КІРІСПЕ

Зерттеушілердің сингуляр ауытқымалы есептерге немесе математикалық теорияның шекаралық қабаттарына қызығушылығының әлсіремеуі бір жағынан ғылымның сәйкес бағытының мәні өте маңызды болса, екінші жағынан сәйкес мәселені шешу үшін көптеген әртүрлі теориялардың бар болуы. Тұтқыр ағындардың қозғалысы, ауа болсын, су немесе тамырдағы қан болсын тәжірибе жүзінде әрқашанда шекаралық қабат әсерімен байланысты. Бұл концепцияны XX ғасырдың басында неміс ғалымы Л.Прандтль [1] ұсынған. Ол тұтқыр ағындар қозғалысының негізгі заңдылықтарын сипаттайтын Навье-Стокс теңдеуінің қозғалысын зерттеген. Үйкеліс әсері тар қабырғалық аймақта айтылып жатқандығы туралы гипотезадан, Прандтль Навье-Стокс теңдеуінен жеңілдеу кеңінен танымал шекаралық қабат теңдеуін алған. Навье-Стокс теңдеуінің тұтқырлығы аз болғандағы жағдайы – бұл сингуляр ауытқымалы теңдеудің типтік мысалы болып табылады. Сонымен қатар Шредингер теңдеуі сингуляр ауытқымалы болып табылады. Планеталардың қозғалысын сипаттауда да сингуляр ауытқымалы теңдеулер пайда болады. Бір физикалық түрден басқасына бірқалыпсыз ауысқанда, математикалық модель бірқалыпсыз ауысуға жауап беретін үлкен немесе кіші параметрлі сол немесе басқа дифференциалдық теңдеулер түрінде сипатталады. Прандтльдің теориясынан басқа сингуляр ауытқымалы есептердің шешімдерін зерттеу үшін математикер, физиктер және механиктер асимптотикалық әдістердің түрлерін тапқан, мысалы, фазалық интегралдар әдісі [2], орташаландыру әдісі [3], Вишик-Люстерник әдісі [4], Васильева әдісі [5], Маслов әдісі [6], регуляризация [7] және т.б. әдістер. Нақтырақ айту үшін типтік сингуляр ауытқымалы есепті операторлық формада жазайық:

$$\varepsilon y' - A(x)y = h(x), \quad y(0,\varepsilon) = y^0, \;\; x \in (0,T), \tag{К.1}$$

бұны $\varepsilon \to 0$ болғанда зерттеу қажет. Бұдан басқа, $[0,T]$ сегментте осы есептің $y(x,\varepsilon)$ шешімінің бірқалыпты (яғни ε параметр бойынша бірқалыпты) жуықтауын құру талап етіледі.

Асимптотикалық әдістердің әрқайсысы сингуляр ауытқымалы дифференциалдық теңдеулерге қойылған есептердің ε дәрежесі бойынша келесі түрде жуықтауды құруды ұсынады:

$$y_{\varepsilon n}(x) = y_0(x,\varepsilon) + \varepsilon y_1(x,\varepsilon) + \ldots + \varepsilon^n y_n(x,\varepsilon) \tag{К.2}$$

мұндағы коэффициенттер ε параметерден тәуелді. Параметрдің мәні нөлге тең болған жағдайы, яғни $\varepsilon = 0$ мәні (К.1) есеп үшін ерекше болып табылуымен байланысты. (К.1) есеп банах кеңістігінде зерттелетін болғандықтан «ерекше нүкте» туралы айтылады. Ерекше нүкте шешімнің $\varepsilon-$нан екі жақты тәуелділігін тудырады: сингулярлы және регулярлы, бұл (К.1) есептің шешімін шартты түрде $y = f\left(x, \varphi(x)/\varepsilon, \varepsilon\right)$ жазуға мүмкіндік береді. Осыны элементар мысал түрінде көрсетейік:

$$\varepsilon y' + e^x y = e^{2x}, \qquad y(0,\varepsilon) = y^0. \tag{К.3}$$

Осы скаляр есептың нақты шешімі болып

$$y = e^{\frac{1-e^x}{\varepsilon}}[y^0 - 1 + \varepsilon] + e^x - \varepsilon \tag{К.4}$$

функциясы табылады. Мұнда бірінші ε параметрі экспонентаға $\varphi(x) = (1-e^x)/\varepsilon$ функциямен сингулярлы түрде кіретінін көреміз. Шешімнің қалған бөлігіне ε регулярлы түрде қатысып тұр.

Шешімнің $\varepsilon-$нан сингуляр тәуелділігін көптеген тәсілдермен сипаттауға болады және регуляризация әдісінен басқа, асимптотикалық әдістердің әрқайсысы өзінің сипаттамасын береді. (К.2) жіктеуде $y_i(x,\varepsilon)$ коэффициенттері $\varepsilon-$нан сингулярлы түрде тәуелді. Басқа әдістерде бұл коэффициенттер $\varepsilon-$нан регулярлы түрде тәуелді.

Бір қарағанда әртүрлі асимптотикалық әдістерден алынған $y_{\varepsilon n}(x)$ жуықтаушы функциясы сол және басқа функционалдық кеңістікте

$$\left\| y(x,\varepsilon) - y_{\varepsilon n}(x) \right\| \le c_n \varepsilon^{n+1}, \quad n = 0,1,2,..., \tag{К.5}$$

теңсіздігін қанағаттандырады. Мұндағы $y(x,\varepsilon)-$(К.1) есептің дәл шешімі, $n-$жуықтау реті, c_n тұрақтысы $\varepsilon-$нан тәуелсіз, бірақ $n-$нен тәуелді. (К.5) теңсіздігі орындалғанда $y_{\varepsilon n}(x)$ жуықтаушы функциясын (К.1) есептегі $y(x,\varepsilon)$ дәл шешімі үшін асимптотикалық қатардың бөліктік қосындысы деп атайды. Асимптотикалық қатардың бұндай түсінігін 100 жылдан астам уақыт бұрын (1886 ж.) А. Пуанкаре [8] енгізген.

Бұл түсінік функцияның айнымалыдан екі жақты тәуелділігі жағдайына ауыстырылған (берілген жағдайда $\varepsilon-$нан). Нәтижесінде бір классқа жататын есептер үшін зерттеушілер әртүрлі асимптотикалық тізбектерді ала алған және (К.5) теңсіздікті қанағаттандыратын (К.2) түрдегі жуықтауларды алған. Осылайша бір-бірінен ерекшеленетін немесе асимптотикалық тізбектерді таңдауда, немесе әртүрлі облыста алынатын жуықтауларды қапсыру тәсілдері бар әртүрлі асимптотикалық әдістер пайда болған.

Сингуляр ауытқымалылардың жалпы теориясының және шекаралық қабаттың математикалық теориясының дамуы үшін сингуляр ауытқымалылар теориясында бақыланатын бірмәнсіздіктен бас тарту керек. Бірмәнсіздік сингуляр ауытқымалы есептердің шешімдері үшін асимптотикалық қатардың қанағаттандырылмаған түсіндірмесінен туындаған.

Спектр және сингуляр тәуелділіктің сипаттамасын қарастырайық. ε кіші параметрінен екі жақты тәуелді сингуляр ауытқымалы есептің шешіміне келейік және мәселені (К.3), (К.4) мысалдардан күрделірек мысалмен қарастырайық. Екінші ретті дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебін қарастырайық:

$$\varepsilon^2 y'' + \varepsilon a(x) y' + b(x) y = h(x), \quad y(0,\varepsilon) = y^0, \; y'(0,\varepsilon) = y^1. \tag{К.6}$$

(К.6) есепті жүйе үшінгі есепке алып келмейміз. Мынадай жағдай тұжырымдалған. (К.6) теңдеуге жауапты

$$\lambda^2 + a(x)\lambda + b(x) = 0 \tag{К.6'}$$

характеристикалық теңдеудің түбірлері тұрақты шарттарды қанағаттандырса:

1) $\lambda_i(x) \neq 0$; 2) $\lambda_1(x) \neq \lambda_2(x) \;\; \forall x \in [0,T]$,

онда $\varepsilon \to 0$ болғанда (К.6) сингуляр ауытқымалы есептің шешімінің келесідей жіктелуі бар:

$$\begin{gathered} y(x,\varepsilon) = e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \lambda_1(s)ds}[y_{10}(x) + \varepsilon y_{11}(x) + \dots] + e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \lambda_2(s)ds}[y_{20}(x) + \varepsilon y_{21}(x) + \dots] + \\ + [\omega_0(x) + \varepsilon\omega_1(x) + \dots] \equiv y_1(x,\varepsilon) e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \lambda_1(s)ds} + y_2(x,\varepsilon) e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \lambda_2(s)ds} + \omega(x,\varepsilon) \end{gathered} \tag{К.7}$$

Егер спектрдің тұрақтылық шарттары бұзылса, онда (К.7) жіктеу орындалмайды. Мысалы, егер 1 шарт бір нүктеде келесі түрде бұзылса:

$$\lambda_1(x) = x\lambda(x), \quad \lambda(x) \neq 0 \tag{К.8}$$

ал 2 шарт бұрындағыдай орындалса, онда (К.7) жіктеудің орнына (К.6) есептің шешімінің келесі жіктеуі орынды:

$$\begin{gathered} y(x,\varepsilon) = e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \lambda_1(s)ds}[y_{10}(x) + \varepsilon y_{11}(x) + \dots] + e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \lambda_2(s)ds}[y_{20}(x) + \varepsilon y_{21}(x) + \dots] + \\ + [\omega_0(x) + \varepsilon\omega_1(x) + \dots] + g(x,1/\varepsilon)[y_{30}(x) + \varepsilon y_{31}(x) + \dots] \equiv y_1(x,\varepsilon) e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \lambda_1(s)ds} + \\ + y_2(x,\varepsilon) e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \lambda_2(s)ds} + \omega(x,\varepsilon) + y_3(x,\varepsilon) g(x,1/\varepsilon), \end{gathered} \tag{К.9}$$

мұндағы $g(x,1/\varepsilon)=\int\limits_0^x \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_x^u \lambda_1(s)ds\right)du-$функциясы, (К.6) теңдеудің біртексіздігінен және $\lambda_1(x)$ спектрі нүктесінің нөлге айналуынан туындаған шешімнің $\varepsilon-$нан ықшамдалмайтын сингулярлы тәуелділігі.

(К.7) және (К.9) жіктеулерін салыстырсақ, шешімнің $\varepsilon-$нан сингулярлы тәуелділігінің сипаттамасы $A(x)$ оператор спектрінің қасиеттерімен немесе (К.6') характеристикалық теңдеуінің түбірлерінің қасиеттерімен байланысты және осыдан, әр есепте сингулярлық базисін бөліп көрсету керек. Егер сингулярлық базис нақты сипатталса, онда $\varepsilon-$нан регулярлы тәуелділік ε бойынша (К.6) теңдеудің коэффициенттерінің тегістілік қасиеттерін иемденуі мүмкін, яғни (К.9) жіктеудегі $y_1(x,\varepsilon)$, $y_2(x,\varepsilon)$, $y_3(x,\varepsilon)$ және $\omega(x,\varepsilon)$ функциялары немесе (К.7) жіктеудегі $y_1(x,\varepsilon)$, $y_2(x,\varepsilon)$ және $\omega(x,\varepsilon)$ функциялары, мысалы, $\varepsilon=0$ мәнінің кейбір аймақтарында ε бойынша аналитикалық болуы мүмкін, өйткені (К.6) теңдеудің коэффициенттері $\varepsilon-$нан аналитикалық түрде тәуелді. Ерекше нүктенің параметр бойынша бар болуынан ($\varepsilon=0$), шешімнің параметр бойынша тегістілігі туралы классикалық теорема осылайша ауыстырылады.

ε бойынша (К.7) немесе (К.9) жіктеулердегі функциялардың аналитикасы туралы айту үшін, $\varepsilon-$нан сингулярлы тәуелділікті келесі түрде жазайық:

$$\tau_i=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^x \lambda_i(s)ds\equiv\varphi_i\left(x,\frac{1}{\varepsilon}\right),\ i=1,2,\quad \tau_3=\int\limits_0^x \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_x^u \lambda_1(\mathrm{s})ds\right)du\equiv\varphi_3\left(x,\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

және

$$\left(\varphi_1\left(x,\frac{1}{\varepsilon}\right),\varphi_2\left(x,\frac{1}{\varepsilon}\right),\varphi_3\left(x,\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)\equiv\varphi\left(x,\frac{1}{\varepsilon}\right),\quad (\tau_1,\tau_2,\tau_3)=\tau$$

деп белгілейік. Онда (К.9) функцияны

$$y(x,\varepsilon)=u(x,\tau,\varepsilon)\Big|_{\tau=\varphi\left(x,\frac{1}{\varepsilon}\right)} \tag{К.10}$$

түрінде жазуға болады. Осылайша (К.7) функция да сипатталады, егер $\varphi\left(x,\frac{1}{\varepsilon}\right)\equiv(\varphi_1,\varphi_2)$ және $\tau=(\tau_1,\tau_2)$ болса. $\varepsilon-$нан сингулярлы тәуелділіктің сипаттамасынан ε бойынша $\varepsilon=0$ нүктесінде $u(x,\tau,\varepsilon)$ функциясының τ бойынша бірқалыпты аналитикасы жайлы немесе

$$u(x,\tau,\varepsilon)\Big|_{\tau=\varphi\left(x,\frac{1}{\varepsilon^*}\right)}$$

функциясының $\varepsilon=0$ нүктесінде сингулярлы тәуелділікте бекітілген ε бойынша аналитикасын айтуға болады. Бұл түсініктер шекаралық қабаттың математикалық теориясының дамуы үшін іргесі болып табылады.

Сингуляр ауытқымалы есептердің шешімдері үшін асимптотикалық қатар түсінігін нақтылайық. (К.1) түрдегі теңдеу үшін сингуляр ауытқымалылар теориясының дамуында квазирегулярлы ерекше нүктелер теориясы құрылған. Негізгі нәтижелер Лиувиллдің [9], Шлезингердің [10], Биркгофтың [11], Тржинскийдің [12] жұмыстарына тиесілі.

(К.1) теңдеуде ерекше нүктенің болуы сингуляр базисті тудырады, бұл шекаралық қабат аймағындағы «ағыннан» «негізгі ағынның ағысына» бірқалыпсыз өтуін сипаттайды. Мұндай ерекше нүктені *квазирегулярлы ерекше нүкте* деп атайды.

Өкінішке орай дифференциалдық теңдеулер теориясында квазирегулярлы ерекше нүктелер арнайы зерттелмеген. Сондықтан, асимптотикалық интегралдаудың жалпы теориясын дамыта отырып, квазирегулярлы ерекше нүктелерден туындаған сингулярлықтың сипаттамасын зерттеуге тура келеді. Қарапайым дифференциалдық теңдеулер үшін және квазирегулярлы ерекше нүктелі дербес туындылы теңдеулер үшін кеңейтілген есептер классын зерттей отырып, $\varepsilon-$нан екі жақты тәуелді функциялар үшін келесі түсініктерді енгіземіз.

Анықтама К.1. Егер $\varphi\left(x,\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$ функциясы $\varepsilon=0$ нүктесінде жоқ болса және $\varphi(x,u)$ функциясы u бойынша $u=0$ мәнінің кейбір аймағында бекітілген x мәні бойынша сәйкес болса, онда $\varphi\left(x,\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$ функциясы $\varepsilon-$нан сингулярлы тәуелділікті сипаттайды.

$\varepsilon-$нан сингулярлы тәуелділікті сипаттайтын функциялар болып

$$e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \lambda_1(s)ds},\quad e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \lambda_1(s)ds}\int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^u \lambda_1(s)ds}du,\qquad \lambda_1(0)=0$$

табылады.

Анықтама К.2. $\varepsilon-$нан екі жақты тәуелді $y\left(x,\dfrac{1}{\varepsilon},\varepsilon\right)$ функциясын x бойынша кейбір $|\varepsilon|<R$ шеңберінде $\varepsilon-$бойынша псевдоаналитикалық деп атаймыз, егер сингулярлы тәуелділікті сипаттайтын $\varphi\left(x,\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$ функциясы бар және $y\left(x,\dfrac{1}{\varepsilon},\varepsilon\right)-$ті

$$y\left(x,\frac{1}{\varepsilon},\varepsilon\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i}y_{i}\left(x,\varphi\left(x,\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$$

түрінде көрсетуге болса, мұндағы бекітілген $\varepsilon-$да сингулярлы тәуелділіктегі

$$\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i}y_{i}\left(x,\varphi\left(x,\frac{1}{\varepsilon^{*}}\right)\right)$$

қатары x бойынша $|\varepsilon|<R$ шеңберінде жинақты болып табылады.

Псевдоаналитиканың анықтамасын қатарды қолданбай да беруге болады.

Анықтама К.3. ε параметрінен екі жақты тәуелді $y\left(x,\frac{1}{\varepsilon},\varepsilon\right)$ функциясын кейбір $|\varepsilon|<R$ шеңберінде $\varepsilon-$бойынша псевдоаналитикалық деп атаймыз, егер сингулярлы тәуелділікті сипаттайтын $\varphi\left(x,\frac{1}{\varepsilon}\right)$ функциясы бар және $y\left(x,\frac{1}{\varepsilon},\varepsilon\right)$ функциясын

$$y\left(x,\frac{1}{\varepsilon},\varepsilon\right)=f\left(x,\varphi\left(x,\frac{1}{\varepsilon}\right),\varepsilon\right)=f(x,\varphi(x,u),\varepsilon),\quad u=\frac{1}{\varepsilon},$$

түрде және $u=0$ мәнінің кейбір аймағында u бойынша аналитикалық функция түрінде көрсетуге болса, мұндағы $f(x,\varphi(x,u),\varepsilon)$ функциясы $|\varepsilon|<R$ шеңберінде $\varepsilon-$бойынша аналитикалық.

Қысқаша айтқанда, псевдоаналитикалық – бұл $\varepsilon-$нан регулярлы тәуелділік бойынша функцияның аналитикалығы. Псевдоаналитикалық функциялар ерекше нүктелі дифференциалдық теңдеулер шешімі ретінде туындайды.

Пуанкарені оқи отырып, мына логиканы түсіну қиын емес: асимптотикалық қатарларға ол қарапайым жинақталатын қатарлардан келген. Егер жинақталатын қатарда коэффициенттері жинақталмайтындай болса, онда бұл жағдайда асимптотикалық қатар түсінігі енгізілген. Сондықтан сингуляр ауытқымалы есептер шешімдері үшін асимптотикалық қатар түсінігі келесі түрде нақтыланған.

Анықтама К.4.

$$\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i}y_{i}\left(x,\varphi\left(x,\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)\qquad(\text{К}.11)$$

түрдегі қатар $y(x,\varepsilon)$ функциясы үшін $\varepsilon \to 0$ болғанда асимптотикалық деп аталады, егер $\varepsilon -$нан сингулярлы тәуелділікті сипаттайтын $\varphi\left(x, \frac{1}{\varepsilon}\right)$ функциясы бар және келесі екі шарт орындалсын:

1) (К.11) қатардың

$$y_{\varepsilon n}(x) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i y_i\left(x, \varphi\left(x, \frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$$

бөліктік қосындысы $y(x,\varepsilon)$ жіктелу функциясымен бірге жеткілікті кіші ε үшін (К.5) теңсіздікті қанағаттандырады;

2) қарастырылып отырған (К.1) есепке қосымша шектеулер болғанда (К.11) қатардың $y(x,\varepsilon)$ қосындысы R радиусты кейбір шеңберде $\varepsilon -$бойынша псевдоаналитикалық функция болып табылады.

Асимптотикалық қатар түсінігінің мұндай нақтылануы жалпыматематикалық түсінікпен айтылады. Регулярлы енетін параметр бойынша шешімнің тегістілігі туралы классикалық теорема белгілі. Егер $\varepsilon = 0$ болғанда $y = \omega(x)$, $\omega(0) = y^0$ жалғыз шешімі бар, оның оң жақ бөлігі y бойынша аналитикалық және кейбір $|y-\omega| < \eta$ облысында $\varepsilon - |\varepsilon| < \varepsilon_0$ және жалғыз $y(x,\varepsilon)$ шешімі бар

$$y' = f(y,x,\varepsilon), \quad y(0,\varepsilon) = y^0, \quad x \in (0,T) \tag{К.12}$$

есебі қарастырылса, онда бұл шешім $\varepsilon -$бойынша аналитикалық. Егер (К.6) есеп үшін 1 және 2 шарттар орындалса, онда (К.6) есептің (К.7) шешімінде $y_1(x,\varepsilon)$, $y_2(x,\varepsilon)$ және $\omega(x,\varepsilon)$ функциялары $\varepsilon -$бойынша кейбір $\varepsilon = 0$ мәні маңайында $x \in (0,T)$ бойынша $a(x), b(x), h(x)$-да қосымша шектеулерімен бірқалыпты аналитикалық. Осыдан (К.7) функция $\varepsilon = 0$ нүктесінде псевдоаналитикалық болып табылады.

Егер 2 шарт және (К.8) орындалса, онда (К.9)-дың шешіміндегі $y_i(x,\varepsilon)$ және $\omega(x,\varepsilon)$ функциялары сәйкесінше $a(x), b(x), h(x)$-да қосымша шектеулерімен аналитикалық болып табылады, яғни (К.9) функция $\varepsilon = 0$ нүктесінде псевдоаналитикалық. Осылайша, егер дифференциалдық теңдеулерде ерекше нүкте бар болса, онда $\varepsilon -$нан шешімнің сингулярлы тәуелділігі сипаттамасы нақты болғанда $\varepsilon -$нан регулярлы тәуелділік $\varepsilon -$бойынша коэффициенттердің тегістілігі қасиеттерін иеленеді. Егер $a(x), b(x), h(x) -$да қосымша шектеулер орындалмаса, онда $y_i(x,\varepsilon)$, $\omega(x,\varepsilon)$ функциялары үшін қатар жинақсыз болады, бірақ коэффициенттердің жеткілікті тегістілігі болғанда $a(x), b(x), h(x)$ асимптотикалық мағынада жинақты болады.

Осы сипатталған қатарларды регуляризацияланған асимптотикалық қатарлар немесе регуляризацияланған қатарлар деп атайды [7].

Зерттеу пәнінің өзектілігі. Параметрлік күшейтілген сингуляр ауытқымалы интегро-дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебінің интегралдық мүшесінің қатысуы жалпы итерациялық есептердің шешілуіне қатты әсер етеді және қазіргі танда сингуляр ауытқымалы есептердің асиптотикалық интегралдау теориясының көкейкесті мәселесі болып табылады.

Зерттеудің мақсаты мен міндеттері. Жалпы итерациялық есептердің нормал және бірмәнді шешімділігі туралы теоремаларды дәлелдеуде А.С.Ломов [7] пен А.Д.Рыжихтердің [13-14] жалпыланған нәтижелеріне бағытталған идеяның дамуы:

- асимптотикалық әдістер теориясын дамыту, яғни әртүрлі класстағы теңдеулер үшін нақты шарттарды алу мүмкіндігі және кейбір теңдеулер класстары үшін алгоритмдік формасын жазу мүмкіндігін тудыратын қажеттілік және жеткіліктілік шарттарын табу;
- жетілдіріліп жатқан алгоритмге математикалық негіздемені жүргізу (дербес жағдайда, жылдам осцилляциаланатын коэффициентті теңдеулерде қарапайым спектрлі шекті операторлардың дербес туындыда итерациялық жүйенің шешімділігі және бірмәнді шешімділігі туралы теорияның дамуы, формалды шешімдердің нақты шешімдерге асимптотикалық жинақтылығының дәлелдемесі);
- жылдам осцилляциаланатын коэффициентті сингуляр ауытқымалы интегро-дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есебіне регуляризация әдісінің негізгі идеяларының таралуы;
- жылдам осцилляциаланатын коэффициентті сингуляр ауытқымалы интегро-дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есебінің регуляризацияланған асимптотикасының бас мүшесін құру;
- интегралдық мүшені регуляризациялау барысында алғашғы есептің интеграл операторының резонанссыз шешімдер класына инварианттығын негіздеу;

Зерттеу объекты. Сингуляр ауытқымалы дифференциалдық және интегро-дифференциалдық теңдеулер.

Зерттеу пәні. Интегро-дифференциалдық теңдеулер.

Зерттеу әдістері. Есептің асимптотикалық шешімін құруда С.А. Ломовтың регуляризация әдісі, дифференциалдық (қарапайым және дербес туындылы) теңдеулер теориясы мен матрицалар теориясының жалпы әдістері қолданылған.

Зерттеудегі нәтижелер жаңалығы. Шешімдердің асимптотикалық жіктелуі теориясы тұрғысында жылдам осцилляциаланатын коэффициентті интегро-дифференциалдық теңдеулер алғаш рет зерттелуде.

Зерттеудің ғылыми маңыздылығы. Параметрлік күшейтілген дифференциалдық және интегро-дифференциалдық теңдеулер теориялық тұрғыда үлкен өзгеріске ие және олар шекаралық қабаттың шекарасында бірқалыпсыз ауысуларға ие. Зерттелінді есептің шешімінде кіші параметрлерді ескеру сингулярлы ауытқулар теориясының дамуына үлкен үлесін қосады.

Зерттеудің практикалық маңыздылығы. Жұмыстың теориялық маңыздылығы бар. Зерттеу нәтижелері сызықты емес электротехника теориясына енуі мүмкін.

Қорғауға келесідей негізгі жағдайлар талқыға салынады. Жұмыста қарапайым спектрлі жылдам осцилляцияланатын сингуляр ауытқымалы интегро-дифференциалдық жүйелер теңдеуі үшін Коши есебі қарастырылған. Мұнда:

- берілген есептің регуляризациясы жасалған және итерациялық есептердің сәйкесінше қалыпты және бірмәнді шешімділігі туралы теорема өңделген;
- шекті оператордың қарапайым спектрі болған жағдайындағы дербес туындысы бар эквивалентті интегро-дифференциалдық жүйенің корректілі шешімділігі туралы теорема дәлелденді;
- жылдам осцилляциаланатын коэффициентті сингуляр ауытқымалы интегро-дифференциалдық тендеудің корректілі шешімділігі туралы жұмыс нәтижесінде формалды шешімдердің нақты шешімдерге асимптотикалық жинақтылығы туралы теорема дәлелденген;
- жылдам осцилляциаланатын коэффициентті сингуляр ауытқымалы интегро-дифференциалдық есептер үшін негізгі қатар қосындысының аналитикалылығы;
- шекті қабатты қатар қосындысының аналитикалылығы;
- жылдам осцилляциаланатын коэффициентті сингуляр ауытқымалы интегро-дифференциал есеп шешімі асимптотикасының бас мүшесі құрылған.

Диссертацияның құрылымы. Диссертациялық жұмыс кіріспеден, екі тараудан, қорытындыдан, және әдебиеттер тізімінен тұрады. Формулалар номері екеулік: бірінші сан тараудың номерін көрсетеді, екінші сан – сондағы формуланың номерін көрсетеді.

