+1} + e_i u_{i+2} = f_i, \quad i \in (3, n-3); \quad (10.38)$$

$$a_{n-2} u_{n-4} + b_{n-2} u_{n-3} + c_{n-2} u_{n-2} + d_{n-2} u_{n-1} = f_{n-2}, \quad i = n-2;$$

$$a_{n-1} u_{n-3} + b_{n-1} u_{n-2} + (c_{n-1} + e_{n-1}) u_{n-1} = f_{n-1}, \quad i = n-1.$$

(10.38) жүйенің шешімін қума әдісімен табуға болады. Ол үшін төмендегі рекуррент қатынастарды енгіземіз:

$$u_i = \alpha_i u_{i+1} + \beta_i u_{i+2} + \gamma_i, \quad i \in (1, n-3). \quad (10.39)$$

(10.38) жүйенің бірінші теңдеуін (10.39) салыстыра отырып, табамыз

$$\alpha_1 = -\frac{d_1}{a_1 + c_1}, \beta_1 = -\frac{e_1}{a_1 + c_1}, \gamma_1 = \frac{f_1}{a_1 + c_1}. \quad (10.40)$$

Әрі қарай, $i = 1$ -де (10.39) қатынасты (10.38) жүйенің екінші теңдеуіне қойып, анықтаймыз:

$$\alpha_2 = -\frac{d_2 + b_2\beta_1}{\tau}, \beta_2 = -\frac{e_2}{\tau}, \gamma_2 = \frac{f_2 - b_2\gamma_1}{\tau}, \tau = c_2 + b_2\alpha_1. \quad (10.41)$$

Ал енді (10.38) жүйенің i -ші теңдеуінде u_{i-2}, u_{i-1} айнымалыларды (10.39) формулаға сәйкес алмастырып, (10.39) қатынастағы қалған белгісіз параметрлерді табу үшін төмендегі формулаларды аламыз:

$$\alpha_i = -\frac{d_i + \eta\beta_{i-1}}{\tau}, \beta_i = -\frac{e_i}{\tau}, \gamma_i = \frac{f_i - \eta\gamma_{i-1} - a_i\gamma_{i-2}}{\tau}, \quad i \in 3, n-3, \quad (10.42)$$

мұнда, $\eta = b_i + a_i\alpha_{i-2}$, $\tau = c_i + \eta\alpha_{i-1} + a_i\beta_{i-2}$.

(10.40)-(10.42) формулалар бойынша есептеулерді кума әдісінің тура жолы деп атайды.

Қума әдісінің кері жолын бастау үшін, алдымен u_{n-2}, u_{n-1} белгісіздерді анықтап алу керек, одан кейін қалған u_i белгісіздер ($i = n-3, \dots, 1$) (10.39) формула бойынша біртіндеп табылады.

u_{n-2}, u_{n-1} белгісіздер бастапқы (10.38) жүйенің ең соңғы екі теңдеулері және (10.39) қатынастың

$$\begin{aligned} u_{n-3} &= \alpha_{n-3}u_{n-2} + \beta_{n-3}u_{n-1} + \gamma_{n-3}; \\ u_{n-4} &= \alpha_{n-4}u_{n-3} + \beta_{n-4}u_{n-2} + \gamma_{n-4} = \\ &= \alpha_{n-4}(\alpha_{n-3}u_{n-2} + \beta_{n-3}u_{n-1} + \gamma_{n-3}) + \beta_{n-4}u_{n-2} + \gamma_{n-4} \end{aligned}$$

екі рекуррент қатынастарынан тұратын жүйеден табылады. Жоғарыда айтылған жүйе төменде келтірілген

$$\begin{cases} a_{n-2}u_{n-4} + b_{n-2}u_{n-3} + c_{n-2}u_{n-2} + d_{n-2}u_{n-1} = f_{n-2}, \\ a_{n-1}u_{n-3} + b_{n-1}u_{n-2} + (c_{n-1} + e_{n-1})u_{n-1} = f_{n-1}, \\ u_{n-3} - \alpha_{n-3}u_{n-2} - \beta_{n-3}u_{n-1} = \gamma_{n-3}; \\ u_{n-4} - (\alpha_{n-4}\alpha_{n-3} - \beta_{n-4})u_{n-2} - \alpha_{n-4}\beta_{n-3}u_{n-1} = \alpha_{n-4}\gamma_{n-3} + \gamma_{n-4}. \end{cases}$$

Осы жүйені шешіп табамыз:

$$u_{n-2} = \frac{F_1 A_{22} - F_2 A_{12}}{\Delta}, \quad u_{n-1} = \frac{F_2 A_{11} - F_1 A_{21}}{\Delta}, \quad (10.43)$$

мұнда

$$\begin{aligned}\Delta &= A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}; \\ A_{11} &= b_{n-1} + a_{n-1}\alpha_{n-3}; \quad A_{12} = c_{n-1} + a_{n-1}\beta_{n-3}; \\ F_1 &= f_{n-1} - a_{n-1}\gamma_{n-3}; \\ A_{21} &= c_{n-2} + b_{n-2}\alpha_{n-3} + a_{n-2}(\alpha_{n-3}\alpha_{n-4} + \beta_{n-4}); \\ A_{22} &= d_{n-2} + b_{n-2}\beta_{n-3} + a_{n-2}\beta_{n-3}\alpha_{n-4}; \\ F_2 &= f_{n-2} - a_{n-2}(\gamma_{n-3}\alpha_{n-4} + \gamma_{n-4}) - b_{n-2}\gamma_{n-3}.\end{aligned}$$

Оң жақ ұшы бос беріктелмеген балка үшін ((10.33) 2-есеп) (10.38) жүйеге ұқсас сызықтық теңдеулер жүйесі дәл осылай келтіріліп шығарылады:

$$\left\{ \begin{aligned} (a_1 + c_1)u_1 + d_1u_2 + e_1u_3 &= f_1, \quad i=1; \\ b_2u_1 + c_2u_2 + d_2u_3 + e_2u_4 &= f_2, \quad i=2; \\ a_iu_{i-2} + b_iu_{i-1} + c_iu_i + d_iu_{i+1} + e_iu_{i+2} &= f_i, \quad i \in (3, n-2); \\ a_{n-1}u_{n-3} + b_{n-1}u_{n-2} + (c_{n-1} - e_{n-1})u_{n-1} + \\ + (d_{n-1} + 2e_{n-1})u_n &= f_{n-1}, i=n-1; \\ u_{n-2} - 2u_{n-1} + u_n &= 0, \quad i=n. \end{aligned} \right. \quad (10.44)$$

(10.44) теңдеулер жүйесін келтіріп шығаруда $x=1$ -дегі шекаралық шарттардың дискрет аналогтары пайдаланылды:

$$\begin{aligned}(M_z)_n &= \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)_n = u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1} = 0 \Rightarrow u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}; \\ Q_n &= \left(\frac{dM_z}{dx} \right)_n = (M_z)_n - (M_z)_{n-1} = -(M_z)_{n-1} = -(u_{n-2} - 2u_{n-1} + u_n) = 0.\end{aligned}$$

10.3.6 Балканың максимал иілуін минимумдау есебі

Тиімдеу есебі балка қимасының инерция моментінің тиімді бойлық үлестірімін $J(x) > 0$ және $\int_0^1 J(x) dx = 1$ шектеулерде

$$\min_{J(x)} \max_x u(x, J(x)) \quad (10.45)$$

критерийге сәйкес анықтаудан тұрады.

$J(x)$ функцияның тиімді үлестірімін квадраттық полином түрінде іздейміз (3-ретті және реті одан жоғары болған полиномдар ирең нүктелер есебінен $J(x) < 0$ болатын аралықтарды береді):

$$J(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2. \quad (10.46)$$

$\int_0^1 J(x) dx = 1$ нормалау шартына сәйкес $J(x)$ функцияның

a_1, a_2, a_3 коэффициенттері үшін $a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} = 1$ теңдік орынды болуы тиіс.

$F(a_1, a_2, a_3) = \max_x u(x, J(x))$ функционалды минимумдау үшін ең тез түсу (ЕТТ) әдісін пайдаланған жөн, себебі тиімдеу параметрлерінің аздығы (=3) есебінен функционал градиентін есептеу процедурасы оншалықты күрделі болмайды.

Бір итерация үшін ЕЕТ әдісі алгоритмінің негізгі бөліктерін келтіреміз.

1. Градиенттің бағыттаушы орттарын есептеу (мұнда $\delta a \approx 0,001$ деп алуға болады)

$$F_0 = F(a_1, a_2, a_3), a_{10} = a_1, a_{20} = a_2, a_{30} = a_3, \Delta = 0,$$

do for $i = 1, 3$;

$$a_i = a_{i0} + \delta a;$$

$$\Sigma = a_1 + a_2 / 2 + a_3 / 3;$$

$$a_1 = a_1 / \Sigma, a_2 = a_2 / \Sigma, a_3 = a_3 / \Sigma;$$

$$F_i = F(a_1, a_2, a_3);$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = \frac{F_i - F_0}{\delta a_i};$$

$$\Delta = \Delta + \left(\frac{\partial F}{\partial a_i} \right)^2;$$

end i ;

$$\Delta = \sqrt{\Delta};$$

$$\delta a_1 = \frac{\partial F}{\Delta}, \delta a_2 = \frac{\partial F}{\Delta}, \delta a_3 = \frac{\partial F}{\Delta},$$

2. Локаль минимумнан өтуде артқа қайтулы градиент бойлап түсу – алгоритмнің қарапайым нұсқаларының бірі (h -қадам):

$$h=0,05, a_{10}=a_1, a_{20}=a_2, a_{30}=a_3;$$

$$F_0=F(a_1, a_2, a_3);$$

do while $h > 0,001$

$$a_1 = a_{10} - h\hat{c}a_1, a_2 = a_{20} - h\hat{c}a_2, a_3 = a_{30} - h\hat{c}a_3;$$

$$\Sigma = a_1 + a_2 / 2 + a_3 / 3;$$

$$a_1 = a_1 / \Sigma, a_2 = a_2 / \Sigma, a_3 = a_3 / \Sigma;$$

$$F_i = F(a_1, a_2, a_3);$$

if $F_i > F_0$ then

$$h = h / 2;$$

else

$$a_{10} = a_1, a_{20} = a_2, a_{30} = a_3, F_0 = F_i$$

end if

end while.

Итерациялық үдерісті тоқтатудың екі критерийі пайдаланылады:

- 1) екі көрші итерациялардағы функционалдардың айырмасы берілген $\varepsilon > 0$ санынан кіші;
- 2) максимал санды итерацияларды пайдалану.

10.4 Жылудың тарқалу үдерісін модельдеу

10.4.1 Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер

Ғылым мен техникадағы көптеген есептердің математикалық модельдері дербес туындылы дифференциалдық теңдеулермен сипатталады. Математикалық модельдері осындай теңдеулермен берілетін үдерістер мен құбылыстарға, мысалы, қатты денелердегі жылудың тарқалуы, сұйықтықтар мен газдардағы диффузия, дыбыстық және электрмагниттік толқындардың тарқалуы, планеталар мен галактикалардың гравитациялық тартылысы және т.б. көптеп келтіруге болады.

Осы тарауда жоғарыда қарастырылған есептердің математикалық модельдерінің теңдеулері қарапайым дифференциалдық теңдеулер болса (белгісіз функция тек қана бір тәуелсіз айнымалыға тәуелді), дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерде белгісіз

функция бірнеше айнымалыларға тәуелді болады. Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерге қатысты жалпы мәліметтерге қысқаша тоқталып өтеміз.

Жалпы жағдайда, k -ретті сызықтық емес дербес туындылы дифференциалдық теңдеу мына түрде жазылады:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_n^{p_n}}) = 0, \quad (10.47)$$

мұнда x_1, x_2, \dots, x_n – тәуелсіз айнымалылар, $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – белгісіз (ізделінетін) функция, $p_1 + p_2 + \dots + p_n = k$, p_i -лер ($i = 1, 2, \dots, n$) теріс болмаған бүтін сандар.

Көптеген қолданбалы есептерде тәуелсіз айнымалылар ретінде t уақыт пен x кеңістік айнымалылары қолданылады. Бір кеңістік айнымалысы болған есептерді *бір өлшемді*, екі немесе одан көп кеңістік айнымалысы болған есептерді *көп өлшемді* (екі өлшемді, үш өлшемді және т.с.с) деп атайды.

(10.47) теңдеудің *шешімі* деп қажетті ретке дейінгі дербес туындылары бар болған және осы теңдеуді тепе-теңдікке айналдыратын $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функцияға айтылады. Дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің *жалпы шешімі* кез келген функцияларға тәуелді болып, осы функциялардың аргументтері саны $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функцияның аргументтері санынан біреуге кем болады.

Мысалға, $\frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = -1$ дифференциалдық теңдеудің жалпы

шешімі $u(x_1, x_2) = -\frac{x_1^2}{2} + x_1 \varphi(x_2) + \psi(x_2)$ болып, мұндағы

$\varphi(x_2), \psi(x_2)$ – кез келген функциялар. Дербес шешімді алу үшін x_1, x_2, \dots, x_n тәуелсіз айнымалылар кеңістігіндегі $n - 1$ өлшемді беттерде қосымша шарттарды беру керек болады. Бұл шарттарға бастапқы және шекаралық (шеттік) шарттар жатады.

Теңдеудің *реті* деп теңдеудегі дербес туындылардың ең жоғары ретіне айтылады.

Егер F функция ізделінетін $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функцияға және оның туындыларына қатысты сызықтық болса, онда (1.1) теңдеу *сызықтық* деп аталады.

