Ф-ОБ-001/033

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
МЕЖДУНАРОДНЫЙ КАЗАХСКО – ТУРЕЦКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ХОДЖИ АХМЕДА ЯСАВИ

УДК – 517.45.

На правах рукописи

Аманжолова Алина Болаткызы

К СПЕКТРАЛЬНОМУ ВОПРОСУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА КОШИ – РИМАНА С ОДНОРОДНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

Магистрская диссертация на соискание академической степени магистра естествознания по специальности 6М060100 - МАТЕМАТИКА

ТУРКЕСТАН – 2015

Ф-ОБ-001/033

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
МЕЖДУНАРОДНЫЙ КАЗАХСКО – ТУРЕЦКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ХОДЖИ АХМЕДА ЯСАВИ

Допущена к защите:
Заведующий кафедры математики,
к.тех.н.________М.Кошанова
«___»_______________20__ ж.

Магистрская диссертация

К СПЕКТРАЛЬНОМУ ВОПРОСУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА КОШИ – РИМАНА С ОДНОРОДНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

специальность: 6М060100 - МАТЕМАТИКА

Магистрант ____________________ А.Б. Аманжолова

Научный руководитель,
к.ф.-м.н., профессор ________________ Н.С. Иманбаев

ТУРКЕСТАН – 2015

АҢДАТПА

Берілген диссертациялық жұмыста біртекті шекаралық шарттары бар Коши-Риман операторы үшін өздік мәнді есебі зерттелген. Спектралды есеп үшін индекс есептелінген және Фредгольмдығын көрсететін нётер шарты орнатылған. Спектралды есептің шешімі квазисингулярлы интегралдық теңдеуге редуцияланған.

ÖZET

Bu tez homojen sınır koşulları ile bir diferansiyel Cauchy - Riemann operatörü için özdeğer problemi incelenmiştir. Spektral sorun endeksi hesaplayin ve durumu Fredholmness özgün sorunu eder noethericity, ayarlanmış bir entegre denklem kvazisingulyarlu indirgenir.

ABSTRACT

This thesis investigated the eigenvalue problem for a differential Cauchy-Riemann operator with homogeneous boundary conditions. The spectral problem is reduced to kvazisingulyar integral equation where index calculated and the condition is set noethericity, which implies Fredholmness original problem.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы.

В спектральной теории дифференциальных операторов в последние годы все большее внимание уделяется задачам для уравнений с частными производными, в которых краевые условия представляют собой различных точках, лежащих на границе или внутри рассматриваемой области.

Этот интерес объясняется как теоретической значимостью получаемых результатов, так и возможностями важных приложений. Подобные граничные условия возникают при математическом моделировании задач газовой динамики, теории плазмы, теплопроводности, излучения лазера, прогнозирования почвенной влаги, при изучении процессов размножения клеток, бактерий и т.п. В некоторых случаях (физика сверхпроводников, радиационный перенос, процессы распространения загрязнения в воде биосферы, демография, популяционная генетика и другие биологические проблемы) граничные условия имеют интегральную форму.

Примеры указанных краевых условий, возникающих в теплопроводности, были сформулированы ещё В. А. Стекловым [1], а газовой динамике – Ф.И. Франклем [2]. А.М. Нахушевым [3,5] были поставлены и изучены сразу несколько задач данного типа, а для их названия предложен термин «задачи со смещением». В статье А.В. Бицадзе и А.А. Самарского [4] впервые была исследована задача «со смещением внутрь области». Содержание последних публикаций привело к осознанию качественной новизны краевых задач со смещениями для теории дифференциальных уравнений в частных производных. В последних публикациях [6] для уравнений Бицадзе – Лыкова поставлена задача со смещением с операторами Кобера – Эрдейи и М. Сайго в краевом условии, а также исследованы вопросы единственности и неединственности решения задачи при различных функциях и значениях констант, входящих в краевые условия. В работах [5,7] исследовано состояние краевых задач со смещением для основных типов уравнений в частных производных. Краевая задача со смещением для уравнения Карлемана – Векуа с сингулярной точкой изучалась в работе [8]. Обилие публикаций, где изучаются все более общие ситуации, производит иногда впечатление, что теория краевых задач «со смещением» уже завершена. Однако здесь имеется ряд менее изученных, но важных вопросов, в частности, задача о собственных значениях или об их аналитическом описании с помощью, например, асимптотических разложений. Применяемые в настоящее время методы функционального анализа и метод сведения к модельным уравнениям путём интегральных преобразований, с одной стороны, недостаточны для того, чтобы получить такую детальную информацию. С другой стороны, вряд ли можно надеяться получить, например, решение задачи на собственные значения для дифференциальных уравнений с частными производными в столь же явном виде, как это было сделано в аналогичной ситуации для обыкновенных дифференциальных уравнений.