Диссертациялық жұмысының құрылымына көшейік. Бірінші тарауда қарапайым спектрлі сингуляр ауытқымалы асимтотикалық есептер және регуляризация әдісінің алгоритмі қарастырылған, яғни Коши есебінің қойылуы және негізгі шарттар, сингуляр ауытқымалы есептен регуляр ауытқымалы есепке өту туралы деректер, есепте сингулярлықтың бар болуы, сингулярлы есепті регуляризациялау, итерациялық есептердің шешімділігі, регуляризацияланған қатарларды құру, негізгі қатар қосындысының аналитикалығы,шекаралық қабатты қатар қосындысының аналитикалылығы, негізгі теорема қарастырылған.

Екінші тарауда жылдам осцилляциаланатын сингуляр ауытқымалы дифференциалдық және интегро-дифференциалдық теңдеулер туралы, жылдам осцилляциаланушы коэффициентті кейбір есептер, регуляризация әдісінің формалдығы туралы, резонанссыз шешімдер кеңістігі, түйіндес оператор, жаңа рекуррентті есептерді құру мәселесі, шешімділік туралы теорема, қалдық мүшені бағалау, қосымша жүйенің шешімі қарастырылған. Параметрлік күшейтілген сингуляр ауытқымалы интегро-дифференциалдық жүйенің шешімінің асимптотикасын құруға арналған.

Жұмыстың сынақтан өтуі. Диссертациялық жұмыстың материалдары ХҚТУ-нің "Математика" кафедрасы ғылыми семинарында, М.Ұлықбек атындағы Өзбекстан Ұлттық Университетінде (Ташкент қ.) өткен «Математикалық физика және оның тарауларының классикалық емес теңдеулері» атты Халықаралық конференцияда және М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан Мемлекеттік Университетінде (Шымкент қ.) болып өткен «Әуезов оқулары-13: «Нұрлы жол» - еліміздің индустриалдық-инновациялық және әлеуметтік-экономикалық даму жолындағы стратегиялық қадам» атты Халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференцияда баяндама жасалынды.

Жұмыстың жариялылығы. Диссертациялық жұмыстың нәтижелері бойынша 1 мақала ғылыми журналда, 1 мақала тезисі жақын шет елдегі Халықаралық конференцияда, 1 мақала Республикалық конференциялар ғылыми еңбектер жинағында жарияланған және диссертациялық жұмыстың пайдаланылған әдебиеттер тізімі соңында келтірілген.

1 ҚАРАПАЙЫМ СПЕКТРЛІ СИНГУЛЯР АУЫТҚЫМАЛЫ ЕСЕПТЕР

1.1 Дәрежелік қатарларда параметрлі дифференциалдық теңдеулердің коэффициенттерінің жіктелуі

, берілген есеп шешімінде жылдам осцилляциаланатын коэффициенттерден туындайтын резонанстық және резонанссыз жағдайлардың бар болуы, спектралды жиындарға сәйкес келетін операторлардың инвариантты ішкі кеңістіктері меншікті ішкі кеңістіктер болып табылуы мәселелерін қарастырайық.

Келесі параметрі бар

$$\frac{d\psi}{dx} = \lambda B(x;\lambda)\psi \tag{1.1}$$

дифференциалдық теңдеудің коэффициенттерін төмендегі жорамал бойынша қарастырамыз.

$$B(x;\lambda) = B_0 + \sum_{k=1}^{p} \lambda^{-k} B_k(x;\lambda) + \lambda^{-(p+1)} B^{(p+1)}(x;\lambda) \tag{1.2}$$

дәрежелі жіктеме орынды делік. B_0 операторын мазмұнды ықшамдау үшін тұрақты деп есептейік. $\sigma(B_0) = \bigcup_{k=1}^{n} \sigma_k$ спектрінің спектралды жиындарға жіктелуі орынды деп есептейік.

Жеткілікті үлкен нақты $\lambda \geq \lambda_0$ болғанда

$$B_k(x;\lambda) = \sum_{m} B_k^{(m)}(x) e^{lm\lambda\omega x} \qquad (k = 1,\dots, p) \tag{1.3}$$

орынды және коэффициенттері үзіліссіз дифференциалданатын жеткілікті сандар делік. Қатардың жинақтылығы мәселесімен айналыспас үшін (1.3) жіктеудегі қосылғыштың ақырғы ν саны нөлден өзгеше делік.

$B^{(p+1)}(x;\lambda)$ оператор-функциясы x бойынша үзіліссіз және шектелген:

$$\left\| B^{(p+1)}(x;\lambda) \right\| \leq c \qquad (x \in [0,T]; \lambda \geq \lambda_0). \tag{1.4}$$

(1.1) теңдеудің $U(x, x_0; \lambda)$ эволюциялық операторы үшін

$$\tilde{U}_p(x,x_0;\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{s=0}^{p}\lambda^{-s}V_{ks}\left(x;\lambda\right)\right\}Y_k^{(p)}(x,x_0;\lambda) \qquad (1.5)$$

түрдегі жуық өрнекті іздейміз, мұндағы $Y_k^{(p)}(x,x_0;\lambda)$ - $\beta_k=P_k\beta$ кеңістігінде

$$\frac{dY_k^{(p)}}{dx}=\lambda\left\{P_kB_0+\sum_{s=1}^{p}\lambda^{-s}\Omega_{ks}(x;\lambda)\right\}Y_k^{(p)} \qquad (1.6)$$

теңдеуін және

$$Y_k\,(x_0,x_0;\lambda)=P_k \qquad (1.7)$$

шартын қанағаттандырады.

Бірақ (1.3) жіктеумен сәйкес

$$V_{ks}\left(x;\lambda\right)=\sum_m V_{ks}^{(m)}(x)e^{lm\lambda\omega x} \qquad (\lambda\geq\lambda_0) \qquad (1.8)$$

сәйкестендірілген жіктеуді орынды деп ұйғарамыз.

Бұл жіктеулер қосындылардың ақырғы санынан тұратындығын көреміз. $V_{ks}^{(m)}$ және Ω_{ks} коэффициенттері

$$\frac{d\tilde{U}(x,x_0;\lambda)}{dx}=\lambda B(x;\lambda)\tilde{U}(x,x_0;\lambda)+\lambda^{-p}\Phi_p(x;\lambda) \qquad (1.9)$$

теңдеуін $\tilde{U}(x,x_0;\lambda)$ операторы қанағаттандыратындай етіп таңдалынады.

Осылайша $e^{lm\lambda\omega x}$ функциясы болғанда, коэффициенттерді ажырата отырып,

$$\begin{gathered}(B_0-im\omega I)V_{k0}^{(m)}(x)P_k-V_{k0}^{(m)}(x)PB_0=0,\\ (k=1,2,\dots,n;\quad m=0,\pm1,\dots);\end{gathered} \qquad (1.10)$$

$$\begin{gathered}(B_0-im\omega I)V_{k1}^{(m)}(x)P_k-V_{k1}^{(m)}(x)P_kB_0=\\ =V_{k0}^{(m)}(x)\Omega_{k1}(x)P_k+V_{k0}^{r(m)}(x)P_k-\\ -\sum_r B_1^{(m-r)}(x)V_{k0}^{(r)}(x)P_k,\quad(k=1,2,\dots,n;\ m=0,\pm1,\dots);\end{gathered} \qquad (1.11)$$

$$
\begin{gathered}
(B_0 - im\omega I)V_{ks}^{(m)}(x)P_k - V_{ks}^{(m)}(x)P_k B_0 = V_{k0}^{(m)}(x)\Omega_{ks}(x)P_k + V_{k,s-1}^{r(m)}(x)P_k + \\
+ \sum_{l=1}^{s-1} V_{k,s-1}^{(m)}\Omega_{kl}(x)P_k - \sum_{l=0}^{s-1}\sum_{r} B_{s-l}^{(m-r)}(x)V_{kl}^{(r)}(x)P_k, \qquad (1.12) \\
(s = 2,\dots,p;\ k = 1,2,\dots,n;\ \ m = 0,\pm 1,\dots);
\end{gathered}
$$

қатынастар жүйесін аламыз.

$\Phi_p(x;\lambda)$ функциясы үшін

$$
\begin{gathered}
\Phi_p(x;\lambda) = \sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{m} V_{kp}^{(m)}(x)e^{lm\lambda\nu x} + \sum_{s=p+1}^{2p}\lambda^{-(s-p-1)}\sum_{l=1}^{p} V_{k,s-1}(x;\lambda)\Omega_{kl}(x) - \right. \\
\left. - \sum_{s=p+1}^{2p}\lambda^{-(s-p-1)}\sum_{l=1}^{p} B_{s-1}(x;\lambda)V_{kl}(x;\lambda) - B^{(p+1)}(x;\lambda)\sum_{s=0}^{p}\lambda^{-s}V_{ks}(x;\lambda)\right\} Y_k^{(p)}(x,x_0;\lambda) \qquad (1.13)
\end{gathered}
$$

өрнегі алынады.

Бұл зерттеу $\sigma(B_0)$ спектрінде $i\omega$ модулі бойынша нүктелердің бар немесе жоқ болуына байланысты әртүрлі жүргізіледі.

1.2 Резонанссыз жағдай

(1.10) теңдеу $m = 0$ болғанда қанағаттандырылады, егер

$$
V_{k0}^{(0)}(x) \equiv P_k \qquad (k = 1,2,\dots,n)
$$

қойсақ. Егер $m \neq 0$ болса, онда B_0 және $B_0 - im\omega I$ операторларының спектрлары қиылыспайтындықтан, нәтижелер ішінен бұл теңдеудің тек тривиалды шешімі бар және

$$
V_{k0}^{(m)}(x) \equiv V_{k0}^{(m)}(x)P_k \equiv 0 \qquad (m \neq 0; k = 1,\dots,n).
$$

тең. (1.11) қатынастан $m = 0$ болғанда біз сол жағынан $P_{k'}$ проекторына көбейткен соң

$$
B_0 P_{k'} V_{kl}^{(0)}(x)P_k - P_{k'} V_{kl}^{(0)}(x)P_k B_l = P_{k'}\Omega_{kl}(x)P_k - P_{k'} B_l^{(0)}(x)P_k
$$

теңдеуін аламыз. Егер $k = k'$ болса, бұл теңдеу

$$
\Omega_{kl}(x) = P_k\Omega_{kl}(x)P_k = P_k B_l^{(0)}(x)P_k
$$

және

$$P_k V_{kl}^{(0)} P_k = 0$$

болғанда қанағаттандырылады.

$k \neq k'$ болғанда бұл теңдеудің жалғыз шешімі бар.

Енді (1.11) теңдеудің оң жақ бөлігі анықталған. $m \neq 0$ болғанда оның жалғыз шешімі бар (резонанстың болмауынан).

(1.12) теңдеу дәл осылай қарастырылады.

1.3 Резонанстық жағдай

Бұл жағдайды қосымша ықшамдап жорамалдау арқылы қарастырамыз. Егер кейбір k, m және $k' = \varphi(k,m)$-лерде $\sigma_k(B_0) + im\omega$ және $\sigma_{k'}(B_0)$ жиындарының бос емес қиылысулары бар болса, онда әрбір $\sigma_k(B_0)$ және $\sigma_{k'}(B_0)$ спектралды жиындар сәйкесінше жалғыз λ_k, $\lambda_{k'}$ нүктелерінен тұрады:

$$\lambda_{k'} - \lambda_k = im\omega. \tag{1.14}$$

Сонымен қатар, осы спектралды жиындарға сәйкес келетін B_0 операторының инвариантты ішкі кеңістіктері меншікті ішкі кеңістіктер болып табылады:

$$B_0 P_k = \lambda_k P_k, \qquad B_0 P_{k'} = \lambda_{k'} P_{k'}. \tag{1.15}$$

(1.10) теңдеуді $P_{k'}$ проекторының сол жақ бөлігіне көбейтейік. Бұдан, егер $k' \neq \varphi(k,m)$ болса, резонанстық емес жағдайдағыдай теңдеу алынады:

$$(B_0 - im\omega I) P_{k'} V_{k0}^{(m)} P_k - P_{k'} V_{k0}^{(m)} P_k B_0 = 0. \tag{1.16}$$

Осылайша

$$V_{k0}^{(0)} = P_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.17}$$

және

$$P_{k'} V_{k0}^{(m)} P_k = 0 \qquad (m \neq 0 \; k' \neq \varphi(k,m)) \tag{1.18}$$

бар деп ұйғарайық.

Бірақ $k' = \varphi(k,m)$ болғанда (1.16) теңдеу тепе-теңдікке айналады, сонымен қатар

$$Z_{k'k}^{(m)} = P_{k'} V_{k0}^{(m)} P$$

операторлары әзірше анықталмаған болсын.

$P_{k'}$-ның сол жағынан (1.11) теңдеуді көбейтіп,

$$\begin{gathered}(B_0 - im\omega I)P_{k'}V_{k0}^{(m)}(x)P_k - P_{k'}V_{kl}^{(m)}(x)P_k B_0 = (Z_{k'k}^{(m)})' - \\ -\sum_{r\neq 0}\left[\sum_{k''=1}^{n} P_{k'}B_l^{(m-r)}(x)P_{k''}Z_{k''k}^{(r)}\right] - P_{k'}B_l^{(m)}(x)P_k + Z_{k'k}^{(m)}\Omega_{kl}P_k\end{gathered} \qquad (1.19)$$

теңдеуді аламыз. $m = 0,\ k' = k$ кезінде

$$P_k V_{kl}^{(0)} P_k = 0 \qquad (1.20)$$

және

$$\Omega_{kl} = P_k \Omega_{kl} P_k = \sum_{r\neq 0}\left(\sum_{k''} P_k B_l^{(-r)} P_{k''} Z_{k''k}^{(r)}\right) + P_k B_l^{(0)}(x) P_k \qquad (1.21)$$

қатынасын аламыз.

$m = 0,\ k' \neq k$ болғанда (1.19)

$$B_0 P_{k'} V_{kl}^{(0)}(x) P_k - P_{k'} V_{kl}^{(0)}(x) P_k B_0 = -\sum_r P_{k'} B_l^{(-r)}(x) V_{k0}^{(r)}(x) P_k \qquad (1.22)$$

теңдеуіне келеді және белгілі оң жақ бөлігі болғанда жалғыз шешімі бар. $m \neq 0,\ k' \neq \varphi(k,m)$ болғанда:

$$(B_0 - im\omega I)P_{k'}V_{kl}^{(m)}P_k - P_{k'}V_{kl}^{(m)}P_k B_0 = -\sum_r P_{k'}B_l^{(m-r)}V_{k0}^{(r)}P_k. \qquad (1.23)$$

$k' = \varphi(k,m)$ болған жағдайды қарастыру қалды. Бұл жағдайда (1.19) теңдеудің сол жақ бөлігі, (1.16) теңдеудегі жағдай сияқты, нөлге тепе-тең айналады. Бұдан

$$(Z_{k'k}^{(m)})' - \sum_{r\neq 0}\left(\sum_{k''=1}^{n} P_{k'}B_l^{(m-r)}P_{k''}Z_{k''k}^{(r)}\right) - P_{k'}B_l^{(m)}(x) + Z_{k'k}^{(m)}\Omega_{kl}P_k = 0$$

қатынасы алынады және (1.21) бірге $Z_{k'k}^{(m)}$ белгісіз операторларға қатысты дифференциалдық теңдеулер жүйесіне алып келеді:

$$
\begin{gathered}
(Z_{k'k}^{(m)})' - \sum_{r\neq 0}\left[\sum_{k''=1}^{n} P_{k'}B_l^{(m-r)}\left(x\right)P_{k''}Z_{k''k}^{(r)}\right] + Z_{k'k}^{(m)}P_k B_l^{(m)}\left(x\right)P_k + \\
+Z_{k'k}^{(m)}\sum_{r\neq 0}\left[\sum_{k''=1}^{n} P_{k'}B_l^{(-r)}(x)P_{k''}Z_{k''k}^{(r)}\right] - P_{k'}B_l^{(m)}\left(x\right)P_k = 0
\end{gathered}
\tag{1.24}
$$

$$(m = 0, \pm 1, \ldots; k' = \varphi(k, m)).$$

Бекітілген k және барлық $m = 0, \pm 1, \ldots;$ $k' = \varphi(k, m)$-да (1.24) жүйе Риккати операторлық теңдеулер жүйесін береді.

$\tilde{U}(x, x_0; \lambda)$ операторының негізгі бөлігі тепе-тең оператор болуы үшін

$$\lim_{\lambda\to\infty} \tilde{U}(x, x_0; \lambda) = I$$

тендіктің орындалуы жеткілікті.

$$Z_{k'k}^{(m)}(x_0) = 0$$

орындалуын қабылдасақ, тексеру қиын емес.

Осылайша, (1.24) жүйені бастапқы нөлдік шарттар бойынша қарастыру қажет. Егер тек

$$P_{k'}B_l^{(m)}P_k \neq 0 \quad (k' = \varphi(k, m))$$

болса, онда жалпы айтқанда нөлдік шешімі болатынын ескере кетейік.

Егер берілген k – да тек бір ғана , $k' = \varphi(k, m_1)$ түрінде берілген, k' индексі бар болса, онда (1.24) жүйе бір теңдеуге жинақталады:

$$
\begin{gathered}
(Z_{k'k}^{(m_1)})' + Z_{k'k}^{(m_1)}P_k B_l^{(-m_1)}P_{k'}Z_{k'k}^{(m_1)} + Z_{k'k}^{(m_1)}P_k B_l^{(0)}P_k - \\
-P_{k'}B_l^{(0)}P_{k'}Z_{k'k}^{(m_1)} - P_{k'}B_l^{(m_1)}P_k = 0.
\end{gathered}
\tag{1.25}
$$

Жалпы айтқанда, (1.24) жүйенің барлық $[0, T]$ сегментінде шешімі болмауы да мүмкін, бірақ егер шешім бар болса, онда барлық $Z_{k'k}^{(m)}$ операторлары табылғаннан кейін,

$$V_{k0}^{(m)} = V_{k0}^{(m)}P_k = \sum_{k'} Z_{k'k}^{(m)} \tag{1.26}$$

операторын анықтаймыз.

Бұдан басқа, (1.22), (1.23) теңдеулердің оң жақ бөліктері де анықталады, осылайша, $k' = \varphi(k, m)$ сәйкес келетіннен басқа, барлық $P_{k'}V_{kl}^{(m)}P_k$

операторларын анықтауға болады. $(s = 2,..., p)$ қадамдарындағы есептеулер дәл осылай жүреді. Алдыңғы қадамда анықталмай қалған $P_{k'}V_{k,s-1}^{(m)}P_{k_1}$ операторлары әрбір қадамда анықталып отырады. Соңғы этапта $(s = p)$ анықталынбай қалған операторды кез келген етіп таңдауға болады, мысалы,

$$P_{k'}V_{k,p}^{(m)}P_{k} = 0, \quad k' = \varphi(k, m_1).$$

Шындығында, бұл операторлар енді, $s < p$ болған жағдайдағыдай, басқа қатынастармен байланысты емес.

Сәйкес келетін тек бірінші жанасу үшін есепті қарастырамыз.

$$U_1(x, x_0; \lambda) = \tilde{U}_1(x, x_0; \lambda)C(x_0) \tag{1.27}$$

операторын қарастырайық. (1.5)-тен

$$U_1(x, x_0; \lambda) = \sum_{k=1}^{n}\left\{V_{k0}(x_0, x_0; \lambda) + \frac{1}{\lambda}V_{k1}(x_0, x_0; \lambda)\right\}P_k\, C(x_0) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{m\neq 0}V_{k0}^{(m)}(x_0, x_0; \lambda)e^{lm\lambda\nu x} + V_{k0}^{(0)}(x_0, x_0; \lambda) + \frac{1}{\lambda}V_{k1}(x_0, x_0; \lambda)\right\}P_k\, C(x_0) =$$

$$= \left(I + \frac{1}{\lambda}\sum_{k}V_{k1}(x_0, x_0; \lambda)P_k\right)C(x_0)$$

шығады. Сондықтан

$$C(\tau_0) = I - \frac{1}{\lambda}\sum_{k}V_{k1}(x_0, x_0; \lambda)P_k$$

деп қабылдау жеткілікті.

Бұл өрнекті (1.27)-ге қойып және $O(1/\lambda)$ ретінің мүшелерімен мына формуланы аламыз

$$U\ (x, x_0; \lambda) = \sum_{k=1}^{n}\left[P_k + \sum_{m\neq 0}V_{k0}^{(m)}(x)e^{lm\omega\lambda x}\right]Y_k^{(1)}(x, x_0; \lambda) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{1.28}$$

Бұл өрнек резонанссыз жағдайға қарағанда $\lambda \to \infty$ нөлге ұмтылмайтын амплитудалы жылдам осцилляциаланушы мүшені құрайды.

Мысал қарастырайық. $\varepsilon\varphi(\varepsilon x)$ кіші жай ауыспалы коэффициентті екінші ретті скалярлық теңдеуді қарастырайық:

$$y''(x)+[1-\varepsilon\varphi(\varepsilon x)cos2x]y(x)=0\,. \qquad (1.29)$$

Бұл коэффициент тұрақты болған жағдайда (1.29) теңдеу Матье теңдеуінің дербес жағдайы болып табылады.

(1.29) теңдеуді (1.1) түрдегі жүйеге келтірейік. Ол үшін $x=\varepsilon t$ жаңа айнымалыны енгізіп және $\lambda=1/e-$ні қоямыз, онда

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda^2\left[1-\frac{1}{\lambda}\varphi(x)cos2\lambda x\right]y=0 \qquad (1.30)$$

теңдеуін аламыз. (1.30) теңдеу

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\lambda y_1\\ \dfrac{dy_1}{dx}=-\lambda\left[1-\dfrac{1}{\lambda}\varphi(x)cos2\lambda x\right]y\end{cases}$$

жүйеге эквивалентті және бұны $\omega=\begin{pmatrix}y\\ y_1\end{pmatrix}$ векторына қатысты матрицалық коэффициентті бір теңдеу түрінде жазуға болады:

$$\frac{d\omega}{dx}=\left\{\lambda\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+\varphi(x)\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}cos2\lambda x\right\}\omega. \qquad (1.31)$$

(1.31) теңдеудің негізгі бөлігін диагоналды түрге келтіру үшін бұл теңдеуге ауыстыру жасайық:

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\i&-i\end{pmatrix}\psi\,.$$

Онда мына теңдеуді аламыз:

$$\frac{d\psi}{dx}=\left\{i\lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+i\frac{\varphi(x)}{4}\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix}(e^{2t\lambda x}+e^{-2t\lambda x}\right\}\psi. \qquad (1.32)$$

Бұл теңдеу $p=1$ болғанда (1.1) теңдеуге келеді, мұндағы

$$\left.\begin{array}{l} v=2, B_0=i\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, B_1^{(1)}=B_1^{(-1)}=i\dfrac{\varphi(x)}{4}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\\ B_1^{(0)}=0, B^{(2)}(x;\lambda)=0. \end{array}\right\}. \qquad (1.33)$$

B_0 операторы (y_β) шартын қанағаттандырады. Онда спектрдің екі нүктесі бар

$$\lambda_1=i, \quad \lambda_2=-i$$

және осы нүктелерге

$$P_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad P_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad (1.34)$$

спектралды проекторлары сәйкес келеді.

$\lambda_1-\lambda_2=2i=\omega i$ болғандықтан, бізде резонанстық жағдай бар.

(1.32) теңдеудің операторы үшін бірінші жанасуды табайық.

(1.17) және (1.18) формулаларды қолданып,

$$\left.\begin{array}{l} V_{10}^{(0)}=P_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad V_{20}^{(0)}=P_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\\ \\ P_1V_{10}^{(1)}P_1=0, \quad P_2V_{10}^{(1)}P_1=0, \quad P_2V_{20}^{(-1)}P_2=0, \quad P_1V_{20}^{(-1)}P_2=0 \end{array}\right\} \qquad (1.35)$$

аламыз. Осылайша,

$$V_{10}^{(1)}=0, \qquad V_{20}^{(-1)}=0 \qquad (1.36)$$

Бұдан басқа, (1.18)-ден

$$P_1V_{10}^{(-1)}P_1=0, \qquad P_2V_{20}^{(1)}P_2=0$$

шығады. $P_2V_{10}^{(-1)}P_1=Z_1, \qquad P_1V_{20}^{(1)}P_2=Z_2$ – ді қояйық. Онда

$$V_{10}^{(-1)}=Z_1, \quad V_{20}^{(1)}=Z_2. \qquad (1.37)$$

Z_1 операторы үшін (1.25) теңдеуі мына түрге келеді:

$$Z_1' + Z_1 P_1 B_1^{(1)} P_2 Z_1 - P_2 B_1^{(-1)} P_1 = 0. \qquad (1.38)$$

Z_1 операторы β_1 ішкі кеңістігін β_2-ге бейнелейді. Сондықтан оның матрицасы $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ матрицасына пропорционал болуы қажет.

$$Z_1(x, x_0) = iz(x, x_0)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (1.39)$$

деп, қарапайым есептеу арқылы (1.38) және (1.39) –дан

$$z'(x, x_0) + \varphi(x)\left[z^2(x, x_0) - 1\right] = 0$$

теңдеуін аламыз. Оның $z(x, x_0) = 0$ шартын қанағаттандыратын шешімі

$$z(x, x_0) = -th\int_{x_0}^{x} \varphi(s)ds. \qquad (1.40)$$

Салыстыра отырып,

$$Z_2(x, x_0) = iz(x, x_0)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (1.41)$$

көрсетуге болады, мұндағы $z(x, x_0) - (1.40)$ сол функция.

(1.21) формуланы пайдаланып,

$$\Omega_{11} = \varphi(x)z(x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Omega_{21} = \varphi(x)z(x)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1.42)$$

аламыз. Осылайша, (1.6) теңдеу мына түрге келеді

$$\frac{dY_1^{(1)}}{dx} = \left(i\lambda + \varphi(x)z(x, x_0)\right)P_1 Y_1^{(1)},$$

бұл жерден,

$$Y_1^{(1)}\left(x,x_0\right)=e^{i\lambda(x-x_0)}e^{\int\limits_{x_0}^{x}\varphi(s)z(s,x_0)ds}P_1=\frac{e^{-i\lambda(x-x_0)}}{ch\int\limits_{x_0}^{x}\varphi\left(s\right)ds}P_1 \qquad (1.43)$$

шығады. Сәйкесінше

$$Y_2^{(1)}\left(x,x_0\right)=\frac{e^{-i\lambda(x-x_0)}}{ch\int\limits_{x_0}^{x}\varphi\left(s\right)ds}P_2 \qquad (1.44)$$

аламыз.