Егер F функция жоғары туындылары (n -ретті) бойынша сызықтық болса, яғни жоғары туындылар алдындағы коэффициенттер

тек қана u және оның $(n-1)$ -ші ретті туындыларына тәуелді болса, онда дифференциалдық теңдеу *квазисызықтық* деп аталады.

$D - x, t$ тәуелсіз айнымалылар өзгеруінің қандайда бір бірбайланысты аймағы болсын. Екі тәуелсіз айнымалылы сызықтық дифференциалдық теңдеулердің классификациясын канондық түрде жазылған *екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеу* мысалында көріп шығайық:

$$A(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + 2B(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} + C(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + D(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + E(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + F(x,t)u(x,t) = G(x,t), \quad (x,t) \in D. \quad (10.48)$$

Мұнда $u(x, t)$ – ізделінетін функция, $A(x, t), B(x, t), C(x, t), D(x, t), E(x, t), F(x, t)$ – коэффициенттер, $G(x, t)$ – бос мүше (оң жақ). (1.2) теңдеудің коэффициенттері мен бос мүшесін екі рет үзіліссіз дифференциалданушы берілген функциялар деп және $|A(x, t)| + |B(x, t)| + |C(x, t)| \neq 0$ шарты орынды деп есептейміз. Егер теңдеудің коэффициенттері x және t -ға тәуелді болмаса, онда (10.48) теңдеу *тұрақты коэффициентті* (кері жағдайда *айнымалы коэффициентті*) теңдеу деп аталады. (10.48) теңдеу *біртекті* деп аталады, егер оң жақ $G(x, t)$ x және t -ның барлық мәндері үшін нөлге тең болса, яғни $G(x, t) \equiv 0 \quad \forall x, t$ (кері жағдайда *біртекті емес*).

Жазуды ықшамдау үшін төмендегідей белгілеулерді пайдалансақ:

$$u_x \equiv \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \quad u_t \equiv \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad u_{xx} \equiv \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad u_{tt} \equiv \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \quad u_{xt} \equiv \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t},$$

(10.48) теңдеуді мына түрде жазсақ болады:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xt} + Cu_{tt} + Du_x + Eu_t + Fu = G. \quad (10.49)$$

(10.49) теңдеу $M(x_0, t_0)$ нүктеде (D аймақта) *параболалық типті теңдеу* деп аталады, егер осы нүктеде (D аймақта) $B^2 - AC = 0$ шарты орынды болса.

(10.49) теңдеу $M(x_0, t_0)$ нүктеде (D аймақта) *гиперболалық типті теңдеу* деп аталады, егер осы нүктеде (D аймақта) $B^2 - AC > 0$ шарты орынды болса.

(10.49) теңдеу $M(x_0, t_0)$ нүктеде (D аймақта) *эллипстік типті теңдеу* деп аталады, егер осы нүктеде (D аймақта) $B^2 - AC < 0$ шарты орынды болса.

Теңдеудің типі түрлі нүктелерде (аймақтарда) түрлі болуы мүмкін. Егер A, B, C коэффициенттер тұрақты болатын болса, (10.49) теңдеудің типі D аймақта тәуелсіз айнымалылардың кез келген мәндері үшін өзгермейді.

Гиперболалық және параболалық типті теңдеулерді өз ішіне алған математикалық физика есептерінің ішінен *эволюциондық* есептер ажыралып тұрады. Бұл есептер ажыратылған тәуелсіз айнымалының болуымен ерекшеленеді. Әдетте, ажыратылған айнымалы t уақыт болады. Егер ізделінетін функция уақытқа тәуелді болса, теңдеу *стационар емес* деп, ал ізделінетін функция уақытқа тәуелді болмаса *стационар* деп аталады.

Параболалық типті теңдеулер, мысалы, жылуөткізгіштік және диффузия процестерін, гиперболалық типті теңдеулер тербеліс процестерін, эллипстік типті теңдеулер стационар үдерістердегі сұйықтықтың ағуын, электр және магниттік өрістер кернеулігінің стационар үлестірімін сипаттайды.

Ғылым мен техниканың түрлі салалары есептерінің математикалық модельдері дербес туындылы дифференциалдық теңдеулермен (теңдеулер жүйесімен) сипатталады, оларды аналитикалық зерттеу, әдетте, көпшілік жағдайларда мүмкін бола бермейді. Сондай-ақ, аналитикалық зерттеулер объектінің, құбылыстың немесе үдерістің сапалық сипаттамаларын ғана алуға мүмкіндік береді, оларды білу маңызды, бірақ жеткіліксіз. Осы айтылғандар көптеген инженерлік және техникалық қолданбалы есептерге қатысты болып, оларда дәл мөлшерлік нәтижелерді алу үлкен маңызға ие.

Қазіргі таңда күрделі қолданбалы есептерді шешуге байланысты математикалық модельдеуде көпөлшемді айнымал коэффициентті стационар емес сызықтық/сызықтық емес теңдеулер қарастырылады. Мұндай күрделі теңдеулерді зерттей білу үшін алдымен олар сипаттайтын үдерістердің үлгілік модельдері болатын қарапайым теңдеулерді қарастырған жөн. Сол себепті, біз де жылудың тарқалу процестерін бір өлшемді жылуөткізгіштік теңдеуі мысалында қарастырамыз.

Параболалық типті *жылуөткізгіштік* теңдеуін қарастайық:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < T \quad (10.50)$$

мұнда u – температура, $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, k – жылуөткізгіштік коэффициенті,

c – меншікті жылу сыйымдылық, ρ – тығыздық, $x=0$ және $x=L$ кеңістік айнымалысының өзгеру кесіндісінің сол жақ және оң жақ

соңы, $t=0$ және $t=T$ – процестің басталу және аяқталу моменттері. Сонымен, $\bar{D}=[0,L] \times [0,T]$ жиында (10.50) теңдеу үшін түрлі бастапқы-шеттік есептерді қарастыру мүмкін.

Бірінші бастапқы-шеттік есеп:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < T,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (\text{бастапқы шарт})$$

$$u(0,t) = \psi_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (\text{сол жақ шекарадағы шеттік шарт})$$

$$u(L,t) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (\text{оң жақ шекарадағы шеттік шарт})$$

мұнда $\varphi(x), \psi_1(t), \psi_2(t)$ – берілген функциялар.

Екінші бастапқы – шеттік есеп:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < T,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (\text{бастапқы шарт})$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \psi_1(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (\text{сол жақ шекарадағы шеттік шарт})$$

$$\frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (\text{оң жақ шекарадағы шеттік шарт}).$$

Үшінші бастапқы – шеттік есеп:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < T,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (\text{бастапқы шарт})$$

$$\alpha_0 u(0,t) + \beta_0 \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \psi_1(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

(сол жақ шекарадағы шеттік шарт)

$$\alpha_0 u(L,t) + \beta_0 \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

(оң жақ шекарадағы шеттік шарт)

мұнда $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$ – берілген сандар ($\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0, i=1,2$) немесе жалпы жағдайда t -ның функциясы.

Коши есебі:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < T,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (\text{бастапқы шарт}).$$

Бірінші бастапқы-шеттік есепке алып келетін физикалық есепке мысал ретінде Ox осінде жатқан ұзындығы L болған ($x=0$ -ден $x=L$ -ге дейін) жұқа сым бойындағы жылу тарқалу үдерісін алуға болады (10.21-сурет).

$$\begin{array}{ccc}
 \xrightarrow{\hspace{15em}} & & \\
 x = 0 & & x = L & & x \\
 u(0,t) = \psi_1(t) & & u(L,t) = \psi_2(t) & &
 \end{array}$$

10.22-сурет. Сым бойындағы жылу тарқалу үдерісі

Бастапқы уақыт моменті $t = 0$ -де сым бойлап температураның бастапқы үлестірімі $\varphi(x)$ функциямен берілген. Температура уақыт өтуімен $x = 0$ нүктеде $\psi_1(t)$ заңы, $x = L$ нүктеде $\psi_2(t)$ заңы бойынша өзгереді деп есептелінеді. Сонда сым бойлап температураның кейінгі барлық уақыт моменттеріндегі үлестірімі бастапқы-шеттік есепті шешу арқылы анықталады. Мұнда $u(x,t)$ – сымдағы координатасы x болған қандай да бір нүктенің t уақыт моментіндегі температурасы.

Жоғарыда келтірілген барлық есептерде D аймақта (10.50) дифференциалдық теңдеуді және оның шекарасында сәйкес шарттарды қанағаттандыратын $u(x,t)$ функцияны табу қажет.

(10.50) жылуөткізгіштік теңдеуін келтіріп шығару «Математикалық физика теңдеулері» курсына кеңінен қарастырылатын болғандықтан, біз негізінен осы теңдеуге қойылатын бірінші бастапқы-шекаралық есепті компьютер көмегімен сандық шешу мәселесін қарастыратын боламыз.

10.4.2 Айырымдық сұлбалар. Негізгі түсініктер мен анықтамалар

Математикалық физика теңдеулерінің дәл шешімдерін айқындайтын формулалар, қатарлар және т.б. түрінде табу көпшілік жағдайда мүмкін болмайтындығы жоғарыда айтылып өтілді. Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер есептерін сандық шешу әдістерінің ішінде жиі қолданылатыны – *айырымдық әдістер (тор әдістері)*. Айырымдық әдістердің мағынасы мынадай: тәуелсіз айнымалылардың өзгеру аймағы *тор* деп аталатын нүктелердің дискрет жиынымен алмастырылады, ал теңдеу мен бастапқы және шеттік шарттардағы туындылар осы торда айырымдық қатыстармен аппроксимацияланады. Нәтижеде, бастапқы сызықтық дифференциалдық есеп *айырымдық сұлба (есеп)* деп айтылатын ақырлы санды сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесімен (САТЖ) алмасты-

рылады. Бастапқы есептің жуық шешімі ретінде айырымдық схеманың шешімі алынады. Жуықтау дәлдігі аппроксимациялау тәсіліне және тор нүктелерінің тығыздығына байланысты болады.

Бастапқы дифференциалдық есеп

$$Lu = f \quad (10.51)$$

түрде берілген болсын. Мұнда $u - \bar{D} = D \cup \tilde{A}$ жиында анықталған ізделінетін функция; D шекарасы \tilde{A} болған тәуелсіз айнымалылар кеңістігінің аймағы; f – берілген функция; L – сызықтық дифференциалдық оператор. Егер жоғарыда келтірілген жылуөткізгіштік теңдеуі үшін бірінші бастапқы – шекаралық есеп үшін

$$Lu = \begin{cases} u_t - a^2 u_{xx}, \\ u(x, 0), \\ u(0, t), \\ u(L, t), \end{cases} \quad f = \begin{cases} 0, \\ \varphi(x), \\ \psi_1(x), \\ \psi_2(x), \end{cases}$$

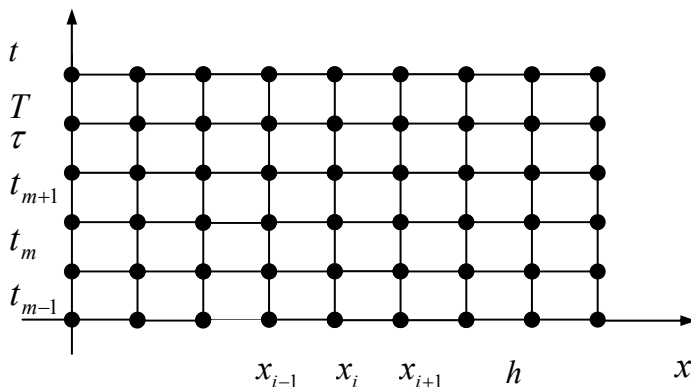
белгілеулерді енгізетін болсақ, онда ол (10.51) операторлық теңдеу түрінде жазылады.

(10.51) есепті сандық шешу үшін $\bar{D} = D \cup \tilde{A}$ аймағына тиісті нүктелердің дискрет жиыны $D_h = \{M_h\}$ құрылады. D_h – жиынын *тор* деп, ал M_h – нүктелерді *тор түйіндері*, h -ты *тор қадамы* деп атайды.

Жалпы жағдайда h ұзындығы $|h|$ -қа тең вектор болып, барлық тәуелсіз айнымалылар бойынша қадамдар осы вектордың компоненттері болады. Әрі қарай, біз (10.51) есепте ізделінетін u және оң жақ f функциялар тәуелсіз x және t айнымалылардың функциясы деп, ал \bar{D} жиынды ұзындығы L , биіктігі T болған тіктөртбұрыш деп қарастырамыз, яғни $\bar{D} = \{(x, y) | 0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}$ (10.22-сурет).

\bar{D} жиынды екі өлшемді тіктөртбұрышты $D_{ht} = \{x_n, t_m\}$ тормен алмастырамыз. Мұнда $x_n = nh, 0 \leq n \leq N; t_m = m\tau, 0 \leq m \leq M; N, M$ – бүтін оң сандар; h, τ – сәйкесінше x кеңістік және t уақыт айнымалылары бойынша қадамдар (қарапайымдылық үшін оларды тұрақты етіп аламыз); $Nh = L; M\tau = T$. Мұндай тор *бірқалыпты* немесе *регуляр* деп аталады.

Тордың $\{t=0, 0 \leq x \leq L\}$, $\{x=0, 0 \leq t \leq T\}$, $\{x=L, 0 \leq t \leq T\}$, $\{t=T, 0 \leq x \leq L\}$ аралықтарға тиісті түйіндері *шекаралық*, ал қалғандары – *ішкі* деп аталады. D_{ht} тордың нүктелерінде анықталған функцияларды *торлық функциялар* деп атайды. $\{x_n, t_m\}$, $n=0, \dots, N$; $m = \text{const}$ қабат деп тордың сондай түйіндерінің жиынына айтылады, егер бұл түйіндердің барлығының уақыт бойынша координаталары бірдей болып, ол t_m -ге тең болса.



