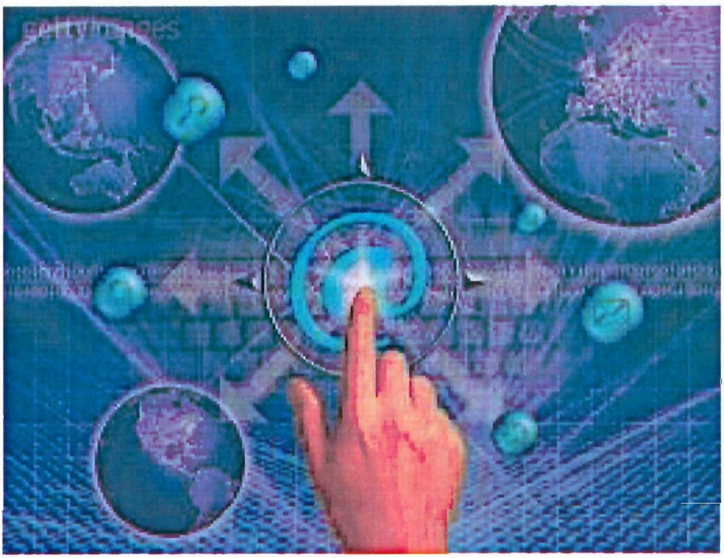
ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ
ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Абай атындағы Қазақ ұлттық
педагогикалық университеті

ОҢТАЙЛАНДЫРУ ӘДІСТЕРІ

оқу-әдістемелік кешені



nur-print
Алматы 2012

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ
ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті

ОҢТАЙЛАНДЫРУ ӘДІСТЕРІ

*Білім алушыларға арналған пәннің
оқу-әдістемелік кешені*

5В070300 – Ақпараттық жүйелер

Алматы, 2012

ӘОЖ 004.3 (075)
КБЖ 32.973.202 я73
О 59

Пікір жазғандар:
т.ғ.к., доцент **Г.Салғараева**
ф.-м.ғ.к. **Г.А.Тюлепбердинова**

Құрастырушылар:
т.ғ.к., доцент **Л.Х. Жунусова**
ф.-м.ғ.к., доцент **К.А.Искакова**
аға оқытушы **Н.А.Тойғанбаева**

ISBN 9965-756-18-X

Онтайландыру әдістері: *Оқу-әдістемелік кешен.* – Алматы: Нур-Принт, 2012.-101 б.

Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті физика-математика факультетінің Ғылыми Кеңесінің шешімімен баспа-ға ұсынылған.
Хаттама № 1, «31» 08 2012 жыл.

ӘОЖ 004.3 (075)
КБЖ 32.973.202 я73
О 59

ISBN 9965-756-18-X

МАЗМҰНЫ

Студенттерге арналған пән силлабусы

1. Пән туралы ақпарат

<table>
<tr><td>Пән атауы</td><td>Пән коды</td><td>Кредит саны</td><td>Курс, семестр</td></tr>
<tr><td>Оңтайландыру әдістері</td><td>ПП05</td><td>2</td><td>3-к, 5-семестр</td></tr>
<tr><td>Мамандық аты</td><td>Мамандық шифры</td><td>Кафедра</td><td>факультет</td></tr>
<tr><td>ақпараттық жүйелер</td><td>5В070300</td><td>Оқытудың ақпараттық жүйелері</td><td>Физика-математика</td></tr>
<tr><td colspan="2">Оқыту формасы - күндізгі</td><td colspan="2">Оқыту тілі - қазақша</td></tr>
<tr><td colspan="4">Пәнді өткізу уақыты және орны</td></tr>
<tr><td>Лекция</td><td colspan="2">Кесте бойынша</td><td></td></tr>
<tr><td>Семинар сабақ</td><td colspan="2">Кесте бойынша</td><td></td></tr>
<tr><td>СОӨЖ</td><td colspan="2">Кесте бойынша</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Консультация уақыты</td></tr>
<tr><td colspan="4">Рубеждік бақылау кестесі: 1-ші 8 апта; 2-ші 14апта</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Оқытушының аты-жөні, лауазымы, дәрежесі, атағы</td><td colspan="2">Контактілік ақпарат(телефон, e-mail)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Жунусова Ләззат Хафизқызы, техника ғылымдарының кандидаты, доцент</td><td colspan="2">жұмыс телефоны: 272-15-13</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">Кафедра меңгерушісі Б.Д.Сыдықов</td></tr>
</table>

2. Пәннің қысқаша сипаттамасы

Замана талабынан туған «Оңтайландыру әдістері» курсы нарықтық экономика, қолданбалы математика, химия, физика, экология сияқты салалардан жалпы ғылыми дайындықтағы мамандарды даярлаудың ажырамас бөлігі болып табылады. «Оңтайландыру әдістері» жалпы курсының университеттік оқу жоспарларына 20-ғасырдың 70-жылдарында енгізілуі өндірістің кең қанат жаюы, жер қойнауындағы байлықтардың шектеулі екендігін ескеріп, энергияны, материалдарды, жұмыс уақытын үнемді пайдалану керектігін сезінгендіктен және экономика, экология, өндірістік-технологиялық ғылымдарды тиімді басқару қажеттілігіне байланысты еді. Аталған мәселелердің экономикалық немесе басқа да мазмұндарына назар аударсақ, онда олардың барлығы функцияның немесе функционалдың қай бір кеңістіктегі максимумға немесе минимумға жеткізетін жиындарын табу есебін білдіреді.

Мұндағы функция басқару сапасын, ал жиын зерттелінетін жүйедегі мүмкіндіктерді ескеріп ресурстарға қойылатын шектеулерді өрнектейді.

Өмірде болып жатқан құбылыстарды зерттеуде, есептеуде ең тиімді тәсілді іздеп табуға тура келеді. Жоғарғы білімді маман осы мәселелерді шешуде тиімді әдістерінен алған білімді жүзеге асырады.

Тиімділік әдістерінен студенттер:

- сызықтық программалау;
- сызықтық емес тиімділік;
- бір айнымалы бойынша шартсыз минимизацияау;
- көп айнымалы функцияны шартсыз минимизациялау;

шартты тиімділіктің классикалық есептерін біліп шығады.

Бұл курстың **мақсаты** класикалық вариациялық қисап әдістерін және тиімділеу әдістерін, басқарылымдылық пен тиімді басқару элементтерін зерттеу.

Курсты меңгеру нәтижесінде бакалаврлар

- Функционалдар мен функциялар үшін экстремалдік есептерді шешу әдістерін;

  БІЛУГЕ:
- Практикалық экстремалдік есептердің математикалық модельдерін құруды;
- Белгілі әдістерді қолдануды және қортынды жасауды;

  ҮЙРЕНУГЕ:
- Вариациялық қисап пен тиімділеудің негізгі әдістерінен;
- Нақты есептерге экстремалдік есептерді шешу әдістерінің алгоритмдерін қолданудан
- **ХАБАРДАР БОЛУҒА ТИІСТІ**

3. Пән пререквизиттері

Алгебра;

Геометрия;

Математикалық анализ;

Дифференциалды теңдеулер.

4. Пән постреквизиттері

Сандық тәсілдер;

Арнайы мамандық курстары.

5. Күнтізбелік-тақырыптық жоспар.

№	Пән тақырыптарының аталуы	апта	Аудиториялық сабақтар			Сабақ түрі		Барлығы
			Дәріс (сағ. мат үшін)	Дәріс (сағ.АЖ үшін	Пр/сем./зертх./студ саб (сағ.)	СОӨЖ (сағ.)	СӨЖ (сағ.)	
1	**Тиімділік есебіне кіріспе.** Тиімділік есептерінің қойлымы. Тиімділік есептерінің және әдістерінің классификациялары.	1	1	2	1	1	1	4
2	**Сызықты программалау.** Сызықты программалау теориясындағы негізгі ұғымдар.	2	1	2	1	3	3	8
3	Сызықты программалау есебін симплекс әдісімен шығару .Тиімділіктің кажетті және жеткілікті шарты.Жасанды базис есебі. (М-әдіс)	3-4	2	4	2	4	4	12

Кестетің жалғасы

4	**Сызықты программалау есебінің өзара қосжақты есептері.**	5	1	2	1	2	2	6
5	**Тасымалдау есебі**	6	1	2	1	2	2	6
6	**Сызықты емес оңтайландыру**	7	1	2	1	2	2	6
7	**Бір айнымалы функцияны шартсыз минимизациялау.**	8-9	2	2	1	2	2	6
8	**Көпайнымалы функциялардағы шарттыз тиімділік есептері**. Шарттсыз тиімділік есептері.Тікелей іздестіру әдістері	10-11	2	4	2	4	4	12
9	Градиеттік әдіс	12-13	2	2	1	2	2	6
10	**Вариациялық қисап**.Қарапайым вариациялық қисап мысалдары. Эйлер теңдеуі.	14-15	2	4	2	4	4	12
	бары		15	30	15	30	30	90

6. Оқытуға арналған әдебиеттер (10 әдебиеттен артық емес)

Негізгі әдебиеттер:

1. Айсагалиев С.А., Бияров Т.Н., Калимолдаев М.Н. и др. Задачи по методам оптимизации и вариационному исчислению.- Алматы: Қазақ университеті, 1996.
2. Аккулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах.- М.: Высшая школа, 1986.
3. Вентцель Е.С. Исследование операций. - М.: Высшая школа, 2001.
4. Гусманова Ф.Р., Беркімбаева С.Б., Сақыпбекова М.Ж. Оңтайландыру әдістерінен жаттығулар мен есептер.
5. Карманов В.Г. Математическое программирование. – М: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1986.
6. Гусманова Ф.Р. Оңтайландыру әдістері.-Алматы КазНПУ,2007

Қосымша әдебиеттер:

1. Алексеев В.М. и др. Сборник задач по оптимизации. М.: 1974.
2. Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: 1974.

Интернет-көздері

1.http://www.aport.ru
2. http://www.googlt.kz
3. http://www.toroid.ru
4. http://www.kaznu.kz
5. http://www.kaznpu.kz

7 Бағалау критерийі

№	Жұмыс түрі	1-ші рейтинг	2-ші рейтинг	емтихан
1	Қатысуы	21	24	
2	СӨЖ	24	20	
3	Практикалық жұмыстар	21	24	
4	Дәрістер конспектісі	10	10	
5	Тест	24	22	
6	Емтихан			100
	Барлығы	100	100	((P1+P2)/2)*0,6 +e*0,4

8. Оқытушы талабы.

Сабаққа кешікпей келу;

Бөгде жұмыстармен айналыспау;

Ұялы телефонды өшіру;

Сабақ жібермеу, ауырып қалған жағдайда анықтама көрсетіп өтеу;
Сабаққа белсенді қатысу;

Дәріс тезистері

Тиімділік есебіне кіріспе. Лекция №1

Замана талабынан туған «Оңтайландыру әдістері» курсы нарықтық экономика, қолданбалы математика, химия, физика, экология сияқты салалардан жалпы ғылыми дайындықтағы мамандарды даярлаудың ажырамас бөлігі болып табылады. «Оңтайландыру әдістері» жалпы курсының университеттік оқу жоспарларына 20-ғасырдың 70-жылдарында енгізілуі өндірістің кең қанат жаюы, жер қойнауындағы байлықтардың шектеулі екендігін ескеріп, энергияны, материалдарды, жұмыс уақытын үнемді пайдалану керектігін сезінгендіктен және экономика, экология, өндірістік-технологиялық ғылымдарды тиімді басқару қажеттілігіне байланысты еді. Аталған мәселелердің экономикалық немесе басқа да мазмұндарына назар аударсақ, онда олардың барлығы функцияның немесе функционалдың қай бір кеңістіктегі максимумға немесе минимумға жеткізетін жиындарын табу есебін білдіреді. Мұндағы функция басқару сапасын, ал жиын зерттелінетін жүйедегі мүмкіндіктерді ескеріп ресурстарға қойылатын шектеулерді өрнектейді.

Өмірде болып жатқан құбылыстарды зерттеуде, есептеуде ең тиімді тәсілді іздеп табуға тура келеді. Жоғарғы білімді маман осы мәселелерді шешуде тиімді әдістерінен алған білімді жүзеге асырады. Егер тұтынатын тауар мен баға қатнасы сұраныс моделі ретінде қарастырылса, онда сұраныс болжамы үшін тауар ұсынылатын модель қажет, онда ұсынылған сұраныстың бағасы мен көлемі арасындағы байланыс қарастырылады. Бұл ұсыныс пен сұраныс арасындағы теңдікке жетуге мүмкіндік береді.

Тағы бір мысал қарастырайық. Өндіріс тиімділігін бағалауда рентабельдік моделін қарастыру жеткілікті. Еңбек өнімділігі және өнім бірлігінің өз құнының моделімен толықтырылуы мүмкін.

Егер макродеңгейлік зерттеулерден макроэкономикалық есептеулерге өтсек, өзара байланысқан теңдеулер жүйесін қолдануға қажеттілік өседі. Ұлттық экономикалық модельде келесі теңдеулер жүйесін енгізеді: тұтыну функциясы, жалақы инвеститциясы, пайда тепе-теңдігі. Бұл макроэкономикалық көрсеткіштердің экономика жағдайында жалпылама көрсеткіштері екендігін көреміз.

Тиімділік есептері шартсыз және шартты деп, ал шартты есептер сызықты және сызықты емес деп қарастырылады.

Сызықты программалау. Лекция №2-4
Негізгі анықтамалар мен теоремалар

Анықтама 1. Сызықты формада минимизациялау (максимизациялау) керек есепті

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i \to \min(\max)$$

мына шарттарда

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \leq b_j\,,\ \ j=\overline{1,m}\ ,$$

немесе

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i = b_j\,,\ \ j=\overline{(m+1),p}\,,$$

және

$$x_i > 0\,,\ i=\overline{1,n}\,,$$

болса, есеп сызықты программалау есебі деп аталады.

Анықтама 2.

$$\left.\begin{aligned} \bar{c}^{\mathrm{T}} \cdot \bar{x} &\to \min(\max) \\ A \cdot \bar{x} &\leq \bar{b}, \\ \bar{x} &\geq \bar{0}, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

матрица түріндегі есеп сызықты программалау есебінің симметриялық формасы деп аталады.

Анықтама 3.

$$\left.\begin{aligned} \bar{c}^{\mathrm{T}} \cdot \bar{x} &\to \min(\max) \\ A \cdot \bar{x} &= \bar{b}, \\ \bar{x} &\geq \bar{0}, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

түрде жазылған сызықты программалау есебі сызықтық программалаудың канондық түрі деп аталады.
Сызықтық программалаудың кезкелген есебін канондық түрге келтіуге болады.
Егер шектеулер жүйесі келесі формада берілсе

$$A \cdot \bar{x} \le \bar{b},$$
онда қосымша айнымалылар енгізе отырып, мына түрге келтіруге болады:
$$A \cdot \bar{x} + E \cdot \bar{y} = \bar{b}, \quad \bar{x} \ge 0, \quad \bar{y} \ge 0,$$
мұнда $\bar{y} = [x_{n+1}, \dots, x_{n+m}]^{\mathrm{T}}$.

Егер шектеулер жүйесі келесі формада берілсе
$$A \cdot \bar{x} \ge \bar{b},$$
онда
$$A \cdot \bar{x} - E \cdot \bar{y} = \bar{b}, \quad \bar{x} \ge 0, \quad \bar{y} \ge 0.$$

$A \cdot \bar{x} \le \bar{b}$ жағдайды қарастырайық. Бұл шектеулер жүйесін мына түрде жазуға болады:
$$\left.\begin{array}{l} a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,2} \cdot x_2 + \ldots + a_{1,n} \cdot x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{2,1} \cdot x_1 + a_{2,2} \cdot x_2 + \ldots + a_{2,n} \cdot x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m,1} \cdot x_1 + a_{m,2} \cdot x_2 + \ldots + a_{m,n} \cdot x_n + x_{n+m} = b_m \end{array}\right\}.$$

Келесі белгілеулерді енгізейік:
$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \ \bar{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \dots \\ a_{m,1} \end{bmatrix}, \dots, \ \bar{A}_n = \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \dots \\ a_{m,n} \end{bmatrix}, \ \bar{A}_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \ \bar{A}_{n+m} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Онда сызықтық программалау есебін мына түрде жазуға болады:
$$\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i \to \min(\max)$$
$$x_1 \cdot \bar{A}_1 + x_2 \cdot \bar{A}_2 + \ldots + x_n \cdot \bar{A}_n + x_{n+1} \cdot \bar{A}_{n+1} + \ldots + x_{n \cdot m} \cdot \bar{A}_{n+m} = A_0,$$
$$\bar{x} \ge \bar{0}.$$

$\bar{A}_i$ векторы шарттар векторы деп аталады, ал есептің өзі бастапқы есепке қатысты кеңейтілген сызықты программалау есебі деп аталады.

Анықтама 4. Сызықты программалау есебінің шарттарын қанағаттандыратын $\bar{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$ сандар қатары жоспар деп аталады. *Анықтама 5.* Сызықты программалау есебінің шешімі сызықты форманы минимизациялайтын(максимизациялайтын) жоспары деп аталады. Базистік шешім деген ұғымды енгізейік. Кеңейтілген есеп матрицасынан $A_p = \left[\bar{A}_1, \bar{A}_2, ..., \bar{A}_{n+m}\right]$ m сызықты тәуелсіз вектор-бағанын бөліп алып $B_{m\times m}$ деп белгілейміз, ал $D_{m\times n}$ қалған бағандарды белгілейміз. Онда . $A_p = [B, D]$ және сызықты программалаудың кеңейтілген есебін келесі түрде жазуға болады:

$$A_p \cdot \bar{x} = B \cdot \bar{x}_B + D \cdot \bar{x}_D = \bar{A}_0. \tag{3}$$

В матрицасының бағандары m өлшемді кеңістіктің базисін құрайды. Сондықтан $\bar{A}_0$ векторын және D матрицасының кезкелген бағанын И матрицасының бағандарының сызықты комбинациясы түрінде жазуға болады:

(3)-ті B^{-1} -ге көбейтіп

$$B^{-1} \cdot B \cdot \bar{x}_B + B^{-1} \cdot D \cdot \bar{x}_D = B^{-1} \cdot \bar{A}_0, \tag{4}$$

осы теңдеуден $\bar{x}_B$ табамыз:

$$\bar{x}_B = B^{-1} \cdot \bar{A}_0 - B^{-1} \cdot D \cdot \bar{x}_D. \tag{5}$$

$\bar{x}_D$ -ға әр түрлі мән бере отырып, $\bar{x}_B$-ның шешімдерін аламыз.

Егер $\bar{x}_D = \bar{0}$ болса, онда

$$\bar{x}_B = B^{-1} \cdot \bar{A}_0 . \tag{6}$$

(6) шешімді $m+n$ балгісізі бар m теңдеудің базистік шешімі деп аталады.

Симплекс әдісі

Симплекс әдісі немесе жоспарды қадамдап жақсарту. Симплекс әдісі жалпы сызықты программалаудың есебін шешуге арналған: Бізге келесі есеп берілсін:

$$Q(\bar{x}) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + ... + c_n \cdot x_n \to \min, \tag{1}$$

шектеулер жүйесінде:

$$\begin{cases} a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,2} \cdot x_2 + ... + a_{1,n} \cdot x_n = b_1 \\ .... \\ a_{m,1} \cdot x_1 + a_{m,2} \cdot x_2 + ... + a_{m,n} \cdot x_n = b_m \end{cases} \tag{2}$$

Бұл есепті $x_1, ..., x_m$ айнымалыларға қатысты шешеміз:

$$\begin{cases} x_1 = a'_{1,m+1} \cdot x_{m+1} + \ldots + a'_{1,n} \cdot x_n + b'_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = a'_{m,m+1} \cdot x_{m+1} + \ldots + a'_{m,n} \cdot x_n + b'_m \end{cases} \quad (3)$$

$x_1,\ldots,x_m$ айнымалыларға сәйкес келетін шарттар векторы базис құрайды. $x_1,\ldots,x_m$ айнымалылыарын базистік айнымалылар деп атаймыз. Қалған айнымалылар базистік емес айнымалылар.

Мақсат функциясын базистік емес айнымалылар арқылы өрнектейміз:

$$Q(\bar{x}) = c'_{m+1} \cdot x_{m+1} + c'_{m+2} \cdot x_{m+2} \ldots + c'_n \cdot x_n + c'_0 \to \min.$$

Базистік емес айнымалыларды нолге теңестірсек:

$$x_{m+1} = 0,\ x_{m+2} = 0,\ \ldots;\ x_n = 0,$$

Сәйкес базистік айнымалылар:

$$x_1 = b'_1;\ x_2 = b'_2;\ \ldots;\ x_m = b'_m$$

болады.

$b'_i \geq 0$ болғанда $\bar{x}$ векторы шешімдер көпжағының бұрыштық нүктесін береді. Енді аз мәнді мақсат функциямен келесі бұрыштық нүктеге өту керек. Ол үшін базистік және базистік емес айнымалыларды алып, мақсат функциясының мәні азайтылатындай етіп орындарын алмастырамыз. Осы қадамдарда жасап, есептің шешімін табамыз.

Симплекс әдіс алгоритмі

Симплекс әдісі екі негізгі этаптан тұрады:

1) таяныш жоспар құру;

2) тиімді жоспар құру.

Таяныш жоспар құру**.** Төмендегі есепті шешу керек:

$$Q(\bar{x}) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_n \cdot x_n \to \min(\max)$$

$$\begin{cases} a_{1,1} \cdot x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1,n} \cdot x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m,1} \cdot x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{m,n} \cdot x_n = b_m \\ a_{m+1,1} \cdot x_1 + \ldots + a_{m+1,n} \cdot x_n \leq b_{m+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m+p,1} \cdot x_1 + \ldots\ldots\ldots + a_{m+p,n} \cdot x_n \leq b_{m+p} \end{cases}.$$

Теңсіздіктен теңдікке өту үшін қосымша айнымалылар енгіземіз. Онде шектеулер жүйесі келесі түрде болады:

$$
\begin{cases}
0 = b_1 - a_{1,1} \cdot x_1 - \ldots\ldots\ldots\ldots - a_{1,n} \cdot x_n \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 = b_m - a_{m,1} \cdot x_1 - \ldots\ldots\ldots - a_{m,n} \cdot x_n \\
x_{n+1} = b_{m+1} - a_{m+1,1} \cdot x_1 - \ldots - a_{m+1,n} \cdot x_n \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{n+p} = b_{m+p} - a_{m+p,1} \cdot x_1 - \ldots - a_{m+p,n} \cdot x_n
\end{cases},
$$

мұнда $x_{n+i} \geq 0 \quad \forall i = \overline{1, p}$.

Базистік айнымалылыр ретінде қосымша енгізілген айнымалыларда аламыз. Онда симплекс кестесі мына түрде болады:

	$-x_1$	$-x_2$	....	$-x_S$	....	$-x_n$	1
0	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	....	$a_{1,S}$	....	$a_{1,n}$	b_1
....	....	....	....	....	....	....	....
0	$a_{m,1}$	$a_{m,2}$	....	$a_{m,S}$	....	$a_{m,n}$	b_m
x_{m+1}	$a_{m+1,}$	$a_{m+1,}$	....	$a_{m+1,}$	....	$a_{m+1,}$	b_{m+1}
....	....	....	....	....	....	....	...
x_{m+p}	a_{m+p}	a_{m+p}	....	a_{m+p}	....	a_{m+p}	b_{m+p}
$Q(\bar{x})$	$-c_1$	$-c_2$	....	$-c_S$	....	$-c_n$	0

1. Қосымша айнымалылар енгізіп, кеңейтілген жүйе аламыз.

2. Бастапқы кеңейтілген жүйені бірінші симплекс кестеге енгіземіз.

3. Есептің максимумын(минимумын) іздегенде тиімділік критерийінің орындалуын тексереміз. Егер максимумын анықтау керек болса, соңғы жолда теріс коэффициент жоқ болса, шешім тиімді. Егер минимумын анықтау керек болса, соңғы жолда оң коэффициент жоқ болса, шешім тиімді.

4. Егер тиімділік критерийі орындалмаса, онда соңғы жолда модулі бойынша максимумды іздеу керек болса, модулі бойынша ең үлкен теріс үлкен коэффициент шешуші бағанды анықтайды.

5. $\dfrac{b_r}{a_{rl}} = \min\limits_i \left\{ \dfrac{b_i}{a_{il}} \middle| \dfrac{b_i}{a_{il}} > 0 \right\}$ бойынша шешуші жолды табамыз.

Шешуші жол мен шешуші баған қиылысындағы элемент шешуші элемент деп аталады.

6. Төмендегі ережелерді пайдаланып, келесі кестеге көшеміз:

А) кестенің сол жақ бағанына жаңа базисті жазамыз;

Ә) негізгі айнымалыларға сәйкес келетін бағандарға нольдер мен бірді жазамыз;

Б) шешуші элемент тұрған жолды сол шешуші элементке бөліп жазамыз;

В) қалған элементтерді тіктөртбұрын әдісімен толтырамыз.

Ары қарай алгоритмнің үшінші қадамына көшеміз.