Алынған өрнектерді (1.28)-ге қойсақ,

$$U\ (x,x_0;\lambda)=\left(P_1+Z_1e^{-2t\lambda x}\right)\frac{e^{i\lambda(x-x_0)}}{ch\int\limits_{x_0}^{x}\varphi\left(s\right)ds}+\left(P_2+Z_2e^{2t\lambda x}\right)\frac{e^{-i\lambda(x-x_0)}}{ch\int\limits_{x_0}^{x}\varphi\left(s\right)ds}+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

формуласын аламыз. Бұл формула бастапқы айнымалға қайтқаннан кейін (1.29) бастапқы теңдеу шешімінің $W(t,t_0;\varepsilon)$ фундаменталды матрицасын жуықтап анықтауға мүмкіндік береді:

$$W(t,t_0;\varepsilon)=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}cos(t-t_0)+\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}sin(t-t_0)-\right.$$

$$\left.-t\,h\varepsilon\int\limits_{x_0}^{x}\varphi\left(s\right)ds\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}cos(t+t_0)+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}sin(t+t_0)\right]\right\}\times$$

$$\times\frac{1}{ch\varepsilon\int\limits_{x_0}^{x}\varphi\left(\varepsilon s\right)ds}+O\left(\varepsilon\right), \qquad \left(0\le t_0;t\le\frac{T}{\varepsilon}\right)$$

Егер (1.29) есептің орнына $\omega\neq 1$,

$$y''(t)+[1-\varepsilon\varphi(\varepsilon t)\cos 2\omega t]y(t)=0$$

теңдеуін қарастырғанда , онда резонанссыз жағдайға келер едік. Бұл жағдайда:

$$W(t,t_0;\varepsilon)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}cos(t-t_0)+\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}sin(t-t_0)+O(\varepsilon)$$

болар еді.

1.4 Коши есебінің қойылуы және негізгі шарттар

Сингуляр ауытқымалы

$$L_\varepsilon y\equiv\varepsilon y'-A(x)y=h(x),\quad y(0,\varepsilon)=y^0,\quad x\in(0,T) \tag{1.45}$$

есебі B банах кеңістігінде зерттелетін болсын. $\mathrm{B}-$да $x\in[0,T]$ үшін $h(x),\, y(x,\varepsilon)$ вектор-функциялары анықталған, ε бекітілген; $y^0\in\mathrm{B}$ бастапқы мән. $h(x)$ функциясы және $A(x)$ операторы белгілі, $y(x,\varepsilon)-$жеткілікті кіші ε үшін ізделінді функция, $\varepsilon-$өлшемсіз кіші параметр. Әрбір $x\in[0,T]-$да $A(x)$ операторы тұрақты анықталу облысы $D(A(x))=\mathrm{B}$ болатын сызықты оператор. $\mathrm{B}-$дан $\mathrm{B}-$ға әсер ететін шектеулі операторлар кеңістігін $L(\mathrm{B})$ немесе жай L деп белгілейміз. (1.45) есеп келесі жағдайларда зерттеледі.

1° шарт. $A(x)$ операторының спектралды жіктелуі $A(x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)\mathrm{P}_i(x)$ түрде. Бұл жіктелу $x\in[0,T]-$да бірқалыпты.

Мұнда $\{\lambda_i(x)\}-A(x)$ операторының спектрі, $\{\mathrm{P}_i(x)\}-$жұптық дизъюнктық проекторлардың толық жүйесі $\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}_i(x)=I\right)$. Мұндай операторлардың спектрі меншікті мәндердің ақырғы санынан тұрады, ал B кеңістігі оператордың меншікті ішкі кеңістіктерінің тікелей қосындысы.

2° шарт. $h(x)$ оң жақ бөлігі үзіліссіз және $A(x)$ операторы $[0,T]-$да күшті үзіліссіз.

3° шарт. $A(x)$ операторының спектрі мынадай: 1) $\lambda_i(x)\neq 0$; 2) $\lambda_i(x)\neq\lambda_j(x)\quad\forall x\in[0,T],\ i,j=\overline{1,n},\ i\neq j$.

4° шарт. Оң жақ бөлігі $h(x)\in C^{i}nfxy([0,T];B)$ және оператор $\mathrm{A}(x)\in C^{i}nfxy([0,T];\mathrm{L})$ тең.

Егер $y(x,\varepsilon)$ функциясы:

1) $[0,T]-$да күшті үзіліссіз және $[0,T]-$да күшті үзіліссіз дифференциалданады;

2) $\forall x\in[0,T]-$да $y(x,\varepsilon)\in\mathrm{D(A)}=\mathrm{B}$;

3) $y(x,\varepsilon)$ функциясы (1.45) теңдеуді $x\in(0,T)$ бойынша тепе-теңдікке айналдырады;

4) $y(x,\varepsilon)$ функциясы (1.45) теңдеудің алғашқы шартын қанағаттандыратын болса, онда (1.45) есептің шешімі ретінде $y(x,\varepsilon)$ функциясын түсінеміз.

(1.45) Коши есебінің банах кеңістігіндегі шешімінің бар болуы және жалғыздығы туралы теореманы [15-16]-те табуға болады. Егер 2° шарт орындалып және $A(x)$ операторы үзіліссіз дифференциалданатын болса, онда (1.45) есеп әрбір бекітілген $\varepsilon \neq 0-$да жалғыз дифференциалданатын шешімі бар және ол мына түрде болуы мүмкін:

$$y(x,\varepsilon) = U(x,0,\varepsilon)y^0 + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x U(x,\tau,\varepsilon)h(\tau)d\tau,$$

мұндағы $U(x,\tau,\varepsilon)-$эволюциялық оператор. Эволюциялық оператор келесі есептің шешімі болып табылады:

$$\varepsilon U' - A(x)U = 0, \quad U(\tau,\tau,\varepsilon) = 1.$$

Банах кеңістігінде

$$\varepsilon y' - A(x)y = 0$$

біртекті теңдеу үшін Коши есебінің шешімі [16-17] кітапта зерттелген.

Абстрактілі есептер үшін регуляризация әдісі алғашында гильберт кеңістігінде дамыған [18]. Базисті банах кеңістігінде сингуляр ауытқымалы Коши есебі үшін регуляризацияланған қатар алғаш рет [13] жұмыста алынған. Базиссіз банах кеңістігіндегі әдіс бойынша шекаралық есептерді шешу [19] жұмыста алынған.

1.5 Сингуляр ауытқымалы есептен регуляр ауытқымалы есепке өту

Сингулярлықтың бар болуын қарастырайық. $\varepsilon \to 0$ болғанда (1.45) есеп шешімінің глобальды қасиеттерін зерттеуде $\varepsilon = 0$ квазирегулярлы ерекше нүктенің бар болуынан шешімнің ерекше нүкте маңайында орындалуының ерекшеліктерін білу керек. Сонымен қатар, сол шешімді білмей, қарастырылып отырған есептің қасиеттері бойынша ерекше нүктелер маңайындағы шешімді сипаттау керек. Осы сұрақтарға өту үшін келесі терминологияларды нақтылайық.

Анықтама 1.1. L_ε операторынан алынатын (1.45) есептегі $\left[-A(x)\right]$операторын, егер онда формалды түрде $\varepsilon = 0$ қойсақ, онда оны формалдық шектік оператор деп атаймыз. Минус таңбасын алып тастасақ, $A(x)$ операторын шекті деп атаймыз. L_ε операторын (1.45) теңдеудің біртекті бөлігіндегі амалдардың жиынтығы деп түсінеміз. Сонымен қатар, осы есепке сәйкес келетін, шешімнің жалғыздығын беретін шарттарды да айтамыз. Бұл жағдайларда L_ε орнына $\underline{L}_\varepsilon$ жазамыз.

Анықтама 1.2. $\varepsilon = 0$ нүктесін $\underline{L}_\varepsilon$ операторының квазирегулярлы ерекше нүктесі деп атаймыз, егер осы оператордың анықталу облысы формалдық шектік оператордың анықталу облысында бар болса, яғни $D(\underline{L}_\varepsilon) \subset D(A)$.

Осы жағдайда (1.45) есепті сингуляр ауытқымалы есеп деп атаймыз. Айталық, аралас шекаралық есеп болсын:

$$M_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2 \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{du}{dt} - c(x,t)u = h(x,t),\ u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0,\ u\big|_{t=0} = \varphi(x). \qquad (1.46)$$

Мұнда формалдық шектік оператор ретінде

$$A(x)\omega \equiv -\frac{d\omega}{dt} - c(x,t)\omega$$

шектеусіз операторын емес, шектік есептің шешімінің жалғыздығын беретін

$$A(x)\omega = h(x,t) \qquad (1.47)$$

операторын (1.46)-дағы шартпен бірге қабылдау керек, яғни $A(x)$ операторына

$$\omega\big|_{t=0} = \varphi(x) \qquad (1.48)$$

шарты қосылады, себебі (1.47), (1.48) есептің жалғыз шешімі бар. $A(x)$ операторы (1.48) бастапқы шартымен бірге формалдық шекті оператор болады, ал (1.46) есеп – сингуляр ауытқымалы, себебі $D(\underline{M}_\varepsilon) \subset D(\underline{A})$ қатаң. (1.46) есепте $A(x)$ операторының спектрі жоқ. Осындай есептердің бірі $\underline{A}(x)$ операторының кеңейтілуі болып табылатын операторрдың үзіліссіз спектрі бойынша сингулярлығының континуалды сипаттамасы көмегімен шешілген.

Сингулярлықтың регуляризациясын қарастырайық. (1.45) есепте квазирегулярлы ерекше нүктенің болуынан $\varepsilon \to 0$ болғанда $\underline{L}_\varepsilon$ операторының қайтымдылығы $A(x)$ шектік операторының қайтымдылығынан және

$$(A(x) - \varepsilon\mu I)y = 0, \quad y \in B \qquad (1.49)$$

біртекті теңдеуінің нөлдік шешімдерінің сипаттамасынан тәуелді. Сондықтан, оператордың айнымалы түйіндер спектрін анықтаймыз:

$$P_\mu(x) \equiv \varepsilon\mu I - A(x). \qquad (1.50)$$

(1.45) есеп үшін бұл тек бірінші ретті туынды енетін $A(x)$ айнымалы операторының спектрін анықтайды. Егер (1.46) есепті шешсек, онда ол үшін сәйкес түйін басқаша болар еді:

$$P_\mu(x) \equiv \varepsilon^2 \mu^2 I - A(x)$$

(1.50) спектр түйінін анықтау үшін келесі түрде әрекет етеміз: $A(x)$ операторының $\{\lambda_k(x)\}$ спектрін анықтап,

$$\varepsilon\mu - \lambda_k(x) = 0\,.$$

аламыз. Есептің түйіні үшін спектралды характеристикалық теңдеуді құрамыз. Спектралды характеристикалық теңдеуден түйін спектрін табамыз:

$$\mu_k = \frac{\lambda_k(x)}{\varepsilon}, \quad k = \overline{1,n}.$$

(1.45) есеп сияқты, біртексіз есептер үшін квазирегулярлы ерекше нүкте (1.45) есеп шешімінің $\varepsilon -$нан сингуляр тәуелділігін тудырады. $\tau_k -$лы e^{τ_k} экспонентасы тәуелділікті алып жүруші болып табылады, ол (1.50) түйін спектрі арқылы

$$\tau_k = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \lambda_k(s)ds \equiv \varphi_k\left(x, \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad k = \overline{1,n} \qquad (1.51)$$

формуласымен анықталады. Қысқартып жазу үшін

$$\tau = (\tau_1, ..., \tau_n,), \qquad \varphi\left(x, \frac{1}{\varepsilon}\right) = \left(\varphi_1\left(x, \frac{1}{\varepsilon}\right), ..., \varphi_n\left(x, \frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$$

белгілеулерін енгіземіз және (1.45) есебінің $y(x,\varepsilon)$ ізделінді шешімінің орнына тарылуы

$$u\Big|_{\tau=\varphi\left(x,\frac{1}{\varepsilon}\right)} \equiv y(x,\varepsilon) \qquad (1.52)$$

болатын кейбір $u(x,\tau,\varepsilon)$ кеңейтілген функциясын зерттейміз. (1.52) қатынасының көмегімен $u\left(x,\varphi\left(x,\frac{1}{\varepsilon}\right),\varepsilon\right)$ функциялары үшін толық туындыларын табамыз, оны

$$y'(x,\varepsilon)=\left(u'+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)\frac{\partial u}{\partial\tau_i}\right)_{\tau=\varphi\left(x,\frac{1}{\varepsilon}\right)},\quad \left(u'=\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

түрде жазамыз және $D_\lambda\equiv\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)\frac{\partial}{\partial\tau_i},\ \ \lambda=(\lambda_1,...,\lambda_n)$ деп белгілеп, (1.45) есептен u функциясын анықтау үшін келесі кеңейтілген есепті аламыз:

$$T_\varepsilon u\equiv\varepsilon u'+T(x)u=h(x),\quad u(0,0,\varepsilon)=y^0 \tag{1.53}$$

мұндағы

$$T(x)u\equiv\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)\frac{\partial u}{\partial\tau}-A(x)u\,.$$

(1.53) есепте τ айнымалысы – бұл x айнымалысымен қатар теңқұқылы тәуелсіз айнымалы, ал кеңейтілген есеп – бұл (1.53)-те нүктелі бастапқы шартымен берілген дербес туындылы теңдеу. Мұндай есептер соңына дейін анықталмаған болып табылады. Бірақ, оны соңына дейін аяқтаудың қажеті жоқ: (1.53) есебінің шешімі мұнда жалғыз болатындай функциялар классын тарылтамыз.

Егер $\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau}$ операторы $T_0(x)$ операторына жүгінетін болса, онда (1.53) есеп регулярлы ауытқымалы болып табылады. Бұл оның шешімін ауытқымалылар теориясының қатары түрінде анықтауға болады:

$$u(x,\tau,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i u_i(x,\tau) \tag{1.54}$$

бұл $\varepsilon\to 0$ болғанда жай немесе асимптотикалық түрде жинақталуы мүмкін.

1.6 Резонанссыз шешімдер кеңістігі

(1.53) есепті шешу үшін $\hat{B}$ резонанссыз шешімдер кеңістігін екі кеңістіктің тура қосындысы түрінде енгіземіз:

$$\tilde{B} = B \oplus B_0, \qquad B_0 = \bigoplus_{k=1}^{n} B \otimes \{e^{\tau_k}\},$$

мұндағы $\{e^{\tau_k}\}$ – бекітілген e^{τ_k} экспонентасының сызықты қабықшасы. Кез келген $\upsilon_k \in \{e^{\tau_k}\}$ элементі үшін $\upsilon_k = \alpha_k e^{\tau_k}$ бар және тензорлы көбейтіндінің келесі қасиеті орынды: $u^k \in B,\ \alpha_k \in \mathbb{C}$ және $\alpha_k u^k \in B$ болғанда $u^k \otimes \alpha_k e^{\tau_k} = \alpha_k u^k \otimes e^{\tau_k}$, онда кез келген $u \in \tilde{B}$ элементі

$$u(x,\tau) = u^0(x) + \sum_{k=1}^{n} u^k(x) \otimes e^{\tau_k} \tag{1.55}$$

түрде болады, мұндағы $u^k(x) \in B$ және $u^k(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x) u^k(x)$. $\left[e^{\tau_i}, e^{\tau_j}\right] = \delta_{ij}$ функционалын енгізіп, $\tilde{B}$- да норманы келесі түрде анықтаймыз:

$$|||u|||_{\tilde{B}} = ||u^0||_B + \sum_{k=1}^{n} ||u^k||_B .$$

Бұл жағдайда $\tilde{B}$ кеңістігі банах кеңістігі болады. $\tilde{B}$ кеңістігінде операторларды жазамыз:

$$\begin{cases} T_{00}(x) = \bigoplus_{k=1}^{n} [\lambda_k(x) I - A(x)] \otimes \dfrac{\partial}{\partial \tau_k}, & T_{00}(x) : B_0 \to B_0; \\ T_0(x) \equiv -A(x) \oplus T_{00}(x), & A(x) : B \to B; \\ Vu(x,\tau,\varepsilon) \equiv u(0,0,\varepsilon), & \dfrac{d}{dx} : C^{\infty}\left([0,T], \tilde{B}\right) \to C^{\infty}\left([0,T], \tilde{B}\right) \end{cases} \tag{1.56}$$

(1.56) операторларын қолдана отырып $\tilde{B}$ кеңістігінде (1.53) есепті мына түрде жазса болады:

$$T_0 u = h(x) - \varepsilon u', \quad \varsigma u = y^0. \tag{1.57}$$

(1.54) қатарды (1.57) есепке қойып, қарапайым түрде (1.54) қатардың коэффициенттерін анықтау үшін келесідей итерациялық есепті аламыз:

$$T_0 u_0 = h(x), \qquad \varsigma u_0 = y^0 \tag{1.58}$$

$$T_0 u_i = -u'_{i-1}(x,\tau), \qquad \varsigma u_i = 0, \ \ i = 1,2,.... \tag{1.59}$$

Бұл коэффициенттер $\hat{B}$ кеңістігінде анықталады, яғни әрбір элемент мынаған тең:

$$u_i(x,\tau) = u_i^0(x) + \sum_{i=0}^{\infty} u_i^k(x) \otimes e^{\tau_k}, \quad u_i^k(x) \in C^i nfxy([0,T],B).$$

(1.58), (1.59) итерациялық есептерді шешу үшін $\hat{B}$ кеңістігінде $T_0(x)$ операторының қасиеттерін зерттеу қажет. Бұл операторды *негізгі* деп атаймыз.

Негізгі оператордың қасиеттерін қарастырайық. (1.56) белгілеуінен

$$T_0(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} \left[\lambda_k(x)I - A(x)\right] \otimes \frac{\partial}{\partial \tau_k} - A(x)$$

операторы кез келген $u \in \hat{B}$ элементіне келесі түрде әсер етеді:

$$T_0 u \equiv \sum_{k=1}^{n} \left[\lambda_k(x)I - A(x)\right] u^k(x) \otimes e^{\tau_k} - A(x)u^0(x). \tag{1.60}$$

Бұл жерден, $T_0(x)$ операторы $\hat{B}$ кеңістігінде шектелген түрде әсер етеді. Оның спектрі дискретті және

$$0; \quad -\lambda_k(x), \quad k = \overline{1,n}; \quad \lambda_s(x) - \lambda_k(x), \quad s \neq k$$

нүктелерінен тұрады. Комплекс жазықтықтың қалған нүктелері (T_0) резольвенталық жиынға тиісті. Шындығында, айталық $\lambda \in (T_0)$. Онда $\lambda \in \varrho(A(x))$ және $\lambda + \lambda_k(x) \in \varrho(A(x))$. B кеңістігінде

$$(T_0 - \lambda I)z = f, \quad f \in \hat{B} \tag{1.61}$$

теңдеуін шешейік. Бұл теңдеудің шешімі

$$\left(A(x) - \lambda I\right)^0 = f^0, \quad \left(A(x) - (\lambda_k(x) + \lambda)I\right)z^k = f^k, \ \ k = \overline{1,n}$$

жүйе шешімімен эквивалентті. $\lambda, \lambda + \lambda_k(x) \in (A(x))$ болғандықтан, онда бұл жүйенің кез келген нақты $f^0, f^k \in B$ үшін z^0, $z^k \in B$ жалғыз шешімі бар. Осыдан, сәйкес шешімді

$$z^0 = R\left(\lambda, A(x)\right) f^0, \quad z^k = R\left(\lambda + \lambda_k(x), A(x)\right) f^k$$

түрде жазуға болады және (1.61) теңдуінің шешімі мына түрде болады:

$$z = R\left(\lambda, A\right) f^0 + \sum_{k=1}^{n} R\left(\lambda + \lambda_k, A\right) f^k \otimes e^{\tau_k}.$$

$T_0(x)$ операторының спектралды проекторын есептейміз. Ол үшін спектрдің әрбір ерекшеленген нүктелерін $0, \lambda_k, \lambda_s - \lambda_k$ дөңгелектейміз және сәйкесінше Рисс интегралын есептейміз. Онда

$$\tilde{P}_0(x) \equiv \frac{1}{2\pi i}\oint_{(0)} R(\lambda, T_0)d\lambda = \sum_{k=1}^{n} P_k(x) \otimes \frac{\partial}{\partial \tau_k}>,$$

$$\tilde{P}_k(x) \equiv \frac{1}{2\pi i}\oint_{(\lambda_k)} R(\lambda, T_0)d\lambda = P_k(x), \quad k = \overline{1,n}$$

$$\tilde{P}_{k,s}(x) \equiv \frac{1}{2\pi i}\oint_{(\lambda_s - \lambda_k)} R(\lambda, T_0)d\lambda = P_s(x) \otimes \frac{\partial}{\partial \tau_k}, \quad s,k = \overline{1,n}, \ s \neq k$$

проекторларын аламыз. $\tilde{B}$ кеңістігінде $\tilde{P}_0(x)$, $\tilde{P}_k(x)$, $\tilde{P}_{k,s}(x)$ проекторлары толық топты құрайды, яғни

$$\sum_{k=0}^{n} \tilde{P}_k + \sum_{\substack{k,s=1 \\ s\neq k}}^{n} \tilde{P}_{k,s} = I.$$

$\tilde{P}_0(x)$ проекторы $(I - \tilde{P}_0)\tilde{B}$- ға параллельді $KerT_0(x)-$қа проектор болып табылады. Онымен қоса,

$$\tilde{P}_0 R\left(\lambda, T_0(x)\right) = R\left(\lambda, T_0(x)\right)\tilde{P}_0 \qquad \forall \lambda \in \rho(T_0),$$

сондықтан $\tilde{P}_0(x)$ проекторы $T_0(x)-$пен ауысады, бұл $T_0(x)-$тура қосындыға қатысты

$$\tilde{B} = KerT_0(x) \oplus \left(I - \tilde{P}_0\right)\tilde{B},$$

$T^{+}{}_0(x)$ және $T^{-}{}_0(x)$ бөліктерінде жіктеуді жасайды, осыдан, $R\left(\lambda, T_0\right)$ резольвентасын

$$R\left(\lambda, T_0\right) = R^{+}\left(\lambda, T_0\right) \oplus R^{-}\left(\lambda, T_0\right)$$

түрде жазуға болады, мұндағы

$$R^{+}(\lambda,T_0)=\hat{P}_0 R(\lambda,T_0),\quad R^{-}(\lambda,T_0)=\left(I-\hat{P}_0\right)R(\lambda,T_0).$$

$A(x)$ операторы туралы ұйғарымнан R^{+} резольвента бөлігін

$$R^{+}(\lambda,T_0)=-\frac{\hat{P}_0}{\lambda}$$

түрде, ал басқа бөлігін

$$R^{-}(\lambda,T_0)=\left(I-\hat{P}_0\right)R(\lambda,T_0)=\sum_{k=1}^{n}\frac{P_k}{\lambda_k-\lambda}\oplus\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{s=1,\ s\neq k}^{n}\frac{P_s}{\lambda_s-\lambda_k-\lambda}\right]\frac{\partial}{\partial\tau_k}$$

түрде жазуға болады, бұл «резольвентамен келтірілген» [20] деп аталады.

$$\hat{S}_0=\lim_{\lambda\to 0}R(\lambda,T_0)\left(I-\hat{P}_0\right)=\lim_{\lambda\to 0}R^{-}(\lambda,T_0)=\sum_{k=1}^{n}\frac{P_k}{\lambda_k}\oplus\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{s=1,\ s\neq k}^{n}\frac{P_s}{\lambda_s-\lambda_k}\right]\frac{\partial}{\partial\tau_k}$$

операторын енгізейік. $\hat{S}_0$ операторы келесі қасиеттерді қанағаттандырады:

$$\hat{S}_0T_0=T_0\hat{S}_0=I-\hat{P}_0,\qquad \hat{S}_0\hat{P}_0=\hat{P}_0\hat{S}_0=0,$$

$$\hat{S}_0=\sum_{k=1}^{n}S_k\oplus\frac{\partial}{\tau_k},\qquad S_k=\lim_{\lambda\to 0}\left[\left(I-P_k\right)R\left(\lambda,A-I\right)\right].$$

1.7 Кеңейтілген есептің шешімділігінің қажеттілік шарты

$\hat{B}$ кеңістігінің аздаған түрленуі қажет. Айталық, $u^k(x)-$ B банах кеңістігінің элементі формалды регулярлы мағынада $\varepsilon-$нан тәуелді болсын:

$$u^k(x,\varepsilon)=u_0^k(x)+\varepsilon u_1^k(x)+\dots,$$

яғни, бұл қатардың жинақтылығы жайлы ештене айта алмаймыз. Әр элементі

$$u(x,\tau,\varepsilon)=u^0(x,\varepsilon)+\sum_{k=1}^{n}u^k(x,\varepsilon)\otimes e^{\tau_k},\qquad u^k(x,\varepsilon)\in B$$

түрде көрсетілген функциялар кеңістігін $\overset{\mathbf{u}}{B}_e$ арқылы белгілейік. (1.54) шешімін келесі түрде анықтаймыз:

$$u(x,\tau,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i u_i(x,\tau)=u^0(x,\varepsilon)+\sum_{k=1}^{n}u^k(x,\varepsilon)\otimes e^{\tau_k}. \qquad (1.62)$$

Бұл жерде бірнеше анықтаманы енгізген ыңғайлы.

Анықтама 1.3. Коэффициенттері (1.45) теңдеудің дербес шешімдері ретінде анықталатын, $\varepsilon\dfrac{\partial}{\partial\tau}$ операторы $A(x)$ операторына жүгінетін болса, онда

$$u^0(x,\varepsilon)=\omega_0(x)+\varepsilon\omega_1(x)+\ldots+\varepsilon^n\omega_n(x)+\ldots \qquad (1.63)$$

қатарын *негізгі* деп атаймыз.

$A(x)$ қайтарымды операторы жағдайында негізгі қатардың коэффициенттері

$$\omega_0=-A^{-1}(x)h(x),\quad \omega_i=\left(A^{-1}(x)\frac{d}{dx}\right)^i\omega_0(x),\quad \mathrm{i}=1,2,.. \qquad (1.64)$$

түрінде анықталады.

Анықтама 1.4. Негізгі қатарлы қосындыда шешім болып табылатын – жай немесе асимптотикалық – (1.57) регуляризацияланған есеп барлық жеткілікті кіші $|\varepsilon|\neq 0$ мәндерінде және $x=\tau_1=\ldots=\tau_n=0-$да $y^0-u^0(0,\varepsilon)$ болатын

$$\upsilon_\varepsilon(x,\tau)=\sum_{k=1}^{n}u^k(x,\varepsilon)\otimes e^{\tau_k}=\sum_{k=1}^{n}\left[u_0^k(x)+\varepsilon u_1^k(x)+\ldots\right]\otimes e^{\tau_k}$$

ε дәрежесі бойынша қатарын *шекаралық қабатты қатар* деп атаймыз.

Мұндай қатар (1.58), (1.59) итерациялық есептер көмегімен алынады.

Анықтама 1.5. $\tau_k=\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_0^x\lambda_k(x)dx$ болғанда шекаралық қабатты қатардың тарылуын оң жақ аймағының шекарасы $x=0$ *дискретті шекаралық қабат* деп атаймыз $\left(\mathrm{Re}\,\lambda_k(x)\le 0\right)$.