10.23-сурет. Біркалыпты тор

$[u]_h = \{u_n^m = u(x_n, t_m), 0 \leq n \leq N, 0 \leq t \leq T\}$ торлық функцияны енгіземіз. $[u]_h$ – (2.1) дифференциалдық есеп шешімінің тор түйіндеріндегі мәндерін білдіреді. Амалда, $[u]_h$ -ты есептеу мүмкін болмайды, сондықтан тордың түйіндерінде дәл шешімге «жуық» болған басқа $u^h \cong [u]_h$ торлық функцияны табады. Бұл торлық функция қандайда бір мағынада (10.51) дифференциалдық есепке сәйкес келуші

$$L_h u^h = f^h \quad (10.52)$$

айырымдық сұлбаның шешімі ретінде есептелінеді. Мұнда $L_h - L$ сызықтық дифференциалдық операторды аппроксимациялайтын айырымдық оператор (L_h оператор L -дегі дербес туындыларды ақырлы-айырымдық қатыстармен аппроксимациялау нәтижесінде түзіледі); f^h – (10.51) теңдеудің оң жағы f -ті тордың түйіндеріндегі мәндерімен алмастыру нәтижесінде алынған торлық функция.

Сонымен, *айырымдық сұлба* дегенде негізгі дифференциалдық есепті тордың барлық ішкі түйіндерінде, ал бастапқы және шеттік шарттарды тордың шекаралық түйіндерінде аппроксимациялайтын айырымдық теңдеулер жиынтығын түсінеміз. (10.52) айырымдық сұлбаны (10.51) дифференциалдық есепке ұқсастырып *айырымдық есеп* айтамыз.

$D_{h\tau}$ торда анықталған u^h функциялардың жиынтығы арқылы түзілген сызықтық кеңістікті U_h деп, ал f^h функциялар жиынтығы арқылы түзілген сызықтық кеңістікті F_h деп белгілейік. Осы кеңістіктерде сәйкесінше $\|\cdot\|_{U_h}, \|\cdot\|_{F_h}$ нормалар енгізілген болсын.

1-анықтама. Егер h, τ нөлге ұмтылғанда ($h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0$)

$$\|u^h - [u]_h\|_{U_h} \rightarrow 0 \quad (10.53)$$

шарты орындалатын болса, онда (10.52) айырымдық есептің шешімі u^h (10.51) дифференциалдық есептің u шешіміне *жинақталушы* деп айтылады. Егер h, τ -ларға тәуелсіз сондай $k > 0, p > 0, C > 0$ тұрақты сандар бар болып

$$\|u^h - [u]_h\|_{U_h} \leq C(h^k + \tau^p) \quad (10.54)$$

теңсіздік орындалатын болса, онда айырымдық сұлбаның *жинақталу реті (дәлдік реті)* h -қа қатысты k -ға тең, τ -ға қатысты p -ға тең деп айтылады.

2-анықтама. $[u]_h$ функцияны $L_h u^h = f^h$ айырымдық есептегі u^h функцияның орнына қою нәтижесінде пайда болатын

$$L_h [u]_h = f^h + \delta f^h \quad (10.55)$$

теңдіктегі δf^h функцияны *аппроксимациялау (жуықтау) қателігі* деп атайды.

3-анықтама. (10.52) айырымдық сұлба (10.51) дифференциалдық есепті оның $u(x, t)$ шешімінде *аппроксимациялайды* деп айтылады, егер h, τ нөлге ұмтылғанда ($h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0$) $\|\delta f^h\|_{F_h}$ нөлге ұмтылса, яғни

$$\|\delta f^h\|_{F_h} \rightarrow 0. \quad (10.56)$$

Егер h, τ -ларға тәуелсіз сондай $k > 0, p > 0, C > 0$ тұрақты сандар бар болып

$$\|\delta f^h\|_{F_h} \leq C(h^k + \tau^p) \quad (10.57)$$

теңсіздік орынды болса, онда айырымдық сұлбаның *аппроксимациялау реті* h -қа қатысты k -ға тең, τ -ға қатысты p -ға тең деп айтылады.

4-анықтама. Айырымдық сұлба *орнықты* деп айтылады, егер h, τ -ларға тәуелсіз сондай $C > 0$ тұрақты саны бар болып, кез келген $f^h \in F_h$ үшін төмендегі шарттар орынды болса:

- 1) (10.52) айырымдық сұлбажалғыз шешімге ие болса;
- 2) $\|u^h\|_{U_h} \leq C \|f^h\|_{F_h}$.

Ескерту.

1. Қандайда бір есептің орнықтылық қасиеті бастапқы берілгендер кішкене өзгергенде шешімнің де кішкене өзгертіндігін білдіреді (есептің шешімі бастапқы берілгендерге үзіліссіз тәуелді болады).

2. Орнықтылық қасиеті U_h, F_h кеңістіктерде енгізілетін норма түсінігімен байланысты болады. Жоғарыдағы орнықтылық анықтамасындағы 2-шарт кейбір нормалар үшін орынды, кейбіреулері үшін орынды болмау жағдайлары кездесуі мүмкін. Егер 2-шарт ешқандай нормада орынды болмаса, онда айырымдық схема орнықсыз болады.

h және τ қадамдардың кез келген қатыстарында орнықты болатын айырымдық сұлбаларды *абсолют орнықты* деп атайды.

h және τ қадамдардың кез келген қатыстарында орнықсыз болатын айырымдық сұлбаларды *абсолют орнықсыз* деп атайды.

x кеңістік және t уақыт бойынша қадамдардың қатынасына қандайда бір шектеу қойылған жағдайда ғана орнықты болатын айырымдық сұлбаларды *шартты орнықты* деп атайды.

Жинақтылық және орнықтылық айырымдық сұлбаларды зерттеуде маңызды орын алатын төмендегі теоремамен байланысқан.

Теорема.(10.51) *дифференциалдық есеп қисынды (коррект) қойылған, ал (10.52) айырымдық сұлба орнықты және (10.51) дифференциалдық есепті аппроксимациялайтын болсын. Онда айырымдық есептің шешімі дифференциалдық есептің шешіміне жинақталушы болады, дәлдік реті аппроксимация ретімен дәлме-дәл түседі [6,22, 34, 48].*

Айырымдық сұлба *айқындалған* деп аталады, егер L оператор u^h функцияның m -қабаттағы белгілі $u^h(x_n, t_m)$ мәндерін пайдалану

арқылы аппроксимацияланатын болса, ал аппроксимациялаушы теңдеу функцияның келесі $(m+1)$ -қабаттағы тек қана бір белгісіз мәнін өз ішіне алатын болып, оны айқын өрнектеу мүмкін болса.

Айырымдық сұлба *айқындалмаған* деп аталады, егер L оператор ізделінетін u^h функцияның $(m+1)$ -қабаттағы белгісіз бірнеше мәндерін пайдалану арқылы аппроксимацияланатын болса.

Мәндері L операторды аппроксимациялауда пайдаланылатын D_h тордың түйіндері *шаблон* құрайды. k түйінді өз ішіне алған шаблон k *нүктелік* деп айтылады.

10.4.3 Жылуөткізгіштік теңдеуін сандық шешу

Біз сызықтық бірөлшемді жылуөткізгіштік теңдеуіне қойылған бірінші бастапқы – шекаралық есепті айырымдық әдіс арқылы сандық шешуді қарастырамыз.

Алдымен айқындалған айырымдық сұлбаларды құруды қарастырамыз. Айқындалған айырымдық схемалармен параболалық типтегі теңдеулерді шешудің негізгі мағынасы мынадай: дифференциалдық теңдеуді айырымдық сұлбамен аппроксимациялағаннан кейін шешімнің қандайда бір t уақыттық есептеу қабатындағы мәндері үшін шешімнің алдыңғы уақыттық қабаттағы мәндері арқылы айқын өрнектелген формулалар алынады. Сондықтан, егер шешім бастапқы уақыт моментінде белгілі болса, шешімді барлық кейінгі уақыт моменттерінде біртіндеп табу мүмкін болады. Осы айтылғандарды жылуөткізгіштік теңдеуі үшін аралас есеп мысалында көріп шығамыз.

1-мысал. Бірінші бастапқы – шеттік есепті қарастырамыз.

$$u_t = u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < T,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq L,$$

$$u(0, t) = \psi_1(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$u(L, t) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Есеп қисынды (коррект) қойылған болуы үшін бастапқы – шеттік шарттармен қатар $\varphi(0) = \psi_1(0)$, $\varphi(L) = \psi_2(0)$ үйлесімдік шарттары да орынды болуы қажет.

Шешуі. Есептің жалпы қойылымымен (10.4.1-қараңыз) салыстыра отырып, $a^2 = 1$ болатындығын көруге болады, мұнда L, T – берілген сандар.

Теңдеудегі туындыларды аппроксимациялау үшін u_t, u_{xx} туындыларды *оң жақ айырымдық туынды және екінші ретті орталық айырымдық туынды* деп аталатын

$$u_{t,n}^m = \frac{u(x_n, t_m + \tau) - u(x_n, t_m)}{\tau} = \frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\tau},$$

$$u_{\bar{x},n}^m = \frac{u(x_n + h, t_m) - 2u(x_n, t_m) + u(x_n - h, t_m))}{h^2} = \frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{h^2}$$

айырымдық қатынастарды пайдаланамыз, нәтижеде төмендегі теңдеуді аламыз:

$$\frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\tau} = \frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{h^2} + f_n^m.$$

Бұл теңдеуден

$$u_n^{m+1} = \frac{\tau}{h^2} u_{n-1}^m + \left(1 - 2\frac{\tau}{h^2}\right) u_n^m + \frac{\tau}{h^2} u_{n+1}^m + \tau \cdot f_n^m, \quad (10.58)$$

$$n = 1, \dots, N-1, m = 0, 1, \dots, M-1$$

теңдеуді аламыз. Соңғы формула n -нің белгілі бір мәнінде $(m+1)$ -уақыттық қабаттағы шешімді m -қабаттағы шешім арқылы өрнектейді. (10.58) айырымдық сұлбаға төменде келтірілген 10.23-суреттегі төрт нүктелік шаблон сәйкес келеді.

Бастапқы $u(x, 0) = \varphi(x)$, $0 \leq x \leq L$ және шеттік шарттар айырымдық түрде сәйкесінше мынадай жазылады:

$$u_n^0 = \varphi_n, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (10.59)$$

$$u_0^m = \psi_1^m, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad (10.60)$$

$$u_N^m = \psi_2^m, \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (10.61)$$

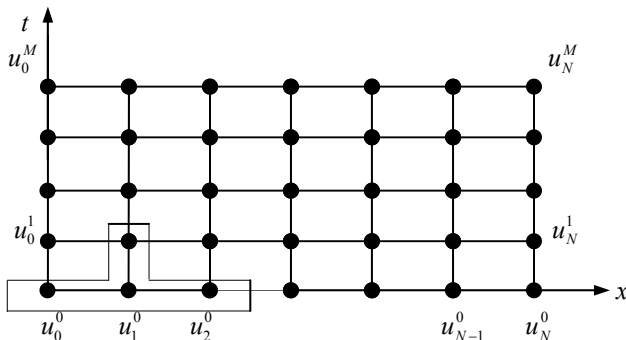
(10.59) – (10.61) қатыстар бастапқы және сәйкес шеттік шарттарды дәл аппроксимациялайтындығын көруге болады. (10.58) – (10.61) қатыстар *айқындалған қосқабатты* айырымдық сұлбаны құрайтын болып, бұл сұлбаның аппроксимациялау реті τ бойынша бірге, h бойынша екіге тең болады, яғни $O(\tau + h^2)$.

Ескертулер

1. Жоғарыда түзілген сұлба шартты орнықты сұлба болады, себебі айырымдық сұлба $\tau \leq \frac{h^2}{2}$ шарты орынды болғанда орнықты болады. Шартты орнықты сұлбалар параболалық типті теңдеулер үшін сирек қолданылады. Себебі бұл сұлбалар t уақыт бойынша қадамды таңдау мүмкіндігіне айтарлықтай шектеулер қойылуына алып келеді. Мысалы, тордың x айнымалы бойынша қадамы $h = 0,01$ деп алатын болсақ, тордың t уақыт бойынша қадамы $\tau = 0,5 \cdot (0,01)^2 = 0,00005$ шамадан артық болмауы керек. Бұл дегені,

u_n^m шешімді $t=1$ болғанда есептеу үшін (10.58) формула бойынша 20000 кем болмаған есептеулер жүргізу қажет болатындығын білдіреді. Қателіктерді минимумдау тұрғысынан $\tau = \frac{h^2}{6}$ қатыс ең жақсы деп есептелінеді [6, 48].

2. $u_t = a^2(x,t)u_{xx}$ теңдеу үшін айырымдық сұлба жоғарыдағыдай түзіледі және $\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2A}$ шарты орынды болғанда сұлба орнықты болады, мұнда $A = \max_{(x,t) \in D} a^2(x,t)$ [6, 22, 48].



10.24-сурет. Айқындалған сұлба бойынша есептеу шаблоны

Айқындалған сұлба бойынша есептеулерді төмендегі ретпен орындау қажет:

1. $Nh = L, M\tau = T$ теңдіктер орынды болатындай етіп тордың h, τ қадамдарының мәндерін беру керек, мұнда L, T – бүтін оң сандар.