Сызықты программалау есебінің өзара қосжақты есептері. Лекция №5

Бір уақтта (1) және (2) есептерді қарастырамыз.

$$\left.\begin{array}{l} Q(\bar{x}) = \bar{p}^{\mathrm{T}} \cdot \bar{x} \to \max \\ A \cdot \bar{x} \le \bar{b}, \\ \bar{x} \ge 0 \end{array}\right\} \quad (1) \qquad \left.\begin{array}{l} W(\bar{u}) = \bar{b}^{\mathrm{T}} \cdot \bar{u} \to \min \\ A^{\mathrm{T}} \cdot \bar{x} \ge \bar{p}, \\ \bar{u} \ge 0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

Қарастырып отырған (2) есеп (1) есептің қосалқы есебі деп аталады.

Тура есеп:	Шектеулер:
$Q(\bar{x}) = \bar{p}^{T} \cdot \bar{x} \to \max$	$\bar{y} = -A \cdot \bar{x} + \bar{b} \ge \bar{0}$
$A \cdot \bar{x} \le \bar{b}$	$\bar{x} \ge \bar{0}$
$\bar{x} \ge \bar{0}$	
Қосалқы есеп:	
$W(\bar{u}) = \bar{b}^{T} \cdot \bar{u} \to \min$	$\bar{v} = A^{T} \cdot \bar{u} - \bar{p} \ge 0$
$A^{T} \cdot \bar{u} \ge \bar{p}$	$\bar{u} \ge \bar{0}$
$\bar{u} \ge \bar{0}$	

Тура есеп үшін Симплекс кестесі:

	$-x_1$	...	$-x_S$	...	$-x_n$	1

$y_1 =$	a_{11}	$\ldots$	a_{1S}	$\ldots$	a_{1n}	b_1
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$y_r =$	a_{r1}	$\ldots$	a_{rS}	$\ldots$	a_{rn}	b_r
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$y_m =$	a_{m1}	$\ldots$	a_{mS}	$\ldots$	a_{mn}	b_m
$Q(\bar{x}) =$	$-p_1$	$\ldots$	$-p_S$	$\ldots$	$-p_n$	0

a_{rS} - шешуші элемент.

	$-x_1$	$\ldots$	$-y_r$	$\ldots$	$-x_n$	1
$y_1 =$	b_{11}	$\ldots$	$-a_{1S}$	$\ldots$	b_{1n}	$b_{1,n+1}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$x_S =$	a_{r1}	$\ldots$	1	$\ldots$	a_{rn}	b_r
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$y_m =$	b_{m1}	$\ldots$	$-a_{mS}$	$\ldots$	b_{mn}	$b_{m,n+1}$
$Q(\bar{x}) =$	b_{m+1}	$\ldots$	p_S	$\ldots$	$b_{m+1,n}$	$b_{m+1,n+1}$

Мұнда $b_{ij} = a_{ij} \cdot a_{rS} - a_{rj} \cdot a_{iS}$

Қосалық есеп үшін Симплекс кесетесі:

	$v_1 =$	$\ldots$	$v_s =$	$\ldots$	$v_n =$	$W =$
u_1	a_{11}	$\ldots$	a_{1S}	$\ldots$	a_{1n}	b_1
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
u_r	a_{r1}	$\ldots$	a_{rS}	$\ldots$	a_{rn}	b_r
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

u_m	a_{m1}	$\dots$	a_{mS}	$\dots$	a_{mn}	b_m
1	$-p_1$	$\dots$	$-p_S$	$\dots$	$-p_n$	0

a_{rS} - бағыттаушы элемент.

	$v_1 =$	$\dots$	$u_r =$	$\dots$	$v_n =$	$W =$
u_1	b_{11}	$\dots$	$-a_{1.}$	$\dots$	b_{1n}	$b_{1,n+1}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
v_s	a_{r1}	$\dots$	1	$\dots$	a_{rn}	b_r
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
u_m	b_{m1}	$\dots$	$-a_{m.}$	$\dots$	b_{mn}	$b_{m,n+1}$
1	b_{m+1}	$\dots$	p_S	$\dots$	$b_{m+1,r}$	$b_{m+1,n+}$

Мұнда $b_{ij} = a_{ij} \cdot a_{rS} - a_{rj} \cdot a_{iS}$ кесте элементтерін a_{rS}-ке бөлу керек. Сөйтіп келесі кестені аламыз:

	$v_1 = -x_1$	$\dots$	$v_s = -x_S$	$\dots$	$v_n = -x_n$	$W = 1$
u_1 $y_1 =$	a_{11}	$\dots$	a_{1S}	$\dots$	a_{1n}	b_1
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
u_r $y_r =$	a_{r1}	$\dots$	a_{rS}	$\dots$	a_{rn}	b_r
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
u_m $y_m =$	a_{m1}	$\dots$	a_{mS}	$\dots$	a_{mn}	b_m
1 $Q(\bar{x}) =$	$-p_1$	$\dots$	$-p_S$	$\dots$	$-p_n$	0

Есепті шешіп $\max Q = \min W$ екеніне көз жеткізуге болады.

Тасымалдау есебі. лекция №6

Транспорт есебінің қойлымы

Мына шектеуді қанағаттандыратын

$$\left.\begin{array}{ll}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, & j=\overline{1,n},\\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, & i=\overline{1,m},\\ x_{ij}\ge 0,\quad i=\overline{1,m}, & j=\overline{1,n},\end{array}\right\}$$, транспорт шығынын

$$Q(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot x_{ij}\to \min$$

минимумға әкелетін жүк көлемін табу керек мұндағы

c_{ij} - i ден *jға тасымалданатын жүк құны*; x_{ij} – i ден *jға тасымалданатын жүк көлемі* (X – бұл $m\times n$); b_j - *jға керекті жүк мөлшері*; a_i - *iда бар жүр қоры.*

Модель жабық деп саналады, яғни мына теңдік орындалады

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i .$$

Егер модель ашық болса $\left(\sum_{j=1}^{n} b_j \ne \sum_{i=1}^{m} a_i\right)$, онда оны әр уақытта жалған өндіруші не жалған тұқтынушы енгізу арқылы жабыққа алып келуге болды.

Егер $\sum_{j=1}^{n} b_j < \sum_{i=1}^{m} a_i$, то $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, онда $\sum_{j=1}^{n+1} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i$, $c_{i,n+1} = 0 \quad \forall i$.

- Егер $\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i$, онда $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, $\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m+1} a_i$ и $c_{m+1,j} = 0 \quad \forall j$.

Транспорт есебі сызықтық программалау есебіне жатады. Оны да симплекс әдісімен шешуге болады. Әйтседе, бұл есептің өзіндік әдістері бар.

Минималды элементтер әдісі

Транспорт кестесінде $\min\{c_{ij}\}$ ізделініп, ең алдымен табылғаны мәнге сай тор толтырылады: $x_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$.Егер $a_i < b_j$ болса, онда жолдағы калдық сызылады.Ал $a_i > b_j$ болса, онда баған түзетіледі.Калған торладың ең кіші элемент ізделіп,табылған тор толтырылады және т.с..

b / a	30	80	20	30	90
120	2 30	4 80	2	3	8 10
30	3	5	6	6	2 30
40	6	8	7	4	5 40
60	3	4	2 20	1 30	4 10

Жүк тасымалдау құны:

$$Q = 30\times 2 + 4\times 80 + 8\times 10 + 2\times 30 + 5\times 40 + 2\times 20 + 1\times 30 + 4\times 10 = 830 .$$

Бұл жоспар жақсы, бірақ ол оңтайлы ма оны айту ертерек.

Анықтама 1. Транспорт кестесіндегі кез келген тасымалдау жиынтық құрайды.

Анықтама 2. Кез келген не бір жолда не бір бағанда орналасқан торлар жұбы тізбек құрайды.

Анықтама 3. Элементтері не бір жолда не бір бағанада тұратын тізбекті цикл дейді..

Потенциалдар әдісі

Бұл әдіс транспорт есебінің оптималды жоспарын табуға мүмкіндік береді.Әдіс төмендегі теоремаға негізделген.

Теорема. Кандай да бір $X=[x_{ij}]_{m\times n}$ транспорт есебінің жоспары оптималды болу үшін қажетті және жеткілікті оған мына шартты:

$$v_j - u_i \le c_{ij}, \quad i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}, \qquad (1)$$

$$v_j - u_i = c_{ij}, \quad \forall x_{ij} > 0 . \qquad (2)$$

қанағаттандыратын $m+n$ санды $u_1, u_2, ..., u_m; v_1, v_2, ..., v_n$, жүйенің сайкес

u_i мен v_j жіберу мен қабылдау пункттерінің потенциалдары деп аталады.

Потенциалдар әдісі
Алгоритмі

1. *Алдымен қандай да бір жүк жоспары жасалады X (методом северо-западного угла или минимального элемента).*
2. *Алынған жоспарға* $v_j - u_i = c_{ij}$, $\forall x_{ij} > 0$ шартты ескере отырып $m+n$ санды $u_1, u_2, ..., u_m; v_1, v_2, ..., v_n$, жүйені құрады.
3. Алынған жүйе үшін мына шарт тексеріледі $v_j - u_i \le c_{ij}$, $\forall x_{ij} = 0$.

Егер шарт орындалса, онда жоспар оптималды. Ал орындалмаса келесі қадамға барамыз.

4. $Q(X) \ge Q(X')$.болатындар жоспарға көшеміз
5. X' үшін жүйе құрылады u_i', v_j', $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, болатындай $v_j' - u_j' = c_{ij}$, $\forall x_{ij} > 0$.

6.Бұл жуйе нің потенциалдығы тексеріледі.Потенциалды болмаса, 4 пунктке кайтып барамыз.

II. Сызықты емес оңтайландыру Лекция №7
Функцияның экстремумы

$\Omega \subset R^n$ жиыны және Ω жиынында анықталған $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ функциясы берілген.

Кезкелген $X \subset U_\varepsilon(Y)$ үшін

$$f(Y) \le f(X) \qquad (2.1)$$

Теңсіздігі орындалатындай $U_\varepsilon(Y) = \{X: \| X - Y \| \le \varepsilon\}$ *шар бар болса, онда* $Y \in \Omega$ нүктесі $f(x)$ функциясының төңіректік минимум нүктесі деп аталады.

Егер $f(Y) < \_(X)$ болса, онда Y қатаң төңіректік минимум нүктесі деп атадалы.

Егер $f(Y) \le f(X)$ Ω жиынында кезкелген X үшін орындалса, онда $Y \in \Omega$ нүктесі $f(x)$ функциясының ауқымды минимум нүктесі деп аталады.

Кезкелген $X \subset U_\varepsilon(Y)$ үшін

$$f(Y) \le f(X)$$

Теңсізідігі орындалатындай $U_\varepsilon(Y) = \{X: \| X - Y \| \le \varepsilon\}$ шар болса, онда $Y \in \Omega$ $f(x)$ функциясының төңіректік максмум нүктесі деп аталады.

Егер $f(Y) > f(X)$ қатаң орындалса, онда Y қатаң төңіректік максимум нүктесі деп атадалы.
Егер $f(Y) > f(X)$ Ω жиынында кезкелген X үшін орындалса, онда $Y \in \Omega$ нүктесі $f(x)$ функциясының ауқымды максимум нүктесі деп аталады.
$f(x)$ функциясының төңіректік минимум және максимум нүктелері осы функцияның экстремум нүктелері деп аталады.

III. Бір айнымалы функцияны шартсыз минимизациялау Лекция №8-9

Унимодалды функциялар

Егер

а) функцияның x^* - төңіректік минимум нүктесі $[a, b]$ кесіндісінде жатса;

ә) минимум нүктесінің бір жағынан алынған кесіндінің кез келген x_1 және x_2 екі нүктесі үшін минимум нүктесіне жақынырақ x_1 нүктесіне функияның аз мәні сәйкес келсе, яғни, $x^* < x_1 < x_2$ теңсіздігі үшін де, $x_2 < x_1 < x^*$ теңсіздігі үшін де $f(x_1) < f(x_2)$ теңсіздігі ақиқат болса, онда $y = f(x)$ үзіліссіз функциясы $[a, b]$ кесіндісінде *унимодалды* деп аталады.

$[a, b]$ кесіндісінде $f(x)$ функциясының унимодалдылығының жеткілікті шарты келесі теоремада берілді (теореманы дәлелдеусіз қабылдаймыз).

Теорема 3.1 Егер $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде екі рет дифференциалданса, және осы кесіндінің кез келген нүктесінде $f''(x) > 0$ болса, онда $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде унимодалды.

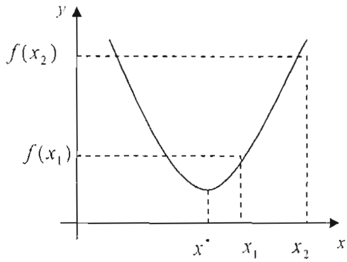
Функцияның унимодалдылық аралығын тарылту

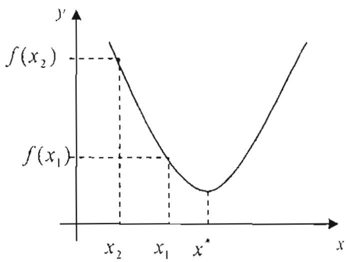
$f(x)$ сызықтық функциясының x^* төңіректік минимум нүктесін анықтау үшін сандық әдістерді қолдану –

а) функцияның унимодалдылық аралығын анықтау, яғни, төңіректік минимумның бір нүктесі жататын аралықты табуды;

ә) таңдалынған аралықтағы берілген дәлдікпен x^* мәнін есептеуді қарастырады.

Үзіліссіз $f(x)$ функциясы үшін қандай да бір $[a, b]$ аралығында оның графигін тұрғызу керек, және ол осы кесіндіде 1-суретте көрсетілген түрді қабылдаса, онда $[a, b]$ - функцияның унимодалдылық аралығы. $[a, b]$ аралығы мүмкіндігінше кіші етіп алынады.





1- сурет.

x^* нүктесі бар $[a, b]$ аралығын берілген ε $(b - a \leq \varepsilon)$ дәлдіктен аспайтын өлшемге дейін кішірейте отырып минимум нүктесін есептеу барысында дәлдікке жетеміз.

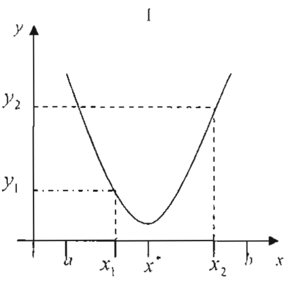
Функцияның унимодалдылық аралығын тарылтатын тәсілдердің бірін қарастырайық.

$f(x)$ функциясы $[a, b]$ аралықта унимодалды болсын. $[a, b]$ аралығында жататын, $x_1 < x_2$ шарты орындалатындай кез келген x_1 және x_2 нүктелерін алайық. Келесі мүмкін болатын үш жағдайда да x^* төңіректік минимум нүктесі бар, бастапқы $[a_1, b_1]$ аралықта жататын кіші өлшемді $[a, b]$ аралығын көрсетуге болады (2-сурет):

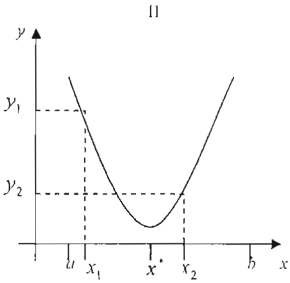
I. егер $y_1 = f(x_1) < y_2 = f(x_2)$ теңсіздігі орындалса, онда $a_1 = a$, $b_1 = x_2$ және кішірейген $[a_1, b_1]$ унимодалдылық аралығын аламыз;

II. егер $y_1 = f(x_1) > y_2 = f(x_2)$ теңсіздігі орындалса, онда $a_1 = x_1$, $b_1 = b$ және кішірейген $[a_1, b_1]$ унимодалдылық аралығын аламыз;

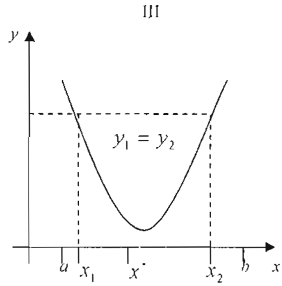
III. егер $y_1 = f(x_1) = y_2 = f(x_2)$ теңдігі орындалса, онда $a_1 = x_1$, $b_1 = x_2$ және кішірейген $[a_1, b_1]$ унимодалдылық аралығын аламыз.



$(a_1 = a \le x^* \le x_2 = b_1)$



$(a_1 = x_1 \le x^* \le b = b_1)$



$(a_1 = x_1 \le x^* \le x_2 = b_1)$

2-сурет

Жекелеп қарап шығу әдісі

Жекелеп қарап шығу әдісі минимизациялау есебінің тура әдістерінің қарапайымы болып табылады. $f(x) \in Q[a, b]$ функциясы берілсін, және $\varepsilon > 0$ абсолют қателікпен $[a, b]$ кесіндісінде $f(x)$ функциясының қандай да бір x^* минимум нүктесін табу керек болсын. $[a, b]$ кесіндісін $x_i = a + i \cdot h$ нүктелерімен бірдей n бөлікке бөлеміз, мұндағы $h = \dfrac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, 2, ..., n$, $n \ge \dfrac{b-a}{\varepsilon}$. Осы нүктелерде $f(x)$ функциясының мәндерін есептей отырып

$$f(x_m) = \min_{0 \le i \le n} f(x)$$

Қатынасы орындалатындай салыстыру арқылы x_m нүктесін табамыз. Әрі қарай $x^* \approx x_m$, $f^* \approx f(x_m)$ деп ұсынамыз. Бұл кезде x^* нүктесін анықтаудың ең көп ε_n қателігі: $\varepsilon_n = \dfrac{b-a}{n}$.

Дихотомия әдісі

Бір айнымалы функцияны минимизациялау есебінде x^* төңіректік минимум нүктесі жататын, $f(x)$ сызықтық функция унимодалды болатын $[a, b]$ аралығы анықталсын.

Унимодалдылық аралықты тарылту үшін $[a, b]$ кесіндісінің ортасына симметриялы орналасқан x_1 және x_2 нүктелерін пайдаланамыз:

$$x_{1,2} = \frac{a+b}{2} \pm k\frac{a-b}{2}.$$

k саны 1 санынан едәуір кіші деп есептейік. Сонда x_1, x_2 нүктелері $[a, b]$ кесіндісінде жатады және алдыңғы тақырыпта қарастырғандай тарылтылған $[a_1,b_1]$ аралығын аламыз. Мүмкін болатын келесі үш жағдайдың әр қайсысында тарылтылған кесіндінің ұзындығын бағалаймыз:

1. $y_1 < y_2$ $a_1 = a$, $b_1 = x_2 = \dfrac{a+b}{2} - k\dfrac{a-b}{2}$,

$$b_1 - a_1 = \frac{a+b}{2} - k\frac{a-b}{2} - a = \frac{-a+b}{2} - k\frac{a-b}{2} = -\frac{a-b}{2} - k\frac{a-b}{2} = -(a-b)\left(\frac{1}{2} + \frac{k}{2}\right) = \frac{1+k}{2}(b-a)$$

$$b_1 - a_1 = \frac{1+k}{2}(b-a);$$

2. $y_1 > y_2$, $a_1 = x_1 = \dfrac{a+b}{2} + k\dfrac{a-b}{2}$, $b_1 = b$ $b_1 - a_1 = \dfrac{1+k}{2}(b-a)$;

3. $y_1 = y_2$, $a_1 = x_1 = \dfrac{a+b}{2} + k\dfrac{a-b}{2}$, $b_1 = x_2 = \dfrac{a+b}{2} - k\dfrac{a-b}{2}$, $b_1 - a_1 = k(b-a)$.

Осылайша түрлендірудің бірінші қадамынан кейін ұзындығы кішірейген $[a_1,b_1]$ унимодалдылық аралығы табылды.

Әдістің атынан көріп отырғанымыздай егер k шамасы өте аз болса, онда 1 және 2 жағдайларда унимодалдылық $b-a$ кесіндісінің ұзындығы екі есе дерлік кішірейеді.

Енді жаңа кішірейген $[a_1,b_1]$ аралығында осы кесіндінің ортасына симметриялы $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$ нүктелерін таңдаймыз:

$$x_{1,2}^{(1)} = \frac{a_1+b_1}{2} \pm k\frac{a_1-b_1}{2}.$$

Кішірейген $[a_1,b_1]$ аралығын тапқандағыдай есептеулерді жүргізе отырып ұзындығы

$$b_2 - a_2 = \frac{1+k}{2}(b_1 - a_1) = \frac{(1+k)^2}{4}(b-a)$$

шамасынан артық болмайтын $[a_2,b_2]$ аралығын аламыз, және т.т.

Нәтижесінде, $f(x)$ функциясының x^* төңіректік минимум нүктесі әрқайсысында жататын және $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, тізбектерінің ортақ шегі болатын, бірінің ішінде бірі орналасқан $[a,b]$, $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$, ..., $[a_n,b_n]$, ... кесінділер тізбегін аламыз.

Осыдан

$$x^* \approx a_n \approx b_n$$

жуық теңдігін аламыз, оның n-ші қадамдағы дәлдігі

$$0 \le x^* - a_n \le b_n - a_n \le \frac{(1+k)^n}{2^n}(b-a) < \varepsilon \qquad (3.1)$$

теңсіздігімен бағаланады.

(3.1) теңсіздіктен берілген дәлдікке жету мақсатында n қадам санын анықтауға болады:

$$\frac{(1+k)^n}{2^n}(b-a) < \varepsilon \Rightarrow \frac{(1+k)^n}{2^n} < \frac{\varepsilon}{b-a} \Rightarrow \left(\frac{1+k}{2}\right)^n < \frac{\varepsilon}{b-a} \Rightarrow \ln\left(\frac{1+k}{2}\right)^n < \ln\frac{\varepsilon}{b-a} \Rightarrow$$

$$n\ln\left(\frac{1+k}{2}\right) < \ln\frac{\varepsilon}{b-a} \Rightarrow n > \frac{\ln\frac{\varepsilon}{b-a}}{\ln\left(\frac{1+k}{2}\right)}.$$

$$n > \frac{\ln\frac{\varepsilon}{b-a}}{\ln\left(\frac{1+k}{2}\right)}. \qquad (3.2)$$

Алтын қима әдісі

«Алтын қима» терминін Леонардо да Винчи енгізді. Егер $b-a$ кесіндісінің толық ұзындығының $b-x_1$ үлкен бөлігінің ұзындығына қатынасы үлкен бөліктің ұзындығының x_1-a кіші бөлігінің ұзындығына қатынасына тең болса, онда x_1 нүктесі $[a,b]$ кесіндісінің алтын қимасы болып табылады (3-сурет), яғни, егер $\frac{b-a}{b-x_1} = \frac{b-x_1}{x_1-a}$ қатынасы ақиқат болса, онда x_1 - алтын қима. Осылайша, $[a,b]$ кесіндісінің ортасына қатысты x_1 нүктесіне симметриялы x_2 нүктесі осы кесіндінің екінші алтын қимасы болып табылады. x_1 және x_2 нүктелері $[a,b]$ кесіндісінің ортасына қатысты симметриялы орналасқандықтан,

$$x_{1,2} = \frac{a+b}{2} \pm k\frac{a-b}{2}. \qquad (3.3)$$

$$b - x_1 = b - \frac{a+b}{2} - k\frac{a-b}{2} = \frac{b-a}{2} + k\frac{b-a}{2} = (1+k)\frac{b-a}{2},$$

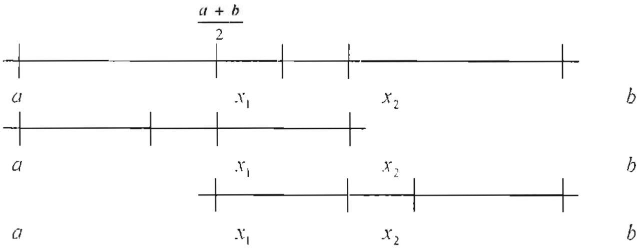
$$x_1 - a = \frac{a+b}{2} + k\frac{a-b}{2} - a = \frac{b-a}{2} - k\frac{b-a}{2} = (1-k)\frac{b-a}{2},$$

алтын қима анықтамасын пайдалана отырып $k>0$ мәнін есептейміз:

$$\frac{b-a}{b-x_1}=\frac{b-x_1}{x_1-a} \Rightarrow \frac{b-a}{(1+k)\frac{b-a}{2}}=\frac{(1+k)\frac{b-a}{2}}{(1-k)\frac{b-a}{2}} \Rightarrow \frac{2}{1+k}=\frac{1+k}{1-k} \Rightarrow k^2+4k-1=0 \Rightarrow$$

$$k_1=-2+\sqrt{5}, \ k_2=-2-\sqrt{5}.$$

$k>0$ екенін ескеріп $k=-2+\sqrt{5}$.



3- сурет

x_1 - $[a,b]$ және $[a,x_2]$ кесінділерінің алтын қимасы,

x_2 - $[a,b]$ және $[x_1,b]$ кесінділерінің алтын қимасы.

Алтын қиманың қасиетіне тоқталайық:

$[a,b]$ кесіндісінің x_1 және x_2 екі алтын қимасы болсын, сонда x_1 бірмезгілде $[a,x_2]$ кесіндісінің, ал x_2 - $[x_1,b]$ кесіндісінің алтын қимасы болып табылады (3-сурет).