В работах А.А. Дезина исследовались общие вопросы правильной постановки краевых задач для дифференциальных операторов и исследовались специфические свойства расширений и сужений для обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и для «неклассических» уравнений математической физики [9]. При этом А. А. Дезин привлекает внимание на некоторые спектральные свойства нестандартно поставленных задач, которые, как правило, возникают при переходе с позиций расширения или сужения тех или иных операторов.

Работа об описании регулярных расширений для уравнения Лаврентьева – Бицадзе в терминах краевых условий получила свое дальнейшее развитие в работах Т.Ш. Кальменова [10] применительно и уравнениям гиперболического и смешанного типов. Вопросы о корректных расширениях и сужениях операторов (не обязательно линейных), действующих в банаховом пространстве, впервые изучались в работе М. Отелбаевым и А. Шыныбековым [11], затем описывались сужения нормально разрешимого оператора в банаховом пространстве.

Изучению спектральных свойств тех или иных расширений и сужений посвящены работы ряда авторов. Такого рода исследования необходимы для дальнейшего развития теории расширения и сужения. В этом направлении являются важными вопросы полноты и базисности системы собственных и присоединенных несамосопряженных расширений и сужений.

С другой точки зрения вопросы разрешимости и поведения решения краевой задачи для обобщенного уравнения Коши – Римана глубоко изучались в работах [12-14]. Краевые задачи для обобщенной системы Коши – Римана с негладкими коэффициентами исследовались в работах [15,16].

Настоящая работа посвящена, в основном, изучению некоторых спектральных свойств корректных сужений и расширений, порожденных эллиптическими операторами. Некоторые свойства обобщаются на уравнения гиперболического типа.

Цель диссертационной работы.

1) - исследование спектральной задачи для оператора Коши –Римана с нелокальными краевыми условиями

$$\frac{\partial \omega}{\partial \overline{z}} = \lambda \omega(z), \qquad |z|<1 \tag{1}$$

$$\operatorname{Re}\omega(z) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{|t|=1}\frac{\lambda\omega(t)+f(t)}{t-z}dt\cdot\right), \ |z|=1, \tag{2}$$

$$\operatorname{Im}\omega(0) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{|t|=1}\frac{\lambda\omega(t)+f(t)}{t}dt\right), \tag{3}$$

- исследование спектральной задачи для оператора Коши – Римана с краевыми условиями типа Бицадзе – Самарского

$$\frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}} = \lambda\omega(z), \qquad |z|<1 \tag{1}$$

$$\operatorname{Re}\omega(z) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{|t|=1}\frac{dt}{t-z}\cdot\oint_{|\tau|=r<1}\frac{\lambda\cdot\omega(\tau)}{\tau-t}d\tau\right), \ |z|=1, \tag{2'}$$

$$\operatorname{Im}\omega(0) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{|t|=1}\frac{dt}{t}\cdot\oint_{|\tau|=r<1}\frac{\lambda\cdot\omega(\tau)}{\tau-t}d\tau\right), \tag{3'}$$

- исследование спектральной задачи для оператора Коши – Римана с однородными краевыми условиями типа задачи Дирихле

$$\frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}} = \lambda\omega(z), \qquad |z|<1 \tag{1}$$

$$\operatorname{Re}\omega(z) = 0, \ |z|=1, \tag{2''}$$

$$\operatorname{Im}\omega(0) = 0, z=0, \tag{3''}$$

во всех задачах, где λ – комплексное число (спектральный параметр);

2) Приближенное решение задач (1)-(3), (1)-(3'),(1)-(3'').

Объект исследования.

Несамосопряженные краевые задачи для эллиптического оператора Коши-Римана.

Предмет исследования.

Исследование задачи на собственные значение дифференциального оператора Коши-Римана в пространстве непрерывных функций единичном круге на комплексной плоскости.

Задачи диссертационной работы:

- найти те комплексные значения $\lambda \in C$ – множество комплексных чисел, при которых операторное уравнение $K\omega(z) = \lambda\omega(z)$, $|z|<1$ имеет не тривиальное решение;

- редукция задачи на собственные значение оператора Коши – Римана к сингулярному интегральному уравнению;

- вычисление индекса и установление условии нётеровости сингулярного интегрального уравнения;

- регуляризация сингулярного интегрального уравнения в смысле С.Г. Михлина и доказательство эквивалентности с исходной спектральной задачей;

- редукция сингулярного интегрального уравнения к линейному интегральному уравнению Фредгольма 2 – го рода;

- изучение структуры ядра Фредгольмого уравнения;

Научная новизна исследования:

- при $\lambda \neq 2$, $\mathrm{Re}\,\lambda \neq 0$ для оператора Коши – Римана с нелокальными краевыми условиями указана область, где отсутствует спектр исходного оператора Коши – Римана, то есть указаны те λ, которые принадлежат к резольвентному множеству оператора Коши – Римана;

- редуцированы задачи на собственные значение оператора Коши – Римана к сингулярному интегральному уравнению;

- вычислены индекс и установлены условии нётеровости сингулярного интегрального уравнения;

- регуляризованы сингулярное интегральное уравнение в смысле С.Г. Михлина и доказано эквивалентность с исходной спектральной задачей;

- редуцировано сингулярное интегральное уравнение к линейному интегральному уравнению Фредгольма 2 – го рода;

- изучена структура ядра Фредгольмого уравнения;

Положение диссертации выносимые на защиту:

- описание общих регулярных краевых задач для дифференциального выражения Коши – Римана разработано Дж.Ф. Нейманом, М. И. Вишиком, А. А. Дезиным, М. Отелбаевым. Приведённая задача носит нелокальный характер, и подобные задачи для операции Коши – Римана описаны М. Отелбаевым, А. Н. Шыныбековым [11];

- спектральные вопросы дифференциального оператор Коши – Римана с краевыми условиями типа задачи Дирихле;

- редукция к интегральному уравнению;

- вычисление индекса и установление нётеровости;

Теоритическая и практическая значимость.

Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут найти применение в дальнейших исследованиях по спектральной теории несамосопряженных операторов, а также для решения практических задач теории упругости, теории консолидации однородных грунтов, квантовой механики, геофизики, приводящих к изучению несамосопряженных задач.

Апробация работы.

Результаты исследования докладывались и обсуждались на материале международной научно-практической конференции «Пути успешного достижения решений проблем естественно-гуманитарного образования и науки в период интенсивного развития Казахстана» (Туркестан),на научном семинаре кафедры математики «Неклассические задачи современной математической физики» Международном Казахско – Турецком Университете имени Х.А.Ясави (Туркестан), руководимыми д.ф.-м.н., профессором Университета Б.Т. Турметовым, д.ф.-м.н., доцентом Б.Т. Калимбетовым, к.ф.-м.н., профессором Н.С. Иманбаевым; на научных конференциях молодых ученых 2013-2014 г.г. МКТУ имени Х.А. Ясави.

Публикации. По теме диссертации опубликованы 3 работы, в том числе 2 в журналах, один из них входящих в базу «SCOPUS», один «Вестник МКТУ им. Х.А. Ясави», 1 в материалах международной научной конференции [42-44].

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа изложена на 63 страницах, состоит из введения, двух разделов, заключения и списка использованных источников, содержащего 44 наименования.

В заключении, автор выражает глубокую благодарность научному руководителю профессору, к.ф.-м.н. Иманбаеву Н.С. за постановку задач и за ценные советы при выполнении настоящей диссертации.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В функциональном пространстве $C(|z|\le 1)$ рассмотрим операторы К, порождаемые дифференциальной операцией Коши-Римана

$$K\omega(z)=\frac{\partial\omega(z)}{\partial\bar{z}}, \tag{1}$$

где $z=x+iy,\ \ \bar{z}=x-iy,\ \ \dfrac{\partial}{\partial\bar{z}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}+i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ на множестве

$$D(K)\subset\left\{\omega(z)\in C(|z|\le 1),\frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}}\in C(|z|<1)\right\}.$$

Считаем, что оператор K имеет непустое резольвентное множество $\rho(K)$. Не умоляя общности, предполагаем, что

$$0\in\rho(K) \tag{4}$$

т.е. существует ограниченный оператор K^{-1}. В следующей теореме полностью описано множество операторов $\{K\}$ со свойством (4).

▼ **Теорема 1.** Для каждого линейного оператора K с условием (4) найдется линейно ограниченный оператор G, переводящий непрерывные функций в круге $|z|\le 1$ функции в голоморфные, у которых мнимые части при $z=0$ равны нулю, а также линейно ограниченный функционал $S(f)$ на множестве непрерывных функций в круге $|z|\le 1$ переводит на множество комплексных чисел, которые однозначно определяют область определения оператора K по формуле:

$$D(K)=\left\{\omega(z)\in C(|z|\le 1),\frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}}\in C(|z|<1)\right.$$

$$\operatorname{Re}\ \omega\ (z)=\operatorname{Re}G\left(\frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}}\right),\quad |z|=1$$

$$\left.\operatorname{Im}\ \omega\ (z)=\operatorname{Im}S\left(\frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}}\right),\quad z=0\right\}$$