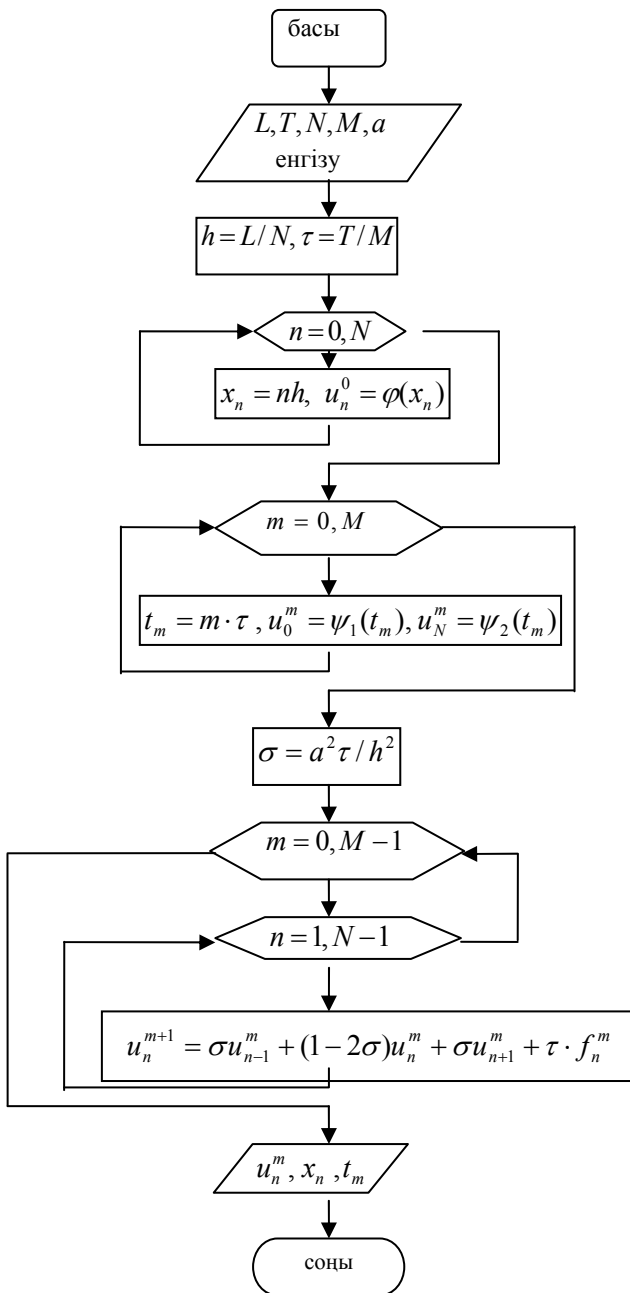
t уақыт бойынша τ қадам мәнін $\tau \leq \frac{h^2}{2}$ орнықтылық шартынан таңдап алу қажет. $u_n^0, n = 0, 1, \dots, N$; (10.59)-дан, ал $u_0^m, u_N^m, m = 0, 1, \dots, M$ (10.60), (10.61)-ден есептеп табамыз. $m = 0$ деп аламыз.

2. $(m+1)$ -қабатта шешімді табамыз (10.23-сурет) :

$$u_n^{m+1} = \frac{\tau}{h^2} u_{n-1}^m + \left(1 - 2\frac{\tau}{h^2}\right) u_n^m + \frac{\tau}{h^2} u_{n+1}^m + \tau \cdot f_n^m, \quad n = 1, \dots, N-1.$$

3. Егер $m = M$ болса, есептеулерді тоқтатамыз, кері жағдайда $m = m+1$ деп алып, 2-пунктке өтеміз.

Төменде 1-мысалдағы жылуөткізгіштік теңдеуіне қойылған аралас есепті (10.58)-(10.61) айқындалған айырымдық сұлбамен шешудің сызбанұсқасы келтірілген (10.25-сурет).



10.25-сурет. Жылуөткізгіштік теңдеуі үшін аралас есепті айқындалған айырымдық сұлбамен шешу алгоритмінің сызбанұсқасы

(10.58)-(10.61) сұлбалар бойынша есептеулер нәтижелерін төменде келтірілген кестеге (10.1-кесте) жазған ыңғайлы болады.

10.1-кесте

m	u_0^m	u_1^m	...	u_{N-1}^m	u_N^m
0	$\psi_1(t_0)$	$\varphi(x_1)$...	$\varphi(x_{N-1})$	$\psi_2(t_0)$
1	$\psi_1(t_1)$	u_1^1	...	u_{N-1}^1	$\psi_2(t_1)$
...
M	$\psi_1(t_M)$	u_1^M	...	u_{N-1}^M	$\psi_2(t_M)$

2-мысал. Бірінші мысалдағы айқындалған схеманы қолданып

$$u_t = u_{xx} + (-t + 1) \cdot e^{-x}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 0,1,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t) = t, \quad u(1, t) = t \cdot e^{-1}, \quad 0 \leq t \leq 0,01,$$

жылуөткізгіштік теңдеуі үшін бірінші бастапқы-шеттік есептің жуық шешімін табу керек.

Шешуі. Есептің жоғарыда келтірілген жалпы қойылымымен салыстыра отырып, $a^2 = 1$, $\varphi(x) = 0$, $\psi_1(t) = t$, $\psi_2(t) = t \cdot e^{-1}$, $L = 1$, $T = 0,1$ болатындығын көруге болады.

1. x кеңістік айнымалысы бойынша қадамды береміз: $h = 0,2$, сондықтан, $N = L / 0,2 = 1 / 0,2 = 5$. t уақыт бойынша қадамды орнықтылықты қамтамасыз етететін $\tau \leq (h^2 / 2)$ шартынан таңдап аламыз, яғни $\tau \leq (0,04 / 2) = 0,02$. Уақыт бойынша қадамды $\tau = 0,02$ деп аламыз, сонда $M = T / \tau = 0,1 / 0,02 = 5$. Сонымен, D аймақты $D_{h\tau} = \{(x_n, t_m) \mid x_n = nh, t_m = m\tau, n = 0, 1, \dots, 5; m = 0, 1, \dots, 5\}$ тормен (дискрет аймақпен) алмастырдық.

2. Шешімнің бастапқы (нөлдік) қабаттағы мәндерін есептейміз:

$$u_n^0 = 0, \quad n = 0, 1, \dots, 5.$$

Шешімнің сол жақ және оң жақ шекаралардағы мәндерін есептейміз:

$$u_0^m = t_m = m\tau = m \cdot 0,02, \quad m = 0, 1, \dots, 5,$$

$$u_5^m = t_m \cdot e^{-1} = m\tau \cdot e^{-1} = m \cdot 0,02 \cdot e^{-1}, \quad m = 0, 1, \dots, 5.$$

3. Біздің мысалымызда $1 - 2\tau \cdot /h^2 = 1 - 2 \cdot 0,02 / (0,2)^2 = 0$ болғандықтан, шешім кейінгі қабаттарда ($m = 0,1,2,3,4$) (10.58)-ден келіп шығатын төмендегі формула бойынша есептеліп табылады:

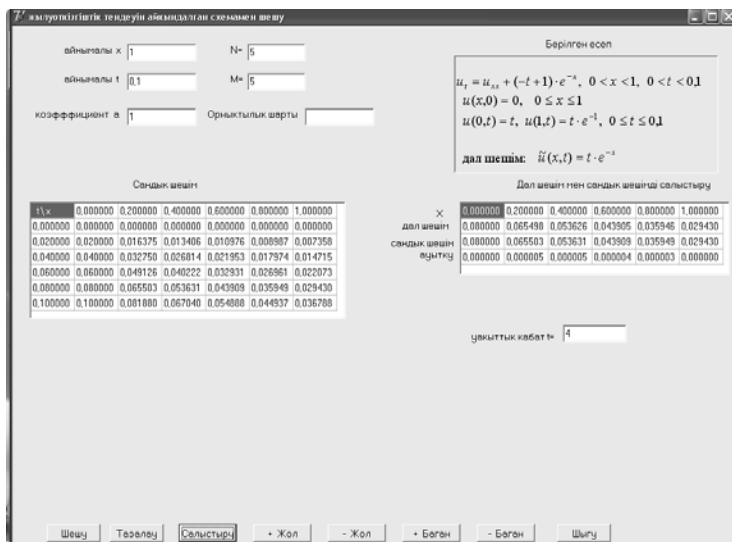
$$u_n^{m+1} = \frac{1}{2}(u_{n-1}^m + u_{n+1}^m) + \tau \cdot (-t_m + 1)e^{-x_n}, \quad n = 1, 2, 3, 4$$

Табылған шешім мәндері 10.2-кестеде келтірілген.

10.2-кесте

m	u_0^m	u_1^m	u_2^m	u_3^m	u_4^m	u_5^m
0	0	0	0	0	0	0
1	0,02	0,016375	0,013406	0,010976	0,008987	0,007358
2	0,04	0,03275	0,026814	0,021953	0,017974	0,014715
3	0,06	0,049126	0,040222	0,032931	0,026961	0,022073
4	0,08	0,065503	0,053631	0,043909	0,035949	0,02943
5	0,1	0,08188	0,06704	0,054888	0,044937	0,036788

Төменде жоғарыда қарастырылған 2-мысалдағы есепті (10.58)-(10.61) айқындалған айырымдық схемамен сандық шешу алгоритмінің Delphi визуалды программалау ортасындағы бағдарлама нәтижесі келтірілген (10.25-сурет).



10.26-сурет. Жылудікізгіштік теңдеуі үшін аралас есепті айқындалған айырымдық схемамен шешу алгоритмінің Delphi-дегі бағдарламасының нәтижесі

Бағдарлама нәтижесі тікелей есептеу жолымен табылған 2-кестедегі шешім мәндерімен бірдей екендігін көруге болады. Ал бұл – бастапқы дифференциалдық есепті есепті (10.58)-(10.61) айқындалған айырымдық схемамен шешу алгоритмі мен бағдарламаның дұрыстығын көрсетеді.

Төменде жоғарыда қарастырылған 2-мысалдағы есепті (10.58)-(10.61) айқындалған айырымдық сұлбамен сандық шешу алгоритмінің Delphi визуалды программалау ортасындағы бағдарламасының программалық коды келтірілген.

```
unit parabol;  
interface  
uses  
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls,  
  Forms,  
  Dialogs, StdCtrls, Buttons, Grids, OleCtrls;  
type  
  TParabolUravYavShema = class(TForm)  
    Label1: TLabel;  
    Edit1: TEdit;  
    Label2: TLabel;  
    Edit2: TEdit;  
    Label3: TLabel;  
    Edit3: TEdit;  
    Label4: TLabel;  
    Edit4: TEdit;  
    Edit5: TEdit;  
    Label5: TLabel;  
    Label6: TLabel;  
    Edit6: TEdit;  
    BitBtn1: TBitBtn;  
    BitBtn2: TBitBtn;  
    BitBtn3: TBitBtn;  
    StringGrid1: TStringGrid;  
    BitBtn4: TBitBtn;  
    StringGrid2: TStringGrid;  
    Label7: TLabel;  
    Label8: TLabel;  
    Label9: TLabel;  
    Label10: TLabel;  
    Label11: TLabel;
```



```

Edit7: TEdit;
Label12: TLabel;
Label13: TLabel;
SpeedButton1: TSpeedButton;
SpeedButton2: TSpeedButton;
SpeedButton3: TSpeedButton;
SpeedButton4: TSpeedButton;
OleContainer1: TOleContainer;
Label14: TLabel;
procedure BitBtn1Click(Sender: TObject);
procedure BitBtn3Click(Sender: TObject);
procedure BitBtn2Click(Sender: TObject);
procedure BitBtn4Click(Sender: TObject);
procedure Edit1KeyPress(Sender: TObject; var Key: Char);
procedure Edit2KeyPress(Sender: TObject; var Key: Char);
procedure Edit3KeyPress(Sender: TObject; var Key: Char);
procedure Edit4KeyPress(Sender: TObject; var Key: Char);
procedure Edit5KeyPress(Sender: TObject; var Key: Char);
procedure Edit7KeyPress(Sender: TObject; var Key: Char);
procedure SpeedButton3Click(Sender: TObject);
procedure SpeedButton1Click(Sender: TObject);
procedure SpeedButton2Click(Sender: TObject);
procedure SpeedButton4Click(Sender: TObject);
private
{ Private declarations }
public
{ Public declarations }
end;
var
ParabolUravYavShema: TParabolUravYavShema;
implementation
{$R *.dfm}

procedure TParabolUravYavShema.BitBtn1Click(Sender: TObject);
const
N1=100;M1=100;
var i,j: Byte;
h,tau,s:real;
u:array[0..N1,0..M1]of real;
x:array[0..N1] of real;
t1: array[0..M1]of real;

```

```

begin
h:=StrToFloat(Edit1.Text)/StrToFloat(Edit3.Text);
tau:=StrToFloat(Edit2.Text)/StrToFloat(Edit4.Text);
for i:=0 to StrToInt(Edit3.Text) do
begin
x[i]:=i*h;
u[i,0]:=0;
end;
for j:=0 to StrToInt(Edit4.Text) do
begin
t1[j]:=j*tau;
u[0,j]:=j*tau; u[StrToInt(Edit3.Text),j]:=(j*tau)*exp(-1);
end;
s:=sqr(StrToFloat(Edit5.Text))*tau/sqr(h);
for j:=0 to StrToInt(Edit4.Text)-1 do
for i:= 1 to StrToInt(Edit3.Text)-1 do
u[i,j+1]:=s*u[i-1,j]+(1-2*s)*u[i,j]+s*u[i+1,j]+tau*(((
j*tau)+1)*exp(-i*h));

```

```

StringGrid1.Cells[0,0]:=' t \ x ';
for i:=0 to StrToInt(Edit3.Text) do
StringGrid1.Cells[i+1,0]:=FloatToStrF(x[i], ffFixed, 8,6);
for i:=0 to StrToInt(Edit4.Text) do
StringGrid1.Cells[0,i+1]:=FloatToStrF(t1[i], ffFixed, 8,6);