Унимодалды $f(x)$ функциясының x^* төңіректік миимум нүктесіне тарылатын бірінің ішіне бірі тізбектей орналасқан $[a_i,b_i]$, ($i=\overline{1,n}$) табудың алгоритмін қарастырамыз.

1. (3.3) формула бойынша $k=-2+\sqrt{5}$ болғанда бастапқы $[a,b]$ кесіндісінде x_1 және x_2 нүктелерін, содан кейін $\Delta_1 x=x_2-x_1$ айырымын табамыз.

2. $y_1=f(x_1)$ және $y_2=f(x_2)$ функция мәндерін есептейміз.

3. Функцияның унимодалдылық аралығын тарылту сұлбасына сәйкес $[a_1,b_1]$ тарылған кесіндіні құрамыз.

4. келесі қадамға дайындала отырып және алтын қима қасиетін пайдалана отырып, $[a,b]$ кесіндісінде $x_1^{(1)}$ және $x_2^{(1)}$ - екі алтын қиманы табамыз. Бұл жерде үш жағдай болуы мүмкін:

1. $y_1 < y_2$, $a_1 = a$, $b_1 = x_2$, $x_2^{(1)} = x_1$, $x_1^{(1)} = a_1 + \Delta_1 x$, $y_2^{(1)} = y_1$.

2. $y_1 > y_2$, $a_1 = x_1$, $b_1 = b$, $x_1^{(1)} = x_2$, $x_2^{(1)} = b_1 - \Delta_1 x$, $y_1^{(1)} = y_2$.

3. $y_1 = y_2$, $a_1 = x_1$, $b_1 = x_2$, $x_{1,2}^{(1)} = \dfrac{a_1 + b_1}{2} \pm k\dfrac{a_1 - b_1}{2}$.

Енді қарастырылған сұлба бойынша, 1 және 2 жағдайлардағы $y_2^{(i)}$ немесе $y_1^{(i)}$ $(i = 1, 2, ..., n)$мақсат функцияларының мәндері алдыңғы қадамда есептелгенін ескере отырып $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$ және т.б. кесінділерді табамыз. Жуық $x^* \approx a_n \approx b_n$ теңдігінің n-ші қадамдағы есептеу дәлдігін (2.11) теңсіздіктен алынған

$$0 \le x^* - a_n \le \frac{b-a}{\tau^n} < \varepsilon \qquad (3.4)$$

теңсіздігімен бағалауға болады, мұндағы $\tau = \dfrac{2}{1+k} = \dfrac{1}{\sqrt{5}-2} \approx 1,618$.

IV. Көп айнымалы функцияны шартсыз минимизациялау.Лекция №10-11

Дөңес жиындар және дөңес функциялар

Егер кез келген $X_1 \in D$ және $X_2 \in D$ нүктелерімен бірге осы нүктелерді қосатын кесінді $[X_1 X_2]$ толығымен D жиынында жатса, онда $D \subseteq R^n$ *жиыны дөңес* деп аталады. Осындай жиынның әрбір $X \in [X_1 X_2]$ нүктесі λ, $0 \le \lambda \le 1$ параметрі арқылы $X = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2$ түрінде өрнектелуі мүмкін.

Егер $\Omega \subseteq R^n$ дөңес жиынында кез келген екі беттеспейтін $X_1 \in \Omega$ және $X_2 \in \Omega$ нүктелері үшін, және кез келген λ, $0 \le \lambda \le 1$ үшін

$$f(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \le \lambda f(X_1) + (1-\lambda)f(X_2) \qquad (4.1)$$

теңсіздігі орындалса, онда $f(X)$ функциясы *дөңес* (төмен дөңес, жоғары ойыс) деп аталады.

Егер (4.1) теңсіздігі кез келген λ, $0 \le \lambda \le 1$ үшін қатаң орындалса

$$f(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) < \lambda f(X_1) + (1-\lambda)f(X_2),$$

онда $f(X)$ функциясы *қатаң дөңес* деп аталады.

Егер $\Omega \subseteq R^n$ дөңес жиында кез келген екі беттеспейтін $X_1 \in \Omega$ және $X_2 \in \Omega$ нүктелері үшін, және кез келген λ, $0 \le \lambda \le 1$ үшін

$$f(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \ge \lambda f(X_1) + (1-\lambda)f(X_2)$$

теңсіздігі орындалса, онда $f(X)$ функциясы *ойыс* (төмен ойыс, жоғары дөңес) деп аталады.

Егер $f(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \le \lambda f(X_1) + (1-\lambda)f(X_2)$ теңсіздігі кез келген λ, $0 \le \lambda \le 1$ үшін қатаң орындалса

$$f(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) > \lambda f(X_1) + (1-\lambda)f(X_2),$$

онда $f(X)$ функциясы *қатаң ойыс* деп аталады.

Егер $f(X)$ функциясы дөңес болса, онда $F(X)=-f(X)$ дөңес болады.

Дөңес (ойыс) функциялардың арнайы класы $f(X)=CX^T+XAX^T$ түріндегі форманы құрайды, мұндағы C - тұрақты вектор; A - симметриялы матрица; X^T - X векторына транспонирленген вектор $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Егер A - оң анықталған матрица болса, онда $f(X)$ функциясы *қатаң дөңес*, егер A - теріс анықталған матрица болса, онда $f(X)$ функциясы *қатаң ойыс* болып табылады.

Кез келген өлшемді дөңес функция үзіліссіз болып табылады.

Лемма 4.1. Егер $\Omega \subseteq R^n$ дөңес жиынында $f_1(X)$, $f_2(X)$, ..., $f_m(X)$ функциялары дөңес (ойыс) болса, онда $\alpha_j \geq 0$ теріс емес коэффициенттермен олардың $f(X)=\sum_j \alpha_j f_j(X)$ сызықтық комбинациясы Ω жиынында дөңес (ойыс) функция болады.

Градиенттік түсу әдісі

$f(x)$ функциясы - барлық R^n- евклид кеңістігінде дөңес дифференциалданатын функция, және оның x^* - минимум нүктесін табу керек болсын. $x^{(0)}$ - кез келген бастапқы жуықтауды таңдап

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\alpha_k f'\left(x^{(k)}\right), \; k=0,1,\dots \tag{4.2}$$

тізбегін құрамыз, мұндағы α_k шамасы -

$$f\left(x^{(k+1)}\right)<f\left(x^{(k)}\right), \; k=0,1,\dots \tag{4.3}$$

шарты орындалатындай жеткілікті түрде кіші мән, көбінесе $\alpha_0=1$, таңдалынады.

Есептің аяқталу шарты ретінде негізінен $f'\left(x^{(k)}\right)$ градиентінің нөлге жақындалуы пайдаланылады, яғни,

$$\left|\frac{\partial f\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_i}\right| \leq \varepsilon, \; i=1,2,\dots,n,$$

немесе

$$\left\|f'\left(x^{(k)}\right)\right\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_i}\right]^2} \leq \varepsilon \tag{4.4}$$

осыдан кейін $x^* \approx x^{(k)}$, $f^* \approx f\left(x^{(k)}\right)$ деп ұсынылады, мұндағы ε - берілген жеткілікті түрде аз сан.

Егер қандай да бір k мәнінде (4.3) шарт орындалмаса, онда (4.3) теңсіздік орындалғанға дейін (4.2) қатынастағы α_k қадамын берілген сан мөлшерінде еселеп кішірейтіледі (бөлшектенеді) және есептеу жалғастырылады.

Оңтайландырудың көптеген есептерінде квадраттық функциялар, яғни, $f(x)=\sum_{i,\,j=1}^{n} c_{ij}x_i x_j+\sum_{j=1}^{n} r_j x_j$ түріндегі функция қарастырылады. Егер $q_{ij}=c_{ij}+c_{ji}$ деп ұсынсақ, онда $Q=(q_{ij})$ симметриялы матрицаны аламыз. Осы симметриялы матрицаның көмегімен квадратты функцияны келесі түрде беруге болады:

$$f(x)=\frac{1}{2}(Qx,\,x)+(r,\,x), \tag{4.5}$$

мұндағы $x=(x_1,\,x_2,\,...,\,x_n)^T$, $r=(r_1,\,r_2,\,...,\,r_n)^T$ - вектор бағандар, $(x,\,y)$ - x және $y\in R^n$ векторларының скаляр көбейтіндісі.

(4.5) квадратты функция үшін (4.2) формула мына түрде беріледі:

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\alpha_k\left(Qx^{(k)}+r\right),\ k=0,1,... \tag{4.6}$$

Градиентті әдістер. Лекция №12-13

Ең тез түсу әдісі

Ең тез түсу әдісінің градиенттік түсу әдісінен айырмашылығы α_k шамасын анықтауда. Ең тез түсу әдісінде α_k шамасы келесі шарттардан табылады:

$$\Phi_k(\alpha_k)=\min_{\alpha>0}\Phi_k(\alpha),$$

мұндағы

$$\Phi_k(\alpha)=f\left(x^{(k)}-\alpha f'\left(x^{(k)}\right)\right) \tag{4.7}$$

α_k шамасын осылайша таңдау $f(x)$ функциясының антиградиентінің - $-f'\left(x^{(k)}\right)$ бағытының бойында $f(x)$ функциясының мүмкін болатын азаюын барынша қамтиды.

Осылайша, ең тез түсу әдісінің әрбір қадамында (4.7) бір өлшемді минимизациялау есебі шешіледі. Ол үшін жоғарыда қарастырған бір өлшемді минимизациялау әдістерінің біреуін пайдалануға болады.

Егер $f(x)$ - (4.5) түрдегі квадратты функция болса, онда α_k шамасы айқын түрде табылуы мүмкін:

$$\alpha_k=\frac{\left(f'^{(k)},\,f'^{(k)}\right)}{\left(Qf'^{(k)},\,f'^{(k)}\right)}, \tag{4.8}$$

мұндағы $f'\left(x^{(k)}\right)=Qx^{(k)}+r$.

Сонымен, квадратты функция үшін ең тез түсу әдісі - (4.6), (4.8) формулалар бойынша $\left\{x^{(k)}\right\}$ тізбегін құру.

Түйіндес бағыттар әдісі

Түйіндес бағыттар әдісінің негізгі идеясы $f(x)$ функциясының минимум нүктесіне жуық келесі түрде $\{x^{(k)}\}$ тізбегін құру:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k p^{(k)}, \; k = 0, 1, \ldots, \; x^{(0)} \in R^n, \qquad (4.9)$$

мұндағы $x^{(0)}$ - алдын ала таңдалынған бастапқы жуықтау, α_k - (4.7) – қатынасқа ұқсас таңдалынады:

$$\Phi_k(\alpha_k) = \min_{\alpha > 0} \Phi_k(\alpha), \text{ мұндағы } \Phi_k(\alpha) = f\left(x^{(k)} - \alpha p^k\right)$$

(4.10)

ал түсу бағыты $p^{(k)}$ келесі формуламен анықталады:

$$p^{(k)} = f'\left(x^{(k)}\right) + \beta_k p^{(k-1)}, \; k = 1, 2, \ldots, \; p^{(0)} = f'\left(x^{(0)}\right),$$

мұндағы

$$\beta_k = \frac{\left\| f'\left(x^{(k)}\right) \right\|^2}{\left\| f'\left(x^{(k-1)}\right) \right\|^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_i} \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f\left(x^{(k-1)}\right)}{\partial x_i} \right)^2} \qquad (4.11)$$

Сонымен, түйіндес бағыттар әдісі ең тез түсу әдісінен тек қана әрбір қадамдағы функцияның кему бағытымен ($-f'\left(x^{(k)}\right)$ шамасының орнына $-p^{(k)}$) ерекшеленеді.

(4.11) формуладағы $p^{(k)}$ тек қана $-f'\left(x^{(k)}\right)$ - антиградиентпен ғана емес, сонымен қатар алдыңғы қадамдағы $-p^{(k-1)}$ түсу бағытымен де анықталады. Бұл осыған дейін қарастырған градиенттік әдістерге қарағанда $f(x)$ функциясының минимум нүктесіне жуық (4.9) тізбекті құруда берілген функцияның ерекшеліктерін толығырақ ескереді.
Түйіндес бағыттар әдісінде есептеулердің белгілі дәлдікке жету критерийі ретінде негізінен (4.4) теңсіздік қарастырылады. Есептеулерде пайда болған қателіктердің әсер етуін азайту мақсатында көбінесе әрбір N итерациядан кейін $\beta_{mN} = 0$, $m = 0, 1, \ldots$ - деп алады, яғни, әдісті жаңартады (N - алгоритм параметрі).

R^n - кеңістігінде дөңес квадраттық функцияны минимизациялау үшін түйіндес бағыттар әдісінің n - нен артық емес итерациясы талап етіледі.

V. Вариациялық қисаптың қарапайым есебі. Лекция №14-15

Вариациялық қисаптың қарапайым есебі функционалды

минимизациялаудан тұрады:

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x))dx$$

Мүмкін болатын функциялар жиынында

$Y = \{y \in C_1 [x_1, x_2]: y(x_1) = y_1; y(x_2) = y_2; (x, y(x), y'(x)) \in D$

Барлық $x \in [x_1, x_2]\}$, (1.2)

мұнда D - R^3 кеністіндегі жиын.

Теорема. f функциясы D жиынында f_y и f_y' дербес туындыларымен үзліссіз. Егер $y \in Y$ функциясы $J(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x))dx$ функционалы үшін әлсіз локальды минимумына жетсе, онда y келесі дифференциалды теңдеулердің шешімі:

$$f_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} f_y' (x, y(x), y'(x)) = 0$$

Бұл Эйлер – Лагранжа теңдеуі. $f_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} f_y' (x, y(x), y'(x)) = 0$ Эйлер – Лагранж теңдеуінің шешімі $J(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x))dx$ функциясының экстремалі деп аталады. Экстремаль деп экстремум болуы мүмкін функция.

Мысал 1. Вариациялық қисаптың қарапайым есебінің экстреальдарын табу керек.

$$J(y) = \int_0^1 (y'^2(x) + y'(x)y(x) + 12xy(x))dx; \; y(0) = y(1) = 0;$$

Эйлера-Лагранжа теңдеуі мына түрде: $y' - 2y'' + 12x - y' = 0$;

Бұдан $y' = 3x^2 + C$;

$y = x^3 + Cx + C_1$ – жалпы шешім;

$y(0) = C_1 = 0$;

$y(1) = 1 + C = 0$; $C = -1$;

Сөйтіп жалгыз экстремаль: $y(x) = x^3 - x$.

Эйлера-Лагранж теңдеуінің дербес жағдайы

Функция f y'-ден тәуелсіз, яғни $f = f(x, y)$. Бұл жағдайда (2.1) дифференциалдық теңдеуі функционалдық теңдеуге айналады.

$$f_y(x, y) = 0 \qquad (2.3)$$

Функция f y-ден тәуелсіз, яғни $f = f(x, y')$, онда (2.1) мына түрге көшеді:

$$\frac{d}{dx} f_{y'}(x, y') = 0,$$

Итегралдау нәтижесінде бірінші ретті дифференциалды теңдеу аламыз:

$$f_{y'}(x, y') = C,$$

(2.2)

мұнда C – тұрақты.

Функция f x-тен тәуелсіз, яғни . $f = f(y, y')$, онда Эйлера – Лагранж теңдеуі мына түрде болады:

$$f(y, y') - f_{y'}(y, y')y' = C,$$

(2.4)

мұнда C – тұрақты.

Семинар және практика сабақтарының қысқаша сипаттамасы (жоспарлар, семинар және практика сабақтарын жүргізуге арналған тапсырмалар, СОӨЖ, СӨЖ);

Семинар сабақтары

№	Тақырыбы	Сағат саны
1	Графическалық әдіс	2
2	Симплекс әдіс	2
3	Сызықты программалау есебін Симплекс кестесімен шешу	4
4	М-әдіс	4

5	Екіжақтылық(қосжақтылық)	2
4	Траспорт есебін оптималдыққа тексеру	4
5	Функцияны шартсыз минимизациялау	4
6	Мақсат функцияның минимумын симплекс әдіспен табу	2
7	Хук-Дживс әдісіне	2
8	Коши әдісі	2
9	Ньютон әдісі	2
10	Түйіндес градиенттер әдісі	2
11	Вариациялық қисаптың қарапайым есебінің экстремальдарын табу	2
	бары	30

Тақырып Графическалық әдіс

Айталық бізге шектеулер жүйесі берілсін

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \geq b_m \end{cases}$$

Осы жүйенің шешімдерінің ішінен мына сызықты функцияны

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0$$

Минимумға не максимумға жеткізетінен табу керек.Оны геометриялық жолмен шығару төмендегідей жүзеге асады. Жазықтықтың әр нүктесі үшін функция L өзінің мәнін $L = L_1$ қабылдайды. $c_1x_1 + c_2x_2 + c_0 = L_1$

Осы нүктелердің жиыны c(c1;c2) кординат басынан шығатын векторға перпендикуляр болады.Егер осы түзуді c векторының бағымен жылжытса, онда сызықтық функция $L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0$ өседі,ал қарсы бағытта ол кемиді.

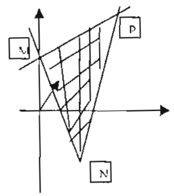
Егер L оң бағытта шешімі көпбұрышының төбесінде кездессе, онда L_1 түзуі L тірек болады да,осы түзуде L өзінің кіші мәнін қабылдайды.Ал қарсы бағытта кездесссе, онда ол түзуде сызықтық функция өзінің еңүлкен мәнәі қабылдайды.

Мысал: Мына сызықтық функцияның $L = 2x_1 + 2x_2$ мына шектеулерді қанағаттандыратын $3x_1 - 2x_2 \geq -6, 3x_1 + x_2 \geq 3, x_1 \leq 3.$

максимумын табу керек.

Шешуі:Теңсіздіктерді тендіккае ауыстыра отырып шешім көпбұрышын сламыз::

$$3x_1 - 2x_2 + 6 = 0, 3x_1 + x_2 - 3 = 0, x_1 = 3.$$



1. Симплекс әдіс

Мысал 1: Мына есеп берілсін:

$$Q(\bar{x}) = x_4 - x_5 \to \min$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_4 - 2x_5 &= 1 \\ x_2 - 2x_4 + x_5 &= 2 \\ x_3 + 3x_4 + x_5 &= 3 \end{aligned}\right\}.$$

$\{x_1, x_2, x_3\}$ айнымалыларын базистік етіп аламыз да жүйені келесі түрде жазамыз:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1 - x_4 + 2x_5 \\ x_2 &= 2 + 2x_4 - x_5 \\ x_3 &= 3 - 3x_4 - x_5 \end{aligned}\right\}.$$

$\{x_4, x_5\}$ айнымалылары базистік емес айнымалылар. Егер $x_4 = 0$ және $x_5 = 0$ деп алсақ, онда бұрыштық нүкте:

$$\bar{x}^1 = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 0]^T,$$

$Q(\bar{x}^1) = 0$ сәйкес келеді.

x_5-ті көбейте отырып, мақсат функциясының мәнін азайтуға болады. x_5 көбейгенде x_1 де көбейеді, ал x_2 және x_3 азаяды. Түрлендірулер жүргізіп, алатынымыз:

$$\left.\begin{aligned} x_5 &= 2 - x_2 + 2x_4 \\ x_1 &= 5 - 2x_2 + 3x_4 \\ x_3 &= 1 + x_2 - 5x_4 \end{aligned}\right\}$$

$$Q(\bar{x}) = -2 - x_4 + x_2 \to \min .$$

Сәйкес опорлық жоспар $\bar{x}^2 = [5 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 2]^T$ және $Q(\bar{x}^2) = -2$.

x_4-ті көбейте отырып, мақсат функциясының мәнін азайтуға болады.Түрлендірулер нәтижесінде:

$$\left.\begin{aligned} x_4 &= \frac{1}{5} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{5}x_3 \\ x_1 &= \frac{28}{5} - \frac{7}{5}x_2 - \frac{3}{5}x_3 \\ x_5 &= \frac{12}{5} - \frac{3}{5}x_2 - \frac{2}{3}x_3 \end{aligned}\right\}$$

$$Q(\bar{x}) = -\frac{11}{5} + \frac{4}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_3 \to \min .$$

Сәйкес опорлық жоспар $\bar{x}^3 = \left[\frac{28}{5} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{5} \quad \frac{12}{5}\right]^T$ және мақсат функциясы $Q(\bar{x}^3) = -\frac{11}{5}$. Базистік емес айнымалыларда мақсат функциясы теріс емес. $\bar{x}^3$ жоспары тиімді жоспар.

Сызықты программалау есебін Симплекс кестесімен шешу

Берілген сызықты шектеулерде сызықты фуекцияға минимум және максимумге жететін толық нүктелер жиынын табу керек.
Минимумды табу есебін шығарамыз:

L(x)функциясын қарастырамыз:

$L(X) = 9X_1-2X_2-50X_4+X_5$

$$\begin{cases} 3X_1-3X_3+20X_4+X_5\le 3 \\ 24X_1+12X_3-40X_4+4X_5\le 8 \\ 6X_1+20X_4-10X_5\le 16 \\ 6X_1+9X_3-30X_4+6X_5\le 18 \end{cases}$$

Шектеулер жүйесін канондық түрге келтіреміз:

$$\begin{cases} 3X_1-3X_3+20X_4+X_5+X_6=3 \end{cases}$$

$24X_1+12X_3-40X_4+4X_5+X_7=8$
$6X_1+20X_4-10X_5+X_8=16$
$6X_1+9X_3-30X_4+6X_5+X_9=18$

Симплекс кестесін құрамыз:

X_{j0}	β_i	C_j	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	β_i/α_{ik}
			9	-2	0	-50	1	0	0	0	0	
X_6	3	0	3	0	-3	20	1	1	0	0	0	3/20
X_7	8	0	24	0	12	-40	4	0	1	0	0	-1/5
X_8	16	0	6	0	0	20	-10	0	0	1	0	4/5
X_9	18	0	0	6	9	-30	6	0	0	0	1	-3/5
$L_0=0$			-9	2	0	50	-1	0	0	0	0	
Кестенің жалғасы												
X_4	3/20	-50	3/20	0	-3/20	1	1/20	1/20	0	0	0	-1
X_7	14	0	30	0	6	0	6	2	1	0	0	7/3
X_8	13	0	3	0	3	0	-11	-1	0	1	0	13/3
X_9	45/2	0	9/2	6	9/2	0	15/2	3/2	0	0	1	5
$L_0=-15/2$ $\Delta_j=$			-33/2	2	15/2	0	-7/2	-5/2	0	0	0	
X_4	1/2	-50	21/20	0	0	1	1/5	1/10	1/40	0	0	
X_3	7/3	0	6	0	1	0	1	1/3	1/6	0	0	
X_8	6	0	-15	0	0	0	-14	-2	-1/2	1	0	
X_9	12	0	-45/2	6	0	0	3	0	-3/4	0	1	2
$L_0=-25$ $\Delta_j=$			123/2	2	0	0	-6	-5	-5/4	0	0	
X_4	1/2	-50	21/20	0	0	1	1/5	1/10	1/40	0	0	
X_3	7/3	0	6	0	1	0	1	1/3	1/6	0	0	
X_8	6	0	-15	0	0	0	-14	-2	-1/2	1	0	
X_2	2	-2	-15/4	1	0	0	1/2	0	-1/8	0	1/6	
$L_0=-29$ $\Delta_j=$			-54	0	0	0	-12	-5	-1	0	-1/3	

Жауабы: $L_{\min}=-29; X=(0,2,7/3,1/2,0)^T$

3.Максимумды табу есебі

L(x) функциясын қарастырамыз.

$-L(X) = -9X_1+2X_2+50X_4-X_5$

$$\begin{cases} 3X_1-3X_3+20X_4+X_5 \le 3 \\ 24X_1+12X_3-40X_4+4X_5 \le 8 \\ 6X_1+20X_4-10X_5 \le 16 \\ 6X_1+9X_3-30X_4+6X_5 \le 18 \end{cases}$$

Шектеулер жүйесін канондық түрге келтіреміз

$$\begin{cases} 3X_1-3X_3+20X_4+X_5+X_6=3 \\ 24X_1+12X_3-40X_4+4X_5+X_7=8 \\ 6X_1+20X_4-10X_5+X_8=16 \\ 6X_1+9X_3-30X_4+6X_5+X_9=18 \end{cases}$$

Симплекс кестесін құрамыз:

X_{j0}	β_i	C_j	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	β_i/α_{jk}
			-9	2	0	50	-1	0	0	0	0	
X_6	3	0	3	0	-3	20	1	1	0	0	0	1
X_7	8	0	24	0	12	-40	4	0	1	0	0	1/3
X_8	16	0	6	0	0	20	-10	0	0	1	0	8/3
X_9	18	0	0	6	9	-30	6	0	0	0	1	
$L_0= 0$		$\Delta_j=$	9	-2	0	-50	1	0	0	0	0	
X_6	2	0	0	0	-9/2	25	1/2	1	-1/8	0	0	
X_1	1/3	-9	1	0	1/2	-5/3	1/6	0	1/24	0	0	
X_8	14	0	0	0	-3	30	-11	0	-1/4	1	0	
X_9	18	0	0	6	9	-30	6	0	0	0	1	
$L_0= -3$		$\Delta_j=$	0	-2	-9/2	-35	-1/2	0	-3/8	0	0	

Жауабы: $L_{max} = 3; X = (1/3,0,0,0,0)^T$

М-әдіс

Есептің қойылуы. Сызықты программалау есебінің тиімді шешімін табу керек.