Мысал 1.

$$\varepsilon y'-A(x)y=A(x)\upsilon(x),\quad y(0,\varepsilon)=y^0 \qquad (1.65)$$

Коши есебінің шешімін табу керек, мұндағы $\upsilon(x) \in \exp_F \mathbb{C}^2$ және $A(x) = \begin{pmatrix} -sinx & -cosx \\ +cosx & -sinx \end{pmatrix}$.

Шешімі. Берілген оператордың меншікті мәндері және меншікті векторлары

$$\lambda_{1,2} = -sinx \pm icosx, \qquad b_{1,2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \mp \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

болып табылады. Регуляризация әдісіне сәйкес регуляризациялаушы айнымалылар

$$\tau_k = \frac{-1 + cosx \pm isinx}{\varepsilon}, \qquad k = 1,2$$

табылады. Кеңейтілген есепті

$$\varepsilon u' + \lambda_1(x)\frac{\partial u}{\partial \tau_1} + \lambda_2(x)\frac{\partial u}{\partial \tau_2} - A(x)u = A(x)\upsilon(x), \quad u(0,0,\varepsilon) = y^0 \qquad (1.66)$$

түрде аламыз. Бұл есептің шешімін (1.54) қатары түрінде анықтаймыз. Қатардың бас мүшесін табу үшін

$$T_0 u_0 \equiv \lambda_1(x)\frac{\partial u}{\partial \tau_1} + \lambda_2(x)\frac{\partial u}{\partial \tau_2} - A(x)u_0 = A(x)\upsilon(x), \quad u_0(0,0) = y^0 \qquad (1.67)$$

есебін аламыз. Итерациялық есепті резонанссыз шешімдер кеңістігінде [12] шешеміз:

$$U^2 = \left\{ u(x,t): u = \sum_{i,j=1}^{2} u_{ij}(x) b_i e^{\tau_j} + \sum_{i=1}^{2} u_i(x) b_i;\ u_{ij}, u_i \in C^\infty([0,T], \mathbb{C}) \right\}$$

Бұл кеңістікте (1.67) теңдеудің жалпы шешімі мына функция болады:

$$u_0 = \sum_{i=1}^{2} u_{ii}^0(x) b_i e^{\tau_i} - \upsilon(x). \qquad (1.68)$$

J^2 кеңістігінің базисі бойынша $\upsilon(x)$ векторын жіктемейміз, экпонентальды типтегі вектор ретінде қажет. Сондықтан (1,67) теңдеудің дербес шешімін $\upsilon(x)$ түрінде жаздық. (1.68) қосындыда тек екі $u_{ii}^0(x)$ скаляр функциялары белгісіз. (1.68) функцияны (1.67)-дегі бастапқы шартқа бағындыра отырып,

$$u_{ii}^0(0) = \left(u^0, b_i\right), \ \ i = 1,2, \quad u^0 = y^0 + \upsilon(0) \tag{1.69}$$

аламыз. Бұл $u_{ii}^0(x)$ функциясы үшін бастапқы шарттар. $u_1(x,\tau)$ функциясын анықтау үшін келесі есеп мына түрде:

$$T_0 u_1 = -u_0' = -\sum_{i=1}^{2} u_{ii}'^0(x) b_i e^{\tau_i} + \upsilon'(x), \quad u_1(0,0) = 0. \tag{1.70}$$

(1.70) теңдеудің шешімділігі туралы теоремаға сәйкес резонанссыз шешімдер кеңістігінде (1.70) теңдеуінің оң жақ бөлігін T_0 операторының ядросына әсер еткізіп

$$u_{ii}'^0(x) = 0, \quad i = 1,2 \tag{1.71}$$

теңдеуін аламыз. (1.70) есеп мына түрге келеді:

$$T_0 u_1 = \upsilon'(x), \quad u_1(0,0) = 0. \tag{1.72}$$

(1.72) есептің дербес шешімі

$$\omega_1(x) = -F(x)\upsilon(x)$$

функциясы болады. Бұл - $\upsilon(x)$ функциясының бірінші өлшенген туындысы және осы $\upsilon(x)$-тың қасиеттеріне ие. (1.72) теңдеуінің жалпы шешімі J^2 кеңістігінде

$$u_1 = \sum_{i=1}^{2} u_{ii}^1(x) b_i e^{\tau_i} + \omega_1(x)$$

түрде болады. (1.71), (1.69) есептерді шешіп, $u_{ii}^0(x) \equiv \left(u^0, b_i\right), \ i = 1,2$ функцияларын табамыз және (1.54) қатардың бас мүшесі толығымен анықталған:

$$u_0 = \sum_{i=1}^{2} (u^0, b_i) b_i e^{\tau_i} - \upsilon(x) \ . \tag{1.73}$$

$u_1(x,\tau)$ функциясын (1.72)-дегі бастапқы шартқа бағындырып,

$$u_{ii}^1(0) = -\big(\omega_1(0), b_i\big), \quad i = 1,2 \tag{1.74}$$

функциясын аламыз. (1.59) есептен бұл жағдай үшін $u_2(x,\tau)$ функциясын анықтау үшін

$$T_0 u_2 = -u_1' = -\sum_{i=1}^{2} u_{ii}'^1(x) b_i e^{\tau_i} - \omega_1'(x), \quad u_2(0,0) = 0 \tag{1.75}$$

есебін аламыз. $\boldsymbol{\mu}^2$ □^{2} кеңістігінде (1.75) есептің шешілуі үшін теңдеуінің оң жақ бөлігін T_0 операторының ядросына әсер еткізіп және осы нәтижені x бойынша нөлге тепе-тең теңестіреміз.

$$u_{ii}'^1(x) = 0, \quad i = 1,2 \tag{1.76}$$

теңдеуін аламыз және (1.75) есеп келесі түрде болады:

$$T_0 u_2 = -\omega_1'(x), \quad u_2(0,0) = 0 \ . \tag{1.77}$$

(1.77) теңдеудің дербес шешімін

$$\omega_2(x) = F^2(x)\upsilon(x)$$

функциясы түрінде іздейміз. Бұл - $\upsilon(x)$ функциясының екінші өлшенген туындысы және осы $\upsilon(x)$-ның қасиеттеріне ие. (1.76), (1.74) есептерді шеше отырып $u_{ii}^1(\mathrm{x}) = -\big(\omega_1(0), b_i\big), \quad i = 1,2$ табамыз және осыдан $u_1(x,\tau)$ функциясы толығымен анықталған:

$$u_1(x,\tau) = -\sum_{i=1}^{2} (\omega_1(0), b_i) b_i e^{\tau_i} + \omega_1(x) \ . \tag{1.78}$$

(1.77) теңдеудің жалпы шешімі

$$u_2 = \sum_{i=1}^{2} u_{ii}^2(x) b_i e^{\tau_i} + \omega_2(x)$$

функциясы болады.

(1.54) қатардың коэффициенттерін анықтау процесі рекуррентті болып табылады және индукция бойынша барлық коэффициенттерді табуға болады. (1.54) қатарға (1.73), (1.78) түріндегі коэффициенттерді қойып, қысқартып, (1.66) есепті шешу үшін бұл қатарды

$$u = b_1 e^{\tau_1}(y^0 + \omega(0,\varepsilon), b_1) + b_2 e^{\tau_2}(y^0 + \omega(0,\varepsilon), b_2) - \omega(x,\varepsilon) \tag{1.79}$$

түрде аламыз, мұндағы

$$\omega(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i F^i(x)\upsilon(x)$$

функциясы ε бойынша $R = \frac{1}{c}$ радиусы шеңберінде аналитикалық [21] болып табылады, себебі

$$\left\| F^i(x)\upsilon \right\| \le c_1(\upsilon, c)c^n.$$

Осыдан, (1.66) есептің шешімі болып табылатын және (1.79) түрде табылған $u(x,\tau,\varepsilon)$ функциясы ε бойынша $R = \frac{1}{c}$ радиусы шеңберінде аналитикалық.

Осы функцияның тарылуын алайық:

$$u\left(x, \varphi\left(x, \frac{1}{\varepsilon}\right), \varepsilon\right) = \upsilon_\varepsilon(x) - \omega(x,\varepsilon), \tag{1.80}$$

мұндағы

$$\varphi\left(x, \frac{1}{\varepsilon}\right) = \left(\frac{-1 + cosx + isinx}{\varepsilon}, \frac{-1 + cosx - isinx}{\varepsilon}\right).$$

(1.80)-де шекаралық қабаттың функциясы келесі түрге ие:

$$\upsilon_\varepsilon(x) = b_1 e^{\frac{-1+cosx+isinx}{\varepsilon}}(y^0 + \omega(0,\varepsilon), b_1) + b_2 e^{\frac{-1+cosx-isinx}{\varepsilon}}(y^0 + \omega(0,\varepsilon), b_2) \tag{1.81}$$

(1.80) функция (1.65) есептің нақты шешімі болып табылады. Егер нақты шешімді жуық шешіммен алмастырсақ

$$y_{\varepsilon n}(x) = \upsilon_{\varepsilon n}(x) - \omega_{\varepsilon n}(x),$$

тең, мұндағы,

$$\omega_{\varepsilon n}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i F^i(x)\upsilon(x),$$

$$\upsilon_{\varepsilon n}(x) = \left[b_1 e^{\tau_1}(y^0 + \omega_{\varepsilon n}(0), b_1) + b_2 e^{\tau_2}(y^0 + \omega_{\varepsilon n}(0), b_2) \right]\Big|_{\tau = \varphi\left(x, \frac{1}{\varepsilon}\right)}$$

онда қажетті бағалауды алуға мүмкін болатын, жинақталатын қатардың қалдық мүшелерін ескермейміз.

(1.81) шекаралық есеп

$$\varepsilon \upsilon_\varepsilon' - A(x)\upsilon_\varepsilon = 0, \quad \upsilon_\varepsilon(0) = y^0 + \omega(0, \varepsilon)$$

есебінің нақты шешімі және бұл есеп периодты, яғни $\varepsilon \to 0$ болғанда ол тек $t_k = 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$ нүктелерінің кіші маңайларынан басқа нүктелерде нөлге ұмтылады.

Мұнда тұрақты меншікті векторлар болғанда спектрдің тұрақтылық шартында кейбір бұзылыстар бола береді. Қарастырылған мысалда $\lambda_1(x)$ және $\lambda_2(x)$ спектрінің нүктелері $t_j = \frac{\pi}{2}(2j+1), \quad j = 1, 2, \ldots$ нүктелерімен сәйкес келеді. Регуляризация әдісімен алынған айнымалы меншікті векторларда мұндай жағдай жоқ.

Мысал 2. $\boldsymbol{\mu}^2$де регуляризацияланған қатар құру керек және

$$\varepsilon y' - A(x)y = h(x), \quad y(0, \varepsilon) = y^0$$

есепті шешу үшін оның жинақталу радиусын анықтау керек, мұндағы

$$A(x) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} + cosx & sinx \\ sinx & -\sqrt{2} - cosx \end{pmatrix}, \quad h(x) = A(x)\upsilon(x).$$

Мұнда $\upsilon(x) - A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}$ операторынан туындаған экспонентальды типтегі вектор,

$$\lambda_1 = -\sqrt{2} + 1, \; \lambda_2 = -\sqrt{2} - 1, \quad \lambda_i - \lambda_j = (-1)^j \frac{1}{2}, \; i \neq j,$$

$$b_1=\begin{pmatrix} cos\dfrac{x}{2} \\ sin\dfrac{x}{2}\end{pmatrix},\quad b_2=\begin{pmatrix} sin\dfrac{x}{2} \\ -cos\dfrac{x}{2}\end{pmatrix},\quad (b_1,b_2)\equiv 0;$$

$$b_1'=-\frac{1}{2}b_2,\quad b_2'=\frac{1}{2}b_1,\quad (b',b_2')\equiv 0,\quad \tau_i=\frac{-\sqrt{2}\pm 1}{\varepsilon}x.$$

$n=2$ үшін кеңейтілген есептің түрі нормал. Қатардың бас мүшесі үшін есеп

$$T_0(x)u_0\equiv \lambda_1\frac{\partial u}{\partial \tau_1}+\lambda_2\frac{\partial u}{\partial \tau_2}-A(x)u_0=A(x)\upsilon(x),\quad u_2(0,0)=y^0$$

түрде және келесідей шешімі бар:

$$u_0=u_{11}^0(x)b_1(x)e^{\tau_1}+u_{22}^0(x)b_2(x)e^{\tau_2}-\upsilon(x),\tag{1.82}$$

мұндағы $u_{ii}^0(0)=(y^0+\upsilon^0,b_i(0))\equiv c_i^0,\ i=1,2,\quad \upsilon^0\equiv\upsilon(0)$.

$$u_0'=\sum_{i=1}^{2}\Big(u_{ii}'^0+(b_i',b_i)u_{ii}^0\Big)b_ie^{\tau_i}+u_{11}^0(b_1',b_1)b_2e^{\tau_1}+u_{22}^0(b_2',b_2)b_1e^{\tau_2}-\upsilon'(x)$$

табайық. $(b_i',b_i)\equiv 0,\ (b_i',b_j)=(-1)^i\dfrac{1}{2},\ i\neq j$ ескеріп, $\langle u_0',KerT_0(x)\rangle\equiv 0$ тепе-теңдігінің орындалуын талап ете отырып,

$$u_{ii}^0(x)\equiv c_i^0$$

табамыз және келесі итерациялық есептің түрі мынадай болады:

$$T_0(x)u_1=-u_0'=\frac{c_1^0}{2}b_2e^{\tau_1}-\frac{c_2^0}{2}b_1e^{\tau_2}+A(x)\upsilon(x),\qquad u_1(0,0)=0.$$

Бұл есептен $u_1(x,\tau)$-ді

$$u_1=u_{11}^1b_1e^{\tau_1}+u_{22}^1b_2e^{\tau_2}+u_{21}^1b_2e^{\tau_1}+u_{12}^1b_1e^{\tau_2}-\upsilon(x)\tag{1.83}$$

түрінде табамыз, мұндағы

$$u_{21}^1\equiv\frac{c_1^0}{2^2},\quad u_{12}^1\equiv\frac{c_2^0}{2^2},\quad u_{ii}^1(0)=(\upsilon^0,b_i(0))-\frac{c_i^0}{2^2}\equiv c_{ij}^1,\ \ i\neq j.$$

$$u_1' = \left[u_{11}'^1 + \frac{u_{21}^1}{2}\right] b_1 e^{\tau_1} + \left[u_{22}'^1 + \frac{u_{12}^1}{2}\right] b_2 e^{\tau_2} - \frac{u_{11}^1}{2} b_2 e^{\tau_1} + \frac{u_{22}^1}{2} b_1 e^{\tau_2} - \upsilon'(x)$$

табайық, мұнда $\langle u_1', KerT_0(x)\rangle \equiv 0$ талап етіп,

$$u_{11}^1 = \frac{c_1^0}{2^3} x + c_{12}^1, \quad u_{22}^1 = \frac{c_2^0}{2^3} x + c_{21}^1$$

табамыз, сонымен қатар келесі итерациялық есепті аламыз:

$$T_0(x) u_2 = -u_1' = \left[\frac{c_{12}^1}{2} - \frac{c_1^0 x}{2^4}\right] b_2 e^{\tau_1} - \left[\frac{c_{21}^1}{2} + \frac{c_2^0 x}{2^4}\right] b_1 e^{\tau_2} - A(x)\upsilon(x), \qquad u_2(0,0) = 0.$$

Ары қарай процесс жалғаса береді: соңғы есептен

$$u_2 = u_{11}^2 b_1 e^{\tau_1} + u_{22}^2 b_2 e^{\tau_2} + u_{21}^2 b_2 e^{\tau_1} + u_{12}^2 b_1 e^{\tau_2} - \upsilon(x) \tag{1.84}$$

табамыз, мұндағы

$$u_{21}^2 \equiv \frac{c_{12}^1}{2^2} - \frac{c_1^0 x}{2^5}, \quad u_{12}^2 \equiv \frac{c_{21}^1}{2^2} + \frac{c_2^0 x}{2^5}, \quad u_{11}^2 \equiv -\frac{c_1^0 x^2}{2^6 2!} + \frac{c_{12}^1 x}{2^3 1!} + c_{12}^2,$$
$$u_{22}^2 \equiv \frac{c_2^0 x^2}{2^6 2!} + \frac{c_{21}^1 x}{2^3 1!} + c_{21}^2, \quad c_{ij}^2 = (\upsilon^0, b_i(0)) - \frac{c_{ji}^1}{2^2}, \; i \neq j.$$

Дәл осылай келесі функциялар есептеледі, дербес жағдайда

$$u_3 = u_{11}^3 b_1 e^{\tau_1} + u_{22}^3 b_2 e^{\tau_2} + u_{21}^3 b_2 e^{\tau_1} + u_{12}^3 b_1 e^{\tau_2} - \upsilon(x), \tag{1.85}$$

мұндағы

$$u_{21}^3 \equiv \frac{c_1^0 x^2}{2^8 2!} - \frac{c_{12}^1 x}{2^5} + \frac{c_{12}^2}{2^2} + \frac{c_1^0}{2^6}, \quad u_{12}^3 \equiv \frac{c_2^0 x^2}{2^8 2!} - \frac{c_{21}^1 x}{2^5} + \frac{c_{21}^2}{2^2} + \frac{c_2^0}{2^6},$$
$$u_{11}^3 \equiv -\frac{c_1^0 x^3}{2^9 3!} + \frac{c_{12}^1 x^2}{2^6 2!} - \left(\frac{c_1^0}{2^7} + \frac{c_{12}^2}{2^3}\right) x + c_{12}^3, \quad u_{22}^3 \equiv \frac{c_2^0 x^3}{2^9 3!} + \frac{c_{21}^1 x^2}{2^6 2!} + \left(\frac{c_2^0}{2^7} + \frac{c_{21}^2}{2^3}\right) x + c_{21}^3,$$
$$c_{ij}^3 = (\upsilon^0, b_i(0)) - \frac{c_{ji}^2}{2^2} - \frac{c_j^0}{2^6}, \; i \neq j.$$

(1.82)-(1.85),..., функцияларын қосып, регуляризацияланған қатар аламыз: $u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \dots$, бұларды қайта топтап болған соң қосынды

$$u = \left[c_1(\varepsilon)b_1(x) + c_2(\varepsilon)b_2(x)\right]e^{-\varepsilon x/4a^2}e^{\tau_1} + \left[c_3(\varepsilon)b_1(x) + c_4(\varepsilon)b_2(x)\right]e^{\varepsilon x/4a^2}e^{\tau_2} + \frac{\upsilon(x)}{\varepsilon - 1} \quad (1.86)$$

түрде жазылады, мұндағы

$$a = \sqrt{\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} + 1}, \quad c_1(\varepsilon) = \frac{a^2(y^1, d_1)}{\sqrt{2}}, \quad c_2(\varepsilon) = \frac{\varepsilon(y^1, d_1)}{2\sqrt{2}}, \quad c_3(\varepsilon) = \frac{\varepsilon(y^1, d_2)}{2\sqrt{2}}$$

$$c_4(\varepsilon) = \frac{a^2(y^1, d_2)}{\sqrt{2}}, \quad y^1 = y^0 + \frac{\upsilon(0)}{1 - \varepsilon}, \quad d_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{2\sqrt{2}a^2}{4a^2 - \varepsilon^2} \\ \dfrac{\sqrt{2}\varepsilon}{4a^2 - \varepsilon^2} \end{pmatrix}, \quad d_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}\varepsilon}{\varepsilon^2 - 4a^2} \\ \dfrac{2\sqrt{2}a^2}{\varepsilon^2 - 4a^2} \end{pmatrix}.$$

(1.86) қатардың жинақтылығының радиусы бірге тең және бұл жағдайда негізгі қатар жинақтылығының радиусымен анықталады. Қарастырылған мысалда $A(x)$ «шекті» операторының $b_i(x)$ меншікті векторы кез келген емес, олар $(b_i'(x), b_i(x)) \equiv 0$ қасиетіне ие.

2. ЖЫЛДАМ ОСЦИЛЛЯЦИАЛАНАТЫН СИНГУЛЯР АУЫТҚЫМАЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ЖӘНЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

2.1 Жылдам осцилляциаланушы коэффициентті кейбір есептер

Үдемелі тиянақтылықтың әртүрлі сұрақтарын зерттеу барысында, периодты құрылымды орталардың қасиеттерін зерттеуде және басқа да қолданбалы есептерде жылдам осцилляциаланушы коэффициентті дифференциалдық теңдеулер кездеседі. Мұндай есептердің асимптотикалық жіктеуін алу үшін шешімнің параметрден сингулярлы тәуелді характерінің толық сиппаттамасы принципті болып табылуы талап етіледі.

Жылдам осцилляциаланушы коэффициентті дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сингуляр ауытқымалы Коши есебін зерттейміз. Айталық,

$$L_\varepsilon z(x,\varepsilon) \equiv \varepsilon z'(x,\varepsilon) - A(x,\varepsilon) z(x,\varepsilon) = h(x), \quad z(x_0,\varepsilon) = z^0, \tag{2.1}$$

мұндағы

$$A(x,\varepsilon) \equiv A_0(x) + \sum_{l=1}^{p} \varepsilon^l A_l(x,\varepsilon), \qquad A_l(x,\varepsilon) \equiv \sum_{m=-q}^{q} A_l^{(m)}(x) e^{\frac{i}{\varepsilon} m\beta(x)}.$$

Бұл жерде $p,q -$бүтін сандар, $A_0(x)$, $A_l^{(m)}(x) - n$ ретті квадрат матрицалар, $z(x,\varepsilon)$, z^0, $h(x) - n$- өлшемді векторлар, $x \in [x_0, a], a > x_0$. $\varepsilon \to +0$ болғанда бұл есеп шешімінің регуляризацияланған асимптотикасы келесідей құрылады.

А. $A_0(x)$ матрицасының $\lambda_i(x)$, $(i = \overline{1,n})$ меншікті мәндері әрбір $x \in [x_0, a]$:

а) $\lambda_i(x) \neq \lambda_j$, $i \neq j$;

б) $\operatorname{Re} \lambda_i(x) \leq 0$, $\lambda_i(x) \neq 0$ талаптарын қанағаттандырады;

Б. $A_0(x)$, $A_l^{(m)}(x)$, $\beta(x)$, $h(x)$ функциялары $C^\infty[x_0, a]$ классының функциялары.

Ф.С. Фещенко және Н.И. Шкильдің [22] белгілі жұмыстарында регуляризация әдісіне жақын асимптотикалық жіктеулерді алу үшін дифференциалдық теңдеулерді бөлшектеу әдісі жасалынған болатын. Әдіс біртекті сингулярлы ауытқымалы теңдеулерге қолдануда әсіресе әсерлі. Ю.Л.Далецкий мен С.Г.Крейн [23] бұл әдісті кейбір абстрактылы теңдеулерге жалпылаған.

Ю.Л.Далецкийдің [24] жұмысында көрсетілген әдіс көмегімен (2.1) теңдеуге сәйкес келетін біртекті теңдеулі Коши есебі шешімінің асимптотикасы алынған. Бұдан басқа, осы жұмыста $A_0(x)$ операторы тұрақты деп алынған. (2.1) есептің асимптотикасы жылдам осцилляциаланушы коэффициенттің

$\lambda_0(x) = i\beta'(x)$ жиілігі $A_0(x)$ операторының спектрімен қалай байланысты екендігіне тәуелділігі көрсетілген. Келесі жағдайлар қарастырылған:

i) (резонанстың болмауы) кез келген k, j, $k \le n, j \le n$, натурал сандары үшін және әрбір $x \in [x_0, a]$ болғанда кез келген $m \ne 0$ үшін мынау орынды: $\lambda_k(x) + m\lambda_0(x) \ne \lambda_j(x)$; $m\lambda_0(x) \ne \lambda_j(x)$;

ii) (меншікті резонанс) кез келген k, j, $k \le n$, $j \le n$, натурал сандары үшін және әрбір $x \in [x_0, a]$ болғанда кез келген $m_{kj} \ne 0$ бүтін сандары үшін мына тепе-теңдік орынды: $\lambda_k(x) + m_{kj}\lambda_0(x) \equiv \lambda_j(x)$; сонымен қатар $r \le n$ болатын кез келген r натурал саны үшін және әрбір $x \in [x_0, a]$ болғанда кез келген $m \ne 0$ бүтін сандары үшін мынау орынды: $m\lambda_0(x) \ne \lambda_r(x)$.

Ю.Л. Далецкийдің [24] жұмысында тек біртекті теңдеулер қарастырылғандықтан, онда тек біртекті емес теңдеу үшін арналған тағы бір жағдайы қалып отыр:

iii) (мәжбүрлі резонанс) кейбір k, $k \le n$, натурал сандары үшін және әрбір $x \in [x_0, a]$ болғанда кейбір m_k бүтін сандары үшін мына тепе-теңдік орынды: $m_k\lambda_0(x) \equiv \lambda_k(x)$; сонымен қатар $r \le n$, $j \le n$, болатын кез келген r, j натурал сандары үшін және әрбір $x \in [x_0, a]$ болғанда кез келген $m \ne 0$ бүтін сандары үшін мына теңсіздік орындалады: $\lambda_r(x) + m\,\lambda_0(x) \ne \lambda_j(x)$.

Мұнда біз қарапайым резонанстық жағдайды қарастырамыз, яғни немесе меншікті, немесе мәжбүрлі, немесе екеуіде болатын жағдайды қарастырамыз. Жалпы резонанстық шартты компакты түрде жазу үшін $\lambda_{n+1}(x) \equiv 0$ белгілеуін енгіземіз. Онда жалпы резонанстық шарт мына түрде болады.

В. кейбір $k, j, k \le n+1$, $j \le n$, натурал сандары үшін және әрбір $x \in [x_0, a]$ болғанда кез келген $m_{kj} \ne 0$ бүтін сандары үшін мына тепе-теңдік орынды: $\lambda_k(x) + m_{kj}\lambda_0(x) \equiv \lambda_j(x)$.

(2.1) есепті асимптотикалық интегралдау үшін регуляризация әдісінің кейбір модификациясы ұсынылады. Модификацияның бар болуы $A_0(x)$ операторының спектрлерімен байланысты қосымша тәуелсіз айнымалылармен қатар, жылдам осцилляциаланушы коэффициенттерден туындаған айнымалылардан тұруымен байланысты. Мұндай модификацияны алғаш рет А.Д. Рыжих [14] жасаған.