Обратно, пара G и S определяют K, для которого верно (4).
Рассмотрим уравнение:

$$\frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}}=\lambda\omega(z),\ |z|<1, \tag{1}$$

$$\operatorname{Re}\omega(z)=\operatorname{Re}\alpha\left[\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{|\xi|=1}\frac{\lambda\omega(\xi)}{\xi-z}d\xi\right],\ |z|=1, \tag{2}$$

$$\operatorname{Im}\omega(z)=\operatorname{Im}\alpha\left[\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{|\xi|=1}\frac{\lambda\omega(\xi)}{\xi-z}d\xi\right]. \tag{3}$$

▼ **Теорема 2.** Пусть

$$a(z)=\frac{1}{2}\left[(\lambda-2)\cdot e^{\lambda\bar{z}}+(\bar{\lambda}-2)\cdot e^{\bar{\lambda}z}\right],$$

$$b(z)=\frac{1}{2}\left[(2-\lambda)\cdot e^{\lambda\bar{z}}+(2-\bar{\lambda})\cdot e^{\bar{\lambda}z}\right],$$

$$T(z,t)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{t}\left[e^{\lambda\bar{z}}-e^{\bar{\lambda}z}-\lambda-\bar{\lambda}+\frac{1}{t-z}\cdot\left(\lambda t\cdot e^{\lambda\bar{t}}-\bar{\lambda}z\cdot e^{\bar{\lambda}t}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\cdot\frac{t+z}{t-z}\frac{1}{t-z}\cdot\left(\lambda e^{\lambda\bar{z}}-\bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}z}\right)\right]+\left(e^{\lambda\bar{t}}-e^{\bar{\lambda}z}\right)\cdot\frac{\lambda t}{t-z}+\bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}z}-$$

$$-\frac{1}{t-z}\left(e^{\bar{\lambda}t}-e^{\bar{\lambda}z}\right)\cdot\bar{\lambda}z-\frac{i}{4\pi(1-\mathrm{Re}\,\lambda)}\cdot\left(\frac{e^{\bar{\lambda}z}-e^{\lambda\bar{z}}+\bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}z}}{2-\lambda e^{\lambda\bar{z}}+\lambda-\bar{\lambda}}\right)\cdot\frac{1}{t}\times$$

$$\times\left(2\bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}t}+2\lambda e^{\lambda\bar{t}}-3\lambda-3\bar{\lambda}\right).$$

Тогда для вещественной функции $u(z)$ на окружности $|z|=1$ справедливо следующее сингулярное интегральное уравнение

$$a(z)\cdot u(z)-\frac{b(z)}{\pi i}\cdot\int\limits_{|t|=1}\frac{u(t)}{t-z}dt+\int\limits_{|t|=1}T(z,t)\cdot u(t)dt=0,$$

где $T(z,t)$ – непрерывное ядро. При $\mathrm{Re}\,\lambda\neq 1$ константа C из общего решения представима в виде

$$C=-\frac{1}{4\pi(1-\mathrm{Re}\,\lambda)}\cdot\int u(t)\cdot\left(2\bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}t}+2\lambda e^{\lambda\bar{t}}-3\lambda-3\bar{\lambda}\right)\cdot\frac{dt}{t}.$$

▼ **Теорема 3.** Сингулярное интегральное уравнение для $u(t)$ нетёрово при условии, когда $\lambda\neq 2$, $\mathrm{Re}\,\lambda\neq 1$. Больше того, индекс нетёра

$$æ=\frac{1}{\pi i}\cdot[\ln(a(z)+b(z))]\big|_{|z|=1}=0\ ,\text{при } \lambda\neq 2,\ \mathrm{Re}\,\lambda\neq 1.$$

▼ **Теорема 4.** Пусть $\lambda\neq 2$, $\mathrm{Re}\,\lambda\neq 1$. Тогда сингулярное интегральное уравнение для $u(t)$ из теоремы 2 эквивалентно интегральному уравнению Фредгольма

$$(a^2(z)-b^2(z))\cdot u(z)+\oint\limits_{|t|=1}K(z,t)\cdot u(t)dt=0, \tag{5}$$

где

$$K(z,t)=\frac{b(z)}{\pi i}\cdot\frac{a(t)-a(z)}{t-z}-\frac{(2-\lambda)b(z)}{\pi i}+\frac{b(z)}{\pi i}\cdot\frac{b(t)-a(z)}{t-z}+$$

$$+\frac{b(z)}{2\pi ti}\cdot(1-e^{\lambda\bar{z}})\cdot(2+\lambda)-\frac{2b(z)\lambda}{\pi ti}\cdot\frac{e^{\lambda\bar{t}}-e^{\lambda\bar{z}}}{t-z}+a(z)T(z,t)+$$

$$+\frac{b(z)\cdot(2+\lambda)}{8\pi(1-\operatorname{Re}\lambda)}\cdot\left(2\overline{\lambda}e^{\overline{\lambda}t}+2\lambda e^{\lambda\overline{t}}-3\lambda-3\overline{\lambda}\right)\cdot(1-e^{\lambda\overline{z}})+b(z)T(z,t).$$