$L(x) = 5x_1 - 6x_2 - x_3 + 3x_4 - 8x_5 \to \min$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 28 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 + x_5 = 31 \\ -8x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x4 - x_5 = 118 \end{cases}$$

Шектеулер жүйесін канондық түрге келтіреміз:

$L(x) = 5x_1 - 6x_2 - x_3 + 3x_4 - 8x_5 \to \min$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 + x_6 = 28 & // x_6 \text{ – базистік айнымалы} \\ x_1 + x_2 - 2x_4 + x_5 + x_7 = 31 & // x_7 \text{ – базистік айнымалы} \\ -8x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x4 - x_5 + x_8 = 118 & // x_8 \text{ – базистік айнымалы} \end{cases}$$

Бастапқы есеп М-есепке келтіріледі. М-есеп мына түрде болады:

$L_M(x) = 5x_1 - 6x_2 - x_3 + 3x_4 - 8x_5 + M^*(x_6+x_7+x_8)$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 + x_6 = 28 \\ x_1 + x_2 - 2_4 + x_5 + x_7 = 31 \\ -8x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x4 - x_5 + x_8 = 118 \end{cases}$$

М мәнін формула бойынша есептейміз: $M = m * (\max | C_j |) * (\max | a_{ij}|)$

Бұл есепте:

$m = 3$;

$\max | C_j | = 5$

$\max | a_{ij}| = 4$

$M = 60$

Есепті Симплекс кестесін құрып шығарамыз:

Қадам 1

X_{j0}	β_i	C_{j0}	X_1	**X_2**	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	β_i/α_{ij}
			5	**-6**	-1	3	-8	60	60	60	
X_6	**28**	**60**	**-2**	**1**	**1**	**4**	**2**	**1**	**0**	**0**	**28**
X_7	31	60	1	**1**	0	-2	1	0	1	0	31
X_8	118	60	**-8**	**4**	-5	3	-1	0	0	1	29.5
Δj			*-545*	**366**	361	297	128	0	0	0	

Маргиналдарды есептеу үшін Δj (j=1,…,8) формуланы қолданып, алатынымыз:

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} C_i * \alpha_{ij} - C_j$$

$\Delta_1 = C_1 * \alpha_{11} + C_2 * \alpha_{21} + C_3 * \alpha_{31} - C_1 = -545$

$\Delta_2 = C_1 * \alpha_{12} + C_2 * \alpha_{22} + C_3 * \alpha_{32} - C_2 = 366$

$\Delta_3 = C_1 * \alpha_{13} + C_2 * \alpha_{23} + C_3 * \alpha_{33} - C_3 = 361$

$\Delta_4 = C_1 * \alpha_{14} + C_2 * \alpha_{24} + C_3 * \alpha_{34} - C_4 = 297$

$\Delta_5 = C_1 * \alpha_{15} + C_2 * \alpha_{25} + C_3 * \alpha_{35} - C_5 = 128$

$\Delta_6 = C_1 * \alpha_{16} + C_2 * \alpha_{26} + C_3 * \alpha_{36} - C_6 = 0$

$\Delta_7 = C_1 * \alpha_{17} + C_2 * \alpha_{27} + C_3 * \alpha_{37} - C_7 = 0$

$\Delta_8 = C_1 * \alpha_{18} + C_2 * \alpha_{28} + C_3 * \alpha_{38} - C_8 = 0$

$L_{M1} = \sum \beta_i * C_i = 10620$

Қадам 2

Кестені толтыру келесі формулаларды қолданамыз:

$\alpha_{lj} = a_{lj} / a_{lk}$; $\beta_l = b_l / a_{lk}$; $\alpha_{ij} = a_{ij} - (a_{lj} / a_{lk}) * a_{ik}$; $\beta_i = b_i - (a_{ik}/a_{lk}) * b_l$

k=2; l=1;

X_{j0}	β_i	C_{j0}	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	β_i/α_{ij}
X_2	28	-6	-2	1	1	4	**2**	1	0	0	*-14*
X_7	3	60	3	0	-1	-6	-1	-1	1	0	1
X_8	6	60	0	0	1	-13	-9	-4	0	1	-
Δj			187	0	-5	*-1167*	*-604*	-366	0	0	

$L_{M2} = \sum \beta_i * C_i = 372$

$L_{M2} < L_{M1}$

Қадам 3

k=1; l=1;

X_{j0}	β_i	C_{j0}	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	β_i/α_{ij}
X_2	30	-6	0	1	0,33	**0**	1,33	0,33	0,66	0	*90*
X_1	1	5	1	0	-0,33	-2	-0,33	-0,33	0,33	0	-3,03
X_8	6	60	0	0	1	-13	-9	-4	0	1	6
$\Delta j=$			0	0	57,33	*-793*	-541,667	-303,667	-62,33	0	

Кестенің жалғасы

$L_{M3} = \sum \beta_i * C_i = 185$

$L_{M3} < L_{M2}$

Қадам 4

k=3; l=3;

X_{j0}	β_i	C_{j0}	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	β_i/α_{ij}
X_2	28	-6	0	1	0	4,33	4,33	1,66	0,66	-0,33	
X_1	3	5	1	0	0	-6,33	-3,3	-1,66	0,33	0,33	
X_3	6	-1	0	0	1	-13	-9	-4	0	1	
$\Delta j=$			0	0	0	-47,66	-25,66	-74,33	-62,33	-57,33	

Δ_j жолында оң элементтер жоқ, яғни М-есептің тиімді шешімі табылды. Тиімді шешім:

$X^* = (3;28;6;0;0;0;0;0)^T$

Тақырып. Екіжақтылық есебі

Берілген есепке екіжақтылық есебін құр:

$$f = -x_1 + 2x_2 \to \max$$

мына шектеулерді ескеріп:

$$2x_1 - x_2 \geq 1,$$

$$-x_1 + 4x_2 \le 24,$$

$$x_1 - x_2 \le 3,$$

$$x_1 + x_2 \ge 5,$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Шешуі: 1.есеп максимумға койлғандықтан, барлық шектеулерді "$\le$", түріне келтіреміз, ол үшін -1 көбейтеміз. Сонда

$$-2x_1 + x_2 \le -1,$$

$$-x_1 + 4x_2 \le 24,$$

$$x_1 - x_2 \le 3,$$

$$-x_1 - x_2 \le -5,$$

2.Кеңейтілген матрицаны құрамыз

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 24 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & f \end{pmatrix}$$

Табамыз A_1^T,(транспонированную к матрице

A_1:

$$A_1^T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 24 & 3 & -5 & z \end{pmatrix}$$

Енді екіжақты есепті жазамыз:

$$Z = -y_1 + 24y_2 + 3y_3 - 5y_4 \to \min$$

$$2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \ge -1,$$

$y_1 + 4y_2 - y_3 - y_4 \ge$

Тақырып. Траспорт есебін оптималдыққа тексеру

Алдымен қөандай да бір тасымалдау жоспары құрып аламыз

i \ v	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
u_1	2 30	4 80	2 10	3	8
u_2	3	5	6 10	– 6 20	+ 2
u_3	6	8	7	+ 4 10	– 5 30
u_4	3	4	2	1	4 60

2. Потенциалдар жүйесін құрамыз:

$v_1 - u_1 = 2$, $v_2 - u_1 = 4$, $v_3 - u_1 = 2$,

$v_3 - u_2 = 6$, $v_4 - u_2 = 6$, $v_4 - u_3 = 4$,

$v_5 - u_3 = 5$, $v_5 - u_4 = 4$.

Тендеу саны мен белгісіздер саны тең емес , сол себепті, $u_1 = 0$ деп алып, калғандарын таба саламыз, $u_2 = -4$, $u_3 = -2$, $u_4 = -1$, $v_1 = 2$, $v_2 = 4$, $v_3 = 2$, $v_4 = 2$, $v_5 = 3$.

3. Шартты тексереміз:

$v_1 - u_2 = 6 \not\leq 3$, $v_1 - u_3 = 4 \leq 6$, $v_1 - u_4 = 3 \leq 3$,

$v_2 - u_2 = 8 \not\leq 5$, $v_2 - u_3 = 6 \leq 8$, $v_2 - u_4 = 5 \not\leq 4$,

$v_3 - u_3 = 4 \leq 7$, $v_3 - u_4 = 3 \not\leq 2$, $v_4 - u_1 = 2 \leq 3$,

$v_4 - u_4 = 3 \not\leq 1$, $v_5 - u_1 = 3 \leq 8$, $v_5 - u_2 = 7 \not\leq 2$,

Шарт орындалған жоқ.

Сол себепті төмендегі қадамдарды жасаймыз.

1. Шарт $v_j - u_i \leq c_{ij}$ бузылып тұрған торды алып , ол үшін мына сан

$$\alpha_{i_0 j_0} = \max_{i,j}\{\alpha_{ij} = v_j - u_i - c_{ij} > 0\}$$

Біздің есеғпте ол : $\alpha_{i_0 j_0} = \alpha_{25} = 5$.

Осы $i_0 j_0$ торынан бастап сағат тіліне қарсы бағытта толтырылған торламен цикл құрылады.Енді цикл төбелерін + мен –белгілейміз. –торлардағы ен аз тасымалдау мөлшерін іздейміз

$$\theta = \min\{x_{ij}^{-}\}.$$

Жоспарды жаксарту үшін θ терістерден аламыз , ал оңдарын косамыз. Жанасы

$$x_{ij}^{'} = \begin{cases} x_{ij}^{-} - \theta, \\ x_{ij}^{+} + \theta, \\ x_{ij}. \end{cases}$$

Біздегі $\theta = \min\{x_{ij}^{-}\}$=20.

1. Алынған тасымалға сай кесте.

Кестетің жалғасы

v / i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
u_1	2 30	4 80	2 10	3	8
u_2	3	5	– 6 10	6 0	+ 2 20
u_3	6	8	7	4 30	5 10
u_4	3	4	+ 2	1	– 4 60

Тасымалдау құны:

$$Q = 30\times 2 + 4\times 80 + 2\times 10 + 6\times 10 + 4\times 30 + 2\times 20 + 5\times 10 + 4\times 60 = 910.$$

2. Потенциалдар жүйесін құрамыз:

$v_1 - u_1 = 2$, $\quad v_2 - u_1 = 4$, $\quad v_3 - u_1 = 2$,

$v_3 - u_2 = 6$, $\quad v_5 - u_2 = 2$, $\quad v_4 - u_3 = 4$,

$v_5 - u_3 = 5$, $\quad v_5 - u_4 = 4$.

Айталық $u_1 = 0$ десек, қалғандары: $u_2 = -4$, $u_3 = -7$, $u_4 = -6$, $v_1 = 2$, $v_2 = 4$, $v_3 = 2$, $v_4 = -3$, $v_5 = -2$.

3. Шартты тексереміз::

$v_1 - u_2 = 6 \nleq 3$, $\quad v_1 - u_3 = 9 \nleq 6$, $\quad v_1 - u_4 = 8 \nleq 3$,

$v_2 - u_2 = 8 \nleq 5$, $\quad v_2 - u_3 = 11 \nleq 8$, $\quad v_2 - u_4 = 10 \nleq 4$,

$v_3 - u_3 = 9 \nleq 7$, $\quad v_3 - u_4 = 8 \nleq 2$, $\quad v_4 - u_1 = -3 \leq 3$,

$v_4 - u_4 = 3 \nleq 1$, $\quad v_5 - u_1 = -2 \leq 8$, $\quad v_4 - u_2 = 1 \leq 6$,

Шарт орындалған жоқ.

1. Табамыз $\alpha_{i_0 j_0} = \alpha_{43} = 6$, цикл құрамыз, $\theta = \min\{x_{ij}^-\} = 10$. Жана тасмымалға сай кесте.

v / i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
u_1	2 30	4 80	2 10	3	8
u_2	3	5	6 0	6 0	2 30
u_3	6	8	7	− 4 30	+ 5 10
u_4	3	4	2 10	+ 1	− 4 50

Тасымалдау құны:

$$Q = 30\times 2 + 4\times 80 + 2\times 10 + 2\times 10 + 4\times 30 + 2\times 30 + 5\times 10 + 4\times 50 = 850.$$

2. Потенциалдар жүйесін құрамыз:

$v_1 - u_1 = 2$, $v_2 - u_1 = 4$, $v_3 - u_1 = 2$,

$v_3 - u_4 = 2$, $v_5 - u_2 = 2$, $v_4 - u_3 = 4$,

$v_5 - u_3 = 5$, $v_5 - u_4 = 4$.

Ал $u_1 = 0$ десек, қалғандары: $u_2 = 2$, $u_3 = -1$, $u_4 = 0$, $v_1 = 2$, $v_2 = 4$, $v_3 = 2$, $v_4 = 3$, $v_5 = 4$.

3. Шартты тексереміз::

$v_1 - u_2 = 0 \leq 3$, $v_1 - u_3 = 3 \leq 6$, $v_1 - u_4 = 2 \leq 3$,

$v_2 - u_2 = 2 \leq 5$, $v_2 - u_3 = 5 \leq 8$, $v_2 - u_4 = 4 \leq 4$,

$v_3 - u_3 = 3 \leq 7$, $v_3 - u_2 = 0 \leq 6$, $v_4 - u_1 = 3 \leq 3$,

$v_4 - u_4 = 3 \not\leq 1$, $v_5 - u_1 = 4 \leq 8$, $v_4 - u_2 = 1 \leq 6$,

Шарт орындалған жоқ

1. Табамыз $\alpha_{i_0 j_0} = \alpha_{44} = 2$, цикл құрамыз, $\theta = \min\{x_{ij}^-\} = 30$. Жана тасымал үшін кесте.

v	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5

i					
u_1	2 30	4 80	2 10	3	8
u_2	3	5	6	6	2 30
u_3	6	8	7	4 0	5 40
u_4	3	4	2 10	1 30	4 20

Тасымалдау құны:

$$Q = 30\times 2 + 4\times 80 + 2\times 10 + 2\times 10 + 1\times 30 + 2\times 30 + 5\times 40 + 4\times 20 = 790.$$

2. Потенциалдар жүйесін құрамыз:

$v_1 - u_1 = 2$, $v_2 - u_1 = 4$, $v_3 - u_1 = 2$,

$v_3 - u_4 = 2$, $v_5 - u_2 = 2$, $v_4 - u_4 = 1$,

$v_5 - u_3 = 5$, $v_5 - u_4 = 4$.

АЛ $u_1 = 0$ десек, қалғандары: $u_2 = 2$, $u_3 = -1$, $u_4 = 0$, $v_1 = 2$, $v_2 = 4$, $v_3 = 2$, $v_4 = 1$, $v_5 = 4$.

3. Шартты тексереміз::

$v_1 - u_2 = 0 \le 3$, $v_1 - u_3 = 3 \le 6$, $v_1 - u_4 = 2 \le 3$,

$v_2 - u_2 = 2 \le 5$, $v_2 - u_3 = 5 \le 8$, $v_2 - u_4 = 4 \le 4$,

$v_3 - u_3 = 3 \le 7$, $v_3 - u_2 = 0 \le 6$, $v_4 - u_1 = 1 \le 3$,

$v_4 - u_4 = 1 \le 1$, $v_5 - u_1 = 4 \le 8$, $v_4 - u_2 = -1 \le 6$,

Шарт орындалды, тасымалдау жоспары *оптималды, оның құны* $Q_{min} = 790$.

Функцияны шартсыз минимизациялау

F(x)= $(x1 - 6)^2 + (x2 - 3)^2 + x1\cdot x2$ мақсат функциясының функциясының минимумын табу керек.

- Бірқалыпты симплекс әдіспен;
- Хука-Дживса әдісімен;
- Пауэлла түйіндес бағыттар әдісімен;
- Коши әдісімен;
- Ньютон әдісімен;
- Түйіндес градиенттер әдісімен;
- Квазиньютон әдісімен;
- Айып пұл фукциясы әдісімен шығару керек.

Стационар нүктені тауып, экстремумның қажетті және жеткілікті шартының сипаттамасын зерттеу керек.

Бастапқы мәліметтер

$x^{(0)} = [-10;-10]^T$;

Стационар нүктені табамыз:

Мақсат функция:

$f(x) = (x1-6)^2 + (x2-3)^2 + x1 \cdot x2 = x1^2 + x2^2 - 12 \cdot x1 - 6 \cdot x2 + x1 \cdot x2 + 45;$

Дербес туындылар
$$\begin{cases} \partial f/\partial x1 = 2 \cdot x1 + x2 - 12\ ; \\ \partial f/\partial x2 = x1 + 2 \cdot x2 - 6\ ; \end{cases}$$

Дербес туындыларды нольге теңеп:
$$\begin{cases} 2 \cdot x1 + x2 - 12 = 0\ ; \\ x1 + 2 \cdot x2 - 6 = 0\ ; \end{cases}$$

Осы теңдеулерді шешіп:

$4 \cdot x1 - 24 + 2 \cdot x2 - 2 \cdot x2 + 6 - x1 = 0$;

$3 \cdot x1 = 18$;

$x1 = 6$;

$2 \cdot x2 = 6 - x1$;

$2 \cdot x2 = 0$;

$x2 = 0$.

Мақсат функциясының экстремумы $x[6\ ;\ 0]$ координаттардағы нүкте:

$$f[x(6\ ;\ 0)] = 9\ .$$

Стационар нүкте сипатын анықтау үшін Гессе матрицасының анықтауышын толтырамыз:

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3;$$

Стационар нүкте оң болғандықтан стационар нүкте минимум нүкте. Сөйтіп, экстремумды табу мақсат функцияның минимумын табуға келді.

Мақсат функцияның минимумын симплекс әдіспен табу

□□□ симплекстің бастапқы қабырғасы

$x^{(0)} = [-10,-10]^T$ – бастапқы нүкте;

a = 6, b = 3 –f мақсат функциясының параметрлері ;
$\square_1$ = 1 –функцияны анықтау нақтылығы;
$\square_2$ = 3 – симплекстің минимальды өлшемі

$$f(x) = (x1-a)^2 + (x2-b)^2 + x1\bullet x2;$$

Берілген функцияны симплекс әдісімен минимизациялаймыз.

$\delta_1=(\sqrt{3} +1) / (2\bullet\sqrt{2}) \bullet 3 = 2.9877;$
$\delta_2=(\sqrt{3} - 1) / (2\bullet\sqrt{2}) \bullet 3 = 0.7764;$

1-ші қадам:
$x^{(0)} = [-10;-10];$
$x^{(1)} = [-10+2.9877;-10+0.7764] = [-7.012; -9.224];$
$x^{(2)} = [-10+0.7764; -10+2.9877] = [-9.224; -7.012];$
f(x0)= 525;$\Rightarrow$ max $\Rightarrow$ заменяем
f(x1)= 383.417;
f(x2)= 396.6891;
$x^{нов} = x^{(3)} = x^{(1)} + x^{(2)} - x^{(0)};$
$x^{нов} = [-6.236; -6.236].$

2-ші қадам:
$x^{(3)} = [-6.236; -6.236] ;$
$x^{(1)} = [-10+2.9877;-10+0.7764] = [-7.012; -9.224];$
$x^{(2)} = [-10+0.7764; -10+2.9877] = [-9.224; -7.012] ;$
f(x3)= 273.911;
f(x1)= 383.417;
f(x2)= 396.6891; $\Rightarrow$ max $\Rightarrow$ заменяем
$x^{нов} = x^{(4)} = x^{(1)} + x^{(3)} - x^{(2)};$
$x^{нов} = [-4.024 ; -8.448] .$

3-ші қадам:
$x^{(3)} = [-6.236; -6.236]$
$x^{(4)} = [-4.024 ; -8.448]$
$x^{(1)} = [-7.012; -9.224]$
f(x3)= 273.911;
f(x4)= 265.532;
f(x1)= 383.417; $\Rightarrow$ max $\Rightarrow$ заменяем
$x^{нов} = x^{(5)} = x^{(3)} + x^{(4)} - x^{(1)};$
$x^{нов} = [-3.248; -5.46]$

4-ші қадам:

$x^{(3)} = [-6.236; -6.236]$;
$x^{(4)} = [-4.024; -8.448]$;
$x^{(5)} = [-3.248; -5.46]$;
f(x3)= 273.911; $\Rightarrow$ max $\Rightarrow$ заменяем
f(x4)= 265.532;
f(x5)= 469.088;
$x^{нов} = x^{(6)} = x^{(4)} + x^{(5)} - x^{(3)}$;
$x^{нов} = [-1.036;-7.672]$.

5-ші қадам:

$x^{(6)} = [-1.036;-7.672]$;
$x^{(5)} = [-3.248; -5.46]$;
$x^{(4)} = [-4.024; -8.448]$;
f(x6)= 171.345 ;
f(x5)= 174.831;
f(x4)= 265.532; $\Rightarrow$ max $\Rightarrow$ заменяем
$x^{нов} = x^{(7)} = x^{(5)} + x^{(6)} - x^{(4)}$;
$x^{нов} = [-0.26; -4.684]$.

6-шы қадам:

$x^{(7)} = [-0.26; -4.684]$;
$x^{(6)} = [-1.036;-7.672]$;
$x^{(5)} = [-3.248; -5.46]$;
f(x5)= 174.831; $\Rightarrow$ max $\Rightarrow$ заменяем
f(x6)= 171.345;
f(x7)= 99.449;
$x^{нов} = x^{(8)} = x^{(6)} + x^{(7)} - x^{(5)}$;
$x^{нов} = [1.952;-6.896]$.

7-ші қадам:

$x^{(6)} = [-1.036;-7.672]$;
$x^{(7)} = [-0.26; -4.684]$;
$x^{(8)} = [1.952;-6.896]$;
f(x6)= 171.345; $\Rightarrow$ max $\Rightarrow$ заменяем
f(x7)= 99.449;
f(x8)= 100.856;
$x^{нов} = x^{(9)} = x^{(7)} + x^{(8)} - x^{(6)}$;
$x^{нов} = [2.728; -3.908]$.

8-ші қадам:

$x^{(7)} = [-0.26;-4.684]$;
$x^{(8)} = [1.952; -6.896]$;
$x^{(9)} = [2.728; -3.908]$;
f(x7)= 99.4493;
f(x8)= 100.856; ⇒ max ⇒ заменяем
f(x9)= 47.765;
$x^{нов} = x^{(10)} = x^{(7)} + x^{(9)} - x^{(8)}$;
$x^{нов} = [-0.516; -1.696]$.

9-шы қадам:

$x^{(10)} = [-0.516; -1.696]$;
$x^{(9)} = [1.952; -6.896]$;
$x^{(7)} = [-0.26;-4.684]$;
f(x7)= 99.4493; ⇒ max ⇒ заменяем
f(x9)= 47.765;
f(x10)= 51.252;
$x^{нов} = x^{(11)} = x^{(9)} + x^{(10)} - x^{(7)}$;
$x^{нов} = [3.504; -0.92]$.

10-шы қадам:

$x^{(9)} = [1.952; -6.896]$;
$x^{(10)} = [-0.516; -1.696]$;
$x^{(11)} = [3.504; -0.92]$;
f(x9)= 47.765;
f(x10)= 51.252; ⇒ max ⇒ заменяем
f(x11)= 18.373;
$x^{нов} = x^{(12)} = x^{(9)} + x^{(11)} - x^{(10)}$;
$x^{нов} = [5.716; -3.132]$.

11-шы қадам:

$x^{(9)} = [1.952; -6.896]$;
$x^{(11)} = [3.504; -0.92]$;
$x^{(12)} = [5.716; -3.132]$;
f(x9)= 47.765; ⇒ max ⇒ заменяем
f(x11)= 18.373;
f(x12)= 19.78;
$x^{нов} = x^{(13)} = x^{(11)} + x^{(12)} - x^{(9)}$;
$x^{нов} = [6.492; -0.144]$.

12- шы қадам:

$x^{(13)} = [6.492; -0.144]$;

$x^{(12)} = [5.716; -3.132]$;

$x^{(11)} = [3.504; -0.92]$;

f(x13)= 9.159;

f(x12)= 19.78; $\Rightarrow$ max $\Rightarrow$ заменяем

f(x11)= 18.373;

$x^{нов} = x^{(14)} = x^{(11)} + x^{(13)} - x^{(12)}$;

$x^{нов} = [4.28; 2.068]$.

13- шы қадам:

$x^{(14)} = [4.28; 2.068]$;

$x^{(13)} = [6.492; -0.144]$;

$x^{(11)} = [3.504; -0.92]$;

f(x14)= 12.673;

f(x13)= 9.195;

f(x11)= 18.373; $\Rightarrow$ max $\Rightarrow$ заменяем

$x^{нов} = x^{(15)} = x^{(13)} + x^{(14)} - x^{(11)}$;

$x^{нов} = [7.276; 2.844]$.

14- шы қадам:

$x^{(13)} = [6.492; -0.144]$;

$x^{(14)} = [4.28; 2.068]$;

$x^{(15)} = [7.276; 2.844]$;

f(x13)= 9.195;

f(x14)= 12.673; $\Rightarrow$ max $\Rightarrow$ заменяем

f(x15)= 22.345;

$x^{нов} = x^{(16)} = x^{(13)} + x^{(15)} - x^{(14)}$;

$x^{нов} = [9.488; 0.632]$.