2.2 Регуляризация әдісінің формалдылығы

(2.1) есептегі ізделінді $z(x, \varepsilon)$ шешімінің орнына,

$$\tilde{z}(x, \psi(x, \varepsilon)) \equiv z(x, \varepsilon) \tag{2.2}$$

болатын көптеген $\tilde{z}(x,t,\varepsilon)$ комплекс айнымалы функцияларын зерттейміз, мұндағы $t=(t_0,t_1,...,t_n)$ – қосымша тәуелсіз айнымалылар жиыны, $\psi(x,\varepsilon)=(\psi_0(x,\varepsilon),\psi_1(x,\varepsilon),...,\psi_n(x,\varepsilon))$, $\psi_i(x,\varepsilon),(i=\overline{1,n})$, регуляризация әдісіндегідей $A_0(x)$ операторының спектрімен келесі түрде байланысқан: $\psi_i(x,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{x_0}^{x}\lambda_i(x)dx,\ i=\overline{1,n}$, ал $\psi_0(x,\varepsilon)$ жылдам осцилляцияланушы коэффициенттерден туындаған, яғни $\psi_0(x,\varepsilon)=\frac{i}{\varepsilon}\beta(x)$. $\psi_0(x,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{x_0}^{x}\lambda_0(x)dx+\frac{i}{\varepsilon}\beta(x)$ ескерейік. $\tilde{z}(x,t,\varepsilon)$ функциясы үшін

$$\tilde{L}_\varepsilon \tilde{z}(x,t,\varepsilon)\equiv \varepsilon\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x}+D_\lambda \tilde{z}-\left[A_0(x)+\sum_{l=1}^{p}\varepsilon^l \tilde{A}_l(x,t_0)\right]\tilde{z}=h(x) \qquad (2.3)$$

$$\tilde{z}(x_0,\psi(x_0,\varepsilon),\varepsilon)=z^0$$

теңдеуін қарастырамыз, мұндағы

$$\psi(x_0,\varepsilon)=(\psi_0(x_0,\varepsilon),0,0,...,0),\ D_\lambda \tilde{z}\equiv\sum_{i=0}^{n}\lambda_i(x)\frac{\partial \tilde{z}}{\partial t_i},$$

$$\lambda(x)=\{\lambda_0(x),...,\lambda_n(x)\},\ \tilde{A}_l(x,t_0)\equiv\sum_{m=-q}^{q}A_l^{(m)}(x)e^{mt_0}.$$

$t\equiv\psi(x,\varepsilon)$ болғанда (2.3) есептің шешімінің тарылуы (2.1) бастапқы есептің шешімі болып табылады, себебі (2.2)-ден $\tilde{L}_\varepsilon\tilde{z}(x,\psi(x,\varepsilon),\varepsilon)\equiv L_\varepsilon z(x,\varepsilon),\ \tilde{z}(x_0,\psi(x_0,\varepsilon),\varepsilon)=z(x_0,\varepsilon)$. (2.3) есеп ε бойынша регулярлы және оның шешімін

$$\tilde{z}(x,t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z_k(x,t) \qquad (2.4)$$

қатары түрінде іздейміз.

(2.4) қатадың коэффициенттері тұрақтылар арқылы , бастапқы шарттардан анықталатын ε-нан, сингуляр тәуелді болуы мүмкін. (2.4) қатарды (2.3) есепке қойып және ε бірдей дәрежесіндегі коэффициенттерді теңестірейік. (2.4) қатардың коэффициенттері үшін келесі есепті аламыз:

$$L_0 z_0(x,t)\equiv D_\lambda z_0-A_0(x)z_0=h(x),\qquad z_0(x_0,\psi(x_0,\varepsilon))=z^0,\qquad (\varepsilon^0)$$

$$L_0 z_1(x,t) = Hz_0(x,t) \equiv -\frac{\partial z_0}{\partial x} + \hat{A}_1(x,t_0)z_0, \qquad z_1(x_0,\psi_0(x_0,\varepsilon)) = 0, \qquad (\varepsilon^1)$$

$$L_0 z_2(x,t) = Hz_2(x,t) + g_2(z_0(x,t)) \equiv -\frac{\partial z_1}{\partial x} + \hat{A}_1(x,t_0)z_1 + \hat{A}_2(x,t_0)z_0,$$

$$z_2(x_0,\psi_0(x_0,\varepsilon)) = 0, \qquad (\varepsilon^2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$L_0 z_k(x,t) = Hz_{k-1}(x,t) + g_k(z_{k-2},\ldots,z_{k-k_0}) \equiv -\frac{\partial z_{k-1}}{\partial x} + \hat{A}_1(x,t_0)z_{k-1} + \sum_{l=2}^{k_0} \hat{A}_l(x,t_0)z_{k-l},$$

$$z_k(x_0,\psi(x_0,\varepsilon)) = 0,\ k = 3,4,\ldots,$$

$$(\varepsilon^k)$$

мұндағы $k_0 = \min\{k, p\}$.

2.3 Резонанссыз шешімдер кеңістігі

Элементтері $z(x,t) = \sum_{m=-kq}^{kq} Z^{(m)}(x)e^{t+mt_0}$ түріндегі $Z_k, k = 0.1,2,\ldots$ жиынын қарастырайық, мұндағы e^{t+mt_0} арқылы $\left\{e^{t_1+mt_0}, e^{t_2+mt_0},\ldots,e^{t_n+mt_0}, e^{mt_0}\right\}$ координаталарымен $(n+1)$ өлшемді вектор-баған белгіленген, $Z^{(m)}(x)-$элементтері $[x_0,a]-$да шексіз дифференциалданатын $n\times(n+1)$ өлшемді матрица. $Z^{(m)}(x)$ матрицасының элементтері $\varepsilon-$нан сингуляр тәуелді болуы мүмкін. Сонымен қатар $Z^{(m)}(x)$ матрицалары келесі түсініктегі шартты қанағаттандырады.

Анықтама 2.1. k, $k \le n+1$ натурал санынан және $m_{kj} \ne 0$ бүтін санынан тұратын (k,m_{kj}) жиыны резонанстық деп аталады, егер j, $j \le n$, натурал саны бар және кез келген $x \in [x_0,a]$ үшін $\lambda_k(x) + m_{kj}\lambda_0(x) \equiv \lambda_j(x)$ тепе-теңдік орынды болса.

j санын (k,m_{kj}) резонанстық жиынына сәйкес келеді деп атаймыз. (k,m_{kj}) резонанстық жиыны $k \le n$ болғанда меншікті резонансқа сәйкес келеді, ал $k = n+1$-де мәжбүрлі резонанс болады. В шартынан (2.1) есеп үшін резонанстық жиын бар. Z_k көпмүшелігінің элементтерін анықтауда $Z^{(m)}(x)$ матрицасы қанағаттандыратын шартты қарастырайық.

Шарт 1. Егер $m \ne 0$ саны үшін (k,m) резонанстық жиын болса, онда $Z^{(m)}(x)$ матрицасының $k-$шы бағаны нөлге тең.

Әрбір $x \in [x_0,a]-$да Z_k көпмүшелігін $k = 0,1,2,\ldots$ болғанда J өрісінде векторлық кеңістік ретінде қарастыруға болады. Келесі ереже бойынша скаляр көбейтінді енгіземіз: кез келген $z\ (x,t)$, $\omega(x,t) \notin Z_k$ (бұл деген, $z\ (x,t) = \sum\limits_{m=-kq}^{kq} Z^{(m)}(x)e^{t+mt_0}$,$\omega\ (x,t) = \sum\limits_{m=-kq}^{kq} W^{(m)}(x)e^{t+mt_0}$)

үшін $\left\langle z\ (x,t), \omega\ (x,t) \right\rangle \equiv \sum\limits_{m=-kq}^{kq} \sum\limits_{i=1}^{n} (z_i^{(m)}(x), \omega_i^{(m)}(x))$, мұндағы $z_i^{(m)}(x)$, $\omega_i^{(m)}(x) - Z^{(m)}(x)$, $W^{(m)}(x)$ матрицаларының бағандары делік. Осылайша, Z_k кеңістігі әрбір $x \in \left[x_0, a\right]$ – да J өрісінің гильберт кеңістігі болады.

Анықтама 2.2. $z\ (x,t)$, $\omega\ (x,t) \in Z_k$ элементтері ортогоналды болады, егер барлық $x \in \left[x_0, a\right]$ үшін

$$\left\langle z\ (x,t), \omega\ (x,t) \right\rangle \equiv 0$$

болса.

2.4 Түйіндес оператор

Әрбір Z_k кеңістігінде L_0 операторына түйіндес L_0^* операторын қарастырайық. L_0^* операторы мына түрде болсын:

$$L_0^* z\ (x,t) \equiv D_{\bar{\lambda}} z\ (x,t) - A_0^*(x) z(x,t),$$

мұндағы $D_{\bar{\lambda}} z\ (x,t) \equiv \sum\limits_{i=0}^{n} \overline{\lambda}_i(x) \dfrac{\partial z(x,t)}{\partial t_i}$, $A_0^*(x) - A_0(x)$ матрицасына түйіндес матрица.

Z_k кеңістігінде L_0^* операторының ядросы

$$L_0^* u(x,t) = 0 \tag{2.5}$$

теңдеуін қанағаттандыратын $u(x,t) \in Z_k$ элементтерін құрайды. Кез келген $u(x,t) \in Z_k$ элементінің түрі

$$u(x,t) = \sum_{m=-kq}^{kq} U^{(m)}(x) e^{t+mt_0}. \tag{2.6}$$

тең. (2.6)-ны (2.5)-ке қойып,

$$u(x,t)=\sum_{m=-kq}^{kq}[U^{(m)}(x)\Lambda_{n+1}(\overline{\lambda}+m\overline{\lambda_0})-A_0^*(x)U^{(m)}(x)]e^{t+mt_0}=0$$

аламыз, мұндағы

$$\Lambda_{n+1}(\overline{\lambda}+m\overline{\lambda_0})=diag\left\{\overline{\lambda_1}(x)+m\overline{\lambda_0}(x),...,\overline{\lambda_n}(x)+m\overline{\lambda_0}(x),m\overline{\lambda_0}(x)\right\}.$$

$e^{t+mt_0}=\left\{e^{t_1+mt_0},e^{t_2+mt_0},...,e^{t_n+mt_0},e^{mt_0}\right\}$ функциялары әртүрлі $m-$де J_x өрісінен сызықты тәуелсіз. Осыдан, $U^{(m)}(x)-$ті анықтау үшін мына теңдеуді аламыз

$$U^{(m)}(x)\Lambda_{n+1}(\overline{\lambda}+m\overline{\lambda_0})-A_0^*(x)U^{(m)}(x)=0. \qquad (2.7)$$

(2.7) матрицалық теңдеудің шешімін

$$U^{(m)}(x)=B_0^*(x)D^{(m)}(x) \qquad (2.8)$$

түрінде іздейміз, мұндағы $B_0^*(x)-A_0^*(x)$ матрицасының меншікті векторларынан құралған матрица. Z_k кеңістігі элементтерінің анықтамасы бойынша $U^{(m)}(x)$ матрицалары 1 шартты қанағаттандырады (яғни, егер $m\neq 0$ резонансты (i,m) жиынына енсе, онда $U^{(m)}(x)$ матрицасының $i-$ші бағаны нөлге тең.) $B_0^*(x)$ матрицасы айрықша болғандықтан, онда $D^{(m)}(x)$ матрицасы да 1 шартты қанағаттандыруы қажет. (2.8)-ді (2.7)-ге қойып

$$D^{(m)}(x)\Lambda_{n+1}(\overline{\lambda}+m\overline{\lambda_0})-\Lambda_n(\overline{\lambda})D^{(m)}(x)=0$$

аламыз, мұндағы $\Lambda_n(\overline{\lambda})=diag\left\{\overline{\lambda_1}(x),...,\overline{\lambda_n}(x)\right\}$. Егер осы теңдеуді элементі бойынша жазсақ,

$$(\overline{\lambda_j}(x)+m\overline{\lambda_0}(x)-\overline{\lambda_i}(x))d_{ij}^{(m)}=0, i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n+1} \qquad (2.9)$$

аламыз, мұндағы $d_{ij}^{(m)}-D^{(m)}(x)$ матрицасының элементтері. (2.9) теңдеуі үшін үш жағдай болуы мүмкін:

а) кез келген $x\in[x_0,a]$ үшін $\overline{\lambda_j}(x)+m\overline{\lambda_0}(x)\neq\overline{\lambda_i}(x)$;

б) кез келген $x\in[x_0,a]$ үшін $m\neq 0$ болғанда $\overline{\lambda_j}(x)+m\overline{\lambda_0}(x)\equiv\overline{\lambda_i}(x)$;

в) кез келген $x\in[x_0,a]$ үшін $m=0$ болғанда $\overline{\lambda_j}(x)+m\overline{\lambda_0}(x)\equiv\overline{\lambda_i}(x)$ (яғни, $i=j$).

а) жағдайында (2.9) теңдеудің $d_{ij}^{(m)}(x)=0$ жалғыз шешімі бар. б) жағдайында (2.9) теңдеудің $d_{ij}^{(m)}(x)$ кез келген шешімі бар. Бірақ бұл жағдайда (i,j) резонансты жиын құрайды. Сондықтан $D^{(m)}(x)$ матрицасы 1 шартты қанағаттандыруы қажет, яғни бұл матрицаның $j-$ші бағанын нөл етіп алуымыз қажет, сонымен қатар $d_{ij}^{(m)}(x)$ элементін де нөлге теңестіріп қоямыз. Осылайша, бұл жағдайда да $d_{ij}^{(m)}(x)=0$. в) жағдайында (2.9) теңдеудің шешімі $m=0$, $i=j$ болғанда $d_{ij}^{(m)}(x)=c_i(x)$ болады, мұндағы $c_i(x)-C^{\infty}\left[x_0,a\right]$ классына тиісті кез келген функция.

Осылайша, матрица $m\neq 0-$да $D^{(m)}(x)=0$, ал $m=0-$да $D^{(0)}(x)=\Lambda(c(x))$, мұндағы $\Lambda(c(x))-n\times(n+1)$ өлшемді матрица, алғашқы n бағаны $diag\left\{c_1(x),...,c_n(x)\right\}$ матрицасын құрайды, ал соңғы баған нөл. Мұндай матрицаларды $(diag\left\{c_1(x),...,c_n(x)\right\},0)$ арқылы белгілейміз.

$U^{(m)}(x)=B_0^*(x)D^{(m)}(x)$ және табылған $U^{(m)}(x)-$ді (2.6)-ға қояйық, онда $u(x,t)$ элементтің ядросы үшін жалпы түрді аламыз:

$$u(x,t)=B_0^*(x)\Lambda(c(x))e^t=\sum_{i=1}^{n}b_i^{(*)}(x)c_i(x)e^{t_i} \qquad (2.10)$$

мұндағы $b_i^{(*)}(x)-A_0^*(x)$ матрицасының меншікті векторлары.

Бұл жалпы түрдегі формула, (2.10)-мен алынатын, кез келген $c_1(x),...,c_n(x)$ функцияларындағы $u(x,t)$ элементтері L_0^* ядросына тиісті, және керісінше, егер $c_1(x),...,c_n(x)$ дұрыс таңдалынып алынса, онда L_0^* ядросында кез келген бекітілген элемент Z_k –да (2.10) формула бойынша алынуы мүмкін.

J $_x$ өрісінен L_0^* операторының ядросының базисі

$$q_i(x,t_i)=b_i^{(*)}(x)e^{t_i}, i=\overline{1,n}$$

элементтерін құрайды.

2.5 Жаңа рекуррентті есептерді құру

Z_k кеңістіктері (ε^k) есебінің шешімі үшін жарамайды. Негізінде, егер кейбір (ε^k) есебі Z_k кеңістіктерінде шешілсе, онда келесі (ε^{k+1}) есебінің оң жақ бөлігі жалпы жағдайда $e^{t_i+mt_0}$ экспонентасын құрайды, мұндағы $(i,m)-$резонанстық жиын, ал Z_k кеңістіктерінде бір де бір элемент экспонента құрамайды. Бұдан алынған есептің оң жақ бөлігі Z_k кеңістіктерінің біреуіне тиесілі болатындай етіп (ε^k) есебін өзгертеміз. Басқаша айтқанда, әрбір (ε^k) есебіне сәйкесінше жаңа $(\overline{\varepsilon}^k)$ есебін қоямыз, $(\overline{\varepsilon}^k)$ есебінің оң жақ бөлігі Z_k кеңістіктерінің элементтері болады. Сонымен қатар, $t=\psi(x,\varepsilon)$ болғанда (2.4) қатардың тарылуынан алынған қатар (2.1) есептің шешімі үшін формалды асимптотикалық қатар болады. Осылардан, (ε^k) есебінің оң жақ бөлігін сәйкесінше өзгертеміз:

$$\overline{\overline{z}}(x,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k \overline{\overline{z_k}}(x,\varepsilon)\Big|_{t=\psi(x,\varepsilon)}, \tag{2.11}$$

мұндағы $\overline{\overline{z}}(x,\varepsilon)-(\overline{\varepsilon}^k)$, $k=0,1,2,...$ есебінің жаңа шешімі (2.1) есептің формалды асимптотикалық шешімі болуы қажет.

$(\overline{\varepsilon}^k)$ есебін құруға көшеміз. Ол үшін кейбір түсініктерді енгіземіз.

Анықтама 2.3. $e^{t_j+\frac{i}{\varepsilon}m\beta(x_0)}$ экспонентасына сәйкес келетін, $e^{t_k+mt_0}$ $(k=\overline{1,n+1},m\neq 0)$ экспонентасын резонанстық экспонента деп атаймыз, егер j саны (k,m) жиынына сәйкес келсе.

j санына сәйкес келетін, (k,m) жиыны резонанстық жиын деп аталады, егер $(m\neq 0)$ болғанда кез келген $x\in[x_0,a]$ үшін $\lambda_k(x)+m\lambda_0(x)\equiv\lambda_j(x)$ болса. Бұл қатынастан кез келген $x\in[x_0,a]$, $\varepsilon>0$ үшін

$$\psi_k(x,\varepsilon)+m\psi_0(x,\varepsilon)\equiv\psi_j(x,\varepsilon)+\frac{i}{\varepsilon}m\beta(x_0)$$

(мұнда $\psi_{n+1}(x,\varepsilon)\equiv 0$) орынды. Осыдан, егер $e^{t_k+mt_0}-e^{t_j+\frac{i}{\varepsilon}m\beta(x_0)}$ экспонентасына сәйкес келетін резонанстық экспонента болса, онда $t=\psi(x,\varepsilon)$ болғанда осы экспоненталардың тарылуы тең, яғни кез келген $x\in[x_0,a]$, $\varepsilon>0$, үшін

$$e^{\psi_k(x,\varepsilon)+m\psi_0(x,\varepsilon)}\equiv e^{\psi_j(x,\varepsilon)+\frac{i}{\varepsilon}m\beta(x_0)}. \tag{2.12}$$

Енді

$$z(x,t)=\sum_{m=-kq}^{kq}Z^{(m)}(x)e^{t+mt_0} \tag{2.13}$$

түріндегі $z(x,t)$ элементті қарастырамыз, мұндағы $Z^{(m)}(x)-$элементтері $[x_0,a]-$да шексіз дифференциалданатын, $n\times(n+1)$ өлшемді кез келген матрица. Бұл элемент Z_k кеңістіктеріне тиісті емес, себебі резонанстық экспоненталары болуы мүмкін.

Анықтама 2.4. (2.13) түрдегі $z(x,t)$ элемент Z_k кеңістігіне $\hat{z}(x,t)$ элементі ретінде қойылады, егер $\hat{z}(x,t) - e^{t_j + \frac{i}{\varepsilon} m\beta(x_0)}$ экспонентасына сәйкес келетін барлық резонанстық экспоненталар $z(x,t)-$дан ауысып алынса. $z(x,t) \to \hat{z}(x,t)$ операциясын енгізу операциясы деп атаймыз.

Бұл анықтамадан және (2.12) қатынастан мына тепе-теңдік шығады:

$$z(x,t)\Big|_{t\equiv\psi(x,\varepsilon)} \equiv \hat{z}(x,t)\Big|_{t\equiv\psi(x,\varepsilon)},\ \forall x \in [x_0, a], \forall \varepsilon > 0.$$

Сонымен қатар, (2.13) элементіне енгізу операциясын қолдансақ, онда

$$\hat{z}(x,t) = Z^{(0)}(x)e^{t} + \tilde{Z}^{(0)}(x)e^{t} + \sum_{m=-kq}^{kq} Z^{(m)}(x)e^{t+mt_0}$$

элемент сәйкес келеді, мұндағы $\tilde{Z}^{(m)}(x)$ $(m \neq 0)$ матрицасы $Z^{(m)}(x)$ матрицасынан, нөмерлері (k,m) резонанстық жиынға кіретін, осы матрицаның барлық $z_k^{(m)}(x)$ бағандарының нөлдік бағандарына ауыстыру арқылы алынған; $\tilde{Z}^{(0)}(x)$ матрицасы келесі ереже бойынша алынған: егер $j = \overline{1,n}$ саны бір де бір резонанстық жиынға сәйкес келмесе, онда осы матрицаның $j-$ші бағаны нөлдік, ал егер j бір не бірнеше резонанстық жиынға сәйкес келсе, онда осы матрицаның $\tilde{z}_j^{(0)}(x)$ $j-$ші бағаны

$$\tilde{z}_j^{(0)}(x) = \sum_{(k,m)\ni j} z_k^{(m)}(x) e^{\frac{i}{\varepsilon} m\beta(x_0)}$$

тең.

$(\overline{\varepsilon}^{k})$ есебі индуктивті құрылады: егер сәйкесінше $Z_0, ..., Z_{k-1}$ кеңістіктерінде $(\overline{\varepsilon}^{0}), (\overline{\varepsilon}^{1}), ..., (\overline{\varepsilon}^{k-1})$-ның алғашқы k есебін шешсек, онда $(\overline{\varepsilon}^{k})$ есебін алу үшін (ε^{k}) есебінің оң жақ бөлігін Z_k кеңістігіне қоямыз. Осылайша, (ε^{k}) есебінің орнына келесі есепті аламыз:

$$L_0 \overline{\overline{z}}_0(x,t) = h(x),\ \ \overline{\overline{z}}_0(x_0, \psi(x_0, \varepsilon)) = z^0, \qquad (\overline{\varepsilon}^{0})$$

$$L_0 \overline{\overline{z}}_k(x,t) = \hat{H}\,\overline{\overline{z}}_{k-1}(x,t) + \hat{g}_k(\overline{\overline{z}}_{k-2}, ..., \overline{\overline{z}}_{k-k_0}),\ \ \overline{\overline{z}}_k(x_0, \psi(x_0, (\overline{\varepsilon}^{0})) = 0 \qquad (\overline{\varepsilon}^{k})$$

мұндағы, $\tilde{H}\bar{\bar{z}}_{k-1}(x,t)$ және $\tilde{g}_k(\bar{\bar{z}}_{k-2},...,\bar{\bar{z}}_{k-k_0})$- сәйкесінше $H\bar{\bar{z}}_{k-1}(x,t)$ және $g_k(\bar{\bar{z}}_{k-2},...,\bar{\bar{z}}_{k-k_0})$ элементтерінің бейнелері. Енді Z_k кеңістіктерінде $(\bar{\varepsilon}^k)$ есебінің шешілуі туралы айта аламыз немесе алынған есептің оң жақ бөлігі осы кеңістіктерге тиісті. Егер барлық $(\bar{\varepsilon}^k)$ есебі Z_k-да шешімді болса, онда (2.11) қатар (2.1) есептің формалды асимптотикалық шешімі болады.

Теорема 2.1. А, Б, В шарттары орындалды делік. Егер барлық $(\bar{\varepsilon}^k)$ $k=0,1,2,...,$ есептері сәйкесінше Z_k кеңістіктерінде шешімді болса, онда (2.11) қатардың $z_{\varepsilon n}(x)$ $n-$ші бөліктік қосындысы нақты ε^{n+1} мүшесіне дейін (2.1) есепті қанағаттандырады, яғни

$$L_\varepsilon z_{\varepsilon n}(x)=h(x)+\varepsilon^{n+1}R(x,\varepsilon),\ z_{\varepsilon n}(x_0)=z^0,$$

мұндағы $\|R(x,\varepsilon)\|_{C[x_0,a]}\le c$, $c-\varepsilon-$нан тәуелсіз тұрақты.

Дәлелдеуі. Айталық $z_0(x,t),...,z_n(x,t)-$шешілген $(\bar{\varepsilon}^0),...,(\bar{\varepsilon}^n)$ есебі болсын. Онда $z_{\varepsilon n}(x_0)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k z_k(x_0,\psi(x_0,(\varepsilon))=z^0$, яғни алғашқы шарттар орындалады. Енді $z_{\varepsilon n}(x)$ (2.1) теңдеуді нақты ε^{n+1} мүшесіне дейін қанағаттандыратындығын көрсетеміз. $z_n(x,t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k z_k(x,t)$ өрнегіне $\tilde{L}_\varepsilon=L_0+\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}-\sum_{l=1}^{p}\varepsilon^l\tilde{A}_l(x,t_0)$ операторын қолданамыз. Осыдан

$$\tilde{L}_\varepsilon z_n(x,t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k\tilde{L}_\varepsilon z_k(x,t)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k L_0 z_k(x,t)+\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^{k+1}\frac{\partial z_k}{\partial x}-$$
$$-\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=1}^{p}\varepsilon^{k+1}\tilde{A}_l(x,t_0)z_k(x,t)$$

аламыз. Соңғы қосылғышта ε бірдей дәрежелі мүшелерді топтайық. $\varepsilon^s(1\le s\le n+p)$ болғанда осы өрнекте коэффициент $1\le s\le n-$да $\sum_{l=1}^{s_0}\tilde{A}_l(x,t_0)z_{s-l}(x,t)$-ға тең, ал $n+1\le s\le n+p-$да коэффициент мына түрде: $\sum_{l=s-n}^{s_0}\tilde{A}_l(x,t_0)z_{s-l}(x,t)$, мұндағы $s_0=\min(s,p)$. Осылайша,

$$\tilde{L}_\varepsilon z_n(x,t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k L_0 z_k(x,t)+\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^{k+1}\frac{\partial z_k(x,t)}{\partial x}-\sum_{s=0}^{n}\varepsilon^s\sum_{l=1}^{s_0}\tilde{A}_l(x,t_0)z_{s-l}(x,t)-$$

$$-\sum_{s=n+1}^{n+p}\varepsilon^{s}\sum_{l=s-n}^{s_0}\tilde{A}_l(x,t_0)z_{s-l}(x,t)=\sum_{s=0}^{n}\varepsilon^{s}L_0 z_s(x,t)+\sum_{s=0}^{n}\varepsilon^{s}\left[\frac{\partial z_{s-1}}{\partial x}-\sum_{l=1}^{s_0}\tilde{A}_l(x,t_0)z_{s-l}\right]+$$
$$+\varepsilon^{n+1}\frac{\partial z_n}{\partial x}-\sum_{s=n+1}^{n+p}\varepsilon^{s}\sum_{l=s-n}^{s_0}\tilde{A}_l(x,t_0)z_{s-l},$$

$z_s(x,t)-(\overline{\varepsilon}^{s})$ есебінің шешімі екенін ескеріп, ал квадрат жақша ішіндегі өрнек $-\left[Hz_{s-1}+g_s(z_{s-2},...,z_{s-s_0})\right]$ тең боғандықтан,

$$\tilde{L}_\varepsilon z_n(x,t,\varepsilon)=h(x)+\sum_{s=1}^{n}\varepsilon^{s}[\tilde{H}z_{s-1}+\tilde{g}_s(z_{s-2},...,z_{s-s_0})-Hz_{s-1}-g_s(z_{s-2},...,z_{s-s_0})]+$$
$$+\varepsilon^{n+1}R(x,t,\varepsilon),$$

мұндағы,

$$R(x,t,\varepsilon)=\frac{\partial z_n}{\partial x}-\sum_{l=1}^{n_0}\tilde{A}_l(x,t_0)z_{s+n-l}-\sum_{s=n+2}^{n+p}\varepsilon^{s-n-1}\sum_{l=s-n}^{s_0}\tilde{A}_l(x,t_0)z_{s-l},\ n_0=\min(n,p).$$

Бұл тепе-теңдікке $t\equiv\psi(x,\varepsilon)$ қоямыз.

$$\tilde{L}_\varepsilon z_n(x,t,\varepsilon)\Big|_{t\equiv\psi(x,\varepsilon)}\equiv L_\varepsilon z_{\varepsilon n}(x);\ \tilde{H}z_{s-1}\Big|_{t\equiv\psi(x,\varepsilon)}\equiv Hz_{s-1}\Big|_{t\equiv\psi(x,\varepsilon)};\ \tilde{g}_s(z_{s-2},...,z_{s-s_0})\Big|_{t\equiv\psi(x,\varepsilon)}\equiv$$
$$\equiv g_s(z_{s-2},...,z_{s-s_0})\Big|_{t\equiv\psi(x,\varepsilon)}$$

ескеріп,

$$L_\varepsilon z_{\varepsilon n}(x)=h(x)+\varepsilon^{n+1}R(x,\psi(x,\varepsilon),\varepsilon) \qquad (2.14)$$

аламыз. $C[x_0,a]$ нормасында $R(x,\psi(x,\varepsilon),\varepsilon)$ өрнегін бағалау қалды. $R(x,t,\varepsilon)$ жазуында алғашқы екі қосылғыш $Z_{n+1}-$ге тиісті, сонымен бірге, әрбір бекітілген $\varepsilon>0-$да әрбір қосылғыш екі есе қосындыда $Z_{n+1}-$ге тиісті. А шартының б) кез келген $u(x,t)\in Z_{n+1}$ элемент $\|u(x,\psi(x,\varepsilon))\|\le const$ қасиетіне ие, осыдан

$$\left\|\left[\frac{\partial z_n}{\partial x}-\sum_{l=1}^{s_0}\tilde{A}_l(x,t_0)z_{s-l}\right]_{t\equiv\psi(x,\varepsilon)}\right\|\le c_1,$$

$$\left\| \left[\sum_{l=s-n}^{s_0} \tilde{A}_l(x,t_0) z_{s-l} \right]_{t\in\psi(x,\varepsilon)} \right\| \le c_s \quad \left(s=\overline{n+2,n+p}\right).$$

Соңғы теңсіздіктерден $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ – да

$$\left\| \left[\sum_{s=n+2}^{n+p} \varepsilon^{s-n-1} \sum_{l=s-n}^{s_0} \tilde{A}_l(x,t_0) z_{s-l} \right]_{t\in\psi(x,\varepsilon)} \right\| < c^*_s$$

орынды. Осыдан, $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ – да $\left\|R(x,\psi(x,\varepsilon),\varepsilon)\right\| \le c_1 + c^*_s = c$, мұндағы $c - \varepsilon$ – нан тәуелсіз тұрақты.