```

```

for j:=0 to StrToInt(Edit4.Text) do
for i:=0 to StrToInt(Edit3.Text) do
StringGrid1.Cells[i+1,j+1]:=FloatToStrF(u[i,j],ffFixed,8,6);
end;

```

```

procedure TParabolUravYavShema.BitBtn3Click(Sender: TObject);
begin
Close;
end;

```

```

procedure TParabolUravYavShema.BitBtn2Click(Sender: TObject);
var i,j:Byte;
begin
Edit1.Text:="";
Edit2.Text:="";
Edit3.Text:="";

```

```

Edit4.Text:="";
Edit5.Text:="";
Edit7.Text:="";
for i:=0 to StringGrid1.ColCount do
for j:=0 to StringGrid1.RowCount do
StringGrid1.Cells[i,j]:="";
for i:=0 to StringGrid2.ColCount do
for j:=0 to StringGrid2.RowCount do
StringGrid2.Cells[i,j]:="";
end;

procedure TParabolUravYavShema.BitBtn4Click(Sender: TObject);
var i: integer; h,tau,t: real;
ut, unumerical,uabs:array [0..100] of real;
begin
h:=StrToFloat(Edit1.Text)/StrToFloat(Edit3.Text);
tau:=StrToFloat(Edit2.Text)/StrToFloat(Edit4.Text);
t:=tau*StrToFloat(Edit7.Text);
for i:=0 to StringGrid2.ColCount-1 do
begin
StringGrid2.Cells[i,0]:=FloatToStrF(i*h,ffFixed,8,6);
StringGrid2.Cells[i,1]:=FloatToStrF(t*exp(-i*h),ffFixed,8,6);
StringGrid2.Cells[i,2]:=StringGrid1.Cells[i+1,StrToInt(Edit7.Text)+1];
end;
for i:=0 to StringGrid2.ColCount-1 do
begin
ut[i]:=StrToFloat(StringGrid2.Cells[i,1]);
unumerical[i]:=StrToFloat(StringGrid2.Cells[i,2]);
uabs[i]:=abs(ut[i]-unumerical[i]);
end;
for i:=0 to StringGrid2.ColCount-1 do
StringGrid2.Cells[i,3]:=FloatToStrF(uabs[i],ffFixed,8,6);

end;

procedure TParabolUravYavShema.Edit1KeyPress(Sender: TObject;
var Key: Char);
begin
if not (Key in [#8,',','-', '0'..'9']) then
MessageDlg('Енгізу қателігі',mtInformation,[mbOk],0);
end;

```

```
procedure TParabolUravYavShema.Edit2KeyPress(Sender: TObject;
var Key: Char);
begin
if not (Key in [#8,',','-', '0'..'9']) then
MessageDlg('Енгізу қателігі',mtInformation,[mbOk],0);
end;
```

```
procedure TParabolUravYavShema.Edit3KeyPress(Sender: TObject;
var Key: Char);
begin
if not (Key in [#8,'1'..'9']) then
MessageDlg('Енгізу қателігі',mtInformation,[mbOk],0);
end;
```

```
procedure TParabolUravYavShema.Edit4KeyPress(Sender: TObject;
var Key: Char);
begin
if not (Key in [#8,'1'..'9']) then
MessageDlg('Енгізу қателігі',mtInformation,[mbOk],0);
end;
```

```
procedure TParabolUravYavShema.Edit5KeyPress(Sender: TObject;
var Key: Char);
begin
if not (Key in [#8,',','-', '0'..'9']) then
MessageDlg('Енгізу қателігі',mtInformation,[mbOk],0);
end;
```

```
procedure TParabolUravYavShema.Edit7KeyPress(Sender: TObject;
var Key: Char);
begin
if not (Key in [#8,'0'..'5']) then
MessageDlg('Енгізу қателігі',mtInformation,[mbOk],0);
end;
```

```
procedure TParabolUravYavShema.SpeedButton3Click(Sender: TObject);
begin
StringGrid1.RowCount:=StringGrid1.RowCount+1;
StringGrid1.Height:=StringGrid1.Height+20;
```

```
Edit3.Text:=IntToStr(StringGrid1.ColCount-2);  
Edit4.Text:=IntToStr(StringGrid1.RowCount-2);  
end;
```

```
procedure TParabolUravYavShema.SpeedButton1Click(Sender: TObject);  
begin  
StringGrid1.RowCount:=StringGrid1.RowCount-1;  
StringGrid1.Height:=StringGrid1.Height-20;  
Edit3.Text:=IntToStr(StringGrid1.ColCount-2);  
Edit4.Text:=IntToStr(StringGrid1.RowCount-2);  
end;
```

```
procedure TParabolUravYavShema.SpeedButton2Click(Sender: TObject);  
begin  
StringGrid1.ColCount:=StringGrid1.ColCount+1;  
StringGrid2.ColCount:=StringGrid2.ColCount+1;  
StringGrid1.Width:=StringGrid1.Width+50;  
StringGrid2.Width:=StringGrid2.Width+50;  
Edit3.Text:=IntToStr(StringGrid1.ColCount-2);  
Edit4.Text:=IntToStr(StringGrid1.RowCount-2);  
end;
```

```
procedure TParabolUravYavShema.SpeedButton4Click(Sender: TObject);  
begin  
StringGrid1.ColCount:=StringGrid1.ColCount-1;  
StringGrid2.ColCount:=StringGrid2.ColCount-1;  
StringGrid1.Width:=StringGrid1.Width-50;  
StringGrid2.Width:=StringGrid2.Width-50;  
Edit3.Text:=IntToStr(StringGrid1.ColCount-2);  
Edit4.Text:=IntToStr(StringGrid1.RowCount-2);  
end;  
end.
```

Ал енді айқындалмаған айырымдық сұлбаларды құруды қарастырайық. Мұндай сұлбаларды алу үшін дифференциалдық теңдеудегі барлық туындылар ақырлы-айырымдық қатынастармен алмастырылады. Бірақ шешімнің $(m + 1)$ -ші қабаттағы мәндері енді алдыңғы қабаттардағы мәндері арқылы айқын түрде өрнектелмейді. Айқындалмаған сұлбаларда келесі уақыттық қабатта шешімді табу үшін сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешу қажет болады.

Айқындалмаған айырымдық сұлба құруды жылуөткізгіштік теңдеуі үшін бірінші бастапқы-шеттік есеп мысалында көріп шығайық.

3-мысал.

$$u_t = u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < T,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq L,$$

$$u(0, t) = \psi_1(t), \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(L, t) = \psi_2(t), \quad 0 < t \leq T,$$

мұнда $f(x, t)$, $\varphi(x)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ – берілген функциялар. Осы есепті аппроксимациялайтын айқындалмаған айырымдық сұлба құру керек.

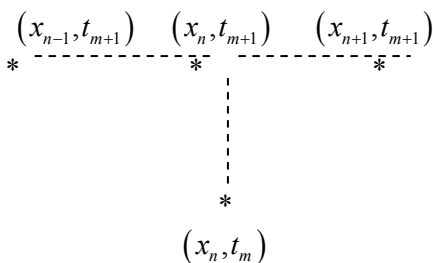
Шешуі. Жоғарыда қарастырылған 1-мысалдағыдай теңдеудегі туындыларды айырымдық туындылармен алмастырып төмендегі қатынасты аламыз:

$$\frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\tau} = \frac{u_{n+1}^{m+1} - 2u_n^{m+1} + u_{n-1}^{m+1}}{h^2} + f_n^m.$$

Осы өрнекті топтастыратын болсақ:

$$-\frac{\tau}{h^2} u_{n-1}^{m+1} + \left(1 + 2\frac{\tau}{h^2}\right) u_n^{m+1} - \frac{\tau}{h^2} u_{n+1}^{m+1} = u_n^m + \tau \cdot f_n^m, \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \quad (10.62)$$

Бұл формула $(m+1)$ -ші уақыттық қабаттағы шешімді m -ші қабаттағы шешім арқылы өрнектейді. Осы формулаға сәйкес келетін төртнүктелік шаблон 10.27-суретте келтірілген.



10.27-сурет. Төртнүктелік шаблон

Бастапқы және шеттік шарттар мына түрде жазылады:

$$u_n^0 = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (10.63)$$

$$u_0^m = \psi_1(t_m), \quad m = 0, 1, \dots, M \quad (10.64)$$

$$u_0^m = \psi_2(t_m), m = 0, 1, \dots, M. \quad (10.65)$$

(10.62)-(10.65) қатыстар айқындалмаған қосқабатты айырымдық схема кұрайтын болып, аппроксимациялау реті τ бойынша бірге және h бойынша екіге тең. Бұл схема абсолют орнықты және жинақталушы схема болады [6, 22, 34, 49].

Айқындалмаған сұлба бойынша есептеулерді төмендегі ретпен орындау қажет:

1. h және τ қадамдар талап етілетін дәлдіктегі шешімді беретіндей және $N \cdot h = L, M \cdot \tau = T$ теңдіктер орынды болатындай етіп алынады, мұнда N, M – бүтін сандар. $u_n^0 = \varphi(x_n), n = 0, 1, \dots, N$; $u_0^m = \psi_1(t_m), m = 1, \dots, M$; $u_N^m = \psi_2(t_m), m = 1, \dots, M$; есептейміз.

2. (10.62) теңдеуді $n = 1, 2, \dots, N-1$ болғанда қандай да бір уақыттық қабат үшін жазатын болсақ (10.27-сурет), төмендегі сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін алуға болады:

$$\begin{aligned} -\frac{\tau}{h^2} u_0^{m+1} + \left(1 + 2\frac{\tau}{h^2}\right) u_1^{m+1} - \frac{\tau}{h^2} u_2^{m+1} &= u_1^m + \tau \cdot f_1^m, \\ -\frac{\tau}{h^2} u_1^{m+1} + \left(1 + 2\frac{\tau}{h^2}\right) u_2^{m+1} - \frac{\tau}{h^2} u_3^{m+1} &= u_2^m + \tau \cdot f_2^m, \end{aligned} \quad (10.66)$$

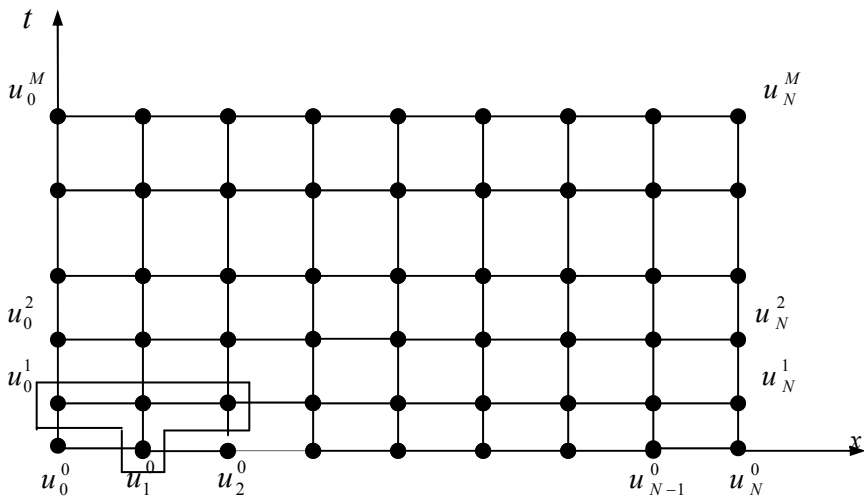
$$-\frac{\tau}{h^2} u_{N-2}^{m+1} + \left(1 + 2\frac{\tau}{h^2}\right) u_{N-1}^{m+1} - \frac{\tau}{h^2} u_N^{m+1} = u_{N-1}^m + \tau \cdot f_{N-1}^m,$$

$m=0$ деп аламыз. Сонда, $u_n^0 = \varphi(x_n), n = 0, 1, \dots, N$ бастапқы және $u_0^m = \psi_1(t_m), u_N^m = \psi_2(t_m), m = 0, 1, \dots, M$ шеттік шарттарды есепке ала отырып, жоғарыдағы теңдеулер жүйесінен үшдиагональды ($N-1$) белгісізді ($N-1$) сызықтық теңдеулер жүйесін аламыз (белгісіздер $-u_1^1, u_2^1, \dots, u_{N-1}^1$):

$$\begin{aligned} \left(1 + 2\frac{\tau}{h^2}\right) u_1^1 - \frac{\tau}{h^2} u_2^1 &= \varphi(x_1) + \frac{\tau}{h^2} \psi_1(t_1) + \tau \cdot f_1^0, \\ -\frac{\tau}{h^2} u_1^1 + \left(1 + 2\frac{\tau}{h^2}\right) u_2^1 - \frac{\tau}{h^2} u_3^1 &= \varphi(x_2) + \tau \cdot f_2^0, \quad (10.67) \\ -\frac{\tau}{h^2} u_{N-2}^1 + \left(1 + 2\frac{\tau}{h^2}\right) u_{N-1}^1 &= \varphi(x_{N-1}) + \frac{\tau}{h^2} \psi_2(t_1) + \tau \cdot f_{N-1}^0 \end{aligned}$$

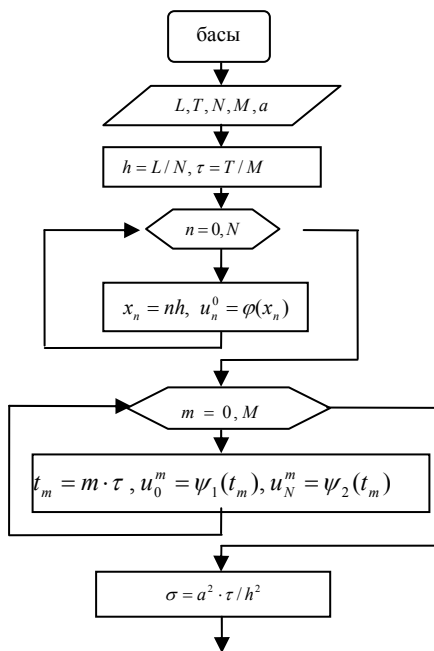
Мұндай жүйелерді кума әдісімен, жай итерация, Зейдель, релаксация және т.б. итерациялық әдістермен шешу мүмкін.