15- шы қадам:

$x^{(13)} = [-6.496; -0.144]$;

$x^{(15)} = [7.276; 2.844]$;

$x^{(16)} = [9.488; 0.632]$;

f(x13)= 9.195;

f(x15)=22.345 ; $\Rightarrow$ max $\Rightarrow$ заменяем

f(x16)= 23.769;

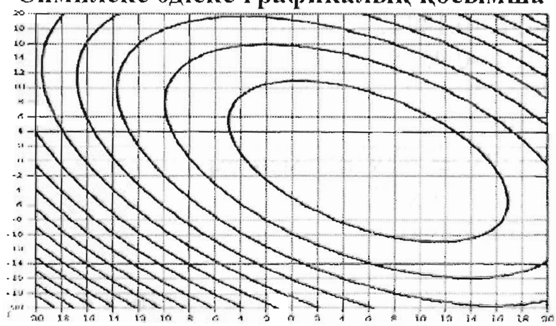
$x^{нов} = x^{(17)} = x^{(13)} + x^{(16)} - x^{(15)}$;

$x^{нов} = [8.707; -2.356]$.

Симплекс бойынша $\mathbf{x}^{(13)}$ нүктесі аймағында 4 айналым жазады. Б9л есепте $\mathbf{x}^{(13)}$ нүктесін F функциясының минимум нүктесі деп қараситырамыз. Яғни $\mathbf{X}^* = [6.492; -0.144]^T$ және $\mathbf{f(X^*) = 9.159}$ болады.

Қорытынды: Оптимум 15 қадамнан кейін табылды.

Симплекс әдіске графикалық қосымша



Хук-Дживс әдісі

□**x** – өсімшенің векторлық шамасы

□x = 1;

□ - қадамды азайту коэффициенті.

□□□□

□ - минимум іздейтін α өсімшесінің минимальды мәні

α =1 деп аламыз.

Шығарылуы:

$x^{(0)}$=[-10.00][-10.00]$\Rightarrow$ f = 525;

Іздеу $x^{(0)}$ базалық нүкте төңірегінде іздейміз.

x2-ні бекітіп, x1-ге өсіише береміз:

x1=-10+1=-9 x2=9 $\Rightarrow$ f =225+169+90=484 < 525 $\Rightarrow$ **табыс**

x1-ді бекітіп, x1-ге өсіише береміз

x1=-9; x2=-10+1=-9 $\Rightarrow$ f =225+144+81=484 < 484 $\Rightarrow$ **удача**

$\mathbf{x}^{(1)}$ **= [-9.00][-9.00]**;

Іздеу табысты болғандықтан келесі қадамға көшеміз:

$x_p^{(2)} = 2 \cdot x^{(1)} - x^{(0)}$;

$x_p^{(2)} = [-8[-8] \Rightarrow f = 169+121+64=381$

Іздеу $x_p^{(2)}$ базалық нүкте төңірегінде іздейміз

x2-ні бекітіп, x1-ге өсіише береміз

$x1=-8+1=-7 \quad x2=-8 \Rightarrow f = 169+121+56=346 < 381 \Rightarrow$ **табыс**

x1-ді бекітіп, x2-ге өсіише береміз

$x1=-7; \quad x2=-8+1=-7 \Rightarrow f = 169+100+49=318 < 346 \Rightarrow$ **табыс**

$\mathbf{x^{(2)} = [-7.00][-7.00]}$;

Іздеу табысты болғандықтан келесі қадамға көшеміз:

$x_p^{(3)} = 2 \cdot x^{(2)} - x^{(1)}$;

$x_p^{(3)} = [-5][-5] \Rightarrow f = 121+64+25=210$;

Іздеу $x_p^{(3)}$ базалық нүкте төңірегінде іздейміз

x2-ні бекітіп, x1-ге өсіише береміз

$x1=-5+1=-4; \quad x2=-5 \Rightarrow f = 100+64+20=184 < 210 \Rightarrow$ **табыс**

x1-ді бекітіп, x2-ге өсіише береміз

$x1=-5; \quad x2=-5+1=-4 \Rightarrow f = 13 < 29 \Rightarrow$ **табыс**

$\mathbf{x^{(3)} = [-4][-4]}$;

$x_p^{(4)} = 2 \cdot x^{(3)} - x^{(2)}$;

$x_p^{(4)} = [-1][-1] \Rightarrow f = 49+16+1=66$;

$x_p^{(4)}$:

$x1=-1+1=0; \quad x2=-1 \Rightarrow f = 36+16=52 > 66 \Rightarrow$ **табыс**

$x1=0; \quad x2=-1+1=0 \Rightarrow f = 36+9=45 < 52 \Rightarrow$ **табыс**

$\mathbf{x^{(4)} = [0][0]}$;

$x_p^{(5)} = 2 \cdot x^{(4)} - x^{(3)}$;

$x_p^{(5)} = [4][4] \Rightarrow f = 4+1+16=21$;

$x_p^{(5)}$:

$x1=4+1=5; \quad x1=4 \Rightarrow f = 1+1+20=22 > 21 \Rightarrow$ **табыс емес**

$x1=4-1=3; x1=4 \Rightarrow f = 9+1+12=22 > 21 \Rightarrow$ **табыс**

$x1=4; \quad x2=4+1=5 \Rightarrow f = 4+4+20=28 > 21 \Rightarrow$ **табыс емес**

$x1=4; \quad x2=4-1=3 \Rightarrow f = 4+12=16 < 21 \Rightarrow$ **табыс**

$\mathbf{x^{(5)} = [5][5]}$;

$x_p^{(6)} = 2 \cdot x^{(5)} - x^{(4)}$;

$x_p^{(6)} = [4][2] \Rightarrow f = 4+1+8=13$;

$x_p^{(6)}$:

$x1=4+1=5; \qquad x2=2 \Rightarrow f = 1+1+10=12 < 13 \Rightarrow$ **табыс**

$x1=5; \qquad x2=2+1=3 \Rightarrow f = 1+15=16 > 12 \Rightarrow$ **табыс емес**

$x1=5; \qquad x2=2-1=1 \Rightarrow f = 1+4+5=10 < 12 \Rightarrow$ **табыс**

$\mathbf{x^{(6)} = [5][1];}$

$x_p^{(7)} = 2 \bullet x^{(6)} - x^{(5)};$

$x_p^{(7)} = [6][-1] \Rightarrow f=16-6=10;$

$x_p^{(7)}$:

$x1=6+1=7; \qquad x2=-1 \Rightarrow f=1+16-7=10 = 10 \Rightarrow$ **табыс емес**

$x1=6-1=5; x2=-1 \Rightarrow f = 1+16-5=12 > 10 \Rightarrow$ **табыс емес**

$x1=6; \qquad x2=-1+1=0 \Rightarrow f = 9 < 10 \Rightarrow$ **табыс**

$\mathbf{x^{(7)} = [6][0];}$

$x_p^{(8)} = 2 \bullet x^{(7)} - x^{(6)};$

$x_p^{(8)} = [7][-1] \Rightarrow f=1+16-7=10;$

$x_p^{(8)}$:

$x1=7+1=8; \qquad x2=-1 \Rightarrow f = 4+16-8=12 > 10 \Rightarrow$ **табыс емес;**

$x1=7-1=6; \; x2=-1 \Rightarrow f = 16-6=10 = 10 \Rightarrow$ **табыс емес;**

$x1=7; \qquad x2=-1+1=0 \Rightarrow f = 1+9=10 = 10 \Rightarrow$ **табыс емес**;

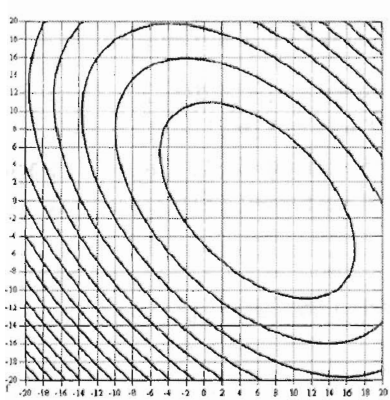
$x1=7; \qquad x2=-1-1=-2 \Rightarrow f = 1+25-14=12 > 10 \Rightarrow$ **табыс емес**;

$\alpha = 2/2=1;$

$x* = [6;0]^T$

$f(x*) = 9.$

Хук-Дживс әдісіне графикалық қосымша



Коши әдісі

$f(x) = x1^2 - 12\cdot x1 + x2^{\,2} - 6\cdot x2 + x1\cdot x2 + 45;$

$\partial f/\partial x1 = 2\cdot x1 + x2 - 12;$

$\partial f/\partial x2 = x1 + 2\cdot x2 - 6;$

Бастапқы нүктелер береміз $\mathbf{x^{(0)} = [-10;-10]^T;}$

$x^{(1)} = x^{(0)} - \alpha^{(0)}\cdot\nabla f(x^{(0)})\ ;$

$\nabla f(x^{(0)}) = [-42;-36]^T;$

$\alpha^{(0)}$ $f(x^{(1)})$-ны минимизациялайтындай таңдаймыз:

$x^{(1)} = [-10;-10]^T - \alpha^{(0)}[-42;-36]^T = [-10+\alpha^{(0)}\cdot 42;-10+\alpha^{(0)}\cdot 36]^T;$

$f(x^{(1)}) = 4572\cdot(\alpha^{(0)})^2 - 3060\cdot\alpha^{(0)} + 525;$

$f'_{\alpha(0)} = 9144\cdot\alpha^{(0)} - 3060 = 0 \ \Rightarrow\ \boldsymbol{\alpha^{(0)} = 0.3346};$

$\mathbf{x^{(1)} = [4.055;2.047]^T;}$

1. $x^{(2)} = x^{(1)} - \alpha^{(1)}\cdot\nabla f(x^{(1)})\ ;$

$\nabla f(x^{(1)}) = [-1.843;2.149]^T;$

$x^{(2)} = [4.055;2.047]^T - \alpha^{(1)}\cdot[-1.843;2.149]^T;$

$f(x^{(2)}) = 4.0548\cdot(\alpha^{(1)})^2 - 8.01428\cdot\alpha^{(1)} + 12.9912;$

$f'_{\alpha(1)} = 8.1096\cdot\alpha^{(1)} - 8.01428 = 0 \ \Rightarrow\ \boldsymbol{\alpha^{(1)} = 0.988};$

$\mathbf{x^{(2)} = [5.876;-0.0767]^T;}$

2. $x^{(3)} = x^{(2)} - \alpha^{(2)}\cdot\nabla f(x^{(2)})\ ;$

$\nabla f(x^{(2)}) = [-0.3247;\ -0.2774]^T;$

$x^{(3)} = [5.876;\ -0.0767]^T - \alpha^{(2)}\cdot[-0.3247;\ -0.2774]^T;$

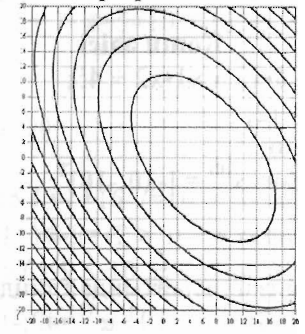
$f(x^{(3)}) = 0.27245\cdot(\alpha^{(2)})^2 - 0.18352\cdot\alpha^{(2)} + 9.0308;$

$f'_{\alpha(2)} = 0.5449\cdot\alpha^{(2)} - 0.18235 = 0 \ \Rightarrow\ \boldsymbol{\alpha^{(2)} = 0.3346};$

$\mathbf{x^{(3)} = [5.9846;\ 0.0161]^T;}$

$x^* = x^{(3)}$ $\mathbf{f^* = 3.666963.}$

Коши әдісінің графикалық қосымшасы



Ньютон әдісі

$f(x) = x1^2 - 12\bullet x1 + x2^2 - 6\bullet x2 + x1\bullet x2 + 45;$

$x^{(0)} = [-10;-10]^T.$

Бірінші туынды:

$\partial f/\partial x1=2\bullet x1 + x2 - 12;$

$\partial f/\partial x2=x1 + 2\bullet x2 - 6.$

Екінші туынды:

$\partial^2 f/\partial x1^2=2;$

$\partial^2 f/\partial x1\partial x2=1.$

$\nabla f(x) = [2\bullet x1 + x2 - 12;x1 + 2\bullet x2 - 6]^T;$

$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$

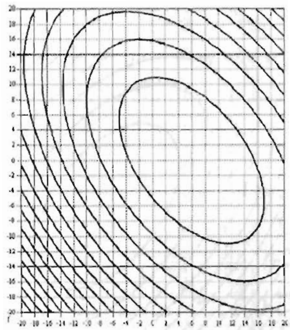
$\nabla f(x^{(0)}) = [-42;-36]^T;$

$x^{(1)} = x^{(0)} - [\nabla^2 f(x)]^{-1}\bullet\nabla f(x^{(0)});$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -42 \\ -36 \end{pmatrix}^T = [6;\ 0]^T;$$

$f(x^{(1)}) = 9.$

Ньютон әдісіне графикалық қосымша:



Түйіндес градиенттер әдісі:

$f(x) = x1^2 - 12 \bullet x1 + x2^2 - 6 \bullet x2 + x1 \bullet x2 + 45;$

$x^{(0)} = [-10;-10]^T;$

градиент компоненттері:

$\partial f/\partial x1=2 \bullet x1 + x2 - 12;$

$\partial f/\partial x2=x1 + 2 \bullet x2 - 6;$

Қадам 1:

$\nabla f(x) = [2 \bullet x1 + x2 - 12; x1 + 2 \bullet x2 - 6]^T;$

$\nabla f(x^{(0)}) = [-42;-36]^T;$

$s^{(0)} = -g^{(0)} = -\nabla f(x^{(0)}) = [42;36]^T.$

Қадам 2:

$x^{(1)} = x^{(0)} - \square \bullet \nabla f(x^{(0)}) \Rightarrow \square\square 0.3346;$

$x^{(1)} = [-10;-10]^T - 0.3346 \bullet [-42;-36]^T = [4.0532;2.0456]^T;$

Қадам 3:

$s^{(1)}$:

$g^{(1)} = [1.848;-2.1444]^T;$

$s^{(1)} = -g^{(1)} + [\ |g^{(1)}|/|g^{(2)}|\ ] \bullet s^{(0)};$

$s^{(1)} = [1.848;-2.1444]^T + [8.0136/3060] \bullet [42;36]^T = [-1.958;-2.05]^T;$

Қадам 4:

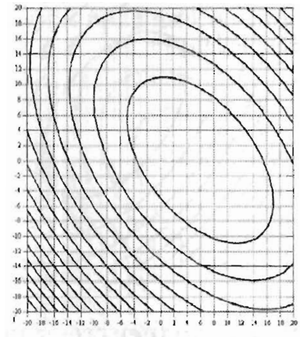
$x^{(2)} = x^{(1)} + \square^1 \bullet s^{(1)} \Rightarrow \square^1 \square 0.988;$

$x^{(2)} = [4.0532;2.0456]^T + 0.988 \bullet [-1.958;-2.05]^T =$

$= [5.9877;0.0202]^T;$

$x^* = [5.9877;0.0202]^T.$

Түйіндес градиенттер әдісіне графикалық қосымша



6. Вариациялық қисаптың қарапайым есебінің экстремальдарын табу

Мысал 1. Вариациялық қисаптың қарапайым есебінің экстремальдарын табу керек.

$$J(y) = \int_0^1 (e^{y(x)} + xy'(x))dx;\ y(0) = 0;\ y(1) = 1;$$

Эйлера-Лагранж теңдеуі: $e^y - 1 = 0$; $e^y = 1$

Шекаралық шарттарды қанағаттандыратын ешімі жоқ.

Мысал 2. Есепте экстремальды тап:

$$J(y) = \int_0^{\pi} (4y(x)\cos(x) + y'^2(x) - y^2(x))dx;\ y(0) = y(\pi) = 0;$$

Эйлера-Лагранж теңдеуі: $-2y'' - 2y + 4\cos(x) = 0$;

$y(x) = C_1\cos(x) + C_2\sin(x)$ – жалпы шешім.

Шектік шарттарды пайдаланып:

$y(x) = (C + x)\sin(x)$; $C \in R^1$.

Сөйтіп, шексіз экстремальдар жиынын аламыз.

СӨЖ тапсырмалары

Графикалық әдістерге есептер

$-x_1 + x_2 \le 3,$
$5x_1 + 3x_2 \le 97,$
$x_1 + 7x_2 \ge 77,$
$f = 3x_1 + 4x_2 \to \text{extr.}$
2. $3x_1 - x_2 \ge 9,$
$2x_1 + 3x_2 \le 50,$
$-x_1 + 4x_2 \ge 19,$
$f = x_1 + 5x_2 \to \text{extr.}$
3. $x_1 + 4x_2 \le 53,$
$x_1 - x_2 \le 3,$
$7x_1 + 3x_2 \ge 71,$
$f = 9x_1 + 2x_2 \to \text{extr.}$
4. $6x_1 - 5x_2 \ge 17,$
$x_1 + 2x_2 \le 34,$
$-4x_1 + 9x_2 \ge 17,$
$f = 5x_1 + 3x_2 \to \text{extr.}$
5. $-3x_1 + 14x_2 \le 78,$
$5x_1 - 6x_2 \le 26,$
$x_1 + 4x_2 \ge 26,$
$f = 5x_1 + 7x_2 \to \text{extr.}$
6. $11x_1 - 3x_2 \ge 24,$
$9x_1 + 4x_2 \le 110,$
$-2x_1 + 7x_2 \ge 15,$
$f = 9x_1 + 2x_2 \to \text{extr.}$
7. $-4x_1 + 5x_2 \le 29,$
$3x_1 - x_2 \le 14,$
$5x_1 + 2x_2 \ge 38,$
$f = 3x_1 + 2x_2 \to \text{extr.}$
8. $2x_1 - x_2 \ge 4,$
$x_1 + 3x_2 \le 37,$
$-4x_1 + 9x_2 \ge 20,$
$f = 4x_1 + 3x_2 \to \text{extr.}$
9. $10x_1 - x_2 \ge 57,$
$2x_1 + 3x_2 \le 53,$
$6x_1 - 7x_2 \le 15,$
$f = 5x_1 + x_2 \to \text{extr.}$
10. $4x_1 - x_2 \ge 6,$
$9x_1 + 8x_2 \le 157,$
$-3x_1 + 11x_2 \ge 16,$
$f = x_1 + x_2 \to \text{extr.}$
11. $-x_1 + x_2 \le 3,$
$5x_1 + 3x_2 \le 97,$
$x_1 + 7x_2 \ge 77,$
$f = 7x_1 + 2x_2 \to \text{extr.}$
12. $3x_1 - x_2 \ge 9,$
$2x_1 + 3x_2 \le 50,$
$-x_1 + 4x_2 \ge 19,$
$f = 6x_1 + x_2 \to \text{extr.}$
13. $x_1 + 4x_2 \le 53,$
$x_1 - x_2 \le 3,$
$7x_1 + 3x_2 \ge 71,$
$f = x_1 + 7x_2 \to \text{extr.}$
14. $6x_1 - 5x_2 \ge 17,$
$x_1 + 2x_2 \le 34,$
$-4x_1 + 9x_2 \ge 17,$
$f = x_1 + 9x_2 \to \text{extr.}$
15. $-3x_1 + 14x_2 \le 78,$
$5x_1 - 6x_2 \le 26,$
$x_1 + 4x_2 \ge 26,$
$f = x_1 + 8x_2 \to \text{extr.}$
16. $11x_1 - 3x_2 \ge 24,$
$9x_1 + 4x_2 \le 110,$
$-2x_1 + 7x_2 \ge 15,$
$f = 7x_1 + x_2 \to \text{extr.}$
17. $-4x_1 + 5x_2 \le 29,$
$3x_1 - x_2 \le 14,$
$5x_1 + 2x_2 \ge 38,$
$f = 3x_1 + x_2 \to \text{extr.}$
18. $2x_1 - x_2 \ge 4,$
$x_1 + 3x_2 \le 37,$
$-4x_1 + 9x_2 \ge 20,$
$f = x_1 + 3x_2 \to \text{extr.}$

19. $10x_1 - x_2 \geq 57$,
$2x_1 + 3x_2 \leq 53$,
$6x_1 - 7x_2 \leq 15$,
$f = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \text{extr.}$

20. $4x_1 - x_2 \geq 6$,
$9x_1 + 8x_2 \leq 157$,
$-3x_1 + 11x_2 \geq 16$,
$f = 8x_1 + 5x_2 \rightarrow \text{extr.}$

Сызықты программалауға арналған есептер

1) $f(x) = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \rightarrow \max$

$x_1 + x_2 + x_3 = 5$,

$3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 14$,

$x_1 + 2x_2 + x_5 = 7$,

$x_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,5.$

2) $f(x) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow$ max

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$,

$2x_1 + x_2 + x_4 = 8$,

$-x_1 + x_2 + x_5 = 1$,

$x_2 + x_6 = 2$,

$x_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,6.$

3) $f(x) = x_1 - x_2 - 3x_3 \rightarrow \min$

$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1$

$4x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -2$

$3x_1 + x_3 \leq 5$

$x_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,3.$

4) $f(x) = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow$ max

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$,

$x_1 + x_2 + x_4 = 4$,

$x_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,4.$

5) $f(x) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$

$x_1 - x_2 + x_3 = 10$,

$2x_1 + x_4 = 40$,

$x_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,4.$

6) $f(x) = -3x_1 - 9x_2 \rightarrow \min$

$x_1 + 4x_2 + x_3 = 8$,

$x_1 + 2x_2 + x_4 = 4$,

$x_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,4.$

7) $F = -2x_1 + x_3 - 3x_4$ (min)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 \leq 8 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 2 \\ 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$$

$x_1,\ x_2 \geq 0$

8) $Z = x_1-2x_2$ (min)

$$\begin{cases} x_1-x_2 \le 1 \\ x_1+x_2 \ge 2 \\ x_1-2x_2 \le 0 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0$

9) $F = 2x_1-x_2+3x_3+x_4-x_5$ (max)

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+3x_4-2x_5 \le 4 \\ -x_1-x_2+3x_3-2x_4+3x_5 \le 10 \\ x_i \ge \quad i=\overline{1,5} \quad 0, \end{cases}$$

10) $F = 4x_1+2x_2$ (max)

$$\begin{cases} -x_1+3x_2 \le 9 \\ 2x_1+3x_2 \le 18 \\ 2x_1-x_2 \le 10 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0$

11) $F = 2x_1-x_2+3x_3+2x_4-x_5$ (max).

$$\begin{cases} -x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1-x_2+x_4=1 \\ x_1+x_2+x_5=2 \end{cases}$$

$x_i \ge \quad i=\overline{1,5} \quad 0,$

12) $F = 2x_1+x_2+5x_4$ (max)

$$\begin{cases} -x_1-3x_2+x_3+2x_4=5 \\ 2x_1+x_2-2x_3+x_4=2 \\ x_1+3x_3- \quad 3x_3=8 \end{cases}$$

$x_i \ge \quad i=\overline{1,4} \quad 0,$

13) $F = 2x_1-x_2+3x_3+x_4-x_5$ (max)

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3+2x_4-x_5 \le 4 \\ x_2-3x_4+2x_5 \ge 2 \\ 2x_1-3x_2-2x_3+x_4-x_5 = 5 \\ x_1+x_3-3x_4+2x_5 = 8 \end{cases}$$

$x_i \geq 0 \qquad i = \overline{1,5}$

14) $F = 8x_1 - 6x_2 - 5x_3 + 2x_4$ (max)

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 16 \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 20 \end{cases}$$

$i = \overline{1.4}$

$x_i \geq 0$

15) $F = 80x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 150x_4 \qquad \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 35, \\ 8x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 5x_4 \leq 85, \\ 6x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 9x_4 \leq 130; \end{cases}$$

Екі фазалық Симплекс әдісіне арналған есептер

1. $-2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 \to \min,$
$-2x_2 + x_4 + x_5 = -3,$
$x_3 - 2x_4 = 2,$
$x_1 + 3x_2 - x_4 \leq 5,$
$x_1 + x_2 \geq -3,$
$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 5.$

2. $-8x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 15x_4 \to \min,$
$-x_1 + 3x_2 + x_3 + 10x_4 \leq 25,$
$2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 10,$
$10x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 \leq 26,$
$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 4.$

3. $3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min,$
$x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 10,$
$2x_1 + 4x_3 \geq 14,$
$2x_2 + x_3 \geq 7,$
$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3.$

4. $-2x_1 - x_2 - x_3 \to \min,$
$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 16,$
$x_1 + x_2 \leq 7,$
$3x_1 + 2x_3 \geq 18,$
$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3.$

5. $x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min,$
$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3,$
$2x_1 + x_2 \geq 1,$
$2x_2 + 3x_3 \geq 4,$
$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3.$

6. $-x_1 - 2x_2 - 3x_3 \to \min,$
$6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 25,$
$5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 15,$
$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3.$

7. $x_1 + 3x_2 - x_3 \to \min,$
$x_1 + x_2 + x_3 = 4,$
$x_1 - x_2 + x_3 \leq 2,$
$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3.$