2.6 Шешімділік туралы теорема

Енді Z_k кеңістіктерінде $(\overline{\varepsilon}^k)$ есебінің шешімділігі туралы сұрақты қарастырайық. Ол үшін алдымен Z_k – да

$$L_0 z_s(x,t) = h(x,t),\ z(x_0,\psi(x_0,\varepsilon)) = z^0 \tag{2.15}$$

есебінің шешімділігі туралы теореманы келтірейік. Z_k кеңістігі J_x өрісінде ақырлы өлшемді болып табылады және $L_0\colon Z_k \to Z_k$. Сондықтан, (2.15) теңдеу үшін бір қалыпты шешімділік туралы теорема орынды.

Теорема 2.2. Айталық, А, Б, В шарттары орындалды делік және $h(x,t)\in Z_k$. Онда Z_k кеңістігінде (2.15) теңдеудің шешімділігі үшін

$$\left\langle h(x,t), q_i(x,t_i) \right\rangle \equiv 0,\ i=\overline{1,n},\ \forall x\in[x_0,a] \tag{2.16}$$

тепе-теңдігі орынды болуы қажетті және жеткілікті, мұндағы $\left\{q_i(x,t_i), i=\overline{1,n}\right\} - L_0^*$ оператор ядросының базисі.

Егер (2.16) тепе-теңдік орындалған болса, онда (2.15) теңдеудің шешімі осы теоремаға сәйкес бар және мына түрде:

$$z(x,t) = z_{o.o}(x,t) + z_{ч.н}(x,t),$$

мұндағы $z_{o.o}(x,t)$ – мына біртекті теңдеудің жалпы шешімі:

$$L_0 z(x,t) = D_\lambda z(x,t) - A_0(x) z(x,t) = 0, \tag{2.17}$$

ал $z_{ч.н}(x,t)-(2.15)$ теңдеудің дербес шешімі. $z_{ч.н}(x,t)\in Z_k$ болғандықтан оны $z_{ч.н}(x,t)=\sum_{m=-kq}^{kq} Z^{(m)}(x)e^{t+mt_0}$ түрінде жазуға болады, ал (2.17) теңдеудің жалпы шешімі (2.5) теңдеудің шешімі сияқты табылады және $b_i^{(*)}(x)-$ті $b_i(x)-$ға ауыстыру арқылы (2.10) –ға сәйкес түрде болады, яғни $z_{o.o}(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\upsilon_i(x)b_i(x)e^{t_i}$, мұндағы $b_i(x)-A_0(x)$ матрицасының меншікті векторлары, ал $\upsilon_i(x)-C^{\infty}[x_0,a]$ кеңістігіне тиісті кез келген функция. Осыдан, (2.15) теңдеудің жалпы шешімі мына түрде:

$$z(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\upsilon_i(x)b_i(x)e^{t_i}+\sum_{m=-kq}^{kq} Z^{(m)}(x)e^{t+mt_0}.$$

Сонымен, (2.15) теңдеудің шешімі дәл $n-$ге дейінгі кез келген функциялармен анықталған.

$(\overline{\varepsilon}^{k})$ есебіне оралайық. Олардың әрқайсысы (2.15) есеп типіндегі есептер. Z_k кеңістігінде $(\overline{\varepsilon}^{k})$ есебін шештік делік және $z(x,t)-$оның шешімі болсын. Онда келесі $(\overline{\varepsilon}^{k+1})$ теңдеу

$$L_0 z_{k+1}(x,t)=\vec{H}z(x,t)+\vec{g}_{k+1}(z_{k-1},\dots,z_{k+1-(k+1)_0})$$

түрінде, мұндағы $z_{k-i}\in Z_{k-i}-(\overline{\varepsilon}^{k-i})$ есебінің шешімі, $(k+1)_0=\min\{k+1,p\}$. Бұл теңдеудің теорема 2.2 бойынша шешілуі үшін

$$\left\langle \vec{H}z(x,t)+\vec{g}_{k+1}(z_{k-1},\dots,z_{k+1-(k+1)_0}),q_i(x,t_i)\right\rangle = 0,\ i=\overline{1,n} \tag{2.18}$$

болуы қажет, мұндағы $q_i(x,t_i)-L_0^*$ ядросының базисті элементтері.

(2.18) шарт $z(x,t)$ функциясына табиғи қосымша шарт болып табылады. (2.15) есеп (2.18) қосымша шарттарымен жалғыз шешімі болатындығы тұжырымдалған болатын. Келесі теорема орынды.

Теорема 2.3. Айталық, теорема 2.2 шарттары орындалсын. Онда (2.15) есеп (2.16) шарттарымен және

$$\left\langle \vec{H}z(x,t)+w(x,t),q_i(x,t_i)\right\rangle = 0, i=\overline{1,n}, \tag{2.19}$$

болсын, мұндағы $w(x,t)\in Z_{k+1}-Z_k$ –да бірмәнді шешімді белгілі элемент.

Дәлелдеуі. Теорема 2.2 бойынша (2.15) теңдеу шешімді және оның шешімі $z(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\upsilon_i(x)b_i(x)e^{t_i}+\sum_{m=-kq}^{kq}Z^{(m)}(x)e^{t+mt_0}$, мұндағы $b_i(x)-A_0(x)$ матрицасының меншікті векторлары, $\upsilon_i(x)-$кез келген скаляр функция. Бұл шешім (2.15)-те алғашқы шартты қанағаттандыруы қажет, яғни

$$\sum_{i=1}^{n}\upsilon_i(x_0)b_i(x_0)e^{t_i}+\sum_{m=-kq}^{kq}Z^{(m)}(x_0)e^{\frac{i}{\varepsilon}m\beta(x_0)}=z^0 .$$

$\det B_0(x)\neq 0$ болғандықтан, мұндағы $B_0(x)-A_0(x)$ матрицасының меншікті векторларынан құралған матрица, онда $\det B_0(x_0)\neq 0$, сондықтан бұл жүйеден $\upsilon_i(x)$ кез келген функциясы үшін алғашқы шарт табылады.

Айталық,

$$\upsilon_i(x_0)=\upsilon_i^0,\ \ i=\overline{1,n}, \tag{2.20}$$

$\tilde{H}z(x,t)=-\frac{\partial z}{\partial x}+\tilde{A}_1(x,t_0)z$, мұндағы $\tilde{A}_1(x,t_0)z-\tilde{A}_l(x,t_0)z$ енгізу операциясы элементінің бейнесі екені белгілі. Сондықтан

$$\begin{aligned}\tilde{H}z(x,t)+w(x,t)=&-\sum_{i=1}^{n}(b_i'(x)u_i(x)+b_i(x)u_i'(x))e^{t_i}+\\&+\sum_{i=1}^{n}(a_i(u_1(x),...,u_n(x),x)e^{t_i}+\sum_{\substack{m=-(k+1)q\\ m\neq 0}}^{(k+1)q}F^{(m)}(x)e^{t+mt_0}\end{aligned} \tag{2.21}$$

аламыз, мұндағы $\alpha_i(\upsilon_1(x),...,\upsilon_n(x),x)-\upsilon_1(x),...,\upsilon_n(x)-$ге қатысты сызықты функция.

$A_0(x)$ матрицасының $\{b_i(x)\}$ және $\{b_i^*(x)\}$ меншікті векторлар жүйелерін және биортонормаланған $A_0^*(x)$ түйіндес операторын алайық: $(b_i(x),b_i^*(x))=\delta_{ij}$, $j,i=\overline{1,n}$. Түйіндес оператор ядросының $q_i(x,t_i), i=\overline{1,n}$ базистік элементіне, (2.21) формуламен берілген, $\tilde{H}z(x,t)+w(x,t)$ өрнегін скаляр көбейтіп, (2.19)-дан

$$-\upsilon'(x)-\upsilon_i(x)(b_i'(x),b_i^*(x))+(w_i(\upsilon_1,...,\upsilon_n,x),b_i^*(x))\equiv 0$$

тепе-теңдігін аламыз. Бұл тепе-теңдіктерді мына түрде көрсетсек болады:

$$\upsilon_i'(x) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij}(x)\upsilon_i(x) + \mu_i(x), i = \overline{1,n},$$

мұндағы, $\{\sigma_{ij}(x)\}$ матрицасы және $\mu_i(x)$ векторлары белгілі. $\upsilon_i(x)$ функциялары сызықты теңдеулер жүйесін қанағаттандырады. $\upsilon_i(x)$ функциясы үшін (2.20) алғашқы шарттарды ескере отырып, бұл функциялардың анықталатынын аламыз. Бұдан, Z_k кеңістігінде (2.15) есептің шешімі жалғыз.

Теоремаларға $(\overline{\varepsilon}^{k})$ есебінің шешімділігі негізделген. $(\overline{\varepsilon}^{k})$ есептері (2.15) есеп түрінде. $(\overline{\varepsilon}^{0})$ есебі шешіледі, себебі оның $h(x)$ оң жақ бөлігі t-дан тәуелсіз және L_0^* оператор ядросына ортогоналды. Теорема 2.2 бойынша қалған есептердің шешімділігі үшін әрбір осы есептердің оң жақ бөлігі түйіндес оператордың ядросына ортогоналды болуы қажет. Бұл әрбір есеп үшін (2.16) және (2.19) шарттарына ұқсас шарттар орындалатындығын білдіреді. Онда теорема 2.3-тен Z_k кеңістігінде $(\overline{\varepsilon}^{k})$ есебінің жалғыз шешімі бар екендігі шығады.

Салдар 2.1. Теорема 2.2 шарттары орындалса $(\overline{\varepsilon}^{k})$ есебі Z_k кеңістігінде шешімді болады, егер оларды бірінен соң бірін шығарса. Онда теорема 2.3-тен келесі тұжырым шығады.

Салдар 2.2. Жоғарыда көрсетілген әдіс бойынша (2.11) қатар жалғыз түрде құрылады, мұнда ε^k болғанда коэффициенттер Z_k кеңістігінде $(\overline{\varepsilon}^{k})$ есебі шешімінің тарылуы болып табылады. (2.11) қатар (2.1) есеп үшін формалды асимптотикалық қатар болып табылады.

2.7 Қалдық мүшені бағалау

Құрылған қатардың асимптотикалық жинақтылығы туралы теореманы келтірейік.

Теорема 2.4. Айталық А, Б, В шарттары орындалсын. Онда (2.11) қатардың $z_{\varepsilon n}(x)$ $n-$ші бөліктік қосындысы жеткілікті кіші $\varepsilon > 0$ болғанда

$$\|z(x,\varepsilon) - z_{\varepsilon n}(x)\|_{C[x_0,a]} \le K_n \varepsilon^{n+1}, n = 0,1,...,$$

теңсіздігін қанағаттандырады, мұндағы $z(x,\varepsilon) - (2.11)$ есептің нақты шешімі, K_n тұрақтысы $\varepsilon -$нан тәуелсіз.

Дәлелдеуі. (2.14) формуладан $u_n(x,\varepsilon) \equiv z(x,\varepsilon) - z_{\varepsilon n}(x)$ қалдық мүшесі

$$\varepsilon \frac{\partial u_n}{\partial x} - A_0(x)u_n - \varepsilon \mathring{A}(x,\varepsilon)u_n = \varepsilon^{n+1}R(x,y(x,\varepsilon),\varepsilon), \; u_n(x_0,\varepsilon) = 0 \quad (2.22)$$

есебін қанағаттандырады, мұндағы $\tilde{A}(x,\varepsilon)=\sum_{l=1}^{p}\varepsilon^{l-1}A_l(x,\varepsilon)$. (2.22) есептің шешімінің нормасын бағалау үшін алдымен

$$\varepsilon\frac{\partial U(x,x_0,\varepsilon)}{\partial x}-A_0(x)U(x,x_0,\varepsilon)-\varepsilon\tilde{A}(x,\varepsilon)U(x,x_0,\varepsilon)=0,\ U(x_0,x_0,\varepsilon)=E \quad (2.23)$$

есебінің шешімі болып табылатын $U(x_0,x_0,\varepsilon)$ фундаменталды матрицасының нормасын бағалау керек, мұндағы $U(x_0,x_0,\varepsilon)-n$ ретті квадраттық матрица, ал $E-$сол ретті бірлік матрица. $B_0(x)$ арқылы $A_0(x)-$ты диагоналды түрге келтіретін матрицаны белгілейік, яғни $B_0^{-1}(x)A_0(x)B_0(x)=\Lambda_n(\lambda(x))$ шарты орындалатын матрица, мұндағы $\Lambda_n(\lambda(x))=diag\left\{\lambda_1(x),...,\lambda_n(x)\right\}$. $B_0(x)$ және $B_0^{-1}(x)$ матрицалары $[x_0,a]-$да шексіз дифференциалданады, сондықтан туындыларымен бірге шектелген (нормасы бойынша).

(2.23) есептің шешімін

$$U(x,x_0,\varepsilon)=B_0(x)V(x,x_0,\varepsilon)$$

іздейміз. Онда (2.23) есеп

$$\varepsilon\frac{dV(x,x_0,\varepsilon)}{dx}-\Lambda_n(\lambda(x))V(x,x_0,\varepsilon)=\varepsilon K(x,\varepsilon)V(x,x_0,\varepsilon),$$
$$V(x_0,x_0,\varepsilon)=B_0^{-1}(x_0) \quad (2.24)$$

есебіне түрленеді, мұндағы $K(x,\varepsilon)=B_0^{-1}(x)[\tilde{A}(x,\varepsilon)B_0(x)-B_0'(x)]$. (2.24) есептің шешімі келесі матрица болады:

$$V(x,x_0,\varepsilon)=B_0'(x_0)+\int_{x_0}^{x}g(x,\tau,\varepsilon)K(\tau,\varepsilon)V(\tau,x_0,\varepsilon)d\tau,$$

мұндағы, $$g(x,\tau,\varepsilon)=e^{\Lambda_n\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{x}\lambda(x)dx\right)}\equiv diag\left\{e^{\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{x}\lambda_1(x)dx\right)},...,e^{\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{x}\lambda_n(x)dx\right)}\right\},\qquad x_0\le\tau\le x.$$

$\operatorname{Re}\lambda_i(x)\le 0,(i=\overline{1,n})$ болғандықтан, онда $\|g(x,t,\varepsilon)\|\le 1$, сондықтан

$$\|V(x,x_0,\varepsilon)\|\le\|B_0^{-1}(x_0)\|+\int_{x_0}^{x}\|K(\tau,\varepsilon)\|\cdot\|V(\tau,x_0,\varepsilon)\|d\tau,$$

осыдан,

$$\|V(x,x_0,\varepsilon)\| \le \|B_0^{-1}(x_0)\| e^{\int_{x_0}^{x}\|K(\tau,\varepsilon)\|d\tau} \le \|B_0^{-1}(x_0)\| \exp\left\{\|K(x,\varepsilon)\|(a-x_0)\right\} \equiv c\,,$$

яғни, $V(x,x_0,\varepsilon)$ – шектелген оператор. Яғни

$$\|U(x,x_0,\varepsilon)\| \le \|V(x,x_0,\varepsilon)\|\|B_0(x)\| \le c^*.$$

Сондықтан (2.22) есептің

$$u_n(x,\varepsilon) = \varepsilon^n \int_{x_0}^{x} U(x,\tau,\varepsilon) R(x,\psi(x,),\varepsilon) d\tau$$

түріндегі шешімінің бағасы

$$\|u_n(x,e)\| \le e^n c^* c_n (a - x_0) \equiv \tilde{K}_n e^n.$$

Дәлелдеуді аяқтау үшін бағалауды бір ε дәрежесіне жақсартуымыз қажет:

$$\|u_n(x,e)\| \le \|u_{n+1}(x,e)\| + e^{n+1}\|z_{n+1}(x,y(x,e),e)\| \le e^{n+1}(\tilde{K}_{n+1} + c_{n+1}) = K_n e^{n+1}.$$

Теорема дәлелденді.

Ескерту. Біз қарастырған нәтижелер жалпы резонанстық жағдайларға жатады. Бірақ бұл нәтижелер оңай резонанссыз жағдайға ауысып кетуі мүмкін, егер В пунктінде орындалған i, j сандар жиынын бос деп есептесек. Бұл резонанстық жиындардың жоқтығын білдіреді. Онда 1 шарт артық болады, ал енгізу операциясы жай тепе-теңдік бейнелеу болады. Осыдан, $(\bar{\varepsilon}^k)$ жаңа есебі (ε^k) ескі есебімен сәйкес келеді. Осы алынған нәтижелерден (ε^k) есебінің бірмәнді шешімділігі болады және асимптотикалық шешімі бар.

2.8 Дифференциалдық жүйенің асимптотикалық шешімі

Мысал ретінде екінші ретті жүйе үшін Коши есебін қарастырайық

$$\varepsilon z'(x,\varepsilon) - A(x)z(x,\varepsilon) + \varepsilon\varphi(x)cos\frac{2\beta(x)}{\varepsilon}Bz(x,\varepsilon) \equiv h(x)\,,\; z(x_0,\varepsilon) = z^0, \quad (2.25)$$

мұндағы,

$$z(x,\varepsilon)=\begin{pmatrix}u(x,\varepsilon)\\ v(x,\varepsilon)\end{pmatrix},\ h(x)=\begin{pmatrix}h_1(x)\\ h_2(x)\end{pmatrix},\ z^0=\begin{pmatrix}u^0\\ v^0\end{pmatrix},\ A(x)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\alpha^2(x) & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$
$$x\in[x_0,a],\ \alpha(x)>0.$$

Есеп $\varepsilon\to+0$ болғанда зерттеледі. (2.25) есептің дербес жағдайы, ($\alpha(x)\equiv 1$, $\beta(x)=\beta\cdot x$, $\beta=const$, $h(x)\equiv 0$), Ю.Л. Далецкийдің жұмысында қарастырылған. Бұл жерде (2.25) есептің асимптотикалық шешімінің бас мүшесін алу үшін қолданылатын әдістерді көрсетеміз. Асимптотиканың түрі $\lambda_0(x)=\frac{2i}{\varepsilon}\beta'(x)$ және $A(x)$ матрицасының спектрі ($\lambda_1(x)=\frac{i}{\varepsilon}\alpha(x),\lambda_2(x)=-\frac{i}{\varepsilon}\alpha(x)$) арасындағы резонанстық қатынастардың бар не жоқтығына тәуелді. Келесі жағдайларды қарастырамыз:

а) не $\beta'(x)>\alpha(x)$, не $\frac{1}{n+1}\alpha(x)<\beta'(x)<\frac{1}{n}\alpha(x)$ болатындай n натурал саны бар;

б) $\beta'(x)=\frac{1}{2n-1}\alpha(x)$ болатындай n натурал саны бар;

в) $\beta'(x)=\frac{1}{2n}\alpha(x)$ болатындай n натурал саны бар.

а) жағдайында $i\le 3$, $j\le 2$ болатын кез келген i,j натурал саны және кез келген $m\ne 0$ бүтін саны үшін $\lambda_i(x)+m\lambda_0(x)\ne\lambda_j(x)$, $\forall x\in[x_0,a]$ (мұнда $\lambda_3(x)\equiv 0$) теңсіздігі орындалады. Бұл жағдайда бізде резонанстық жоқ. б) жағдайында

$$\lambda_1(x)+(2n-1)\lambda_0(x)\equiv\lambda_2(x);\ \lambda_2(x)+(2n-1)\lambda_0(x)\equiv\lambda_1(x),\forall x\in[x_0,a] \qquad (2.26)$$

қатынасы орынды, бірақ кез келген $j=1,2$ және кез келген бүтін m үшін $m\lambda_0(x)\ne\lambda_j(x)$, $\forall x\in[x_0,a]$ теңсіздігі орындалады, яғни бұл жағдайда меншікті резонанс бар. (2.26) формула сәйкесінше 2 және 1 жауап беретін $(1,1-2n)$ және $(2,2n-1)$ жиындары резонанстық болып табылатындығын білдіреді. в) жағдайында

$$\lambda_1(x)-2n\lambda_0(x)\equiv\lambda_2(x),\ \lambda_2(x)+2n\lambda_0(x)\equiv\lambda_1(x),\ n\lambda_0(x)\equiv\lambda_1(x),$$
$$-n\lambda_0(x)\equiv\lambda_2(x) \qquad (2.27)$$

қатынасы орындалады. (2.27) қатынас жалпы резонанстық жағдайды білдіреді. (2.27) шарттан $(1,-2n)$, $(2,2n)$, $(3,n)$, $(3,-n)$ – резонансты және сәйкесінше оларға жауапты сандар: $(1,-2n):\ 2$, $(2,2n):\ 1$, $(3,n):\ 1$, $(3,-n):\ 2$.

Жалпы теорияға сәйкес (2.25) есептің $z(x,\varepsilon)$ шешімінің орнына $\tilde{z}(x,t,\varepsilon)$ кеңейтілген функциясын қарастырамыз, мұндағы $t=(t_0,t_1,t_2)$ – қосымша айнымалылар жиыны және кеңейтілген функция үшін $\tilde{z}(x,\psi(x,\varepsilon),\varepsilon)=z(x,\varepsilon)$ қатынасы орындалсын. Мұнда $\psi(x,\varepsilon)=(\psi_0(x,\varepsilon),\psi_1(x,\varepsilon),\psi_2(x,\varepsilon))$, $\psi_i(x,\varepsilon)$, $(i=1,2)$ функциялары $A(x)$ матрицасының спектрімен

$$\psi_i(x,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_0}^{x}\lambda_i(x)dx \text{, ал } \psi_0(x,\varepsilon)=\frac{2i}{\varepsilon}\beta(x)$$

қатынасымен байланысқан. $\tilde{z}(x,t,\varepsilon)$ кеңейтілген функциясы үшін

$$\varepsilon\frac{\partial\tilde{z}}{\partial x}+D_\lambda\tilde{z}-A(x)\tilde{z}-\varepsilon\frac{\varphi(x)}{2}(e^{t_0}+e^{-t_0})B\tilde{z}=h(x),\ \tilde{z}(x_0,\psi(x_0,\varepsilon),\varepsilon)=z^0 \quad (2.28)$$

есебін қарастырайық, мұндағы $D_\lambda\tilde{z}=\sum_{i=0}^{2}\lambda_i(x)\frac{\partial\tilde{z}}{\partial t_i}$, $\psi(x_0,\varepsilon)=\left(\frac{2i}{\varepsilon}\beta(x),0,0\right)$. (2.28) есептің шешімін

$$\tilde{z}(x,t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z_k(x,t) \quad (2.29)$$

қатары түрінде іздейміз. (2.29) қатардың коэффициенттері үшін келесі есепті қарастырамыз:

$$L_0z_0\equiv D_\lambda z_0-A(x)z_0=h(x),\ z_0(x_0,\psi(x_0,\varepsilon))=z^0 \quad (\varepsilon^0)$$

$$L_0z_1=Hz_0\equiv-\frac{\partial z_0}{\partial x}+\frac{\varphi(x)}{2}(e^{t_0}+e^{-t_0})Bz_0,\ z_1(x_0,\psi(x_0,\varepsilon))=0 \quad (\varepsilon^1)$$

. . . .

$$L_0z_k=Hz_{k-1}\equiv-\frac{\partial z_{k-1}}{\partial x}+\frac{\varphi(x)}{2}(e^{t_0}+e^{-t_0})Bz_{k-1},\ z_k(x_0,\psi(x_0,\varepsilon))=0. \quad (\varepsilon^k)$$

Элементтері

$$z(x,t)=\sum_{m=-k}^{k}Z^{(m)}(x)e^{t+mt_0}$$

түріндегі Z_k көпмүшелігін қарастырайық, мұндағы $e^{t+mt_0} - \left\{e^{t_1+mt_0}, e^{t_2+mt_0}, e^{mt_0}\right\}$ координаталы 3 өлшемді вектор-баған, $Z^{(m)}(x) - 2\times 3$ ретті матрица. Бұл кеңістіктер жалпы ереже бойынша гильберт кеңістігіне айналады және мұнда ядросының базисінің элементтері $q_i(x,t_i) = \begin{pmatrix} \alpha^2(x) \\ \lambda_i(x) \end{pmatrix} e^{t_i}$, $i = 1,2$ құралған L_0^* операторы қарастырылады.