▼ **Теорема 5.** Пусть $|\lambda|<R_1$ (R_1 - фиксировано) и $\lambda\neq 2, \operatorname{Re}\lambda\neq 1$. Пусть N выбрано согласно $C_2\frac{|\lambda|^{N+1}2^N}{(N+1)!}\left(1+C_3\frac{M^{2N+4}}{|\Delta_N(\lambda)|}\right)<1$.Определим $\widetilde{K}(z,t)$ по формуле

$$\tilde{K}(z,t)=e^{\overline{\lambda}z}\left\{\overline{\lambda}+\frac{\overline{\lambda}^2(t-z)}{2!}+\ldots+\frac{\overline{\lambda}^N(t-z)^{N-1}}{N!}\right\}B(z,\overline{\lambda})-\frac{A(z,\lambda)}{tz}e^{\overline{\lambda}z}*$$

$$*\left\{\overline{\lambda}+\frac{\overline{\lambda}^2(\overline{t}-\overline{z})}{2!}+\ldots+\frac{\overline{\lambda}^N(\overline{t}-\overline{z})^{N-1}}{N!}\right\}+\frac{1}{t}C(z,\lambda)+E(z,\lambda)D(t,\lambda)+F(z,\lambda)Q(z,\lambda)$$

а через $\Delta_N(\lambda)$ обозначим определитель Фредгольма, соответствующий вырожденному ядру $\widetilde{K}(z,t)$. Если $\Delta_N(\lambda)\neq 0$, то λ является точкой резольвентного множества оператора Коши – Римана (1)-(3), при $\alpha=1$.

Рассмотрим спектральную задачу

$$K\omega(z)=\frac{\partial\omega(z)}{\partial\overline{z}}=\lambda\omega(z), \qquad |z|<1 \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$\operatorname{Re}\omega(z)=\operatorname{Re}\alpha\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}\frac{d\xi}{\xi-z}\cdot\oint_{|\tau|=r<1}\frac{\lambda\cdot\omega(\tau)}{\tau-\xi}d\tau\right),\ |z|=1, \tag{2'}$$

$$\operatorname{Im}\omega(0)=\operatorname{Im}\alpha\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}\frac{d\xi}{\xi}\cdot\oint_{|\tau|=r<1}\frac{\lambda\cdot\omega(\tau)}{\tau-\xi}d\tau\right) \tag{3'}$$

где $\lambda-$ спектральный параметр. Если $\alpha=1$, тогда получим результаты из работы [29], а если $\alpha=0$, тогда требуется дополнительное исследование.

Целью работы является исследования спектра эллиптических операторов, в частности, задачи (1)- (3’).

Имеет место следующая теорема

▼**Теорема 6.** Решение задачи на собственные значение дифференциального оператора Коши-Римана (1)-(3’) определяется по формуле

$$\omega(z)=\frac{e^{\lambda\overline{z}}}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}u(\xi)\frac{\xi+z}{\xi-z}\cdot\frac{d\xi}{\xi}+iCe^{\lambda\overline{z}}+u(z)e^{\lambda\overline{z}},$$

причем для вещественной функции $u(z)$ на окружности $|z|=1$ справедливо следующее сингулярное интегральное уравнение

$$a(z)u(z)-\frac{b(z)}{\pi i}\oint_{|\xi|=1}\frac{u(\xi)}{\xi-z}d\xi+\oint_{|\xi|=1}H(z,\xi)u(\xi)d\xi=0,\ |z|=1$$

где

$$a(z)=e^{\lambda\bar{z}}+e^{\bar{\lambda}z},\ \ b(z)=e^{\lambda\bar{z}}-e^{\bar{\lambda}z},$$

$$H(z,\xi)=\left(i(e^{\lambda\bar{z}}-e^{\bar{\lambda}z})\right)$$

$H(z,\xi)$ – непрерывное ядро.