8. $x_1 + 3x_2 - x_3 \to \min,$
$x_1 - x_2 + x_3 \leq 1,$
$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4,$
$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3.$

9. $x_1 - 2x_2 + x_3 \to \min,$
$2x_1 - x_2 + x_3 \geq 2,$
$x_1 + x_2 - x_3 \leq 1,$
$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3.$

10. $-x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \min,$
$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq -5,$
$2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 3,$
$2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \leq 3,$
$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3.$

11. $x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 6x_5 \to \max,$
$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 \leq 1,$
$5x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 \leq 2,$
$4x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \leq 2,$
$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 4.$

12. $5x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max,$
$2x_1 + x_2 + x_3 \le 5,$
$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6,$
$5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \ge 1,$
$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$
13. $2x_1 + 3x_2 + 5/2x_3 \to \min,$
$2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 6,$
$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \ge 16,$
$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \ge 12,$
$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$
14. $4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \to \min,$
$x_1 + x_2 + x_3 \ge 5,$
$x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 1,$
$x_1 - x_2 - 4x_3 \le -3,$
$x_1 - x_2 + 8x_3 \ge 4,$
$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$
15. $2x_1 + 4x_2 + 12x_4 \to \min,$
$x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \ge 10,$
$2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \ge 4,$
$x_j \ge 0,\ j = 1, \ldots, 4.$
16. $2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \max,$
$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 2,$
$2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \ge 3,$
$3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 \le 4,$
$x_j \ge 0,\ j = 1, \ldots, 4.$
17. $5x_1 - x_2 - 4x_3 \to \max,$
$-x_2 + 2x_3 \ge 9,$
$-x_1 + x_2 \ge 1,$
$x_1 + x_2 - 3x_3 \ge 8,$
$x_1 - x_3 \le 4,$
$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$
18. $4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \to \min,$
$3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 9,$
$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 8,$
$x_1 + 6x_2 \ge 12,$
$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$
19. $x_1 - x_2 - x_3 \to \min,$
$2x_1 - x_2 + x_3 \le 1,$
$4x_1 - 2x_2 + x_3 \ge -2,$
$3x_1 + x_3 \le 5,$
$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$
20. $-x_1 - 2x_2 + x_3 \to \min,$
$-x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 6,$
$x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6,$
$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4,$
$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$
21. –
$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 \to \max,$

$x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 3,$
$x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 = -1,$
$2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1,$
$x_j \ge 0,\ j = 1,\ldots,5;$

22. $x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \to \min,$

$2x_1 - x_2 + x_4 = 3,$
$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1,$
$x_1 + 2x_2 - x_3 = 1,$
$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 1,$
$x_j = 0,\ j = 1,\ldots,4.$
23. $-8x_1 - 2x_2 + 5x_3 -$
$15x_4 \to \min,$
$-x_1 + 3x_2 + x_3 + 10x_4 \le 25,$
$2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 \le 10,$
$10x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 \le 26,$
$x_j \ge 0,\ j = 1, \ldots, 4.$
24. $3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min,$
$x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 10,$
$2x_1 + 4x_3 \ge 14,$
$2x_2 + x_3 \ge 7,$
$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$
25. $-2x_1 - x_2 - x_3 \to \min,$
$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 16,$
$x_1 + x_2 \le 7,$
$3x_1 + 2x_3 \ge 18,$
$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$

26. $x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min$,
$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3$,
$2x_1 + x_2 \geq 1$,
$2x_2 + 3x_3 \geq 4$,
$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3$.
27. $-x_1 - 2x_2 - 3x_3 \to \min$,
$6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 25$,
$5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 15$,
$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3$.
28. $x_1 + 3x_2 - x_3 \to \min$,
$x_1 + x_2 + x_3 = 4$,
$x_1 - x_2 + x_3 \leq 2$,
$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3$.
29. $x_1 + 3x_2 - x_3 \to \min$,
$x_1 - x_2 + x_3 \leq 1$,
$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$,
$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3$.
30. $x_1 - 2x_2 + x_3 \to \min$,
$2x_1 - x_2 + x_3 \geq 2$,
$x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$,
$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3$.
31. $-x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \min$,
$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq -5$,
$2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 3$,
$2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \leq 3$,
$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3$.
32. $x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 6x_5 \to \max$,
$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 \leq 1$,
$5x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 \leq 2$,
$4x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \leq 2$,
$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 4$.
33. $5x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$,
$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$,
$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$,
$5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 1$,
$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3$.
34. $2x_1 + 3x_2 + 5/2x_3 \to \min$,
$2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6$,
$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 16$,
$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 12$,
$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3$.
35. $4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \to \min$,
$x_1 + x_2 + x_3 \geq 5$,
$x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 1$,
$x_1 - x_2 - 4x_3 \leq -3$,
$x_1 - x_2 + 8x_3 \geq 4$,
$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3$.
36. $2x_1 + 4x_2 + 12x_4 \to \min$,
$x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \geq 10$,
$2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \geq 4$,
$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 4$.
37. $2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \max$,
$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2$,
$2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \geq 3$,
$3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 \leq 4$,
$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 4$.
38. $5x_1 - x_2 - 4x_3 \to \max$,
$-x_2 + 2x_3 \geq 9$,
$-x_1 + x_2 \geq 1$,
$x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 8$,
$x_1 - x_3 \leq 4$,
$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3$.
39. $4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \to \min$,
$3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 9$,
$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 8$,
$x_1 + 6x_2 \geq 12$,
$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3$.
40. $x_1 - x_2 - x_3 \to \min$,
$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1$,
$4x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -2$,
$3x_1 + x_3 \leq 5$,
$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3$.
41. $-x_1 - 2x_2 + x_3 \to \min$,
$-x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 6$,
$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6$,
$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$,
$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3$.

42. –

$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 \to \max,$

при ограничениях

$x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 3,$

$x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 = -1,$

$2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1,$

$x_j \geq 0,\ j = 1,\dots,5;$

Транспорт есептерін шығаруға арналған есептер.

1. $a_1 = 200$, $a_2 = 150$, $a_3 = 150$,
$b_1 = 90$, $b_2 = 100$, $b_3 = 70$, $b_4 = 130$, $b_5 = 110$,

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 21 & 14 & 17 \\ 14 & 8 & 15 & 11 & 21 \\ 19 & 16 & 26 & 12 & 20 \end{pmatrix}.$$

2. $a_1 = 300$, $a_2 = 280$, $a_3 = 220$,
$b_1 = 180$, $b_2 = 140$, $b_3 = 190$, $b_4 = 120$, $b_5 = 170$,

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 21 & 9 & 10 & 16 \\ 13 & 15 & 11 & 13 & 21 \\ 19 & 26 & 12 & 17 & 20 \end{pmatrix}.$$

3. $a_1 = 250$, $a_2 = 200$, $a_3 = 150$,
$b_1 = 180$, $b_2 = 120$, $b_3 = 90$, $b_4 = 105$, $b_5 = 105$,

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 21 & 10 & 15 \\ 13 & 4 & 15 & 13 & 21 \\ 19 & 16 & 26 & 17 & 20 \end{pmatrix}.$$

4. $a_1 = 400$, $a_2 = 250$, $a_3 = 350$,
$b_1 = 200$, $b_2 = 170$, $b_3 = 230$, $b_4 = 225$, $b_5 = 175$,

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 9 & 5 & 11 & 17 \\ 14 & 5 & 12 & 14 & 22 \\ 20 & 17 & 13 & 18 & 21 \end{pmatrix}.$$

5. $a_1 = 150$, $a_2 = 200$, $a_3 = 150$,
$b_1 = 160$, $b_2 = 70$, $b_3 = 90$, $b_4 = 80$, $b_5 = 100$,

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 20 & 7 & 11 & 16 \\ 4 & 14 & 12 & 15 & 17 \\ 15 & 22 & 11 & 12 & 19 \end{pmatrix}.$$

6. $a_1 = 280$, $a_2 = 300$, $a_3 = 220$,
$b_1 = 170$, $b_2 = 120$, $b_3 = 190$, $b_4 = 140$, $b_5 = 180$,

$$C = \begin{pmatrix} 28 & 12 & 7 & 18 & 7 \\ 35 & 14 & 12 & 15 & 3 \\ 30 & 16 & 11 & 25 & 15 \end{pmatrix}.$$

7. $a_1 = 150$, $a_2 = 250$, $a_3 = 200$,
$b_1 = 180$, $b_2 = 120$, $b_3 = 90$, $b_4 = 105$, $b_5 = 105$,

$$C = \begin{pmatrix} 14 & 6 & 4 & 9 & 4 \\ 15 & 35 & 12 & 11 & 6 \\ 15 & 11 & 6 & 13 & 8 \end{pmatrix}.$$

8. $a_1 = 250$, $a_2 = 400$, $a_3 = 350$,
$b_1 = 300$, $b_2 = 160$, $b_3 = 220$, $b_4 = 180$, $b_5 = 140$,

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 15 & 35 & 20 & 7 \\ 15 & 35 & 12 & 11 & 6 \\ 16 & 19 & 40 & 15 & 25 \end{pmatrix}.$$

9. $a_1 = 150$, $a_2 = 150$, $a_3 = 200$,
$b_1 = 100$, $b_2 = 70$, $b_3 = 130$, $b_4 = 110$, $b_5 = 90$,

$$C = \begin{pmatrix} 20 & 3 & 9 & 15 & 35 \\ 14 & 10 & 12 & 20 & 46 \\ 25 & 11 & 16 & 19 & 48 \end{pmatrix}.$$

10. $a_1 = 280$, $a_2 = 220$, $a_3 = 300$,
$b_1 = 190$, $b_2 = 140$, $b_3 = 180$, $b_4 = 120$, $b_5 = 170$,

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 9 & 15 & 35 \\ 3 & 10 & 12 & 20 & 46 \\ 15 & 11 & 16 & 19 & 48 \end{pmatrix}.$$

11. $a_1 = 200$, $a_2 = 250$, $a_3 = 150$,
$b_1 = 120$, $b_2 = 180$, $b_3 = 105$, $b_4 = 90$, $b_5 = 105$,

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 17 & 11 & 8 \\ 13 & 4 & 9 & 5 & 7 \\ 6 & 7 & 14 & 10 & 6 \end{pmatrix}.$$

12. $a_1 = 350$, $a_2 = 400$, $a_3 = 250$,
$b_1 = 175$, $b_2 = 225$, $b_3 = 230$, $b_4 = 170$, $b_5 = 200$,

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 13 & 18 & 17 & 8 \\ 6 & 10 & 15 & 6 & 3 \\ 24 & 21 & 9 & 16 & 17 \end{pmatrix}.$$

13. $a_1 = 250$, $a_2 = 250$, $a_3 = 200$,
$b_1 = 120$, $b_2 = 110$, $b_3 = 85$, $b_4 = 195$, $b_5 = 190$,

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 7 & 16 & 4 & 11 \\ 20 & 9 & 6 & 10 & 9 \\ 2 & 4 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

14. $a_1 = 250$, $a_2 = 180$, $a_3 = 270$,
$b_1 = 160$, $b_2 = 120$, $b_3 = 100$, $b_4 = 150$, $b_5 = 170$,

$$C = \begin{pmatrix} 14 & 11 & 9 & 13 & 18 \\ 6 & 5 & 14 & 4 & 14 \\ 7 & 19 & 11 & 6 & 13 \end{pmatrix}.$$

15. $a_1 = 350$, $a_2 = 300$, $a_3 = 350$,
$b_1 = 160$, $b_2 = 160$, $b_3 = 180$, $b_4 = 220$, $b_5 = 280$,
$$C = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 10 & 14 & 18 \\ 17 & 6 & 4 & 11 & 9 \\ 12 & 8 & 19 & 10 & 13 \end{pmatrix}.$$

16. $a_1 = 250$, $a_2 = 350$, $a_3 = 300$,
$b_1 = 150$, $b_2 = 170$, $b_3 = 190$, $b_4 = 210$, $b_5 = 180$,
$$C = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 16 & 10 & 16 \\ 13 & 12 & 18 & 12 & 20 \\ 19 & 15 & 10 & 13 & 13 \end{pmatrix}.$$

17. $a_1 = 220$, $a_2 = 400$, $a_3 = 280$,
$b_1 = 160$, $b_2 = 180$, $b_3 = 170$, $b_4 = 200$, $b_5 = 190$,
$$C = \begin{pmatrix} 20 & 17 & 13 & 2 & 17 \\ 6 & 10 & 9 & 4 & 15 \\ 3 & 7 & 13 & 6 & 23 \end{pmatrix}.$$

18. $a_1 = 160$, $a_2 = 400$, $a_3 = 240$,
$b_1 = 170$, $b_2 = 190$, $b_3 = 140$, $b_4 = 180$, $b_5 = 120$,
$$C = \begin{pmatrix} 6 & 13 & 14 & 18 & 14 \\ 25 & 14 & 7 & 5 & 16 \\ 11 & 4 & 10 & 18 & 9 \end{pmatrix}.$$

19. $a_1 = 300$, $a_2 = 330$, $a_3 = 370$,
$b_1 = 190$, $b_2 = 150$, $b_3 = 240$, $b_4 = 200$, $b_5 = 220$,
$$C = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 16 & 8 & 11 \\ 21 & 10 & 8 & 15 & 23 \\ 19 & 10 & 4 & 9 & 17 \end{pmatrix}.$$

20. $a_1 = 280$, $a_2 = 340$, $a_3 = 280$,
$b_1 = 170$, $b_2 = 160$, $b_3 = 190$, $b_4 = 200$, $b_5 = 180$,
$$C = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 & 14 & 9 \\ 15 & 11 & 6 & 17 & 11 \\ 13 & 18 & 10 & 12 & 22 \end{pmatrix}.$$

21. a) $a_1 = 300$, $a_2 = 200$, $a_3 = 200$,
$b_1 = 100$, $b_2 = 180$, $b_3 = 120$, $b_4 = 140$, $b_5 = 160$,
$$C = \begin{pmatrix} 20 & 9 & 10 & 6 & 16 \\ 4 & 7 & 5 & 11 & 17 \\ 9 & 13 & 16 & 12 & 8 \end{pmatrix};$$

б) $a_1 = 300,\ a_2 = 150,\ a_3 = 250,$
$b_1 = 170,\ b_2 = 110,\ b_3 = 100,\ b_4 = 120,\ b_5 = 200,$

$$C = \begin{pmatrix} 70 & 50 & 15 & 80 & 70 \\ 80 & 90 & 40 & 60 & 85 \\ 50 & 10 & 90 & 11 & 25 \end{pmatrix}.$$

Берілген $f(x)$ сызықтық функцияның унимодалды болатын аралығын анықтау керек.

1. $f(x) = x^2 + 1$.

3.2. $f(x) = x^3\left(1 + \frac{x}{4}\right)$.

$f(x) = -x^2 + \frac{x^2+1}{2}$.

3.4. $f(x) = x - \frac{x^2}{2}$.

3.5. $f(x) = 2\ln x$.

3.6. $f(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1}$.

3.7. $f(x) = -3x^2 + \frac{x^4}{4}$, $x < 0$.

3.8. $f(x) = -2x^2 + \frac{x^4}{4}$, $x > 0$.

3.9. $f(x) = x^{\frac{5}{3}} - 5x^{\frac{2}{3}}$.

3.10. $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

3.11. $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$.

3.12. $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$.

3.13. $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$.

3.14. $f(x) = -\frac{x^2-3}{x+2}$.

3.15. $f(x) = 2x - 3x^{\frac{2}{3}}$.

3.16. $f(x) = -\frac{\ln x}{x}$.

3.17. $f(x) = 3 + \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

3.18. $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

3.19. $f(x) = -(1-x)^2(1+x)(1+x+x^2)$.

3.20. $f(x) = (1-x)^2(1+x)(1+x+x^2)$.

3.21. $f(x) = \frac{(4-x)^3}{(2-x)}$.

3.22. $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$.

3.23. $f(x) = -x - \sqrt{-x}$.

3.24. $f(x) = -x + \sqrt{-x}$.

3.25. $f(x) = (2x+1)\sqrt[3]{(x-2)^2}$.

3.26. $f(x) = (x-5)e^x$.

3.27. $f(x) = x^2 - 3x + x\ln x$.

3.28. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \sin x$.

3.29. $f(x) = x^4 - 10x^3 + 36x^2 + 5x$.

3.30. $f(x) = \ln(1+x^2) - \sin x$.

9. $c = \begin{pmatrix} 56 & 47 & 49 \\ 55 & 49 & 47 \\ 62 & 55 & 56 \\ 61 & 54 & 52 \end{pmatrix}$ $\quad a_1 = 5, a_2 = 3, a_3 = 9, a_4 = 6, \quad b_1 = 3, b_2 = 9, b_3 = 8;$

$$10.\ c=\begin{pmatrix} 43 & 37 & 46 \\ 45 & 41 & 49 \\ 41 & 35 & 42 \\ 35 & 33 & 35 \end{pmatrix} \qquad a_1=6, a_2=6, a_3=7, a_4=6, \qquad b_1=5, b_2=9, b_3=6;$$

Шарттсыз оңтайландыру есебін шығар

1. $J(u)=3u_1-2u_2-\frac{1}{2}u_1^2-u_2^2+u_1u_2 \to \max,$

2. $J(u)=-4u_1+8u_2-u_1^2-\frac{3}{2}u_2^2+2u_1u_2 \to \max,$

3. $J(u)=-4u_1+8u_2-u_1^2-\frac{3}{2}u_2^2+2u_1u_2 \to \max,$

4. $J(u)=-4u_1+8u_2-u_1^2-\frac{3}{2}u_2^2+2u_1u_2 \to \max,$

5. $J(u)=3u_1-2u_2-\frac{1}{2}u_1^2-u_2^2+u_1u_2 \to \max,$

6. $J(u)=-u_1+6u_2-u_1^2-3u_2^2+3u_1u_2 \to \max,$

7. $J(u)=-u_1+6u_2-u_1^2-3u_2^2+3u_1u_2 \to \max,$

8. $J(u)=-u_1+6u_2-u_1^2-3u_2^2+3u_1u_2 \to \max,$

9. $J(u)=6u_2-u_1^2-\frac{3}{2}u_2^2+2u_1u_2 \to \max,$

10. $J(u)=6u_2-u_1^2-\frac{3}{2}u_2^2+2u_1u_2 \to \max,$

Шартты оңтайландыру есебін шығар

1. $J(u)=2u_1+2u_2-u_1^2-2u_2^2+2u_1u_2 \to \max,$
   $2u_1+u_2\le 4,\ u_1\ge 0, \qquad -u_1+u_2\le 2,\ u_2\ge 0.$
2. $J(u)=2u_1+2u_2-u_1^2-2u_2^2+2u_1u_2 \to \max,$
   $2u_1-u_2\le 2,\ u_1\ge 0, \qquad u_2\le 4,\ u_2\ge 0.$
3. $J(u)=4u_1+4u_2-3u_1^2-u_2^2+2u_1u_2 \to \max,$
   $4u_1+5u_2\le 20,\ u_1\ge 0, \qquad u_1\le 4,\ u_2\ge 0.$
4. $J(u)=4u_1+4u_2-3u_1^2-u_2^2+2u_1u_2 \to \max,$

$3u_1+6u_2\le 18,\ u_1\ge 0,\qquad u_1-4u_2\le 4,\ u_2\ge 0.$

5. $J(u)=4u_1+4u_2-3u_1^2-u_2^2+2u_1u_2\to\max,$
$3u_1+4u_2\le 12,\ u_1\ge 0,\qquad u_1-2u_2\le 2,\ u_2\ge 0.$

6. $J(u)=12u_1+4u_2-3u_1^2-u_2^2\to\max,\quad u_1+u_2\le 6,\ u_1\ge 0,$
$-\frac{1}{2}u_1+\frac{1}{2}u_2\le -1,\ u_2\ge 0.$

7. $J(u)=\frac{11}{2}u_1-\frac{1}{6}u_2-u_1^2-\frac{2}{3}u_2^2+\frac{1}{2}u_1u_2\to\max,$
$2u_1-u_2\le 2,\ u_1\ge 0,\qquad -u_1+2u_2\le 2,\ u_2\ge 0.$

8. $J(u)=18u_1+12u_2-2u_1^2-u_2^2-2u_1u_2\to\max,$
$u_1+u_2\le 4,\ u_1\ge 0,\qquad u_1+\frac{1}{2}u_2\ge 1,\ u_2\ge 0.$

9. $J(u)=-6u_1+16u_2-\frac{1}{2}u_1^2-\frac{5}{2}u_2^2+2u_1u_2\to\max,$
$5u_1+2u_2\le 10,\ u_1\ge 0,\qquad 3u_1+2u_2\ge 6,\ u_2\ge 0.$

10. $J(u)=11u_1+8u_2-2u_1^2-u_2^2-u_1u_2\to\max,$
$u_1-u_2\le 0,\ u_1\ge 0,\qquad 3u_1+4u_2\le 12,\ u_2\ge 0.$

Вариациялық қисаптарға есеп

1) $J(y)=\int_0^1 (y'^2(x)+y'(x)y(x)+12xy(x))dx;\ y(0)=y(1)=0;$

2) $J(y)=\int_0^1 (e^{y(x)}+xy'(x))dx;\ y(0)=0;\ y(1)=1;$

3) $J(y)=\int_0^{\pi} (4y(x)\cos(x)+y'^2(x)-y^2(x))dx;\ y(0)=y(\pi)=0;$

4) $J(y)=\int_0^1 (e^{y(x)+x}-y(x)-\sin(x))dx;\ y(0)=0;\ y(1)=-1;$

5) $J(y)=\int_0^1 (y'^2(x))dx;\ y(0)=0;\ y(1)=1;$

6) $J(y)=\int_{-1}^1 (xy'(x)+y'^2(x))dx;\ y(-1)=1;\ y(1)=0;$

7) $J(y)=\int_0^1 (y(x)-y'^2(x))dx;\ y(0)=y(1)=0;$

Вариациялық қисап есебін шығар

1) $J(y_1,y_2) = \int_0^1 (y_1'^2(x) + y_2'^2(x) + x^3)dx;$

$y_1(0) = y_2(1) = 2;\ y_1(1) = y_2(0) = 1;\quad y_1 - 2y_2 + 3x = 0;$

2) $J(y_1,y_2) = \int_0^1 (y_1'^2(x) + y_2^2(x))dx;$

$y_1(0) = y_2(1) = 0;\ y_1(1) = y_2(0) = 1;\ y_1' - y_2 = 0;$

3) $J(y_1,y_2) = \int_a^b (y_1(x) + y_2(x) + y_2'^2(x))dx;$

$y_1(a) = y_1^{(0)};\ y_2(a) = y_2^{(0)};\ y_1(b) = y_1^{(1)};\ y_2(b) = y_2^{(1)};\ \ y_1' + y_2' - 1 = 0$

Студенттердің өзіндік жұмысы

№№ п.п.	СӨЖ тақырыптардың аттары және тапсырмаларының мазмұны	Бақылау формасы
1	Сызықтық программалау есебін симплекс кестесімен шығару алгоритмі. Есептің практикада қолданылуына талдау жасау.	Нұсқа бойынша есеп шығару
2	Жасанды базис әдісі. Есептің практикада қолданылуына талдау жасау.	Нұсқа бойынша есеп шығару
3	Лагранж функциясы	Конспект жазу
4	Сильвестер әдісі	реферат
5	Изопериметрлік есеп	реферат
6	Больц есебі	реферат
7	Гаусс-Зейдел әдісі	реферат
8	Пауэлла әдісі	реферат
9	Гамори әдісі	реферат
10	Кездейсоқ іздеу әдісі	реферат
11	Вариациялық қисаптың қойылуы	реферат
12	Ньютон-Рафсон әдісі	реферат

13	Пауэлла алгоритмі	реферат
14	Кун Таккер теоремасы	реферат
15	Динамикалық программалау	реферат
16	Бүтін санды программалау	реферат
17	Шектеусіз ақырлы тегіс есептер	реферат
18	Құнды қағаздарға сипаттама	реферат
19	Тиімді жоспардың сызықты моделі	реферат
20	Сызықты программалаудағы қосалқы есеп	реферат
21	Леонтьев және Нейман моделі	реферат
22	Көп айнымалы функцияның экстремумы	реферат
23	Фреш туындысы	реферат
24	Басқару есептері	реферат
25	Үрдістерді модельдеу	реферат

Емтиханға дайындалуға және өзін-өзі тексеруге арналған тапсырмалар, соның ішінде тесттер

1.Сызықты программалау есебінің шарттарын қанағаттандыратын $\bar{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$ сандар қатары не деп аталады?

A) жоспар
B) тиімді жоспар
C) тиімді шешім
D) шешуші элемент
E) шарт

2.Кезеңде болып жатқан үрдісті түсіну, қажетті параметрлерді анықтау не деп аталады?