Z_k кеңістігінде (ε^k) есептері резонанстық емес жағдайда шешілетіндігі белгілі. Басқа жағдайда енгізу операциясымен жаңа (ε^k) есебін енгізу керек. Алдымен резонанстық емес жағдайды қарастырайық.

Z_0 кеңістігінде (ε^0) есебінің шешімі

$$z_0(x,t) = z_{o.o}(x,t) + z_{ч.н}(x,t)$$

түрде, мұндағы $z_{o.o}(x,t) - (\varepsilon^0)$ есебіне сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешімі, ал $z_{ч.н}(x,t) - (\varepsilon^0)$ есебінің дербес шешімі. Біртекті теңдеудің шешімінің түрі

$$z_{o.o}(x,t) = c_1(x) b_1(x) e^{t_1} + c_2(x) b_2(x) e^{t_2},$$

мұндағы $b_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ i\alpha(x) \end{pmatrix}$, $b_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\alpha(x) \end{pmatrix} - A(x)$ матрицасының меншікті векторлары, $c_1(x)$, $c_2(x) -$кез келген функция, ал $z_{ч.н}(x,t)$ ретінде $z_{ч.н}(x,t) = \begin{pmatrix} \dfrac{h_2(x)}{\alpha^2(x)} \\ -h_1(x) \end{pmatrix}$ алуға болады. Осылайша,

$$z_0(x,t) = c_1(x)\begin{pmatrix} 1 \\ i\alpha(x) \end{pmatrix} e^{t_1} + c_2(x)\begin{pmatrix} 1 \\ -i\alpha(x) \end{pmatrix} e^{t_2} + \begin{pmatrix} \dfrac{h_2(x)}{\alpha^2(x)} \\ -h_1(x) \end{pmatrix}. \tag{2.30}$$

(ε^0) есебінің алғашқы шартынан мынаны аламыз:

$$c_1(x_0)\begin{pmatrix} 1 \\ i\alpha(x_0) \end{pmatrix} + c_2(x_0)\begin{pmatrix} 1 \\ -i\alpha(x_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{h_2(x_0)}{\alpha^2(x_0)} \\ -h_1(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^0 \\ v^0 \end{pmatrix}.$$

Бұл жүйенің шешімі

$$c_1(x_0) = \frac{\alpha(x_0) f_0 - ig_0}{2\alpha(x_0)},\ c_2(x_0) = \frac{\alpha(x_0) f_0 + ig_0}{2\alpha(x_0)} \tag{2.31}$$

түрінде, мұндағы

$$f_0 = u^0 - \frac{h_2(x_0)}{\alpha^2(x_0)}, g_0 = v^0 + h_1(x_0).$$

Келесі (ε^1) есебінің оң жақ бөлігі

$$\begin{gathered} Hz_0(x,t) = \left[-c_1'(x)\begin{pmatrix} 1 \\ i\alpha(x_0) \end{pmatrix} - c_1(x)\begin{pmatrix} 0 \\ i\alpha'(x_0) \end{pmatrix} \right] e^{t_1} + \\ + \left[-c_2'(x)\begin{pmatrix} 1 \\ -i\alpha(x_0) \end{pmatrix} - c_2(x)\begin{pmatrix} 0 \\ -i\alpha'(x_0) \end{pmatrix} \right] e^{t_2} + \\ + \frac{\varphi(x)}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left\{ c_1(x)\left[e^{t_1+t_0} + e^{t_1-t_0} \right] + \right. \\ \left. + c_2(x)\left[e^{t_2+t_0} + e^{t_2-t_0} \right] - \frac{h_2(x)}{\alpha^2(x)}\left[e^{t_0} + e^{-t_0} \right] \right\} - \begin{pmatrix} \left(\dfrac{h_2(x_0)}{\alpha^2(x_0)} \right)' \\ -h_1'(x_0) \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{2.32}$$

$Hz_0(x,t)-$тың ортогоналдық шартынан түйіндес оператор ядросының $q_i(x,t_i)$ базистік элементтерінен $c_i(x), i=1,2$ табу үшін мына теңдеуді аламыз: $2\alpha(x)c_i'(x) + \alpha'(x)c_i(x) = 0$, $c_i(x) = \sqrt{\dfrac{\alpha(x_0)}{\alpha(x)}}c_i(x_0)$, мұндағы, $c_i(x_0)-(2.31)$ формуламен беріледі. Осылайша, $z_0(x,t)-$дің түрі

$$z_0(x,t) = \begin{pmatrix} \dfrac{h_2(x_0)}{\alpha^2(x_0)} \\ -h_1(x_0) \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{\alpha(x_0)}{\alpha(x)}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i\alpha(x_0) \end{pmatrix} \frac{\alpha(x_0) f_0 - ig_0}{2\alpha(x_0)} e^{t_1} + \begin{pmatrix} 1 \\ -i\alpha(x_0) \end{pmatrix} \frac{\alpha(x_0) f_0 + ig_0}{2\alpha(x_0)} e^{t_2} \right\}$$

немесе, бастапқы айнымалыларға оралып, резонанстық емес жағдайдағы (2.25) есептің асимптотикасының бас мүшесін аламыз:

$$z_0(x,\psi(x,\varepsilon))=\begin{pmatrix}\dfrac{h_2(x_0)}{\alpha^2(x_0)}\\ -h_1(x_0)\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{\alpha(x)\alpha(x_0)}}\times$$

$$\times\left\{\begin{pmatrix}\alpha(x_0)f_0\\ \alpha(x)g_0\end{pmatrix}cos\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_0}^{x}\alpha(\tau)d\tau\right)\begin{pmatrix}g_0\\ -\alpha(x_0)\alpha(x)f_0\end{pmatrix}sin\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_0}^{x}\alpha(\tau)d\tau\right)\right\}.$$

$h(x)\equiv 0,\ \ \alpha(x)\equiv 1$ болғанда асимптотиканың бас мүшесі мына түрде:

$$z_0(x,\psi(x,\varepsilon))=\begin{pmatrix}u^0\\ v^0\end{pmatrix}cos\frac{x-x_0}{\varepsilon}+\begin{pmatrix}v^0\\ -u^0\end{pmatrix}sin\frac{x-x_0}{\varepsilon}.$$

Резонанстық жағдайда Z_k кеңістігі (ε^k) есебінің шешіміне жарамайды. Сондықтан, (ε^k) есебінің орнына жаңа есеп енгіземіз:

$$L_0 z_0(x,t)=h(x),\ \ z_0(x_0,\psi(x_0,\varepsilon))=z^0 \qquad (\overline{\varepsilon}^0)$$

$$L_0 z_1(x,t)=\hat{H}z_0(x,t),\ \ z_1(x_0,\psi(x_0,\varepsilon))=0 \qquad (\overline{\varepsilon}^1)$$

. . . .

$$L_0 z_k(x,t)=\hat{H}z_{k-1}(x,t),\ \ z_k(x_0,\psi(x_0,\varepsilon))=0 \qquad (\overline{\varepsilon}^k)$$

мұндағы, $\hat{H}z_{k-1}(x,t)$- Z_k кеңістігінде енгізу операциясы болған $Hz_{k-1}(x,t)$ элементінің бейнесі. $(\overline{\varepsilon}^k)$ жаңа есебінде белгісіз функциялардың белгілеуін қалдырып отырмыз. Бұл есептерді Z_k кеңістігінде шеше берсек болады. $(\overline{\varepsilon}^0)$ есебінің шешімін қарастырамыз. Z_0 кеңістігінде резонанстық экспонента болмағандықтан, Z_0 кеңістігі резонанстық жағдайда да осындай. Сондықтан, (ε^0) есебінің шешімі, резонанстық емес жағдайдағыдай, (2.30) түрде, яғни:

$$z_0(x,t)=c_1(x)\begin{pmatrix}1\\ i\alpha(x)\end{pmatrix}e^{t_1}+c_2(x)\begin{pmatrix}1\\ -i\alpha(x)\end{pmatrix}e^{t_2}+\begin{pmatrix}\dfrac{h_2(x)}{\alpha^2(x)}\\ -h_1(x)\end{pmatrix},$$

мұндағы $c_1(x),\ c_2(x)-$кез келген функция. Меншікті және жалпы резонанстық жағдайлар үшін кез келген функцияларды табайық.

Алдымен меншікті резонанс жағдайын қарастырайық, яғни $\beta'(x) \equiv \dfrac{1}{2n-1}\alpha(x)$. Бұл жағдайда резонанстық жиын болып $(1,-2n+1)$ және $(2,2n-1)$ табылады. Осыдан, егер $n>1$ болса, онда Z_1 кеңістігінде резонанстық экспонента жоқ және Z_1 кеңістігі резонанстық болмаған жағдаймен бірдей. Сондықтан асимптотиканың бас мүшесі меншікті резонанс жағдайында резонанстық болмаған жағдайдағы асимптотиканың бас мүшесімен сәйкес келеді. $n=1$ болғанда Z_1 кеңістігінде резонанстық экспонента $e^{t_1-t_0}$ және $e^{t_2+t_0}$ бар. $(\overset{-1}{\varepsilon})$ есебінің оң жақ бөлігі $Hz_0(x,t)$ элементінің бейнесін береді. Енгізу операциясы болғанда $e^{t_1-t_0}$ және $e^{t_2+t_0}$ резонанстық экспоненталары сәйкесінше $e^{t_2-\frac{2i}{\varepsilon}\beta(x_0)}$ және $e^{t_1+\frac{2i}{\varepsilon}\beta(x_0)}$ экспоненталарына ауысады. Сондықтан $\hat{H}z_0(x,t)$ мына түрде:

$$\hat{H}z_0(x,t)=\left[c_1'(x)\begin{pmatrix}1\\ i\alpha(x)\end{pmatrix}-c_1(x)\begin{pmatrix}0\\ i\alpha'(x)\end{pmatrix}+\frac{\varphi(x)h_2(x)}{2\alpha^2(x)}e^{\frac{2i}{\varepsilon}\beta(x_0)}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right]e^{t_1}+$$

$$+\left[c_2'(x)\begin{pmatrix}1\\ -i\alpha(x)\end{pmatrix}-c_2(x)\begin{pmatrix}0\\ -i\alpha'(x)\end{pmatrix}+\frac{\varphi(x)h_2(x)}{2\alpha^2(x)}e^{-\frac{2i}{\varepsilon}\beta(x_0)}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right]e^{t_2}+g(x,t),$$

мұндағы $g(x,t)-e^{t_1}$ және e^{t_2} экспоненталарын құрамайтын Z_1 кеңістігінің элементі.

Түйіндес оператордың ядросының $\hat{H}z_0(x,t)$ ортогоналдылық шартынан $c_i(x), i=1,2$ анықтау үшін келесі түрдегі жүйені аламыз:

$$c_1'(x)+\frac{\alpha'(x)}{2\alpha(x)}c_1(x)+\frac{i\varphi(x)}{4\alpha(x)}e^{\frac{2i}{\varepsilon}\beta(x_0)}c_2(x)=0,$$

$$c_2'(x)+\frac{\alpha'(x)}{2\alpha(x)}c_2(x)-\frac{i\varphi(x)}{4\alpha(x)}e^{-\frac{2i}{\varepsilon}\beta(x_0)}c_1(x)=0$$

Бұдан

$$c_1(x)=\sqrt{\frac{\alpha(x_0)}{\alpha(x)}}\left[c_1(x_0)chF(x)+ie^{\frac{2i}{\varepsilon}\beta(x_0)}c_2(x_0)shF(x)\right],$$

$$c_2(x)=\sqrt{\frac{\alpha(x_0)}{\alpha(x)}}\left[c_2(x_0)chF(x)-ie^{-\frac{2i}{\varepsilon}\beta(x_0)}c_1(x_0)shF(x)\right],$$

мұндағы, $F(x)=\frac{1}{4}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\varphi(x)}{\alpha(x)}dx$, $c_1(x_0)$ және $c_2(x_0)$ тұрақтылары (2.31) формуламен беріледі.

Сонымен, $n=1-$де меншікті резонанстық жағдайда $z_0(x,t)$ функциясы мына түрде:

$$z_0(x,t)=\sqrt{\frac{\alpha(x_0)}{\alpha(x)}}\left\{\left[\frac{\alpha(x_0)f_0-ig_0}{2\alpha(x_0)}chF(x)-\right.\right.$$

$$\left.-i\frac{\alpha(x_0)f_0+ig_0}{2\alpha(x_0)}e^{\frac{2i}{\varepsilon}\beta(x_0)}shF(x)\right]\begin{pmatrix}1\\ i\alpha(x)\end{pmatrix}e^{t_1}+$$

$$+\left[\frac{\alpha(x_0)f_0+ig_0}{2\alpha(x_0)}chF(x)+i\frac{\alpha(x_0)f_0-ig_0}{2\alpha(x_0)}e^{-\frac{2i}{\varepsilon}\beta(x_0)}shF(x)\right]\times$$

$$\left.\times\begin{pmatrix}1\\ -i\alpha(x)\end{pmatrix}e^{t_2}\right\}+\begin{pmatrix}\frac{h_2(x)}{\alpha^2(x)}\\ -h_1(x)\end{pmatrix}.$$

Бастапқы айнымалыға оралып, (2.25) есептің шешімінің асимптотикасының бас мүшесі мына түрде болады:

$$z_0(x,\psi(x,\varepsilon))=\frac{1}{\sqrt{\alpha(x)\alpha(x_0)}}\left\{\left[\begin{pmatrix}\alpha(x_0)f_0\\ \alpha(x)g_0\end{pmatrix}cos\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{x_0}^{x}\alpha(x)dx\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\begin{pmatrix}g_0\\ -\alpha(x_0)\alpha(x)f_0\end{pmatrix}sin\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{x_0}^{x}\alpha(x)dx\right)\right]chF(x)+$$

$$+\left[\begin{pmatrix}g_0\\ \alpha(x)\alpha(x_0)f_0\end{pmatrix}cos\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(2\beta(x_0)+\int\limits_{x_0}^{x}\alpha(x)dx\right)\right]+\right.$$

$$\left.\left.+\begin{pmatrix}\alpha(x_0)f_0\\ -\alpha(x)g_0\end{pmatrix}sin\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(2\beta(x_0)+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{x_0}^{x}\alpha(x)dx\right)\right]shF(x)\right\}+\begin{pmatrix}\frac{h_2(x_0)}{\alpha^2(x_0)}\\ -h_1(x_0)\end{pmatrix}$$

$h(x)\equiv 0,\ \alpha(x)\equiv 1,\ \beta(x)\equiv x$ болғанда асимптотиканың бас мүшесі мына түрде болады:

$$z_0(x,\psi(x,\varepsilon))=\left[\begin{pmatrix}u^0\\ v^0\end{pmatrix}cos\frac{x-x_0}{\varepsilon}+\begin{pmatrix}v^0\\ -u^0\end{pmatrix}sin\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right]ch\frac{1}{4}\int_{x_0}^{x}\varphi(x)dx+$$

$$+\left[\begin{pmatrix}v^0\\ u^0\end{pmatrix}cos\frac{x+x_0}{\varepsilon}+\begin{pmatrix}u^0\\ -v^0\end{pmatrix}sin\frac{x+x_0}{\varepsilon}\right]sh\frac{1}{4}\int_{x_0}^{x}\varphi(x)dx.$$

Жалпы резонанстық жағдайды қарастырайық, яғни $\beta'(x)=\dfrac{1}{2n}\alpha(x)$. Онда, резонанстық жиындар болып $(1,-2n),\ (2,2n),\ (3,n),\ (3,-n)$ табылады. Егер Z_1 кеңістігінде резонанстық экспоненталар кездессе, онда бұл резонанс $z_0(x,t)$ асимптотикасының бас мүшесін анықтауға әсер етеді. $n>1$ болғанда Z_1 сипаттамасында мұндай экспоненталар жоқ, онда $n>1-$да жалпы резонанс жағдайында асимптотиканың бас мүшесі резонанстық болмаған жағдаймен бірдей. $n=1-$де Z_1 кеңістігінің сипаттамасында екі e^{t_0} және e^{-t_0} резонанстық экспоненталар бар. $(\overset{-1}{\varepsilon})$ есебінің оң жақ бөлігі Z_1 кеңістігінде (2.32) формуламен берілген $Hz_0(x,t)$ элементінің енгізу операциясы көмегімен алынады. Енгізу операциясы көмегімен резонанстық экспоненталар сәйкесінше $e^{t_1+\frac{2i}{\varepsilon}\beta(x_0)}$ және $e^{t_2-\frac{2i}{\varepsilon}\beta(x_0)}$ экспоненталарына ауыстырылады. Сондықтан $\tilde{H}z_0(x,t)$ мына түрде болады:

$$\tilde{H}z_0(x,t)=\left[c_1'(x)\begin{pmatrix}1\\ ia(x)\end{pmatrix}-c_1(x)\begin{pmatrix}0\\ ia'(x)\end{pmatrix}+\frac{\varphi(x)h_2(x)}{2a^2(x)}e^{\frac{2i}{\varepsilon}\beta(x_0)}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right]e^{t_1}+$$

$$+\left[c_2'(x)\begin{pmatrix}1\\ -ia(x)\end{pmatrix}-c_2(x)\begin{pmatrix}0\\ -ia'(x)\end{pmatrix}+\frac{\varphi(x)h_2(x)}{2a^2(x)}e^{-\frac{2i}{\varepsilon}\beta(x_0)}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right]e^{t_2}+g(x,t)$$

мұндағы $g(x,t)-Z_1$ кеңістігінің элементі, e^{t_1} және e^{t_2} экспоненталарын құрамайды.

Түйіндес оператордың ядросының $\tilde{H}z_0(x,t)$ ортогоналдылық шартынан $c_i(x), i=1,2$ анықтау үшін келесі түрдегі теңдеуді аламыз:

$$c_1'(x)+\frac{\alpha'(x)}{2\alpha(x)}c_1(x)+\frac{i\varphi(x)h_2(x)}{4\alpha^2(x)}e^{\frac{2i}{\varepsilon}\beta(x_0)}=0,$$

$$c_2'(x)+\frac{\alpha'(x)}{2\alpha(x)}c_2(x)-\frac{i\varphi(x)h_2(x)}{4\alpha^2(x)}e^{-\frac{2i}{\varepsilon}\beta(x_0)}=0$$

бұдан

$$c_1(x)=\sqrt{\frac{\alpha(x_0)}{\alpha(x)}}c_1(x_0)-\frac{ie^{\frac{2i}{\varepsilon}\beta(x_0)}}{4\sqrt{\alpha(x)}}\int_{x_0}^{x}\frac{\varphi(x)h_2(x)}{\sqrt{\alpha\ (x)^5}}dx,$$

$$c_2(x)=\sqrt{\frac{\alpha(x_0)}{\alpha(x)}}c_2(x_0)+\frac{ie^{-\frac{2i}{\varepsilon}\beta(x_0)}}{4\sqrt{\alpha(x)}}\int_{x_0}^{x}\frac{\varphi(x)h_2(x)}{\sqrt{\alpha\ (x)^5}}dx$$

мұндағы $c_1(x_0)$, $c_2(x_0)-(2.31)$ формуламен берілген. Сонымен, $n=1$ болғанда жалпы резонанстық жағдайда $z_0(x,t)-$ның түрі мынадай:

$$z_0(x,t)=\left[\sqrt{\frac{\alpha(x_0)}{\alpha(x)}}\frac{\alpha(x_0)f_0-ig_0}{2\alpha(x_0)}-\frac{ie^{\frac{2i}{\varepsilon}\beta(x_0)}}{4\sqrt{\alpha(x)}}\int_{x_0}^{x}\frac{\varphi(x)h_2(x)}{\sqrt{\alpha\ (x)^5}}dx\right]\begin{pmatrix}1\\ i\alpha(x)\end{pmatrix}e^{t_1}+$$

$$+\left[\sqrt{\frac{\alpha(x_0)}{\alpha(x)}}\frac{\alpha(x_0)f_0+ig_0}{2\alpha(x_0)}+\frac{ie^{-\frac{2i}{\varepsilon}\beta(x_0)}}{4\sqrt{\alpha(x)}}\int_{x_0}^{x}\frac{\varphi(x)h_2(x)}{\sqrt{\alpha\ (x)^5}}dx\right]\begin{pmatrix}1\\ -i\alpha(x)\end{pmatrix}e^{t_2}+\begin{pmatrix}\dfrac{h_2(x)}{\alpha^2(x)}\\ -h_1(x)\end{pmatrix}$$

Бастапқы айнымалыға оралып, $n=1$ болғанда жалпы резонанстық жағдайдағы асимптотиканың бас мүшесін аламыз:

$$z_0(x,\psi(x,\varepsilon))=\frac{1}{\sqrt{\alpha(x)\alpha(x_0)}}\left[\begin{pmatrix}\alpha(x_0)f_0\\ \alpha(x)g_0\end{pmatrix}cos\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_0}^{x}\alpha(x)dx+\right.$$

$$+\begin{pmatrix}g_0\\ -\alpha(x_0)\alpha(x)f_0\end{pmatrix}sin\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_0}^{x}\alpha(x)dx+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\alpha(x)}}\int_{x_0}^{x}\frac{\varphi(x)h_2(x)}{\sqrt{\alpha\ (x)^5}}dx\begin{pmatrix} sin\left[\frac{2}{\varepsilon}\left(\beta(x_0)+\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_0}^{x}\alpha(x)dx\right)\right] \\ cos\left[\frac{2}{\varepsilon}\left(\beta(x_0)+\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_0}^{x}\alpha(x)dx\right)\right]\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{h_2(x_0)}{\alpha^2(x_0)} \\ -h_1(x_0)\end{pmatrix}$$

$h(x)\equiv 0,\ \alpha(x)\equiv 1,\ \beta(x)\equiv x$ болғанда асимптотиканың бас мүшесі резонанстық емес жағдайдағыдай болады. Бұл жағдайдағы асимптотиканың бас мүшесіне тек мәжбүрлі резонанс әсер ететіндігін білдіреді, ал оның әсері біртекті теңдеулер жағдайына әсер етпейді.

2.9 Қосымша жүйенің шешімі

$$u'(x)+\frac{\alpha'(x)}{2\alpha(x)}u(x)+\frac{i}{4}\frac{\varphi(x)}{\alpha(x)}av(x)=0, u(x_0)=u^0, \tag{2.33}$$

$$v'(x)+\frac{\alpha'(x)}{2\alpha(x)}v(x)-\frac{i}{4}\frac{\varphi(x)}{\alpha(x)}\frac{1}{a}u(x)=0, v(x_0)=v^0 \tag{2.34}$$

есебінің шешімін қарастырайық. Жаңа айнымалыны енгіземіз

$$z(x)=\frac{u(x)}{v(x)} \tag{2.35}$$

онда,

$$z'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

(2.33) және (2.34)-тен $u'(x)$ және $v'(x)-$ті өрнектейміз және $z'(x)$ өрнегіне қоямыз.

$$z'(x)=\frac{1}{v^2(x)}\left\{\left[-\frac{\alpha'(x)}{2\alpha(x)}u(x)-\frac{i}{4}\frac{\varphi(x)}{\alpha(x)}av(x)\right]v(x)+\left[\frac{\alpha'(x)}{2\alpha(x)}v(x)-\frac{i}{4}\frac{\varphi(x)}{\alpha(x)}\frac{u(x)}{a}\right]u(x)\right\}=$$

$$=\frac{1}{v^2(x)}\left\{-\frac{i}{4}\frac{\varphi(x)}{\alpha(x)}\left[av^2(x)+\frac{1}{a}u^2(x)\right]\right\}=-\frac{i}{4}\frac{\varphi(x)}{\alpha(x)}a\left[1+\left(\frac{z(x)}{a}\right)^2\right].$$

Осылайша, $z(x)$ айнымалылары ажыратылатын теңдеуді қанағаттандырады

$$\frac{z'(x)}{1+\left(\frac{z(x)}{a}\right)^2}=-\frac{i}{4}\frac{\varphi(x)}{\alpha(x)}a\,.$$

Оны интегралдап, $a\cdot arctg\frac{z(x)}{a}=-\frac{i}{4}a\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\varphi(x)}{\alpha(x)}dx+c$ аламыз. Бұдан

$$z(x)=a\cdot tg\left[-\frac{i}{4}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\varphi(x)}{\alpha(x)}dx+c_1\right]. \qquad (2.36)$$

Осыдан, (2.35)-тен мынаны аламыз:

$$u(x)=av(x)tg\left[-\frac{i}{4}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\varphi(x)}{\alpha(x)}dx+c_1\right] \qquad (2.37)$$

(2.37)-ні (2.34)-ке қоямыз:

$$v'(x)+\frac{\alpha'(x)}{2\alpha(x)}v(x)-\frac{i}{4}\frac{\varphi(x)}{\alpha(x)}tg\left[-\frac{i}{4}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\varphi(x)}{\alpha(x)}dx+c_1\right]v(x)=0.$$

Теңдеуді интегралдап

$$\frac{v'(x)}{v(x)}=-\frac{\alpha'(x)}{2\alpha(x)}+\frac{i}{4}\frac{\varphi(x)}{\alpha(x)}tg\left[-\frac{i}{4}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\varphi(x)}{\alpha(x)}dx+c_1\right],$$

$\ln v(x)=-\frac{1}{2}\ln\alpha(x)+\ln cos\left[-\frac{i}{4}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\varphi(x)}{\alpha(x)}dx+c_1\right]+c_2^*$ аламыз немесе

$$v(x)=\frac{c_2}{\sqrt{\alpha(x)}}cos\left[-\frac{i}{4}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\varphi(x)}{\alpha(x)}dx+c_1\right].$$

Осыдан, (2.37)-ні ескеріп,

$$u(x) = a\frac{c_2}{\sqrt{\alpha(x)}} sin\left[-\frac{i}{4}\int_{x_0}^{x}\frac{\varphi(x)}{\alpha(x)}dx + c_1\right].$$

$u(x_0) = u^0$ және $v(x_0) = v^0$ алғашқы шарттарын қанағаттандырайық. Ол үшін $u(x)$ және $v(x)$ −ті $u(x) = \frac{a}{\sqrt{\alpha(x)}}\left[K_1 sin\Phi(x) + K_2 cos\Phi(x)\right]$, $v(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(x)}}\left[K_1 cos\Phi(x) - K_2 sin\Phi(x)\right]$ түрінде көшіріп алайық, мұндағы $\Phi(x) = -\frac{i}{4}\int_{x_0}^{x}\frac{\varphi(x)}{\alpha(x)}dx$, $K_1 = c_2 cosc_1$, $K_2 = c_2 sinc_1$. Алғашқы шарттардан $u_0 = \frac{a}{\sqrt{\alpha(x_0)}}K_2$, $v_0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha(x_0)}}K_1$. Сонымен, $K_2 = \frac{u_0\sqrt{\alpha(x_0)}}{a}$, $K_1 = v_0\sqrt{\alpha(x_0)}$. Осыдан

$$u(x) = a\sqrt{\frac{\alpha(x_0)}{\alpha(x)}}\left[v_0 sin\Phi(x) + \frac{u_0}{a}cos\Phi(x)\right],$$

$$v(x) = \sqrt{\frac{\alpha(x_0)}{\alpha(x)}}\left[v_0 cos\Phi(x) - \frac{u_0}{a}sin\Phi(x)\right].$$

$sin(-ix) = -ishx$, $cos(-ix) = shx$ қатынастарын қолданып, $u(x)$ және $v(x)$ -ті гиперболалық функциялар түрінде жазамыз:

$$u(x) = a\sqrt{\frac{\alpha(x_0)}{\alpha(x)}}\left[\frac{u_0}{a}chF(x) - iv_0 shF(x)\right],$$

$$v(x) = \sqrt{\frac{\alpha(x_0)}{\alpha(x)}}\left[v_0 chF(x) + i\frac{u_0}{a}shF(x)\right],$$

мұндағы $F(x) = \frac{i}{4}\int_{x_0}^{x}\frac{\varphi(x)}{\alpha(x)}dx$.