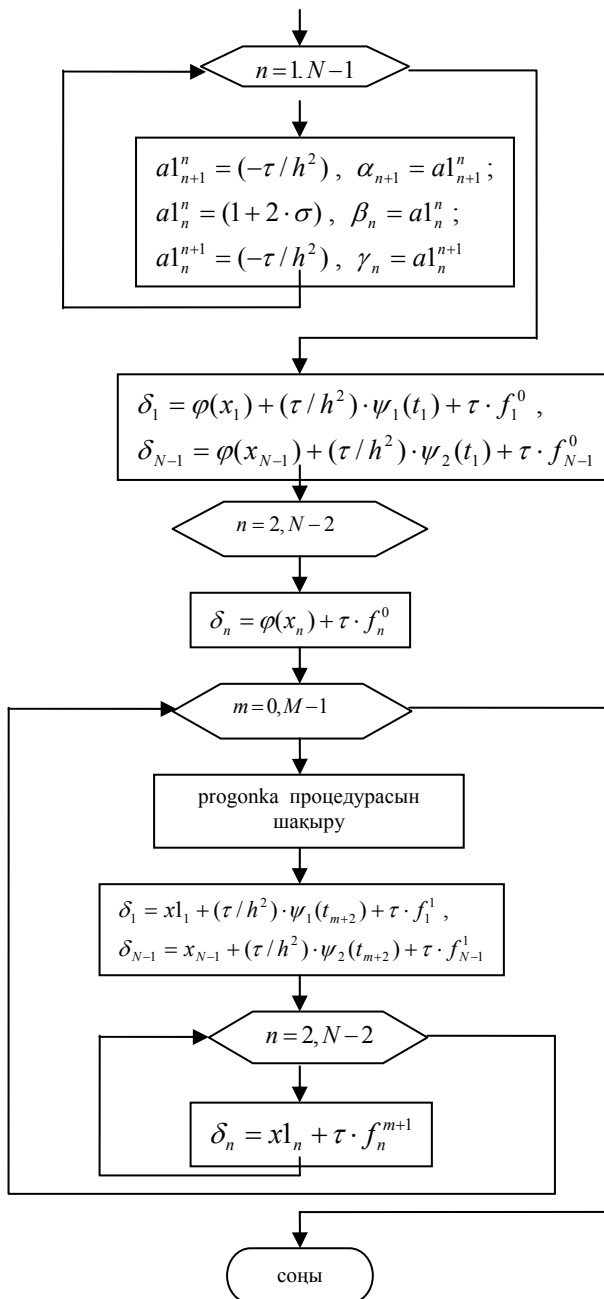
3. Осылай, $m = M$ болғанша әрбір келесі уақыттық қабатта жоғарыдағыдай жана үшдиагональды ($N-1$) белгісізді ($N-1$) сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешу қажет болады.



10.28-сурет. Айқындалмаған сұлба бойынша есептеу шаблоны

Төменде 3-мысалдағы есепті (10.62)-(10.65) айқындалмаған айырымдық схемамен шешудің сызбанұсқасы келтірілген (10.29-сурет).





10.29-сурет. Жылуөткізгіштік теңдеуі үшін бірінші бастапқы-шеттік есепті айқындалмаған айырымдық схемамен шешудің сызбанұсқасы

4-мысал. 2-мысалдағы жылуөткізгіштік теңдеуі үшін аралас есепті айқындалмаған айырымдық сұлбамен жуықтап шешуді қарастырайық:

$$u_t = u_{xx} + (-t+1) \cdot e^{-x}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 0,1,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t) = t, \quad u(1, t) = t \cdot e^{-1}, \quad 0 \leq t \leq 0,01,$$

Шешуі.

1. $h = 0,25$; $\tau = 0,025$ деп алайық. Сонда $N \cdot 0,25 = 1$, $M \cdot 0,025 = 0,1$, яғни $N = 4$, $M = 4$. Бастапқы және шеттік шарттар мынадай болады:

$$u_n^0 = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, 4,$$

$$u_0^m = \psi_1(t_m) = t_m = m\tau = m \cdot 0,025, \quad m = 1, \dots, 4,$$

$$u_N^m = \psi_2(t_m) = t_m \cdot e^{-1} = m\tau \cdot e^{-1} = m \cdot 0,025 \cdot e^{-1}, \quad m = 1, \dots, 4,$$

$$\tau / h^2 = 0,025 / 0,0625 = 0,4.$$

2. $m = 0$ деп алып, (10.67) жүйені $n = 1, 2, 3$ болғанда ($N - 1 = 3$) жазамыз:

$$1,8u_1^1 - 0,4u_2^1 = \varphi(x_1) + \frac{\tau}{h^2}\psi_1(t_1) + \tau \cdot f_1^0,$$

$$-0,4u_1^1 + 1,8u_2^1 - 0,4u_3^1 = \varphi(x_2) + \tau \cdot f_2^0,$$

$$-0,4u_2^1 + 1,8u_3^1 = \varphi(x_3) + \frac{\tau}{h^2}\psi_2(t_1) + \tau \cdot f_3^0.$$

Бірінші пункттегі бастапқы және шеттік шарттарды есепке алып, жоғарыдағы сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін мына түрде жазу мүмкін:

$$1,8u_1^1 - 0,4u_2^1 = 0,02947,$$

$$-0,4u_1^1 + 1,8u_2^1 - 0,4u_3^1 = 0,015163,$$

$$-0,4u_2^1 + 1,8u_3^1 = 0,015488.$$

Жүйені матрицалық түрде жазатын болсақ, төмендегі

$$\begin{pmatrix} 1,8 & -0,4 & 0 \\ -0,4 & 1,8 & -0,4 \\ 0 & -0,4 & 1,8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,02947 \\ 0,015163 \\ 0,015488 \end{pmatrix}$$

матрицалық теңдеуді аламыз. Осы жүйені қума әдісімен шешіп табамыз:

$$u_1^1 = 0,019818; u_2^1 = 0,015506; u_3^1 = 0,012050.$$

Сонымен, біз есептің сандық шешімін $t_1 = 1 * \tau = 1 * 0,025 = 0,025$ уақыттық қабат түйіндерінде таптық. Осы шешімдерді есептің дәл шешімі мәндерімен салыстырып көрелік (10.3-кесте).

10.3-кесте

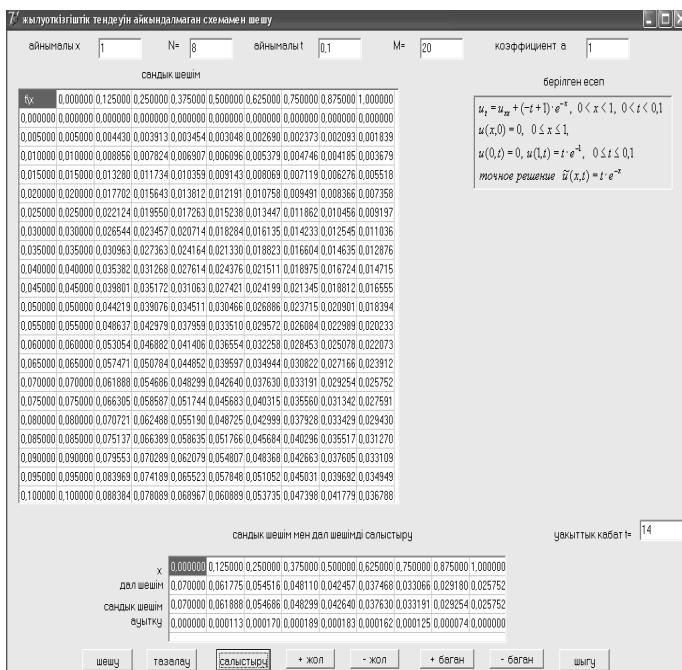
x_n	0	0,25	0,5	0,75	1
дәл шешім $\tilde{u}(x, t) = t \cdot e^{-x}$	0	0,019470	0,015163	0,011809	0,02943
жуық шешім u_n^1	0	0,019818	0,015506	0,012050	0,02943
ауытқу $ \tilde{u} - u_n^1 $	0	0,000348	0,000343	0,000241	0

10.3-кестеден $t_1 = 1 * \tau = 1 * 0,025 = 0,025$ уақыттық қабаттың түйіндерінде u_n^1 ($n=1,2,3$) мәндердің дұрыс табылғандығын көруге болады. Сандық шешімнің дәл шешім мәндерінен біршама ауытқу себебін x кеңістік және t уақыт айнымалыларының сәйкесінше h және τ қадамдарының шамалары ($h=0,25, \tau=0,025$) осы айнымалылардың өзгеру аралықтарының ұзындықтарымен ($0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 0,1$) салыстырғанда біршама үлкен екендігімен түсіндіруге болады.

3. Әрі қарай, $m=1$ деп алып, уақыт бойынша келесі қадам жасалады. Жоғарыдағыдай үшдиагоналды жаңа сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі шешіледі. Осы процесс $m=M=4$ болғанға дейін жалғасады.

Төменде 4-мысалдағы есепті (10.62) - (10.65) айқындалмаған айырымдық сұлбамен сандық шешудің Delphi визуалды программалау ортасындағы бағдарлама нәтижесі келтірілген (10.29-сурет).

x кеңістік және t уақыт айнымалылары бойынша сәйкесінше h және τ қадамдар шамалары кішірейіп барған сайын сандық шешімнің дәл шешімге жинақталуын амалда көрсету үшін $N=8, M=20$, яғни $h=0,125; \tau=0,005$ деп аламыз.



10.30-сурет. Жылуөткізгіштік теңдеуі үшін бірінші-бастапқы шеттік есепті айқындалмаған айырымдық схемамен шешу алгоритмінің Delphi-дегі бағдарламасының нәтижесі

Бағдарлама нәтижесінен көрініп тұрғандай, x кеңістік және t уақыт айнымалылары бойынша сәйкесінше h және τ қадамдар шамалары кішірейіп, барған сайын сандық шешімнің дәл шешімнен ауытқу шамасының кемитінін, яғни сандық шешімнің дәл шешімге жинақталуын байқауға болады.

Төменде 4-мысалдағы есепті (10.62)-(10.65) айқындалмаған айырымдық схемамен сандық шешу алгоритмінің Delphi визуалды программалау ортасындағы бағдарламасының программалық коды келтірілген.

unit urparabol;

interface

uses

Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,

Dialogs, Grids, Buttons, StdCtrls, ComCtrls, OleCtrls;

```

type
TParabolUravNeyavshema = class(TForm)
Label1: TLabel;
Edit1: TEdit;
Label2: TLabel;
Edit2: TEdit;
Label3: TLabel;
Label4: TLabel;
Edit3: TEdit;
Edit4: TEdit;
Label5: TLabel;
Edit5: TEdit;
BitBtn1: TBitBtn;
BitBtn2: TBitBtn;
SpeedButton1: TSpeedButton;
SpeedButton2: TSpeedButton;
SpeedButton3: TSpeedButton;
SpeedButton4: TSpeedButton;
BitBtn4: TBitBtn;
StringGrid1: TStringGrid;
StringGrid2: TStringGrid;
Label7: TLabel;
Label8: TLabel;
Edit6: TEdit;
BitBtn3: TBitBtn;
Label9: TLabel;
Label10: TLabel;
Label11: TLabel;
Label12: TLabel;
OleContainer1: TOleContainer;
Label13: TLabel;
Label6: TLabel;
procedure BitBtn1Click(Sender: TObject);
procedure SpeedButton1Click(Sender: TObject);
procedure SpeedButton2Click(Sender: TObject);
procedure SpeedButton3Click(Sender: TObject);
procedure SpeedButton4Click(Sender: TObject);
procedure BitBtn2Click(Sender: TObject);
procedure BitBtn4Click(Sender: TObject);
procedure BitBtn3Click(Sender: TObject);
private

```

```

{ Private declarations }
public
{ Public declarations }
end;
var
ParabolUravNeyavshema: TParabolUravNeyavshema;
implementation
{$R *.dfm}

procedure TParabolUravNeyavshema.BitBtn1Click(Sender: TObject);
var u:array[0..100,0..100]of real;
a1:array[1..100,1..100] of real;
alpha,betta,gamma,delta,x1:array[1..100] of real;
x,t1:array[0..100] of real;
i,j:integer;
h,tau,sigma:real;
procedure progonka;
var i:integer;
M,K:array[1..100] of real;
begin
M[1]:=-gamma[1]/betta[1];
K[1]:=delta[1]/betta[1];
for i:=2 to StrToInt(Edit3.Text)-1 do
begin
M[i]:=-gamma[i]/(betta[i]+alpha[i]*M[i-1]);
K[i]:=(delta[i]-alpha[i]*K[i-1])/(betta[i]+alpha[i]*M[i-1]);
end;

x1[StrToInt(Edit3.Text)-1]:=K[StrToInt(Edit3.Text)-1];
for i:=StrToInt(Edit3.Text)-2 downto 1 do
x1[i]:=M[i]*x1[i+1]+K[i];
for i:=1 to StrToInt(Edit3.Text)-1 do
StringGrid1.Cells[i+1,j+2]:=FloatToStrf(x1[i],ffFixed,8,6);
end;

begin
h:=StrToFloat(Edit1.Text)/StrToFloat(Edit3.Text);
tau:=StrToFloat(Edit2.Text)/StrToFloat(Edit4.Text);
for i:=0 to StrToInt(Edit3.Text) do
begin
x[i]:=i*h;