A) математикалық модельдеу
B) модельдеуді сипаттау
C) есепті шешу әдісін таңдау
D) объектілерді зерттеу
E) есепті ЭЕМ-да шешу

3.Сипатталған модельді математикалық тілге аудару

A) математикалық модельдеу

B) модельдеуді сипаттау
C) есепті шешу әдісін таңдау
D) объектілерді зерттеу
E) есепті ЭЕМ-да шешу

4.Тиімді шешім базистік шешім болып табыла ма?
A) табылады
B) табылмайды
C) кейде табылады
D) шартқа байланысты
E) мүмкін

5. $A_p \cdot \overline{x} = B \cdot \overline{x}_B + D \cdot \overline{x}_D = \overline{A}_0$ бұл -
A) сызықты программалаудың кеңейтілген есебі
B) сызықты программалаудың матрицалық түрі
C) сызықты емес программалаудың кеңейтілген түрі
D) сызықты емес программалаудың алгоритмі
E) дөңес функция

6.Симплекс әдісі екі негізгі этаптары:
A) таяныш жоспар құру, тиімді жоспар құру
B) базис құру, жоспар құру
C) жоспар құру, кесте толтыру
D) кесте толтыру, шешім іздеу
E) тіктөртбұрыштар әдісімен есептеу, шешімді табу

7. $\frac{b_r}{a_{rl}} = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{il}} \middle| \frac{b_i}{a_{il}} > 0 \right\}$ бұл формула?
A) кесте шешуші бағанды анықтау
B) шешуші бағанды табу
C) шешуші жолды табу
D) шешуші элементті табу
E) шешуші кестені табу

8.$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x))dx$-бұл

A) Вариациялық қисаптың қарапайым

B) сызықты емес программалау есебі

C) сызықты емес программалау есебі
D) шартты экстремум есебі
E) шартсыз экстремум есебі

9.Бір уақытта (1) және (2) есептерді қарастырамыз.

$$\left.\begin{aligned} Q(\bar{x}) &= \bar{p}^{\mathrm{T}} \cdot \bar{x} \to \max \\ A \cdot \bar{x} &\le \bar{b}, \\ \bar{x} &\ge 0 \end{aligned}\right\} \quad (1) \qquad \left.\begin{aligned} W(\bar{u}) &= \bar{b}^{\mathrm{T}} \cdot \bar{u} \to \min \\ A^{\mathrm{T}} \cdot \bar{x} &\ge \bar{p}, \\ \bar{u} &\ge 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Қарастырып отырған (2)
A) есеп (1) есептің тура есебі деп аталады
B) есеп (1) есептің түйіндес есебі деп аталады
C) есеп (1) есептің кері есебі деп аталады
D) есеп (1) есептің транспорттық есебі деп аталады
E) есеп (1) есептің қосалқы есебі деп аталады

10. $f_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y(x), y'(x)) = 0$ бұл
A) Эйлер – Лагранж теңдеуі
B) Ньютон теңдеуі
C) Лагранж теңдеуі
D) Гессе теңдеуі
E) Кун Таккер теңдеуі

11.$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \, (i = 1,2, \dots, m)$ жүйенің $x = (x_1, \dots, x_n)$ шешімдері теріс және оң компоненттерден тұрса, онда шешім қалай аталады?
A) үйлесімді
B) стандартты
C) дербес
D) жарамды
E) жарамсыз

12.$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \, (i = 1,2, \dots, m)$ жүйенің $x = (x_1, \dots, x_n)$ шешімдері оң компоненттерден тұрса, онда шешім қалай аталады?
A) үйлесімді
B) стандартты
C) дербес
D) жарамды
E) жарамсыз

13 Бізге келесі есеп берілсін:

$$Q(\overline{x}) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_n \cdot x_n \to \min, \qquad (1)$$

шектеулер жүйесінде:

$$\begin{cases} a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,2} \cdot x_2 + \ldots + a_{1,n} \cdot x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m,1} \cdot x_1 + a_{m,2} \cdot x_2 + \ldots + a_{m,n} \cdot x_n = b_m \end{cases}. \qquad (2)$$

Бұл есеп қандай әдіспен шығады?

A) Эйлер әдісімен

B) Лагранж әдісімен

C) Симплекс әдісімен

D) Вариациялық әдіспен

E) тиімділік әдіспен

14. Егер

a) функцияның x^* - төңіректік минимум нүктесі $[a, b]$ кесіндісінде жатса;

$ə$) минимум нүктесінің бір жағынан алынған кесіндінің кез келген x_1 және x_2 екі нүктесі үшін минимум нүктесіне жақынырақ x_1 нүктесіне функияның аз мәні сәйкес келсе, яғни, $x^* < x_1 < x_2$ теңсіздігі үшін де, $x_2 < x_1 < x^*$ теңсіздігі үшін де $f(x_1) < f(x_2)$ теңсіздігі ақиқат болса, онда $y = f(x)$ үзіліссіз функциясы $[a, b]$ кесіндісінде

A) унимодальды болады

B) тиімді болады

C) оң

D) теріс

E) үзліссіз

15 $f(x) = 2x^2 - \ln x$ функциясы үшін функция унимодальды болатын X аралығын табу керек.

A) унимодельды емес

B) тиімді

C) үзліссіз

D) унимодальы

E) бір қалыпты үзліссіз

16 «Алтын қима» терминін кім енгізді.

A) Ньютон

B) Леонардо да Винчи

C) Лагранж
D) Зейдел
E) Кун Таккер

17. Егер кез келген $X_1 \in D$ және $X_2 \in D$ нүктелерімен бірге осы нүктелерді қосатын кесінді $[X_1 X_2]$ толығымен D жиынында жатса, онда $D \subseteq R^n$ *жиыны не* деп аталады.
A) ойыс
B) тиімді
C) дөңес
D) тиімсіз
E) тегіс

18.Сызықты программалау есебінің шарттарын қанағаттандыратын $\bar{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$ сандар қатары не деп аталады?
A) шарт
B) тиімді жоспар
C) тиімді шешім
D) шешуші элемент
E) жоспар

19 Түйіндес бағыттар әдісі қай кезде пайдаланамыз?
A) көп айнымалы функцияны көп айнымалы функцияны шартсыз минимизациялау
B) сызықты программалауда
C) вариациялық қисапта
D) динамикалық прогрммалауда
E) параметрік программалауда

20 Базистік шешімді табу үшін
A) Симплекс кесте құрамыз
B) Максимум әдісті құрамыз
C) графика құрамыз
D) айнымалыларды негізгі және негізгі емес деп бөлеміз
E) кесте құрамыз

21.Бір уақытта (1) және (2) есептерді қарастырамыз.

$$\left.\begin{array}{l} Q(\bar{x}) = \bar{p}^{\mathrm{T}} \cdot \bar{x} \to \max \\ A \cdot \bar{x} \le \bar{b}, \\ \bar{x} \ge 0 \end{array}\right\} \quad (1) \qquad \left.\begin{array}{l} W(\bar{u}) = \bar{b}^{\mathrm{T}} \cdot \bar{u} \to \min \\ A^{\mathrm{T}} \cdot \bar{x} \ge \bar{p}, \\ \bar{u} \ge 0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

Қарастырып отырған () есеп

A) есеп (2) есептің тура есебі деп аталады

B) есеп (2) есептің түйіндес есебі деп аталады

C) есеп (2) есептің кері есебі деп аталады

D) есеп (2) есептің транспорттық есебі деп аталады

E) есеп (2) есептің тура есебі деп аталады

22. Егер $\Omega \subseteq R^n$ дөңес жиынында кез келген екі беттеспейтін $X_1 \in \Omega$ және $X_2 \in \Omega$ нүктелері үшін, және кез келген λ, $0 \le \lambda \le 1$ үшін

$$f(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \ge \lambda f(X_1) + (1-\lambda) f(X_2)$$

теңсіздігі орындалса, онда $f(X)$ функциясы

A) дөңес деп аталады

B) тегіс деп аталады

C) ойыс деп аталады

D) бір қалыпты тегіс деп аталады

E) вариациялық деп аталады

23 Егер $f(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \le \lambda f(X_1) + (1-\lambda) f(X_2)$ теңсіздігі кез келген λ, $0 \le \lambda \le 1$ үшін қатаң орындалса

$$f(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) > \lambda f(X_1) + (1-\lambda) f(X_2),$$

онда $f(X)$ функциясы.

A) қатаң ойыс

B) қатаң дөңес

C) ойыс

D) дөңес

E)тегіс

24 Вариациялық қисабына

$$J(y) = \int_0^{\pi} (4y(x)\cos(x) + y'^2(x) - y^2(x))dx; \; y(0) = y(\pi) = 0 \text{ есебіне}$$

Эйлер-Лагранж теңдеуін құр

A) $-2y'' - 2y + 4\sin(x) = 0$

B) $2y - 2y + 4\cos(x) = 0$

C) $2y' - 2y + 4\cos(x) = 0$
D) $2y'' - 2y + 4\cos(x) = 0$
E) $-2y'' - 2y + 4\cos(x) = 0$

25 $Q(\bar{x}) = x_4 - x_5 \rightarrow \min$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ x_2 - 2x_4 + x_5 = 2 \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 \end{array}\right\}.$$

$\{x_1, x_2, x_3\}$ базистік айнымалылар ретінде алсақ, шектеулер жүйесі келесі түрде болады:

A) $\left.\begin{array}{l} x_1 = x_4 + 2x_5 \\ x_2 = 2x_4 - x_5 \\ x_3 = 3x_4 - x_5 \end{array}\right\}$

B) $\left.\begin{array}{l} x_3 = 1 - x_4 + 2x_5 \\ x_4 = 2 + 2x_4 - x_5 \\ x_5 = 3 - 3x_4 - x_5 \end{array}\right\}$

C) $\left.\begin{array}{l} x_1 = 1 - x_4 + 2x_5 \\ x_2 = 2 + 2x_4 - x_5 \\ x_3 = 3 - 3x_4 - x_5 \end{array}\right\}$

D) $\left.\begin{array}{l} x_1 = 1 - x_4 + 2x_5 \\ x_1 = 2 + 2x_4 - x_5 \\ x_1 = 3 - 3x_4 - x_5 \end{array}\right\}$

E) $\left.\begin{array}{l} x_1 = -1 - x_4 + 2x_5 \\ x_2 = -2 + 2x_4 - x_5 \\ x_3 = -3 - 3x_4 - x_5 \end{array}\right\}$

26
$Q(\bar{x}) = x_1 - x_2 \rightarrow \min$

$$\left.\begin{array}{l} x_3 = 1 + x_1 - x_2 \\ x_4 = 2 - x_1 + 2x_2 \\ \bar{x} \geq 0 \end{array}\right\}.$$

Есебінде базистік айнымалылар
A) $\{x_3, x_4\}$
B) $\{x_1, x_2\}$
C) $\{x_3, x_2\}$
D) $\{x_1, x_4\}$

E) $\{x_1, x_1\}$

27 $Q(\bar{x}) = x_1 - x_2 \rightarrow \min$

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= 1 + x_1 - x_2 \\ x_4 &= 2 - x_1 + 2x_2 \\ \bar{x} &\geq 0 \end{aligned}\right\}.$$

Есебінде базистік емес айнымалылар

A) $\{x_1, x_2\}$
B) $\{x_3, x_4\}$
C) $\{x_3, x_2\}$
D) $\{x_1, x_4\}$
E) $\{x_1, x_1\}$

28 $Q(\bar{x}) = x_1 - x_2 \rightarrow \min$

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= 1 + x_1 - x_2 \\ x_4 &= 2 - x_1 + 2x_2 \\ \bar{x} &\geq 0 \end{aligned}\right\}.$$

Есебінде базистік айнымалылар
A) $\{x_1, x_2\}$
B) $\{x_3, x_4\}$
C) $\{x_3, x_2\}$
D) $\{x_1, x_4\}$
E) $\{x_1, x_1\}$

29 Сызықты формада минимизациялау (максимизациялау) керек есепті

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i \rightarrow \min(\max)$$

мына шарттарда

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \leq b_j, \; j = \overline{1, m},$$

немесе

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i = b_j, \; j = \overline{(m+1), p},$$

және

$x_i > 0$, $i = \overline{1,n}$,

болса, есеп:

A) динамикалық программалау есебі деп атадады

B) сызықты программалау есебі деп аталады

C) статистикалық программалау есебі

D) дөңес программалау есебі

E) ойыс программалау есеі

30 $\left.\begin{aligned} \bar{c}^{T} \cdot \bar{x} \to \min(\max) \\ A \cdot \bar{x} \le \bar{b}, \\ \bar{x} \ge \bar{0}, \end{aligned}\right\}$

матрица түріндегі есеп сызықты программалау есебінің

A) матирицалық формасы деп аталады

B) векторлық формасы деп аталады

C) графикалық формасы деп аталады

D) симметриялық формасы деп аталады.

E) жиынтықтық формасы деп аталады

31

$\left.\begin{aligned} \bar{c}^{T} \cdot \bar{x} \to \min(\max) \\ A \cdot \bar{x} = \bar{b}, \\ \bar{x} \ge \bar{0}, \end{aligned}\right\}$

түрде жазылған сызықты программалау есебі сызықтық программалаудың деп аталады.

A) матирицалық формасы деп аталады

B) векторлық формасы деп аталады

C) графикалық формасы деп аталады

D) канондық формасы деп аталады.

E) жиынтықтық формасы деп аталады

32 Сызықтық программалаудың кезкелген есебін канондық түрге келтіуге бола ма

A) есептің түріне байланысты

B) есептің шартына байланысты

C) кейде болады

D) болмайды
E) болады

33 $\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i \to \min(\max)$
$x_1 \cdot \overline{A}_1 + x_2 \cdot \overline{A}_2 + \ldots + x_n \cdot \overline{A}_n + x_{n+1} \cdot \overline{A}_{n+1} + \ldots + x_{n+m} \cdot \overline{A}_{n+m} = A_0$,
$\overline{x} \geq \overline{0}$.
бұл
A) дөңес программалау есебі
B) ойыс программалау есебі
C) сызықты программалау есебі
D) вариациялық қисап
E) статистикалық қисап

34 Сызықты программалау есебінің шешімі.
A) сызықты емес форманы минимизациялайтын(максимизациялайтын) жоспары деп аталады
B) матрицалық форманы минимизациялайтын(максимизациялайтын) жоспары деп аталады
C) канондық форманы минимизациялайтын(максимизациялайтын) жоспары деп аталады
D)сызықты форманы минимизациялайтын(максимизациялайтын) жоспары деп аталады
E) түйіндес форманы минимизациялайтын(максимизациялайтын) жоспары деп аталады

35 Таяныш жоспар құру, тиімді жоспар құру бұл
A) есептің бастапқы қадамдары
B) есептің соңғы этаптары
C) транспорт әдісінің шығарылу жолы
D) симплекс әдісінің негізгі этаптары
E) шартты экстремум табу

36 Бұл есепті $x_1,\ldots,x_m$ айнымалыларға қатысты шешеміз:

$$\begin{cases} x_1 = a'_{1,m+1} \cdot x_{m+1} + \ldots + a'_{1,n} \cdot x_n + b'_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = a'_{m,m+1} \cdot x_{m+1} + \ldots + a'_{m,n} \cdot x_n + b'_m \end{cases} . \qquad (3)$$

$x_1,...,x_m$ айнымалыларға сәйкес келетін шарттар векторы базис құрайды. $x_1,...,x_m$ айнымалылыарын.

A) базистік айнымалылар дейді

B) базистік емес айнымалылыр

C) түйіндес айнымалылар

D) үзліссіз айнымалылар

E) функционалды айнымалылар

37 Кез келген сызықты программалау есебін қандай әдіспен шығаруға болады?

A) симплекс әдіспен

B) геометриялық әдіспен

C) потенциялдар әдісімен

D) Лагранж әдісімен

E) Крамер әдісімен

38 Симплекс кестеде бағалау қатнасты анықтау үшін...

A) шешуші жатық жолды есептейміз

B) кезкелген жолды есептейміз

C) бос мүшені есептейміз

D)бос мүшені шешуші бағанға бөлеміз

E) бос мүшені шешуші жолға бөлеміз

39 Таяныш жоспар құру. Төмендегі есепті шешу керек:

$$Q(\bar{x}) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + ... + c_n \cdot x_n \to \min(\max)$$

$$\begin{cases} a_{1,1} \cdot x_1 + ... + a_{1,n} \cdot x_n = b_1 \\ .... \\ a_{m,1} \cdot x_1 + ... + a_{m,n} \cdot x_n = b_m \\ a_{m+1,1} \cdot x_1 + ... + a_{m+1,n} \cdot x_n \le b_{m+1} \\ .... \\ a_{m+p,1} \cdot x_1 + ... + a_{m+p,n} \cdot x_n \le b_{m+p} \end{cases}.$$

Теңсіздіктен теңдікке өту үшін қосымша айнымалылар енгіземіз. Онде шектеулер жүйесі келесі түрде болады:

A) $\begin{cases} 0 = b_1 + a_{1,1} \cdot x_1 - \ldots\ldots\ldots\ldots - a_{1,n} \cdot x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = b_m + a_{m,1} \cdot x_1 - \ldots\ldots\ldots - a_{m,n} \cdot x_n \\ x_{n+1} = b_{m+1} + a_{m+1,1} \cdot x_1 - \ldots - a_{m+1,n} \cdot x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n+p} = b_{m+p} + a_{m+p,1} \cdot x_1 - \ldots - a_{m+p,n} \cdot x_n \end{cases}$

B)

C) $\begin{cases} 0 = b_1 - a_{1,1} \cdot x_1 - \ldots\ldots\ldots\ldots - a_{1,n} \cdot x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = b_m - a_{m,1} \cdot x_1 - \ldots\ldots\ldots - a_{m,n} \cdot x_n \\ x_{n+1} = b_{m+1} - a_{m+1,1} \cdot x_1 - \ldots - a_{m+1,n} \cdot x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n+p} = b_{m+p} - a_{m+p,1} \cdot x_1 - \ldots - a_{m+p,n} \cdot x_n \end{cases}$

D) $\begin{cases} b_1 - a_{1,1} \cdot x_1 - \ldots\ldots\ldots\ldots - a_{1,n} \cdot x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_m - a_{m,1} \cdot x_1 - \ldots\ldots\ldots - a_{m,n} \cdot x_n \\ b_{m+1} - a_{m+1,1} \cdot x_1 - \ldots - a_{m+1,n} \cdot x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{m+p} - a_{m+p,1} \cdot x_1 - \ldots - a_{m+p,n} \cdot x_n \end{cases}$

E) $\begin{cases} a_{1,1} \cdot x_1 - \ldots\ldots\ldots\ldots - a_{1,n} \cdot x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_m - a_{m,1} \cdot x_1 - \ldots\ldots\ldots - a_{m,n} \cdot x_n \\ b_{m+1} - a_{m+1,1} \cdot x_1 - \ldots - a_{m+1,n} \cdot x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{m+p} - a_{m+p,1} \cdot x_1 - \ldots - a_{m+p,n} \cdot x_n \end{cases} = 0$

40 Шешуші жол мен шешуші баған қиылысындағы элемент
A) шешуші элемент деп аталады
B) шешуші жол деп аталады
C) шешуші баған деп аталады
D) базистік элемент деп аталады
E) базистік емес элемент деп аталады

41

Тура есеп:	Шектеулер: $\overline{y} = -A \cdot \overline{x} + \overline{b} \geq \overline{0}$ $\overline{x} \geq \overline{0}$

$$Q(\bar{x}) = \bar{p}^T \cdot \bar{x} \to \max$$
$$A \cdot \bar{x} \le \bar{b}$$
$$\bar{x} \ge \bar{0}$$

Қосалқы есепті құрыңыз:

A) $\begin{array}{l} W(\bar{u}) = -\bar{b}^T \cdot \bar{u} \to \min \\ A^T \cdot \bar{u} \ge \bar{p} \\ \bar{u} \ge \bar{0} \end{array}$ $\begin{array}{l} \bar{v} = A^T \cdot \bar{u} - \bar{p} \ge 0 \\ \bar{u} \ge \bar{0} \end{array}$

B) $\begin{array}{l} W(\bar{u}) = \bar{b}^T \cdot \bar{u} \to \min \\ A^T \cdot \bar{u} \ge \bar{p} \\ \bar{u} \ge \bar{0} \end{array}$ $\begin{array}{l} \bar{v} = A^T \cdot \bar{u} - \bar{p} \ge 0 \\ \bar{u} \ge \bar{0} \end{array}$

C) $\begin{array}{l} W(\bar{u}) = b^T \cdot \bar{u} \to \max \\ A^T \cdot \bar{u} \ge \bar{p} \\ \bar{u} \ge 0 \end{array}$ $\begin{array}{l} \bar{v} = A^T \cdot \bar{u} - \bar{p} \ge 0 \\ \bar{u} \ge \bar{0} \end{array}$

D) $\begin{array}{l} W(\bar{u}) = \bar{b}^T \cdot u \to \max \\ A^T \cdot \bar{u} \ge \bar{p} \\ \bar{u} \ge 0 \end{array}$ $\begin{array}{l} v = A^T \cdot u - p \le 0 \\ u \ge \bar{0} \end{array}$

E) $\begin{array}{l} W(\bar{u}) = \bar{b}^T \cdot u \to \min \\ A^T \cdot \bar{u} \le \bar{p} \\ \bar{u} \ge \bar{0} \end{array}$ $\begin{array}{l} \bar{v} = A^T \cdot \bar{u} - p \le 0 \\ \bar{u} \ge \bar{0} \end{array}$

42 Экстремаль деп

A) экстремум болуы мүмкін функция.
B) максимум болатын функция
C) минимум болатын функция
D) дөңес функция
E) ойыс функция

43 $f(x) = x^6 + 3x^2 + 6x - 1$ функциясы үшін функция унимодалды бола ма?
A) болады
B) болмайды
C) берілген аймақта унимодальды болдады
D) кейде болады
E) дұрыс жауап жоқ

44 Функция унимодальды болу үшін

A) $f''(x) < 0$

B) $f''(x) > 0$

C) $f(x) > 0$

D) $f'(x) > 0$

E) $f''(x) = 0$

45 $f(x)$ сызықтық функциясының x^* төңіректік минимум нүктесін анықтау үшін қандай сандық әдістерді қолданады

A) функцияның унимодальдық аралығын анықтау, функцияны зерттеу

B) функцияны зерттеу, кесте толтыру

C) кесте толтыру, таңдалынған аралықтағы берілген дәлдікпен x^* мәнін есептеуді қарастырады

D) функцияны унимодалдылығын зерттеу,төңректік максимум іздеу

E) функцияның унимодалдылық аралығын анықтау, таңдалынған аралықтағы берілген дәлдікпен x^* мәнін есептеуді қарастырады

46 Жекелеп қарап шығу әдісі минимизациялау есебінің

A) кері әдісі

B) кесте әдісі

C) кима әдісі

D) тура әдістерінің қарапайымы

E) график әдісі

47 $\varepsilon_n = \dfrac{b-a}{n}$.

A) Ньютон әдісіндегі x^* нүктесін анықтаудың ең көп ауытқуы:

B) Симплекс әдісіндегі x^* нүктесін анықтаудың ең көп қателігі

C) Графикалық әдісіндегі x^* нүктесін анықтаудың ең көп қателігі

D) Унимодальдық әдісіндегі x^* нүктесін анықтаудың ең көп қателігі

E)Жекелеп қарап шығу әдісіндегі x^* нүктесін анықтаудың ең көп қателігі

48 Бір айнымалы функцияны шартсыз минимизациялаудағы әдістер:

A) Жекелеп қарап шығу әдісіндегі

B) Функцияның унимодалдылық аралығын тарылту әдістері
C) Дихотомия әдісі
D) Алтын қима әдісі
E) Барлық жауап дұрыс

49 әрбір $X \in [X_1 X_2]$ нүктесі λ, $0 \le \lambda \le 1$ параметрі арқылы $X = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2$ түрінде өрнектелуі мүмкін жиын
A) тұйық жиын
B) ойыс жиын
C) жабық жиын
D дөңес жиын
E)бос жиын

50 Егер $\Omega \subseteq R^n$ дөңес жиынында кез келген екі беттеспейтін $X_1 \in \Omega$ және $X_2 \in \Omega$ нүктелері үшін, және кез келген λ, $0 \le \lambda \le 1$ үшін
$f(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \le \lambda f(X_1) + (1-\lambda)f(X_2)$
теңсіздігі орындалса, онда $f(X)$ функциясы не деп аталады.
A) ойыс
B) үзліссіз
C) дөңес
D) бірқалыпты үзліссіз
E) жалған

51 Қандай тиімді ресурстары таңдау мүмкіндігі, мағынасы бірнеше параметрлер болатын оптимизация объектісін түсіндіреді. Объектінің белгілі бір еркін анықталған деңгейлері-
A)басқару әсерімен
B)тауар көлемі «шикізат шығыны», тауар көлемі «тауар сапасы»
C)максималды табыстар мен минималды баға
D)тиімді объектісі мен оның мақсаты, әрбір тиімді тапсырманың формулировкасы экстримальды мағананы талап етумен және оның тек бір мағаналы үлкендігін максималды баға мен минималды табысты көрсетеді
E)тек тиімді объектісі

52. Егер $f(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \le \lambda f(X_1) + (1-\lambda)f(X_2)$ теңсіздігі кез келген λ, $0 \le \lambda \le 1$ үшін қатаң орындалса

$$f(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) < \lambda f(X_1) + (1-\lambda)f(X_2),$$

онда $f(X)$ функциясы

A) ойыс

B) үзліссіз

C) қатаң дөңес

D) бірқалыпты үзліссіз

E) жалған

53 Егер $\Omega \subseteq R^n$ дөңес жиынында кез келген екі беттеспейтін $X_1 \in \Omega$ және $X_2 \in \Omega$ нүктелері үшін, және кез келген λ, $0 \le \lambda \le 1$ үшін

$$f(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \ge \lambda f(X_1) + (1-\lambda) f(X_2)$$

теңсіздігі орындалса, онда $f(X)$ функциясы

A) ойыс

B) үзліссіз

C) дөңес

D) бірқалыпты үзліссіз

E) жалған ойыс (төмен ойыс, жоғары дөңес) деп аталады.