Константа C из общего решения представим в виде

$$C=\operatorname{Im}(0)=\operatorname{Im}\left\{\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}u(\xi)\frac{d\xi}{\xi}+iC+u(0)\right\}=0$$

.

$$\operatorname{Im}(0)=C=0$$

Рассматривается задача на собственные значение оператора Коши-Римана с однородными краевыми условиями типа Дирихле

$$\frac{\partial\omega(z)}{\partial\bar{z}}=\lambda\omega(z),\ \ |z|<1, \tag{1}$$

$$\operatorname{Re}\omega(z)=0,\ \ |z|=1, \tag{2''}$$

$$\operatorname{Im}\omega(0)=0\ . \tag{3''}$$

Имеет место следующая

▼ **Теорема 7.** Решение задачи (1)-(3’’) определяется по формуле

$$\omega(z)=\frac{e^{-\lambda\bar{z}}}{2\pi i}\oint_{|t|=1}u(t)\frac{t+z}{t-z}\cdot\frac{dt}{t}+iCe^{-\lambda\bar{z}}+u(z)e^{-\lambda\bar{z}},$$

причем вещественная функция u(z) является решением интегрального уравнения

$$(e^{-\lambda\bar{z}}+e^{-\bar{\lambda}z})u(z)+\frac{(e^{-\lambda\bar{z}}-e^{-\bar{\lambda}z})}{2\pi i}\oint_{|t|=1}\frac{u(t)}{t-z}dt=0 \tag{6}$$

на окружности $|z|=1$, индекс æ которого равен нулю, константа C определяется из общего решения $\operatorname{Im}\omega(0)=C=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{u(t)}{t}dt, |t|=1$, при $z=0$, где

$$a(z)=e^{-\lambda\bar{z}}+e^{-\bar{\lambda}z},\ \ b(z)=e^{-\lambda\bar{z}}-e^{-\bar{\lambda}z}.$$

Исходя из выше написанного исследуется вопрос непрерывности интеграла типа Коши

$$W(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(t)}{t-z}d\psi(t) \tag{7}$$

вплоть до границы, где γ– замкнутая жорданова спрямляемая кривая, $f\in C_{\gamma}$ - пространство непрерывных на γ функций, $\varphi(t)$- непрерывная функция ограниченной вариации на γ.

Пусть H – пространство голоморфных функции в C\γ. Обозначим символом $E=E(H)$ класс всех функций $g\in H$, представимых в виде интеграла

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{d\psi(t)}{t-z}.$$

Обозначим через $g^{+}(\xi), g^{-}(\xi)$ соответственно предельные значения голоморфной функции $g(z)$ изнутри и извне кривой γ.

Введем следующие характеристики кривой γ

$$\tau^{\psi}(\delta)=\sup_{\xi\in\gamma}\int_{\gamma_{\delta}(\xi)}|d\psi(t)|, \gamma_{\delta}(\xi)=\{t\in\gamma:|\xi-t|\le\delta\},$$

$$\delta\in(0,d], d=\sup_{\xi,t\in\gamma}|\xi-t|$$

Если $\psi(t)\equiv t,$ то $\tau^{\psi}(\delta)=\tau(\delta),(def),$ где $\tau(\delta)$- характеристики кривой. Обозначим через M_{γ}-множество всех функций ограниченной вариации на γ, для которых $\left|\oint_{\gamma/\gamma_{\delta}(\xi)}\frac{d\psi(t)}{|t-z|}\right|$ равномерно ограничен.

Для непрерывной на γ функции f введём характеристику – модуль непрерывности f

$$\omega_f(\delta) = \delta \sup_{\theta \ge \delta} \frac{1}{\theta} \max_{|\xi - t|} |f(t) - f(\xi)|, \delta \in (0, d].$$

При некоторых предположениях относительно f и контура существует достаточные условия непрерывности интеграла (7) вплоть до границы.

Если $f \in C_\gamma, \psi \in M, \tau^\psi(\delta) \approx \delta$, то

$$|Z(f, \xi, z, \psi)| \le C_\gamma \rho(z, \gamma) \int_{\rho(z,\gamma)}^{d} \frac{\omega_f(\eta)}{\eta^2} d\eta,$$

где $C > 0$ зависит лишь от γ.

1 ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА КОШИ – РИМАНА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ, СВЯЗАННОЕ С ЛИНЕЙНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА.

1.1 Об операторах, порождаемых операцией Коши-Римана

В функциональном пространстве $C(|z|\le 1)$ рассмотрим операторы K, порождаемые дифференциальной операцией Коши-Римана

$$K\omega(z)=\frac{\partial\omega(z)}{\partial\bar{z}}, \tag{1.1.1}$$

где $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$, $\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}+i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ на множестве

$$D(K)\subset\left\{\omega(z)\in C(|z|\le 1),\frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}}\in C(|z|<1)\right\}.$$

Считаем, что оператор K имеет непустое резольвентное множество $\rho(K)$ Не умоляя общности, предполагаем, что

$$0\in\rho(K) \tag{1.1.2}$$

т.е. существует ограниченный оператор K^{-1}. В следующей теореме полностью описано множество операторов $\{K\}$ со свойством (1.1.2).