2.10 Параметрлік күшейтілген сингуляр ауытқымалы интегро-дифференциалдық жүйенің шешімінің асимптотикасы

Жылдам осцилляцияланушы коэффициентті дифференциалдық жүйелердің асимптотикалық шешімдерін құру үшін, әдетте дифференциалдық теңдеулерді бөлшектеу әдісі [22-24, 26] және регуляризация әдісі [7, 14, 25] қолданылатындығы белгілі. Осы жұмыста жылдам осцилляцияланушы коэффициентті интегро-дифференциалдық теңдеулердің жүйесі қарастырылады. Зерттеудің негізгі мақсаты берілген есептің асимптотикалық шешіміндегі бас мүшеге интегралдық мүшенің ықпалы негізделеді. Сонымен қатар резонанстық болмаған жағдайы да қарастырылып жатқанын, яғни жылдам осцилляцияланушы коэффициенттің жиілігі шекті оператордың спектрімен байланысты емес екендігін айта кету керек.

Екінші ретті жүйе үшін Коши есебін қарастырайық

$$\varepsilon\frac{dz(x,\varepsilon)}{dx}=A(x)z(x,\varepsilon)+\varepsilon\varphi(x)cos\frac{2\beta(x)}{\varepsilon}Bz(x,\varepsilon)+ \\ +\int_{x_0}^{x}k(s)z(s,\varepsilon)ds+h(x),\quad z(x_0,\varepsilon)=z^0,\ \ x\in[x_0,T],\ \ T>0, \tag{2.38}$$

мұндағы $z(x,\varepsilon)=\{u(x,\varepsilon),\vartheta(x,\varepsilon)\}$ – белгісіз вектор-функция, $z^0=\{u^0,\vartheta^0\}$ – белгілі тұрақты вектор, $k(x)=\{k_1(x),k_1(x)\}$, $h(x)=\{h_1(x),h_1(x)\}$ – белгілі вектор-функция, $A(x)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\alpha^2(x) & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ – берілген матрицалар, $\varphi(x),\alpha(x),\beta(x)>0$ – белгілі функциялар, $\varepsilon>0$ – кіші параметр. $\varepsilon\to+0$ болғандағы (2.38) есептің асимптотикалық шешімінің негізгі мүшесін құру керек.

Регуляризациялайтын айнымалыларды енгізейік:

$$\tau_0=\frac{2i}{\varepsilon}\beta'(x)\equiv\psi_0(x,\varepsilon),\ \tau_i=\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_0}^{x}\lambda_i(s)ds\equiv\psi_i(x,\varepsilon),\qquad i=1,2,$$

мұндағы $\lambda_i(x,\varepsilon)$ – $A(x)$ матрицасының меншікті мәндері, және регуляризация әдісінің [25] жалпы теориясына сәйкес, (2.38) есептің $z(x,\varepsilon)$ шешімінің орнына кеңейтілген $\tilde{z}(x,\tau,\varepsilon)$ функциясын қарастырайық, мұндағы $\tau=(\tau_0,\tau_1,\tau_2)$ – қосымша регуляризациялайтын айнымалылардың жиыны және оған кеңейтілген $\tilde{z}(x,\tau,\varepsilon)$ функциясы үшін мына қатынас орындалуын талап етейік: $\tilde{z}(x,\psi(x,\varepsilon),\varepsilon)=z(x,\varepsilon)$.

Кеңейтілген $\tilde{z}(x,\tau,\varepsilon)$ функциясы үшін

$$\varepsilon\frac{\partial\tilde{z}(x,\tau,\varepsilon)}{\partial x}+D_\lambda\tilde{z}(x,\tau,\varepsilon)-A(x)\cdot\tilde{z}(x,\tau,\varepsilon)+\int\limits_{x_0}^{x}k(s)\tilde{z}(s,\psi(s,\varepsilon),\varepsilon)ds= \qquad (2.39)$$
$$=\frac{\varepsilon\varphi(x)}{2}(e^{\tau_0}+e^{-\tau_0})B\cdot\tilde{z}(x,\tau,\varepsilon)+h(x),\qquad \tilde{z}(x_0,\psi(x_0,\varepsilon),\varepsilon)=z^0,$$

мұндағы

$$D_\lambda\tilde{z}=\sum_{k=0}^{2}\lambda_k(x)\frac{\partial\tilde{z}(x,\tau,\varepsilon)}{\partial x_k},\;\; \psi(x_0,\varepsilon)=\left(\frac{2i\beta(x_0)}{\varepsilon},0,0\right),$$

есебі сәйкес келеді. (2.39) есепте интегралдық мүшеге регуляризация әзірше жасалынбаған, сондықтан (2.38) бастапқы есепке қатысты әлі «кеңейтілген» деп санауға болмайды. «Кеңейтілген» есепті құру үшін интегралдық операторды регуляризациялаумен айналысамыз.

(2.39) есептің коэффициенттері

$$z(x,\tau,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j z_j(x,\tau) \qquad (2.40)$$

дәрежелі қатар түріндегі, $z_j(x,\tau)\equiv z_j(x,\tau_0,\tau_1,\tau_2)$,

$$z_j(x,\tau)=z_0^{(j)}(x)+z_1^{(j)}(x)e^{\tau_1}+z_2^{(j)}(x)e^{\tau_2} \qquad (2.41)$$

функциясымен берілген шешімі бар деп болжайық, мұндағы барлық $z_i^{(j)}(x)\in C^\infty[0,T],\; i=\overline{0,2}$. (2.41) функцияны (2.39) есептің интегралдық мүшесіне қоя отырып,

$$I_0(x,\psi(x,\varepsilon),\varepsilon)=\int\limits_{x_0}^{x}k(s)z_0(s)ds,\quad I_1(x,\psi(x,\varepsilon),\varepsilon)=\int\limits_{x_0}^{x}k(s)z_1(s)e^{\psi_1(s,\varepsilon)}ds,$$
$$I_2(x,\psi(x,\varepsilon),\varepsilon)=\int\limits_{x_0}^{x}k(s)z_2(s)e^{\psi_2(s,\varepsilon)}ds,$$

түріндегі интегралдарды аламыз.

I_0-I_2 интегралдарын регуляризациялау ε кіші параметрінің дәрежелері бойынша формалдық қатарды құру болып табылады. Мұндай операцияны орындау үшін I_0-I_2 интегралдарының әрқайсысына бөліктеп интегралдау қолданылады.

Интеграл $I_0(x,\psi(x,\varepsilon),\varepsilon)$ регуляризацияланған, яғни

$$I_0(x,\psi(x,\varepsilon),\varepsilon)=\int_{x_0}^{x}k(s)z_0(s)ds.$$

$I_1(x,\psi(x,\varepsilon),\varepsilon)$ интегралын қарастырайық. Мұнда келесі әрекеттерді орындайық:

$$I_1(x,\psi(x,\varepsilon),\varepsilon)=\int_{x_0}^{x}k(s)z_1(s)e^{\frac{i}{\varepsilon}\int_{s_0}^{s}\alpha(x)dx}ds=\int_{x_0}^{x}k(s)z_1(s)d\left(e^{\frac{i}{\varepsilon}\int_{s_0}^{s}\alpha(x)dx}\right)\left(\frac{\varepsilon}{i\alpha(s)}\right)=$$

$$=\varepsilon\left[\frac{k(s)z_1(s)}{i\alpha(s)}e^{\frac{i}{\varepsilon}\int_{s_0}^{s}\alpha(x)dx}\Bigg|_{s=x_0}^{s=x}-\int_{x_0}^{x}e^{\frac{i}{\varepsilon}\int_{s_0}^{s}\alpha(x)dx}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{k(s)z_1(s)}{i\alpha(s)}\right)ds\right]=$$

$$=\varepsilon\left[\frac{k(x)z_1(x)}{i\alpha(x)}e^{\frac{i}{\varepsilon}\int_{s_0}^{x}\alpha(x)dx}-\frac{k(x_0)z_1(x_0)}{i\alpha(x_0)}-\int_{x_0}^{x}e^{\frac{i}{\varepsilon}\int_{s_0}^{s}\alpha(x)dx}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{k(s)z_1(s)}{i\alpha(s)}\right)ds\right]=\varepsilon\frac{k(x)z_1(x)}{i\alpha(x)}e^{\psi_1(x,\varepsilon)}-$$

$$-\varepsilon\frac{k(x_0)z_1(x_0)}{i\alpha(x_0)}-\varepsilon\int_{x_0}^{x}e^{\frac{i}{\varepsilon}\int_{s_0}^{s}\alpha(x)dx}\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{k(s)z_1(s)}{i\alpha(s)}\right]ds.$$

Сонымен, $I_1(x,\psi(x,\varepsilon),\varepsilon)$-да біреселі бөліктеп интегралдаудан кейін сыртқы интегралдық мүшелер ажыратылады, мұнда $\psi=\tau$ болғанда олардың түрі (2.41) қосындының қосылғыштары түрінде болады, ал интегралдық мүше қайтадан $I_1(x,\psi(x,\varepsilon),\varepsilon)$ типіндегі интегралға айналады. Көпеселі бөліктеп интегралдау формалдық қатарға алып келеді

$$I_1(x,\psi(x,\varepsilon),\varepsilon)\equiv I_1(x,\tau,\varepsilon)=\varepsilon\left[\frac{k(x)z_1(x)}{i\alpha(x)}e^{\tau_1}-\frac{k(x_0)z_1(x_0)}{i\alpha(x_0)}\right]+$$

$$+\sum_{j=2}^{\infty}\varepsilon^j\left[v_1^{(j)}(x)e^{\tau_1}+v_0^{(j)}(x)\right].$$

Дәл осылай $I_2(x,\psi(x,\varepsilon),\varepsilon)$ интегралы үшін осындай операцияны орындасақ,

$$I_2(x,\psi(x,\varepsilon),\varepsilon) \equiv I_2(x,\tau,\varepsilon) = \varepsilon\left[\frac{k(x)z_2(x)}{i\alpha(x)}e^{\tau_1} - \frac{k(x_0)z_2(x_0)}{i\alpha(x_0)}\right] +$$
$$+\sum_{j=2}^{\infty}\varepsilon^j\left[v_2^{(j)}(x)e^{\tau_1} + v_0^{(j)}(x)\right].$$

формалдық қатарын аламыз.

Енді (2.39) кеңейтілген есепті мына түрде жазуға болады

$$\varepsilon\frac{\partial\tilde{z}(x,\tau,\varepsilon)}{\partial x} + D_\lambda\tilde{z}(x,\tau,\varepsilon) - A(x)\tilde{z}(x,\tau,\varepsilon) + R\tilde{z}(x,\tau,\varepsilon) =$$
$$= \frac{\varepsilon\varphi(x)}{2}(e^{\tau_0} + e^{-\tau_0})B\tilde{z}(x,\tau,\varepsilon) + h(x), \qquad \tilde{z}(x_0,\psi(x_0,\varepsilon),\varepsilon) = z^0, \tag{2.42}$$

мұндағы R операторы (2.40) әрбір формалдық қатарға $z_i(x,\tau)\in U$ коэффициенттерімен (2.41) формалдық қатарды сәйкестендіреді, мұндағы барлық $\psi_i(x,\varepsilon)$ $\tau_i (i=1,2)$ – ге ауыстырылған. Ары қарай R операторын $R\tilde{y} = \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\sum_{j=0}^{s}R_j z_{s-j}(x,\tau)$ түрінде ұсынған ыңғайлы, мұндағы R_j операторы келесі түрде анықталады. (2.41) қосынды түріндегі $z(x,\tau)\in U$ кез келген функциясын алайық және $\int_{x_0}^{x}k(s)z_i\left(s,\frac{\psi(s)}{\varepsilon},\varepsilon\right)ds$ интегралында $1,\varepsilon,\ldots,\varepsilon^s$ ретті сыртқы интегралдық мүшелерді бөлумен бөліктеп интегралдауды жасайық. Содан кейін сыртқы интегралдық мүшелерде $\psi_i(x,\varepsilon)$-ды τ_i , $i=1,2$-ге ауыстырайық. Сонда $R_j z(x,\tau)$ ε^s болғандағы сыртқы интегралдық мүшелердің коэффициенті болып табылады. Бұл анықталғаннан, жеке жағдайда

$$R_0 z_j(x,\tau) = \int_{x_0}^{x}k(s)z_0^{(j)}(s)ds,$$

$$R_1(x,\tau) = \frac{k(x)z_1^{(j)}(x)}{i\alpha(x)}e^{\tau_1} - \frac{k(x)z_2^{(j)}(x)}{i\alpha(x)}e^{\tau_2} + \frac{k(x_0)z_2^{(j)}(x_0)}{i\alpha(x_0)} - \frac{k(x_0)z_1^{(j)}(x_0)}{i\alpha(x_0)},$$

....

шығады.

Енді (2.40) қатарды (2.42) есепке қойып және ε бірдей дәрежелі коэффициенттерін теңестіреміз (интегралдарды регуляризациялау формуласын ескере отырып). Келесі итерациялық есепті аламыз

$$L_0 z_0(x,\tau) \equiv D_\lambda z_0(x,\tau) - A(x) z_0(x,\tau) + \int_{x_0}^{x} k(s) z_0^{(0)}(s)ds = h(x), \quad z_0(x_0,\psi(x_0,\varepsilon)) = z^0, \ (\varepsilon^0)$$

$$L_0 z_1 = -\frac{\partial z_0(x,\tau)}{\partial x} + \frac{\varphi(x)}{2}\left(e^{\tau_0} + e^{-\tau_0}\right) B z_0 - \frac{k(x) z_1^{(0)}(x)}{i\alpha(x)} e^{\tau_1} + \frac{k(x) z_2^{(0)}(x)}{i\alpha(x)} e^{\tau_2} +$$
$$+\frac{k(x_0) z_1^{(0)}(x_0)}{i\alpha(x_0)} - \frac{k(x_0) z_2^{(0)}(x_0)}{i\alpha(x_0)}, \qquad z_1(x_0,\psi(x_0,\varepsilon)) = 0, \qquad (\varepsilon^1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(ε^0) есебінің шешімі

$$z_0(x,\tau) = z_{o,o}(x,\tau) + z_{ч,н}(x,\tau),$$

түрде, мұндағы $z_{o.o}(x,\tau) -$ (ε^0) теңдеуге сәйкес келетін біртекті теңдеудің жалпы шешімі, ал $z_{ч,н}(x,\tau) - (\varepsilon^0)$ теңдеуінің дербес шешімі. (ε^0) біртекті теңдеуінің шешімі

$$z_{o,o}(x,\tau) = c_1(x) b_1(x) e^{\tau_1} + c_2(x) b_2(x) e^{\tau_2}, \qquad (2.43)$$

түрде, мұндағы $b_1(x) = \{1, i\alpha(x)\}$, $b_2(x) = \{1, -i\alpha(x)\} - A(x)$ матрицасының меншікті векторлары, $c_1(x), c_2(x) -$ кез келген функциялар, ал $z_{ч,н}(x,\tau)$ дербес шешімі

$$z_{ч,н}(x,\tau) \equiv z_0^{(0)}(x) = -A^{-1}(x)\cdot h(x) + \int_{x_0}^{x} A^{-1}(x)\cdot k(s) z_0^{(0)}(s)ds.$$

Осылайша, (2.43) шешім келесі түрде анықталған

$$z_0(x,\tau) = c_1(x)\begin{pmatrix} 1 \\ i\alpha(x)\end{pmatrix} e^{\tau_1} + c_2(x)\begin{pmatrix} 1 \\ -i\alpha(x)\end{pmatrix} e^{\tau_2} + z_0^{(0)}(x). \qquad (2.44)$$

(2.44)-ті $z_0(x_0,\psi(x_0,\varepsilon)) = z^0$ алғашқы шарттарға бағындыра отырып мынаны аламыз

$$c_1(x_0)\begin{pmatrix} 1 \\ i\alpha(x_0)\end{pmatrix} + c_2(x_0)\begin{pmatrix} 1 \\ -i\alpha(x_0)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_2(x_0)/\alpha^2(x_0) \\ -h_1(x_0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^0 \\ \vartheta^0\end{pmatrix},$$

бұдан,

$$c_1(x_0)=\frac{1}{2}\left(u^0+\frac{h_2(x_0)}{\alpha_0^2}+i\frac{h_1(x_0)-\vartheta^0}{\alpha_0}\right),\ c_2(x_0)=\frac{1}{2}\left(u^0+\frac{h_2(x_0)}{\alpha_0^2}+i\frac{\vartheta^0-h_1(x_0)}{\alpha_0}\right). \qquad (2.45)$$

табамыз.

Келесі (ε^1) есебінің шешіміне көшеміз. (ε^1) есебінің оң жақ бөлігі

$$\begin{gathered}Hz_0=-\left(z_0^{(0)}(x)\right)'-c_1'(x)\begin{pmatrix}1\\ i\alpha(x)\end{pmatrix}e^{\tau_1}-c_1(x)\begin{pmatrix}0\\ i\alpha'(x)\end{pmatrix}e^{\tau_1}-c_2'(x)\begin{pmatrix}1\\ -i\alpha(x)\end{pmatrix}e^{\tau_2}-\\ -c_2(x)\begin{pmatrix}0\\ -i\alpha'(x)\end{pmatrix}e^{\tau_2}+\frac{\varphi(x)}{2}\left(e^{\tau_0}+e^{-\tau_0}\right)\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\left(z_0^{(0)}(x)+c_1(x)e^{\tau_1}+c_2(x)e^{\tau_2}\right)- \qquad (2.46)\\ -\frac{k(x)z_1^{(0)}(x)}{\lambda_1(x)}e^{\tau_1}-\frac{k(x)z_2^{(0)}(x)}{\lambda_2(x)}e^{\tau_2}+\frac{k(x_0)z_1^{(0)}(x_0)}{\lambda_1(x_0)}+\frac{k(x_0)z_2^{(0)}(x_0)}{\lambda_2(x_0)}\end{gathered}$$

түрде. (2.46) теңдеудің шешімді болуы үшін оң жақ бөлігі $L_0^*\equiv D_{\bar{\lambda}}-A^*(x)+\int\limits_{x_0}^{x}k(s)z_0^{(0)}(s)$ түйіндес операторының ядросының $q_i(x,\tau_i)=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2\lambda_i(x)}\right\}e^{\tau_i},\ i=1,\,2$ базисті элементтеріне ортогоналды болуы қажетті және жеткілікті, бұдан $c_i(x)\quad(i=1,\,2)$, дәлірек айтқанда

$$c_i'(x)+c_i(x)\left(\frac{\alpha'(x)}{2\alpha(x)}+\frac{k(x)}{\lambda_i(x)}\right)=0$$

табу үшін теңдеуді аламыз. (2.45) бастапқы шарттарды ескере отырып

$$c_i(x)=c_i(x_0)exp\left(ln\sqrt{\frac{\alpha(x_0)}{\alpha(x)}}-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{k(s)}{\lambda_i(s)}ds\right)$$

табамыз.

Осылайша (ε^0) есебінің $z_0(x,\tau)$ шешімі

$$\begin{gathered}z_0(x,\tau)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\left(u^0+\frac{h_2(x_0)}{\alpha^2(x_0)}+i\frac{(-1)^k\left(\vartheta^0-h_1(x_0)\right)}{\alpha(x_0)}\right)\cdot\\ \cdot\begin{pmatrix}1\\ \lambda_k(x)\end{pmatrix}e^{\tau_0}exp\left(ln\sqrt{\frac{\alpha(x_0)}{\alpha(x)}}-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{k(s)}{\lambda_k(s)}ds\right)+z_0^{(0)}(x).\end{gathered}$$

$k(x) \equiv 0$ болғанда асимптотиканың бас мүшесі

$$z_0(x,\tau) = \begin{pmatrix} \dfrac{h_2(x)}{\alpha^2(x)} \\ -h_1(x) \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{\alpha(x_0)}{\alpha(x)}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i\alpha(x) \end{pmatrix} \frac{\alpha(x_0) f_0 - i g_0}{2\alpha(x_0)} e^{\tau_1} + \begin{pmatrix} 1 \\ -i\alpha(x) \end{pmatrix} \frac{\alpha(x_0) f_0 + i g_0}{2\alpha(x_0)} e^{\tau_2} \right\}$$

түрде болатынын ескерейік, мұндағы $f_0 = u^0 - \dfrac{h_2(x_0)}{\alpha^2(x_0)},\ g_0 = \vartheta^0 + h_1(x_0)$, бұл [17],509 б. және [7], 177 б. мысалдарының шешімімен сәйкес келеді.

ҚОРЫТЫНДЫ

Сонымен, біз коэффициенттері жылдам осцилляциаланатын интегро-дифференциалдық теңдеулер үшін С.А. Ломовтың регуляризациялау әдісінің қолданылуының жағдайын қарастырдық, сонымен қатар біз келесі жағдайларды зерттедік:

- жылдам осцилляциаланатын коэффициентті теңдеулерде қарапайым спектрлі шекті операторлардың дербес туындыда итерациялық жүйенің шешімділігін;
- жылдам осцилляциаланатын коэффициентті интегро-дифференциалдық теңдеудің шешімінің асимптотикасының бас мүшесін құрдық;
- интегралдық мүшені регуляризациялау барысында интеграл оператордың алғашқы есептің резонанссыз шешімдер класына инварианттығын негіздедік.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Prandtl L. Uber Flussigkeitsbewerung bei senr kleiner Reibung// Verhandl. Des III International Mathematics Kongress. Heidelburg, 1904. Leipzig, 1905. - P. 484 – 491.
2. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). – М.: Мир, 1965.
3. Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев.: Наукова думка, 1971.
4. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. – УМН, 1975, 12, №5, -с. 3-122.
5. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973.
6. Маслов В.П. Комплексный метод ВБК в нелинейных уравнениях. –М.: Наука, 1977.
7. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений.- М.: Наука. 1981.- 400 с.
8. Пуанкаре А. Сбор. соч. т.I. –М.: Наука, 1971.
9. Lowville J. Second memoire sur le developpement des functions ou parties de fonctions en series don’t les divers terms sont assujettes a satisfier a une mene equation differentielle du second ordre, contenant une parametre variable// J. Math. Pure Appl.– 1937. V. 2.– P. 16 – 35.
10. Schlesinger L. Uber asymtotische Darstellungen der Losungen linearer Differential systeme als Funktionen eines Paramreters// Math. Ann. -1907. S.– 277 – 300.
11. Birkhoff C.D. On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter// Trans. Amer. Math. Soc.– 1908. -Y. 9.– P. 219 – 231.
12. Trjitzinsky W.S. Analytic theory of linear differential equations // Acta Mathematics. - 1934, Vol. 62.– P. 167-226.
13. Рыжих А.Д. Асимптотическое интегрирование уравнений в банаховом пространстве // Труды МЭИ. - 1980. Вып. 499. – С. 159-161.
14. Рыжих А.Д. Асимптотическое решение линейного дифференциального уравнения с быстро осциллирующим коэффициентом // Тр. МЭИ, - 1978, 357.- с. 92-94.
15. Като Т. Интегрирование эволюционных уравнений в банаховом пространстве // Математика. - 1958. -Т.2, №4. – С. 117-135.
16. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. - М.: Наука, 1967. - 464 с.
17. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.- М.: Наука, 1970.

18. Валиев М.А., Ломов С.А. Общий подход к асимптотическому интегрированию сингулярно возмущенных задач в случае неограниченного несамосопряженного оператора // Докл. АН СССР. - 1977. Т.236, - С. 11-13.
19. Елисеев А.Г., Ломов С.А. Теория возмущений в банаховом пространстве // Докл. АН СССР. Сер. матем. - 1984. Т.48, №5. – С. 999-1042.
20. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. - 740 с.
21. Ломов С.А. Асимптотическое поведение решений уравнений, предельные решения которых разрывны // Докл. научно-техн. конф. по итогам науч.-исслед. работ за 1966-1967 гг. Секц. Матем. –М.: МЭИ, -1967. –С. 133-145.
22. Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Николенко Л.Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений.- Киев: Наукова думка, 1966.
23. Далецкий Ю.Л., Крейн С.Г. О дифференциальных уравнениях в гильбертовым пространстве // Укр. матем. журн. - 1950, 2, №4.
24. Далецкий Ю.Л. Асимптотический метод для некоторых дифференциальных уравнений с осциллирующими коэффициентами // ДАН СССР, - 1962, 143, №5.- С. 1026-1029.
25. Рыжих А.Д. Применение метода регулярзации для уравнения с быстро осциллирующими коэффициентами // Матер. Всесоюз. конф. по асимп. методам, ч. I. - Алма-Ата, - 1979.- С. 64-66.
26. Шкиль Н.И. Асимптотические методы в дифференциальных уравнениях.- Киев: Наукова думка, 1971.
27. Ломов С.А., Ломов И.С. Основы математической теории пограничного слоя. – М.: Издательство Московского университета, 2011. - 456 с.
28. Абикеева У.Д., Калимбетов Б.Т., Хабибуллаев Ж. Регуляризованная асимптотика решений для сингулярно возмущенной интегро-дифференциальной системы с кратным спектром // Матер. Межд. конф. «Некласс. урав. мат.физики и их приложения».-Ташкент, -2014.- С. 182-183.
29. Абикеева У.Д., Калимбетов Б.Т. Об асимптотическом поведении решений интегро-дифференциальной системы с быстро осциллирующими коэффициентами // Матер. Межд. конф. «Ауэзовские чтения-13: «Нұрлы жол» - страт. шаг на пути индустр.-инновац. и развития страны».-Шымкент, том 9, - 2015. -С. 118-121.
30. Абикеева У.Д., Пардаева Н.А.,Калимбетов Б.Т. Регуляризованная асимптотика сингуляр-но возмущенной интегро-дифференци-альной системы с быстро осциллирую-щими коэффициентами // Вестник МКТУ им А.Ясави.- 2015, 4.- С. 3-10.