54 Егер $f(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \le \lambda f(X_1) + (1-\lambda) f(X_2)$ теңсіздігі кез келген λ, $0 \le \lambda \le 1$ үшін қатаң орындалса

$$f(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) > \lambda f(X_1) + (1-\lambda) f(X_2),$$

онда $f(X)$ функциясы

A) қатаң ойыс

B) үзліссіз

C) дөңес

D) бірқалыпты үзліссіз

E) жалған ойыс (төмен ойыс, жоғары дөңес) деп аталады.

55 Егер $f(X)$ функциясы дөңес болса, онда

A) $F(X) = f(X)$

B) $F(X) = -f(X)$

C) $F(X) = -f(X \setminus Y)$

D) $F(X) = -f(Y)$

E) $F(X) - f(X) = 1$

56 Дөңес (ойыс) функциялардың арнайы класы қандай түрдегі форманы құрайды

A) $f(X) = CX^{-1} + XAX^T$

B) $f(X) = CX^T + XX^T$

C) $f(X) = X^T + XAX^T$
D) $f(X) = CX^T + XAX^T$
E) $f(X) = CX^T - XAX^T$

57 Дөңес (ойыс) функциялардың арнайы класы $f(X) = CX^T + XAX^T$ түріндегі форманы құрайды, мұндағы C -
A) тұрақты вектор
B) симметриялы матрица
C) транспонирленген матрица
D) теріс анықталған матрица
E) оң анықталған матрица

58 Дөңес (ойыс) функциялардың арнайы класы $f(X) = CX^T + XAX^T$ түріндегі форманы құрайды, мұндағы А-
A) тұрақты вектор
B) симметриялы матрица
C) транспонирленген матрица
D) теріс анықталған матрица
E) оң анықталған матрица

59 Дөңес (ойыс) функциялардың арнайы класы $f(X) = CX^T + XAX^T$ түріндегі форманы құрайды, мұндағы X^T -
A) тұрақты вектор
B) симметриялы матрица
C) X векторына транспонирленген вектор
D) теріс анықталған матрица
E) оң анықталған матрица

60 Дөңес (ойыс) функциялардың арнайы класы $f(X) = CX^T + XAX^T$
Егер A - оң анықталған матрица болса, онда $f(X)$ функциясы
A) ойыс
B) үзіліссіз
C) қатаң дөңес
D) бірқалыпты үзіліссіз
E) функционал болып табылады

61. Дөңес (ойыс) функциялардың арнайы класы $f(X) = CX^T + XAX^T$
Егер A - теріс анықталған матрица болса, онда $f(X)$ функциясы

A) ойыс
B) үзліссіз
C) қатаң ойыс
D) бірқалыпты үзліссіз
E) функционал болып табылады

62. Кез келген өлшемді дөңес функция
A) қатаң ойыс болып табылады
B) оң болып табылады
C) теріс болып табылады
D) үзіліссіз болып табылады
E) функционал болып табылады

63 Оңтайландырудың көптеген есептерінде $f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j + \sum_{j=1}^{n} r_j x_j$ түріндегі функция қарастырылады, бұл
A) ойыс функциялар
B) дөңес функциялар
C) квадраттық функциялар
D) үзліссіз фукциялар
E) дискретті функциялар

64. Ең тез түсу әдісінің градиенттік түсу әдісінен айырмашылығы
A) α_k шамасын анықтауда
B) Ф шамасын анықтауда
C) функцияны таңдауда
D) айырмашылығы жоқ
E) түйіндес есеп анықтауда

65 Ең тез түсу әдісінде α_k шамасы келесі шарттардан табылады:
A) $\Phi_k(\alpha_k) = \max \Phi_k(\alpha)$
B) $\Phi_k(\alpha_k) = -\min\limits_{\alpha>0} \Phi_k(\alpha)$
C) $\Phi_k(\alpha_k) = \min\limits_{\alpha>0} \Phi_k(\alpha)$
D) $\Phi_k(\alpha_k) = \Phi_k(\alpha)$
E) $\Phi_k(\alpha_k) = \min\limits_{\alpha>0} \Phi_k(\alpha) - 1$

66. Ең тез түсу әдісінде α_k шамасы келесі шарттардан табылады $\Phi_k(\alpha_k) = \min_{\alpha>0} \Phi_k(\alpha)$ мұнда $\Phi_k(\alpha)$-

A) $\Phi_k(\alpha) = f\left(x - \alpha f'\left(x^{(k)}\right)\right)$
B) $\Phi_k(\alpha) = f\left(x^{(k)} - \alpha f''\left(x^{(k)}\right)\right)$
C) $\Phi_k(\alpha) = f\left(x^{(k)} - \alpha f\left(x^{(k)}\right)\right)$
D) $\Phi_k(\alpha) = f'\left(x^{(k)} + \alpha f'\left(x^{(k)}\right)\right)$
E) $\Phi_k(\alpha) = f\left(x^{(k)} - \alpha f'\left(x^{(k)}\right)\right)$

67.Егер $f(x)$ - $f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j + \sum_{j=1}^{n} r_j x_j$ түрдегі квадратты функция болса, онда α_k шамасы:

A) $\alpha_k = \frac{\left(f'^{(k)} - f'^{(k)}\right)}{\left(Qf'^{(k)}, f'^{(k)}\right)}$
B) $\alpha_k = \frac{\left(f'^{(k)}, f'^{(k)}\right)}{\left(Qf'^{(k)} + f'^{(k)}\right)}$
C) $\alpha_k = \frac{\left(f'^{(k)}, f'^{(k)}\right)}{\left(Qf'^{(k)}, f'^{(k)}\right)}$
D) $\alpha_k = -\frac{\left(f'^{(k)}, f'^{(k)}\right)}{\left(Qf'^{(k)}, f'^{(k)}\right)}$
E) $\alpha_k = \frac{\left(f'^{(k)} + f'^{(k)}\right)}{\left(Qf'^{(k)} + f'^{(k)}\right)}$

68. $f(x)$ функциясының минимум нүктесіне жуық келесі түрде $\{x^{(k)}\}$ тізбегін құру бұл қай әдістің идеясы

A) Түйіндес бағыттар әдісінің
B) тура бағыттың әдісі
C) ең тез түсу әдісі
D) Ньютон әдісі
E) Крамер әдісі

69 Түйіндес бағыттар әдісініде $f(x)$ функциясының минимум нүктесіне жуық келесі түрде $\{x^{(k)}\}$ тізбегін құрамыз:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k p^{(k)}, \ k = 0, 1, \dots, \ x^{(0)} \in R^n,$$

мұндағы $x^{(0)}$ -

A) түсу бағыты
B) соңғы жуықтау
C) ортаңғы жуықтау

D) алдын ала таңдалынған бастапқы жуықтау,

E) алдын ала жуықтау

70 Түйіндес бағыттар әдісінде түсу бағыты қалай анықталады:

A) $p^{(k)} = f'\left(x^{(k)}\right) + \beta_k p^{(k-1)}, \ k = 1, 2, \ldots, \ p^{(0)} = f'\left(x^{(0)}\right),$

B) $p^{(k)} = -f'\left(x^{(k)}\right) + \beta_k p^{(k-1)}, \ k = 1, 2, \ldots, \ p^{(0)} = f'\left(x^{(0)}\right),$

C) $\beta_k = \dfrac{\left\|f'\left(x^{(k)}\right)\right\|^2}{\left\|f'\left(x^{(k-1)}\right)\right\|^2} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial f\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_i}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial f\left(x^{(k-1)}\right)}{\partial x_i}\right)^2}$

D) $\alpha_k = \dfrac{\left(f'^{(k)} + f'^{(k)}\right)}{\left(Qf'^{(k)} + f'^{(k)}\right)}$

E) $\Phi_k(\alpha) = f\left(x \ -\alpha f'\left(x^{(k)}\right)\right)$

71 Түйіндес бағыттар әдісінде түсу бағыты $p^{(k)}$ келесі формуламен анықталады:

$p^{(k)} = f'\left(x^{(k)}\right) + \beta_k p^{(k-1)}, \ k = 1, 2, \ldots, \ p^{(0)} = f'\left(x^{(0)}\right)$, мұнда β_k

A) $\beta_k = 1 - \dfrac{\left|f'\left(x^{(k)}\right)\right|^2}{\left|f'\left(x^{(k-1)}\right)\right|^2} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial f\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_i}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial f\left(x^{(k-1)}\right)}{\partial x_i}\right)^2}$

B) $\beta_k = \dfrac{\left|f'\left(x^{(k)}\right)\right|^2}{\left|f'\left(x^{(k-1)}\right)\right|^2} + 1 = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial f\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_i}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial f\left(x^{(k-1)}\right)}{\partial x_i}\right)^2}$

C) $\beta_k = \dfrac{\left|f'\left(x^{(k)}\right)\right|^2}{\left|f'\left(x^{(k-1)}\right)\right|^2} + \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial f\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_i}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial f\left(x^{(k-1)}\right)}{\partial x_i}\right)^2}$

D) $\beta_k = \dfrac{\left\|f'\left(x^{(k)}\right)\right\|^2}{\left\|f'\left(x^{(k-1)}\right)\right\|^2} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial f\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_i}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial f\left(x^{(k-1)}\right)}{\partial x_i}\right)^2}$

E) $\beta_k = \frac{\left|f'\left(x^{(k)}\right)\right|^2}{\left|f'\left(x^{(k-1)}\right)\right|^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_i}\right)^2}{1-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f\left(x^{(k-1)}\right)}{\partial x_i}\right)^2}$

72. Түйіндес бағыттар әдісі ең тез түсу әдісінен айырмашылығы

A) тек қана әрбір қадамдағы функцияның кему бағытымен ($-f'\left(x^{(k)}\right)$ шамасының орнына $-p^{(k)}$) ерекшеленеді

B) айрмашылық жоқ

C) әр бір қадамда өсу бағыты өзгеруімен

D) тек қана әрбір қадамдағы функцияның өсу бағытымен ($-f'\left(x^{(k)}\right)$ шамасының орнына $-p^{(k)}$) ерекшеленеді

E) функция таңбаларында

73. $\left\|f'\left(x^{(k)}\right)\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_i}\right]^2} \le \varepsilon$ теңсіздігі не үшін қарастырылады?

A) түйіндес бағыттар әдісінде есептеулердің белгілі дәлдікке жету критерийі

B) теңдеуді бағалау үшін

C) тиімділік критериин тексеру үшін

D) дөңестікті тексеру үшін

E) қадамдарға көшу үшін

74. R^n - кеңістігінде дөңес квадраттық функцияны минимизациялау үшін:

A) қадамдар саны шектелген болу керек

B) түйіндес бағыттар әдісінің n артық итерациясы талап етіледі

C) есептегі функциялар шектеулі болу керек

D) түйіндес бағыттар әдісінің n - нен кем емес итерациясы талап етіледі

E) түйіндес бағыттар әдісінің n - нен артық емес итерациясы талап етіледі

.75. Симплекс кестесі құрылған, бағалау қатнасын анықтаңыз:

X_{j0}	β_i	C_j	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	β_i/α_{ik}
			9	-2	0	-50	1	0	0	0	0	
X_6	3	0	3	0	-3	20	1	1	0	0	0	3/20
X_7	8	0	24	0	12	-40	4	0	1	0	0	-1/5

Кестетің жалғасы

X_8	16	0	6	0	0	20	-10	0	0	1	0	4/5
X_9	18	0	0	6	9	-30	6	0	0	0	1	-3/5
L_0= 0 Δ_j=			-9	2	0	50	-1	0	0	0	0	

A) 3/20
B) -1/5
C) 4/5
D) -3/5
E) 20

76. Симплекс кестесі құрылған, бағалау шешуші бағанды анықтаңыз:

X_{j0}	β_i	C_j	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	β_i/α_{ik}
			9	-2	0	-50	1	0	0	0	0	
X_6	3	0	3	0	-3	20	1	1	0	0	0	3/20
X_7	8	0	24	0	12	-40	4	0	1	0	0	-1/5
X_8	16	0	6	0	0	20	-10	0	0	1	0	4/5
X_9	18	0	0	6	9	-30	6	0	0	0	1	-3/5
L_0= 0 Δ_j=			-9	2	0	50	-1	0	0	0	0	

A) X_1
B) X_4
C) X_2
D) X_5
E) X_9

77. Симплекс кестесі құрылған, бағалау шешуші жолды анықтаңыз:

X_{j0}	β_i	C_j	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	β_i/α_{ik}
			9	-2	0	-50	1	0	0	0	0	
X_6	3	0	3	0	-3	20	1	1	0	0	0	3/20
X_7	8	0	24	0	12	-40	4	0	1	0	0	-1/5
X_8	16	0	6	0	0	20	-10	0	0	1	0	4/5
X_9	18	0	0	6	9	-30	6	0	0	0	1	-3/5
L_0= 0 Δ_j=			-9	2	0	50	-1	0	0	0	0	

A) X_1
B) X_4
C) X_2
D) X_5
E) X_6

78 Есепте:

$$J(y) = \int_0^{\pi} (4y(x)\cos(x) + y'^2(x) - y^2(x))dx;\ y(0) = y(\pi) = 0;$$

Эйлера-Лагранж теңдеуін құр: $-2y'' - 2y + 4\cos(x) = 0$;

A) $2y'' - 2y + 4\cos(x) = 0$
B) $-2y'' - 2y + 4\cos(x) = 0$
C) $-2y'' - 2y + 4\sin(x) = 0$
D) $-2y'' - 2y = 0$
E) $2y + 4\cos(x) = 0$

79 $\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3$ болса станционарлық нүкте максимальды нүкте бола ма

A) болмайды
B) болады
C) айқын емес
D) болуы мүмкін
E) дұрыс жауап жоқ

80 Леонардо да Винчи қандай термин енгізді?
A) Максимум
B) Минимум
C) Экстремум
D) Алтын қима
E) Графика

81 Жоспар деп
A) сызықты программалау есебінің шарттарын қанағаттандыратын $\bar{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$ сандар қатары
B) кезеңде болып жатқан үрдісті түсіну, қажетті параметрлерді анықтау
C) сипатталған модельді математикалық тілге аудару
D) дөңес программалау есебінің шарттарын қанағаттандыратын $\bar{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$ сандар қатары
E) статистикалық шарттарын қанағаттандыратын $\bar{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$ сандар қатары

82. Объектілерді зерттеу деп
A) сызықты программалау есебінің шарттарын қанағаттандыратын $\bar{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$ сандар қатары
B) кезеңде болып жатқан үрдісті түсіну, қажетті параметрлерді анықтау
C) сипатталған модельді математикалық тілге аудару
D) дөңес программалау есебінің шарттарын қанағаттандыратын $\bar{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$ сандар қатары
E) статистикалық шарттарын қанағаттандыратын $\bar{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$ сандар қатары

83 Математикалық модельдеу деп
A) сызықты программалау есебінің шарттарын қанағаттандыратын $\bar{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$ сандар қатары
B) кезеңде болып жатқан үрдісті түсіну, қажетті параметрлерді анықтау
C) сипатталған модельді математикалық тілге аудару
D) дөңес программалау есебінің шарттарын қанағаттандыратын $\bar{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$ сандар қатары

84.Базистік шешім тиімді шешім болып табыла ма?
A) табылады
B) табылмайды
C) кейде табылады
D) шартқа байланысты
E) мүмкін

85. Таяныш жоспар құру, тиімді жоспар құру бұл
A) есептің бастапқы қадамдары
B) есептің соңғы этаптары
C) транспорт әдісінің шығарылу жолы
D) симплекс әдісінің негізгі этаптары
E) шартты экстремум табу

86.Симплекс әдісінің этептары :
A) таяныш жоспар құру, тиімді жоспар құру
B) базис құру, жоспар құру

C) жоспар құру, кесте толтыру
D) кесте толтыру, шешім іздеу
E) тіктөртбұрыштар әдісімен есептеу, шешімді табу

87 Симплекс кестесінен бағалау қатнасын табыңыз

X_{j0}	β_i	C_{j0}	X_1	**X_2**	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	β_i/α_{ij}
			5	**-6**	-1	3	-8	60	60	60	
X_6	**28**	**60**	**-2**	**1**	**1**	**4**	**2**	**1**	**0**	**0**	**28**
X_7	31	60	1	**1**	0	-2	1	0	1	0	31
X_8	118	60	**-8**	**4**	-5	3	-1	0	0	1	29.5
Δj			*-545*	**366**	361	297	128	0	0	0	

A) 31
B) 366
C) 60
D)-28
E)28

88Симплекс кестесінен шешуші бағанды тап

X_{j0}	β_i	C_{j0}	X_1	**X_2**	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	β_i/α_{ij}
			5	**-6**	-1	3	-8	60	60	60	
X_6	**28**	**60**	**-2**	**1**	**1**	**4**	**2**	**1**	**0**	**0**	**28**
X_7	31	60	1	**1**	0	-2	1	0	1	0	31
X_8	118	60	**-8**	**4**	-5	3	-1	0	0	1	29.5
Δj			*-545*	**366**	361	297	128	0	0	0	

A) X_1
B) X_2
C) X_4
D) $\mathbf{X_6}$
E) X_5

89 Симплекс кестесінен шешуші жолды тап

X_{j0}	β_i	C_{j0}	X_1	**X_2**	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	β_i/α_{ij}
			5	**-6**	-1	3	-8	60	60	60	
X_6	**28**	**60**	**-2**	**1**	**1**	**4**	**2**	**1**	**0**	**0**	**28**
X_7	31	60	1	**1**	0	-2	1	0	1	0	31
X_8	118	60	**-8**	**4**	-5	3	-1	0	0	1	29.5
Δj			*-545*	**366**	361	297	128	0	0	0	

A) X_1
B) X_2

C) X_4
D) X_6
E) X_5

90 Симплекс кестесінен шешуші элементті табыңыз

X_{j0}	β_i	C_{j0}	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	β_i/α_{ij}
			5	**-6**	-1	3	-8	60	60	60	
X_6	**28**	**60**	**-2**	**1**	**1**	**4**	**2**	**1**	**0**	**0**	**28**
X_7	31	60	1	**1**	0	-2	1	0	1	0	31
X_8	118	60	**-8**	**4**	-5	3	-1	0	0	1	29.5
Δj			*-545*	**366**	361	297	128	0	0	0	

A) 1
B) 60
C) 28
D) 366
E) -6

91Тасымалдау әдісі симплекс әдісімен шешіле ала ма?
A)жоқ
B)егер үлгі жабық болса
C) шешіле алады
D)оптималдық шарт бойынша
E)егер үлгі ашық болса

92Тиімді объектінің жұмыс нұсқасы былай бағалануы керек...
A)тиіміді керитерий сапасы
B)тауар көлемі «шикізат шығыны», «тауар сапасы»
C)шексіз тиімді тапсырма
D)тиімді объекті мен тиімді мақсат
E)шегі жоқ тиімді тапсырма немесе тиімді мақсатты тапсырма

93Тиімділік есебінің дұрыс қойылуы келесідей:
A)өнімділік жұмыс және өзіндік құн алу
B)тиімділік мақсат алу
C)баға беру
D)ең үлкен баға және ең кіші табыс
E)тиімділік объектісінің бар болуы ғана

94Оптимизация бұл ...
A)белгілі жағдайға байланысты ең жақсы нәтижелерге

B)белгілі жағдайға байланысты ең нашар нәтижелерге
C)максималды табыстар мен минималды бағаға
D)максималды баға мен минималды табыстарға
E)оптимизация объектісі

95Транспорттың оптималдық жоспары былай айқындалады
A)Минималды элемент әдісімен
B)Симплекс әдісімен
C)Солтүстік-батыс бұрышы әдісімен
D)Фогельдің аппоксимация әдісімен
E)потенциялдық әдіспен

96Сызықтық функция оптимумге жетуі...
A)бұрыштық нүктеде
B)фигураның ішінде
C)минимум нүктесінде
D)максимум нүктесінде
E)ауыспалы санда

97Тиімділік критерии...
A)көлем абғасының тиімді сапа объектісі
B)тауар көлемі «шикізат шығыны», «тауар сапасы»
C)шексіз тиімді тапсырма
D)тиімді объекті мен тиімді мақсат
E)шегі жоқ тиімді тапсырма немесе тиімді мақсатты тапсырмасы

98Оптимизацияның қойған тапсырмасы бәсекелес проценттердің болғанын қалайды, мысалы:
A) өнімнің саны «шикізат шығыны», өнімнің саны «өнімнің сапасы»
B)белгілі жағдайға байланысты нашар нәтижелер, белгілі жағдайға байланысты ең жақсы нәтижелер
C)максималды табыстар мен минималды баға
D)максималды баға меннн минималды табыс
E)оптимизация объектісі

99Тиімді тапсырманың дұрыс емес типтік мысалы:

A)тиімді объектісі және тиімді мақсатының бар болуы, соған байланысты әрбір тиімді тақырыбы экспериментальдық бір ең үлкен мәнін талап ету керек

B)өнімнің саны «шикізат шығыны», өнімнің саны «өнімнің сапасы»

C)максималды табыстар мен минималды баға

D)максималды баға мен минималды табыс

E) тиімді іздеуде 2 үлкен мәнді тапсырма қойылады: «максималды қндірісті минималды бағамен алу үшін» өз еркімен бір бірімен қарсы тұруы

100 Қандай тиімді ресурстары таңдау мүмкіндігі, мағынасы бірнеше параметрлер болатын оптимизация объектісін түсіндіреді. Объектінің белгілі бір еркін анықталған деңгейлері-

A)басқару әсерімен

B)тауар көлемі «шикізат шығыны», тауар көлемі «тауар сапасы»

C)максималды табыстар мен минималды баға

D)тиімді объектісі мен оның мақсаты, әрбір тиімді тапсырманың формулировкасы экстримальды мағананы талап етумен және оның тек бір мағаналы үлкендігін максималды баға мен минималды табысты көрсетеді

E)тек тиімді объектісі

Негізгі және қосымша әдебиеттер тізімі, соның ішінде электрондық тасуыштардағы әдебиеттер

1. Айсагалиев С.А., Бияров Т.Н., Калимолдаев М.Н. и др. Задачи по методам оптимизации и вариационному исчислению.- Алматы: Қазақ университеті, 1996.
2. Аккулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах.- М.: Высшая школа, 1986.
3. Вентцель Е.С. Исследование операций. - М.: Высшая школа, 2001.
4. Гусманова Ф.Р., Беркімбаева С.Б., Сақыпбекова М.Ж. Оңтайландыру әдістерінен жаттығулар мен есептер.
5. Карманов В.Г. Математическое программирование. – М: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1986.

6.Гусманова Ф.Р. Оңтайландыру әдістері.-Алматы КазНПУ,2007

7.Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных .задач, Наука, 1981

8.Зуховицкий С. Н., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование. –М.: Наука, 1967

9.Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику. – М.: Наука, 1975

10.Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б. Задачи и методы линейного программирования.- М.: Совpадио, 1964

11. Карманов В. Г.Матемаическое программирование. Учебное пособие для студентов ВУЗов. – М.: Наука, 1980

12.*Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. — М.: Наука, 1967г.
(Переиздана в Голландии в 1970г.).

13.*Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Качественная теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1971г. — 507 с.
(Переиздана в США в 1976г.).

14.*Булгаков Н.Г.* Знакопостоянные функции в теории устойчивости. — Мн.: Университетское, 1984г. — 79 с.

15.*Альсевич В.В., Крахотко В.В.* Сборник задач по методам оптимизации. Ч.1. Линейное программирование. Учебное пособие. — Мн.: БГУ, 1997г. — 67 с.

16.*Альсевич В.В.* Математическая экономика. Конструктивная теория. Учебное пособие. — Мн.: Дизайн ПРО, 1998 г. — 240 с. (С грифом Министерства образования).

17. Конструктивная теория экстремальных задач. *Под ред. Р. Габасова, Ф.М. Кирилловой.* — Мн.: Университетское, 1984. — 204 с. (сб. науч. статей).
18. Актуальные задачи теории динамических систем управления. *Под ред. Р. Габасова, Ф.М. Кирилловой.* — Мн.: Наука и техника, 1989. — 332 с. (сб. науч. статей).

Интернет-ресурстардың тізімі

1.http://www.aport.ru
2. http://www.googlt.kz
3. http://www.toroid.ru
4. http://www.kaznu.kz
5. http://www.kaznpu.kz

Глоссари

Интерполяциялау -жуықтау
Аппроксимациялау-жуықтау
Экстраполяциялау-жуықтау
Норма- норма, мөлшер
Спектр-спектр, шоғыр
СП-сызықтық программалау
ТК-транспорт кестесі
Симплекс-ОӘ тәсілі, бағыт ұғымын білдіреді