▼ **Теорема 1.** Для каждого линейного оператора K с условием (1.1.2) найдется ограниченный оператор G, переводящий непрерывные в круге $|z|\le 1$ функции в голоморфные, у которых мнимые части при $z=0$ равны нулю, а также ограниченный функционал $S(f)$ на множестве непрерывных функций в круге $|z|\le 1$, которые однозначно определяют область определения оператора K по формуле:

$$D(K)=\left\{\omega(z)\in C(|z|\le 1),\frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}}\in C(|z|<1)\right.$$

$$\operatorname{Re}\ \omega\ (z)=\operatorname{Re}G\ \left(\frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}}\right),\quad |z|=1$$

$$\left.\operatorname{Im}\ \omega\ (z) = \operatorname{Im} S\left(\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}}\right), \quad z = 0\right\}$$

Обратно, пара G и S определяют K, для которого верно (1.1.2).

Доказательство. В работе [17] имеются некоторые неточности. Здесь мы их уточняем в правильную сторону. Известно ([2], стр. 151), что краевая задача

$$\frac{\partial \omega(z)}{\partial \bar{z}} = f(z), \ \ |z|<1,$$

$$\operatorname{Re}\omega(z)\Big|_{|z|=1} = g(z),$$

$$\operatorname{Im}\omega(0) = C$$

имеет единственное решение $\omega(z)$ при любом наборе

$$f(z) \in C(|z|<1),\ \mathrm{g}(z) \in C(|z|=1), C \in R.$$

Больше того, это решение дается формулой Шварца

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1} g(z)\frac{t+z}{t-z}\cdot\frac{dt}{t} + iC + L_{\Phi}^{-1} f(z), \tag{1.1.3}$$

где $\omega_{\Phi}(z) = L_{\Phi}^{-1} f(z)$ является решением однородной краевой задачи для неоднородного уравнения

$$\frac{\partial \omega_{\Phi}(z)}{\partial \bar{z}} = f(z), \ \ |z|<1,$$

с однородными краевыми условиями:

$$\operatorname{Re}\omega_{\Phi}(z)\Big|_{|z|=1} = 0, \ \ \operatorname{Im}\ \omega_{\Phi}(0) = 0.$$

Пусть оператор K задается соотношением (1.1.1). Допустим выполняется условие (1.1.2), что означает существование ограниченного обратного оператора K^{-1}. Следовательно, операторное уравнение $K\omega(z) = f(z)$ имеет единственное решение

$$\omega(z) = K^{-1} f(z). \tag{1.1.4}$$

Обозначим реальную часть решения $\omega(z)$ на окружности $|z|=1$ через $g(z)$ а мнимую часть значения решения $\omega(z)$ при $z=0$ через C. Тогда, согласно формуле (1.1.3), левую часть соотношения (1.1.4) запишем в виде

$$\omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1} g(z)\frac{t+z}{t-z}\cdot\frac{dt}{t}+iC+L_{\Phi}^{-1}f(z).$$

Поскольку операторы L_{Φ}^{-1} и K^{-1} ограничены, то разность $K^{-1}-L_{\Phi}^{-1}$ представляет собой ограниченный оператор, переводящий функции из $C(|z|\le 1)$ в голоморфные функции на $|z|<1$. Введем оператор по формуле $g(z)=Gf\equiv \operatorname{Re}\omega(z)\big|_{|z|=1}$, а также функционал $C=S(f)\equiv \operatorname{Im}\omega(0)\big|_{z=0}$, где $\omega(z)$ определяется по формуле (1.1.4).

Из теоремы 1 ([18], стр. 39) следуют свойства оператора T_G В частности, функция $\omega_0(z)=T_0 f\equiv\dfrac{-1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\dfrac{f(\zeta)d\xi d\eta}{\zeta-z}$, когда $f\in C(|z|\le 1)$, является непрерывной ограниченной на всей комплексной плоскости. Нетрудно понять, что

$$L_{\Phi}^{-1}f=T_G f+Af+iDf,$$

где

$$Af=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\overline{(T_G f)(\xi)}}{\xi-z}d\xi,$$

$$2iDf=-(T_G f)(0)-(Af)(0)+\overline{(T_G f)(0)}+\overline{(Af)(0)}.$$

В силу вышеуказанной теоремы 1 из [18] следует оценка $\left\|L_{\Phi}^{-1}f\right\|\le const\,\|f\|$ Поэтому для оператора

$$(K^{-1}-L_{\Phi}^{-1})f=\text{Ш}Gf+iS(f), \tag{1.1.5}$$

где Ш – оператор Шварца из формулы (1.1.4), справедлива оценка $\|\text{Ш}Gf+iS(f)\|\le\|f\|\cdot const$, для произвольного элемента $f\in C(|z|\le 1)$. Отсюда видно, что $S(f)$ ограниченный функционал. Поскольку оператор Шварца подчинен неравенству $\|\text{Ш}h\|\le\|h\|\cdot const$ для элементов $h\in C(|z|\le 1)$.