```

```

u[i,0]:=0;
end;
for j:=0 to StrToInt(Edit4.Text) do
begin
t1[j]:=j*tau;
u[0,j]:=j*tau; u[StrToInt(Edit3.Text),j]:=j*tau*exp(-1);
end;
sigma:=tau/sqr(h);
alpha[1]:=0; gamma[StrToInt(Edit3.Text)-1]:=0;
for i:=1 to StrToInt(Edit3.Text)-2 do
begin
a1[i+1,i]:=-tau/sqr(h); alpha[i+1]:=a1[i+1,i];
a1[i,i+1]:=-tau/sqr(h); gamma[i]:=a1[i,i+1];
end;
for i:=1 to StrToInt(Edit3.Text)-1 do
begin
a1[i,i]:=(1+2*sigma); betta[i]:=a1[i,i];
end;
delta[1]:=u[1,0]+sigma*u[0,1]+tau*exp(-h);
delta[StrToInt(Edit3.Text)-1]:=u[StrToInt(Edit3.Text)-1,0]+
+sigma*u[StrToInt(Edit3.Text),1]+tau*exp(-(StrToInt(Edit3.Text)-1)*h);
for i:=2 to StrToInt(Edit3.Text)-2 do
delta[i]:=u[i,0]+tau*exp(-i*h);

StringGrid1.Cells[0,0]:=' t\X  ';
for i:=0 to StrToInt(Edit3.Text) do
begin
StringGrid1.Cells[i+1,0]:=FloatToStrf(x[i],ffFixed,8,6);
StringGrid1.Cells[i+1,1]:=FloatToStrf(0*i,ffFixed,8,6);
end;
for j:=0 to StrToInt(Edit4.Text) do
begin
StringGrid1.Cells[0,j+1]:=FloatToStrf(t1[j],ffFixed,8,6);
StringGrid1.Cells[1,j+1]:=FloatToStrf(j*tau,ffFixed,8,6);
StringGrid1.Cells[StrToInt(Edit3.Text)+1,j+1]:=FloatToStrf((j*tau*
exp(-1)),ffFixed,8,6);
end;

for j:=0 to StrToInt(Edit4.Text)-1 do
begin
progonka;

```

```

delta[1]:=x1[1]+sigma*u[0,j+2]+tau*(1-(j+1)*tau)*exp(-h);
delta[StrToInt(Edit3.Text)-1]:=x1[StrToInt(Edit3.Text)-1]+
+sigma*u[StrToInt(Edit3.Text),j+2]+
+tau*(1-(j+1)*tau)*exp(-(StrToInt(Edit3.Text)-1)*h);
for i:=2 to StrToInt(Edit3.Text)-2 do
delta[i]:=x1[i]+tau*(1-(j+1)*tau)*exp(-i*h);

```

```

end;
end;

```

```

procedure TParabolUravNeyavshema.SpeedButton1Click(Sender: TObject);
begin
StringGrid1.RowCount:=StringGrid1.RowCount+1;
StringGrid1.Height:=StringGrid1.Height+20;
end;

```

```

procedure TParabolUravNeyavshema.SpeedButton2Click(Sender: TObject);
begin
StringGrid1.RowCount:=StringGrid1.RowCount-1;
StringGrid1.Height:=StringGrid1.Height-20;
end;

```

```

procedure TParabolUravNeyavshema.SpeedButton3Click(Sender: TObject);
begin
StringGrid1.ColCount:=StringGrid1.ColCount+1;
StringGrid2.ColCount:=StringGrid2.ColCount+1;
StringGrid1.Width:=StringGrid1.Width+50;
StringGrid2.Width:=StringGrid2.Width+50;
end;

```

```

procedure TParabolUravNeyavshema.SpeedButton4Click(Sender: TObject);
begin
StringGrid1.ColCount:=StringGrid1.ColCount-1;
StringGrid2.ColCount:=StringGrid2.ColCount-1;
StringGrid1.Width:=StringGrid1.Width-50;
StringGrid2.Width:=StringGrid2.Width-50;
end;

```

```

procedure TParabolUravNeyavshema.BitBtn2Click(Sender: TObject);
var i,j:Byte;

```



```

begin
Edit1.Text:="";
Edit2.Text:="";
Edit3.Text:="";
Edit4.Text:="";
Edit5.Text:="";
Edit6.Text:="";
for i:=0 to StringGrid1.ColCount do
for j:=0 to StringGrid1.RowCount do
StringGrid1.Cells[i,j]:="";
for i:=0 to StringGrid2.ColCount do
for j:=0 to StringGrid2.RowCount do
StringGrid2.Cells[i,j]:="";
end;

```

```

procedure TParabolUravNeyavshema.BitBtn4Click(Sender: TObject);
begin
Close;
end;

```

```

procedure TParabolUravNeyavshema.BitBtn3Click(Sender: TObject);
var i: integer; h,tau,t: real;
ut, unnumerical,uabs:array [0..100] of real;
begin
h:=StrToFloat(Edit1.Text)/StrToFloat(Edit3.Text);
tau:=StrToFloat(Edit2.Text)/StrToFloat(Edit4.Text);
t:=tau*StrToFloat(Edit6.Text);
for i:=0 to StringGrid2.ColCount-1 do
begin
StringGrid2.Cells[i,0]:=FloatToStrF(i*h,ffFixed,8,6);
StringGrid2.Cells[i,1]:=FloatToStrF(t*exp(-i*h),ffFixed,8,6);
StringGrid2.Cells[i,2]:=StringGrid1.Cells[i+1,StrToInt(Edit6.Text)+1];
end;
for i:=0 to StringGrid2.ColCount-1 do
begin
ut[i]:=StrToFloat(StringGrid2.Cells[i,1]);
unnumerical[i]:=StrToFloat(StringGrid2.Cells[i,2]);
uabs[i]:=abs(ut[i]-unnumerical[i]);
end;
for i:=0 to StringGrid2.ColCount-1 do

```

StringGrid2.Cells[i,3]:=FloatToStrF(uabs[i],ffFixed,8,6);
 end;
 end.

Басқада айқындалмаған сұлбаларды алуды қарастырайық. u_t туындыны аппроксимациялау үшін оң жақ айырымдық туындыны, ал u_{xx} -ты аппроксимациялау үшін n -ші және $n+1$ -ші уақыттық кабаттардағы $(x_n, t_m), (x_n, t_{m+1})$ түйіндер үшін жазылған екінші ретті орталық айырымдық туындының зілдеме орта мәнін пайдаланамыз:

$$u_{t,n}^m = \frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\tau}, u_{\bar{x}\bar{x},n}^m = \frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{h^2}, u_{\bar{x}\bar{x},n}^{m+1} = \frac{u_{n+1}^{m+1} - 2u_n^{m+1} + u_{n-1}^{m+1}}{h^2}, \text{ яғни}$$

$$u_{xx} \approx \sigma \frac{u_{n+1}^{m+1} - 2u_n^{m+1} + u_{n-1}^{m+1}}{h^2} + (1-\sigma) \frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{h^2}, \text{ мұнда } \sigma \in [0; 1].$$

$\sigma = \frac{1}{2}$ болғанда жай орта мәнді аламыз, ал $\sigma = \frac{3}{4}$ болғанда айырым-

дық туындылардың бірі $\frac{3}{4}$ зілдемемен, екіншісі $\frac{1}{3}$ зілдемемен

алынады. Нәтижеде

$$\frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\tau} = \sigma \frac{u_{n+1}^{m+1} - 2u_n^{m+1} + u_{n-1}^{m+1}}{h^2} + (1-\sigma) \frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{h^2}, n=1, \dots, N-1,$$

$$u_n^0 = \varphi(x_n), n=0, 1, \dots, N,$$

$$u_0^m = \psi_1(t_m), u_N^m = \psi_2(t_m), m=0, 1, \dots, M$$

айырымдық схеманы аламыз.

Алғашқы $(N-1)$ тендеулердегі барлық белгісіздерді тендеудің оң жағына өткізетін болсақ, төмендегі айырымдық сұлбаны аламыз:

$$-\sigma \frac{\tau}{h^2} u_{n-1}^{m+1} + \left(1 + 2\sigma \frac{\tau}{h^2}\right) u_n^{m+1} - \sigma \frac{\tau}{h^2} u_{n+1}^{m+1} =$$

$$= (1-\sigma) \frac{\tau}{h^2} u_{n-1}^m + \left(1 - 2(1-\sigma) \frac{\tau}{h^2}\right) u_n^m +$$

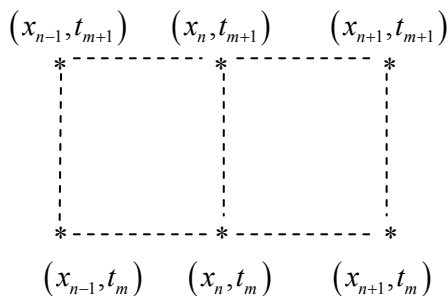
10.68

$$+ (1-\sigma) \frac{\tau}{h^2} u_{n+1}^m, n=1, \dots, N-1,$$

$$u_n^0 = \varphi(x_n), n=0, 1, \dots, N,$$

$$u_0^m = \psi_1(t_m), u_N^m = \psi_2(t_m), m=0, 1, \dots, M$$

Бұл схема абсолют орнықты және жинақталушы болады [6]. $\sigma = \frac{1}{2}$ болғанда сұлба *Кранк – Николсон сұлбасы* деп аталады. $\sigma = 0$ болғанда (10.58) айқындалған сұлба, ал $\sigma = 1$ болғанда (10.62) айқындалмаған сұлба келіп шығады. (10.68) сұлбаға сәйкес келетін алтынүктелік шаблон төменде көрсетілген (10.30-сурет).



10.31-сурет. Алтынүктелік шаблон

$\sigma = \frac{1}{2}$ болғанда (3.12) схеманың аппроксимациялау реті τ және h бойынша екіге тең болады, ал $\sigma \neq \frac{1}{2}$ болғанда аппроксимациялау реті τ бойынша бірге, h бойынша екіге тең болады [6, 22].

Бақылау сұрақтары

1. Дифференциалдық теңдеу деп қандай теңдеуге айтылады?
2. Қандай теңдеуді қарапайым дифференциалдық теңдеу деп айтамыз?
3. Дифференциалдық теңдеудің реті деп неге айтылады?
4. Интегралдау дегенде нені түсінеміз?
5. Дифференциалдық теңдеудің жалпы және дербес шешімдері.
6. Тор, оның түйіні, қадамы деп неге айтылады және олар қалай құрылады?
7. Бірқалыпты (регуляр) тор деп қандай торға айтылады?

8. 1-ретті қарапайым дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебін сандық шешудегі Эйлер әдісінің геометриялық мағынасы қандай?
9. Дөңгелектеу және әдіс қателігі деп неге айтылады? Олардың пайда болу себептері неде?
10. Локаль және глобал қателіктер қандай қателіктер? Олардың айырмашылығы неде? Эйлер әдісінің глобал қателігінің қадамға қатысты реті неге тең?
11. «Жыртқыш–құрбан» биожүйесіндегі стационар нүктелер қалай табылады?
12. «Жыртқыш–құрбан» биологиялық жүйесінің бірінші және екінші модельдері шеңберінде оқшауланған жағдайда олардың саны қалай өзгереді?
13. Екі популяцияның өзара әсерін модельдеуде қандай қосымша факторларды есепке алуға болады?
14. Қарастырылған математикалық модельдер көмегімен қандай биологиялық жүйелерді сипаттауға болады?
15. Фазалық кеңістік, фазалық траектория дегеніміз не? Тепе-теңдік нүктелерінің қандай түрлері болады?
16. Өлшемсіз шамаларды енгізудің мақсаты неде?
17. Қандай дифференциалдық теңдеу дербес туындылы теңдеу деп аталады?
18. Квазисызықтық теңдеу деп қандай теңдеуге айтамыз?
19. Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің классификациясы қалай жүргізіледі?
20. Айырымдық әдістердің мағынасы неде?
21. Айырымдық сұлба (есеп) дегенде нені түсінеміз?
22. Айырымдық сұлбаның жинақталу реті деп неге айтылады?
23. Айырымдық сұлбаның дифференциалдық есепті аппроксимациялау қателігі дегеніміз не? Ол қалай анықталады?
24. Айырымдық сұлбаның орнықтылық шарттары қандай?
25. Қандай айырымдық сұлбалар абсолют орнықты, абсолют орнықсыз және шартты орнықты деп айтылады?
26. Айқындалған және айқындалмаған айырымдық сұлбалар деп қандай сұлбаларға айтылады? Шаблон дегеніміз не?
27. Жылуөткіштік теңдеуі үшін айқындалған сұлбаның шартты орнықтылығының шарты.

Тапсырмалар

1. Кофе және қоршаған орта температураларының айырымы 78°C . Осы температуралар айырымы 39°C болуы үшін кофені қанша уақыт суыту керек? Қанша уақыттан кейін температуралар айырымы 26°C және 13°C дейін азаяды? Компьютерде есептеулерді жүргізуден алдын алынатын нәтижелерді аналитикалық жолмен анықтап алуға әрекет жасап көріңіз.

2. Кофенің суынуы есебінде $t = 2$ уақыт моментінде $0,2\%$ дәлдікке жету үшін Δt қадам шамасын қалай таңдап алу керек? $t = 5$ уақыт моментінде $0,1\%$ дәлдікке жету үшін Δt қадам шамасын қандай болуы керек?

3. Кофенің температурасы мен бөлме температурасының айырымы бастапқы температуралар айырымының $1/e \approx 0,37$ -ге тең болуы үшін қанша уақыт қажет болады? Осы уақыт *релаксация уақыты* немесе *суыну уақыты* деп аталады. r суыну коэффициентінің түрлі мәндерін алып көріңіз және релаксация уақытының r -ден сапалы тәуелділігін анықтаңыз.

4. Сырттағы температура түні бойы $T_0 = -10^\circ\text{C}$ болғанда таңғы сағат 7-дегі бөлме температурасы қандай болуы мүмкін?

5. Айталық, Сізді Алматы облысындағы Алакөл көлінде деп қарастырайық (жаз мезгілінде денсаулығыңызды тіктеу үшін келген деп есептелік). Жаздың ортасы болғанына қарамастан ауа райы құбылмалы, тез өзгереді болсын, Мысалы, кейбір күндері ауаның температурасы күні бойына $+25^\circ\text{C}$ -тан $+5^\circ\text{C}$ -қа дейін және керісінше өзгеруі мүмкін. Сіз тұрып жатқан жаздық үйдің суықтан қорғау жағдайы (изоляциясы) нашар, жылытатын электр құралдары жоқ болсын. Сыртқы температура $T_s = +19^\circ\text{C}$ болғанда, кенеттен ауа райы бұзылып, сыртқы температура $+26^\circ\text{C}$ -тан $+6^\circ\text{C}$ арасында

$$T(t) = 19 + A \sin(\pi t), \quad A = 10$$

заңы бойынша өзгереді болсын.

Сіз үйдегі бөлмеде қалуды мақұл көресіз бе? Әлде үйдің суықтан қорғау жағдайы тым нашар, бөлме ішіндегі температура сырттағымен бірдей деп ойлап, сыртқа шығасыз ба?

6. Қояндар мен түлкілерден тұратын «жыртқыш-құрбан» биологиялық жүйесін қарастырайық. $x(t)$ және $y(t)$ арқылы t уақыт

моментіндегі қояндар мен түлкілердің сәйкес сандарын белгілейміз. «Жыртқыш-құрбан» моделі бойынша $x(t)$ және $y(t)$ функциялар төмендегі бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесін қанағаттандырады:

$$x'(t) = Ax(t) - Bx(t)y(t),$$

$$y'(t) = Cx(t)y(t) - Dy(t).$$

Әдеттегі компьютерлік модельдеу үшін осы жүйедегі коэффициенттердің мәндерін мынадай алуға болады:

$$A = 2, \quad B = 0,02, \quad C = 0,0002, \quad D = 0,8.$$

Осы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімін $[0; 5]$ аралықта $h = 0,1$; $h = 0,2$ қадамдармен Рунге – Кутта әдісімен табыңыз, егер бастапқы уақыт моментінде

a) $x(0) = 3000$ қояндар және $y(0) = 120$ түлкілер;

á) $x(0) = 5000$ қояндар және $y(0) = 100$ түлкілер

болатын болса.

7. Периодты күштердің әсеріндегі қандайда бір серпімді механикалық жүйе төмендегі

$$x''(t) + 25x(t) = 8\sin(5t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

дифференциалдық теңдеумен сипатталатын болсын. Осы Коши есебінің шешімін $[0; 2]$ аралықта $h = 0,05$ қадаммен Рунге-Кутта әдісімен табыңыз.

8. Берілген

$$x' = x - xy, \quad y' = -y + xy, \quad x(0) = 4, \quad y(0) = 1$$

Коши есебінің шешімін $[0; 8]$ аралықта $h = 0,1$ қадаммен Рунге-Кутта әдісімен табыңыз. Жүйенің фазалық траекториялары тұйық қисықтарды құрайды. Компьютер көмегімен Рунге-Кутта әдісі арқылы табылған сандық шешімді пайдаланып $x(t)$ және $y(t)$ шешімдердің графиктерін және фазалық траекторияларды құрыңыз.

9. Жүк әсерінен балканың иілуін зерттеу және балканың ұзындығы бойлап қималардың $J(x)$ инерция моментінің тиімді үлестірімін табу үшін компьютерлік бағдарлама құрыңыз. Құрылған бағдарлама:

- есепті шекаралық шарттардың екі нұсқасымен зерттеу;

• балкаға қойылған жүк үлестірімін және қималардың бастапқы инерция моментін беру (тұрақтыдан квадраттыққа дейінгі);

• $J(x) = \text{const}$ жағдайы үшін тор жиілігінің сандық шешім дәлігіне әсерін зерттеу (бұл жағдайда дәл аналитикалық шешім бар болады);

• берілген жүк үшін тиімді $J(x)$ үлестірімді табу және қималар инерция моменттерінің тиімді және тұрақты үлестірімдері үшін балка иілуінің графиктерін сапалы талдау мүмкіндіктерін беретіндей болуы қажет.

10. Жылуөткізгіштік теңдеуі үшін аралас есептердің сандық шешімін

- айқындалған айырымдық схема бойынша;

- айқындалмаған айырымдық схема бойынша;

- Кранк-Николсон схемасы бойынша табыңыз. Алынған сандық шешімді аналитикалық шешіммен салыстырыңыз. Айқындалған схема бойынша сандық шешуде t уақыт бойынша τ қадамды

$\tau \leq \frac{h^2}{2}$ орнықтылық шартынан таңдап алыңыз. Есептеу жолымен (h және τ қадамдарды кішірейте отырып) сандық шешімнің дәл шешімге жинақталуын зерттеңіз. Алынған сандық шешімдер мен дәл шешімдердің графиктерін құрыңыз және оларды салыстырыңыз.

$$\text{а) } \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha(x^2 - 2t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 0,02,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = \alpha t, \quad 0 \leq t \leq 0,02,$$

$$\alpha = 0,5k, \quad k = 1, \dots, 10$$

(дәл шешім $u(x, t) = \alpha x^2 t$).

$$\text{б) } \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 0,1,$$

$$u(x, 0) = \sin \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 0,1,$$

(дәл шешім $u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$).

$$\text{в) } \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 0,02,$$

$$u(x,0) = e^{-\alpha x}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0,t) = e^{\alpha t}, \quad u(1,t) = e^{\alpha(t-1)}, \quad 0 \leq t \leq 0,02,$$

$$\alpha = 2 + 0,3k, \quad k = -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4$$

$$(\text{д\`ал шеш\`им } u(x,t) = e^{\alpha(t-x)})$$

$$\text{г) } \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 0,1,$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 1, \quad 0 \leq t \leq 0,1,$$

$$(\text{д\`ал шеш\`им } u(x,t) = x + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot (\pi n)^{-1} \cdot e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n \pi x)$$

$$\text{д) } \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 0,1,$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 0,1,$$

$$(\text{д\`ал шеш\`им } u(x,t) = \frac{1}{\pi^2} [1 - e^{-\pi^2 t}] \sin \pi x).$$

Әдебиеттер

1. Алкок Д. Язык Паскаль в иллюстрациях. – М.: Мир, 1991.
2. Альберг Дж. Нилсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. – М.: Мир, 1972.
3. Андреев В.Б., Руховец Л.А. Проекционные методы. – М.: Знание, 1986.
4. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Ижевск, 2000.
5. Барتنъев О. В. Fortran для студентов. –М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1999 с.
6. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы: учебное пособие. – М.: Наука, 1987.
7. Бейли Н. Математика в биологии и медицине. – М.: Мир, 1970.
8. Блехман Н.Н, Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложений математики. – М.: Наука, 1983.
9. Вартофский М. Модели. Репрезентация и научное понимание. М.: Прогресс, 1988.
10. Векуа И. Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов. – М.: Наука, 1978.
11. Введение в математическое моделирование: Учебное пособие / Под ред. П.В. Трусова.– М.: Логос, 2005.
12. Вилькас Э.Й. Оптимальность в играх и решениях. – М.: Наука, 1990.
13. Воеводин В.В., Воеводин Вл. В. Параллельные вычисления. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002.
14. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984.
15. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. – М.: Добросвет, 1998.
16. Гильдерман Ю.И. Лекции по высшей математике для биологов. – Новосибирск: Наука, 1974.
17. Гимади Э.Х., Глебов Н.И. Математические модели и методы принятия решений. – Новосибирск: НГУ, 2008.
18. Глассер А.Г. Лисейкин В.Д., Шокин Ю.И., Васева И.А., Лиханова Ю.В. Построение разностных сеток с помощью уравнений Бельтрами и диффузии. – Новосибирск: Наука, 2006.
19. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1972.

20. Глинский Б.А., Грязнов Б.С. и др. Моделирование как метод научного познания. – М.: Наука, 1965.
21. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976.
22. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. – М.: Наука, 1973.
23. Горстко А.Б. Познакомьтесь с математическим моделированием. – М.: Знание, 1991.
24. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике: В 2 ч. – М.: Мир, 1990.
25. Жермен П. Курс механики сплошных сред. Общая теория. – М.: Высш. шк., 1983.
26. Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2003.
27. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. – М.: МГУ, 1990.
28. Коновалов А.Н., Яненко Н.Н.. Модульный принцип построения программ как основа создания пакета прикладных программ решения задач механики сплошной среды: Комплексы программ математической физики. – ВЦ СО АН СССР, 1972. – С. 48–54.
29. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – М.: Наука, 1965.
30. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика: Ч. 1. – М.: Физматгиз, 1963.
31. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: В 3 т. – М.: Дрофа, 2008. – Т.1: Дифференциальное интегральное исчисления функций одной переменной.
32. Малинецкий Г.Г. Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. – М.: Наука, 1997.
33. Максимей И.В. Имитационное моделирование на ЭВМ. – М.: Радио и связь, 1988.
34. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1989.
35. Математическое моделирование / Под ред. Дж. Эндрюса и Р. Мак-Лоуна. – М.: Мир, 1979.
36. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. – М.: Изд-во ЛКИ, 2010.
37. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981.

38. Овсянников Л.В. Введение в механику сплошных сред: Ч.1.– Новосибирск: Изд-во НГУ, 1976.
39. Петкевич В.В. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1981.
40. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1984.
41. Плотинский Ю.М. Теоретические и эмпирические модели социальных процессов. – М.: Логос, 1998.
42. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1974.
43. Поршнев С.В. Компьютерное моделирование физических процессов в пакете MATLAB. – М.: Горячая линия – Телеком, 2003.
44. Постников М.М. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1973.
45. Роках А.Г. Логика и эвристика научно-технических решений. – Саратов: СГУ, 1991.
46. Рыжиков Ю.И. Решение научно-технических задач на персональном. – СПб.: КОРОНА, 2000.
47. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование– М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
48. Самарский А.А. Введение в численные методы. – СПб.: Лань, 2009.
49. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989.
50. Седов Л.И. Механика сплошной среды: В 2 т. – СПб.: Лань, 2004.
51. Сичкарев В.И., Акуличев В.А. Волновые энергетические станции в океане. – М.: Наука, 1989.
52. Туманова Е.А., Шагас Н.Л. Макроэкономика. Элементы продвинутого подхода. – М.: ИНФРА-М, 2004.
53. Терегулов И.Г. Соппротивление материалов и основы теории упругости и пластичности. М., Высшая школа, 1984
54. Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980.
55. Шокин Ю.И., Лисейкин В.Д., Лебедев А.С., Данаев Н.Т., Китаева И.А. Методы римановой геометрии в задачах построения разностных сеток. – Новосибирск: Наука, 2005.
56. Яненко Н.Н., Преображенский Н.Г., Разумовский О.С. Методологические проблемы математической физики. – Новосибирск: Наука, 1986.

СҰЛТАНОВ Мұрат Абдукадырұлы

**МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖӘНЕ КОМПЬЮТЕРЛІК
МОДЕЛЬДЕУ НЕГІЗДЕРІ**

**(Основы математического и компьютерного
моделирования)**

Оқулық / Учебник

Басуға 14.01.2015 қол қойылды. Қағазы офсеттік.

Қаріп түрі «Times New Roman». Пішіні 60x90¹/₁₆. Баспа табағы 18,7.

Таралымы: Мемлекеттік тапсырыс бойынша – 850 дана.

Тапсырыс №3/164-14.

ISBN 978-601-225-737-3



9 7 8 6 0 1 2 2 5 7 3 7 3



Сұлтанов Мұрат Абдуқадырұлы – Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің (ХҚТУ) «Математика» кафедрасының доценті, физика-математика ғылымдарының кандидаты.

М. А. Сұлтанов 1982 жылы В.И. Ленин атындағы Ташкент мемлекеттік университетінің математика факультетін, 1990 жылы Ленин комсомолы атындағы Новосібір мемлекеттік университетінің механика және математика факультетінің аспирантурасын оқып бітірді. Ол корректілі емес және кері есептер теориясы саласындағы жетекші ғалымдардың бірі, Ресей Ғылым Академиясының С.Л. Соболев атындағы Математика институтының бас ғылыми қызметкері, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор А.Л. Бухгеймнің шәкірті.

М.А. Сұлтанов 2001-2011 жылдар аралығында Қ.А. Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің Шымкент институтында «Бағдарламалау және есептеу техникасы» кафедрасында доцент қызметін атқарды, ал 2011-2013 жылдар аралығында Қ.А. Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің «Информатика және сандық әдістер», ал 2014 жылдан бастап осы жоғары оқу орнының «Математика» кафедрасының доценті.

М.А. Сұлтановтың ғылыми-зерттеу жұмыстарының бағыты – кері және корректілі емес есептерді сандық шешу, оның бірқатар мақалалары алыс және жақын шет мемлекеттердің ғылыми басылымдарында жарияланды, сондай-ақ ол – «Сандық әдістер» курсынан ЭЕМ-де практикум», «Математикалық физика теңдеулерін сандық шешудің айырымдық әдістері» атты оқу құралдарының авторы.