В данном случае роль h играет Gf, следовательно, оператор G также ограничен. Итак, оператор G ограничен, точно также как и функционал S. Отсюда получим, что $\omega(z) = K^{-1} f$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} = f, \quad |z| < 1$$

и краевыми условиями

$$\operatorname{Re} \omega(z)\Big|_{|z|=1} = G(f(z)),$$

$$\operatorname{Im} \omega(z)\Big|_{|z|=0} = S(f).$$

Обратное проверяется непосредственно, что завершает доказательство теоремы 1.

С другой точки зрения неоднородная система Коши-Римана и ее обобщения изучались И.Н.Векуа [18], Н.К.Блиевым [19] и другими. В их работах достаточно подробно исследовались обобщенная задача Римана-Гильберта, задача сопряжения.

Вышеуказано семейство операторов K**,** обладающих свойством (1.1.1) и порождаемые операцией Коши-Римана. Теперь рассмотрим задачу на собственные значения для операторов вида K.

Постановка задачи. Найти те комплексные значения $\lambda \in C$ – множество комплексных чисел, при которых операторное уравнение

$$K\omega(z) = \lambda\omega(z), \quad |z| < 1$$

имеет ненулевые решения.

В дальнейшем будем писать $K(G,S)$ вместо K, подчеркивая зависимость K от граничного оператора G и функционала $S(f)$. Отметим, что даже в случае линейности оператора K соответствующие им граничный оператор G и граничный функционал $S(f)$ не являются линейными над полем комплексных чисел, так как Gf и $S(f)$ принимают при фиксированом z только вещественные значения. Однако оператор $Шf + iS$ является линейным, если таков оператор K. Обозначим $Шf + iS$ через N и будем писать $K(N)$ вместо оператора K. В качестве примера возьмем N по формуле

$$(NF)(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{|\xi|=1} \frac{f^{p}(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad 0 < p - \text{целое.}$$

Тогда оператор K_1 соответствует задаче:

$$K_1\omega \equiv \frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}} = f(z)\,,\ \ |z|<1;$$

$$\operatorname{Re}\omega(z) = \operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{|\xi|=1}\frac{f^p(\xi)}{\xi - z}d\xi\,,\ \ |z|=1;$$

$$\operatorname{Im}\omega(0) = \operatorname{Im}\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{|\xi|=1}\frac{f^p(\xi)}{\xi}d\xi\,.$$

В данной работе мы рассмотрим случай p=1. Другой пример оператора K_2 получим, если определим оператор N соотношением

$$(Nf)(z) = \left(\widetilde{N}(T_G f)\Big|_I\right)\cdot(z),$$

где $\widetilde{N}$ – ограниченный оператор, переводящий непрерывные функции на некотором замкнутом множестве I в голоморфные функции в круге $|z|<1$. В данном случае оператор K_2 соответствует задаче

$$K_2\omega \equiv \frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}} = f(z),\ \ |z|<1;$$

$$\operatorname{Re}\omega(z) = \operatorname{Re}\left(\widetilde{N}(\omega\Big|_I + \Pi u\,\Big|_I)\right)\cdot(z),\ \ |z|=1;$$

$$\operatorname{Im}\omega(0) = \operatorname{Im}\left(\widetilde{N}(\omega\Big|_I + \Pi u\,\Big|_I)\right)\cdot(0).$$

где $(\Pi u)(\xi) = -\dfrac{1}{2\pi i}\cdot\displaystyle\int\limits_{|\eta|=1}\frac{u(\eta)}{\eta-\xi}d\eta$, $\omega\big|_I$ – сужение $\omega(z)$ на множестве I. Оператор K_2, связанный с кривой I из внутренности единичного круга, называется оператором с краевыми условиями типа Бицадзе - Самарского.

Задача требует исследования спектра эллиптических операторов. Наиболее глубокие результаты в этой проблематике имеются в работах украинских математиков [20]. В общем случае спектр эллиптического оператора существенно определяется спектральными свойствами граничного оператора N. Однако выяснение зависимости спектра оператора K в исходных терминах граничных условий представляет актуальную (нерешенную) проблему. Из общих результатов подобные факты не прослеживаются, поэтому приходится привлекать более глубокие методы, связанные со спецификой конкретных краевых условий.

1.2 Редукция задачи для оператора K_1 к сингулярному интегральному уравнению

Учитывая предыдущие результаты, операторное уравнение

$$K_1\omega(z)=\lambda\omega(z),\ \ |z|<1$$

перепишем в виде

$$\frac{\partial\omega}{\partial z}=\lambda\omega(z),\ \ |z|<1, \tag{1}$$

$$\operatorname{Re}\omega(z)=\operatorname{Re}\alpha\left[\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{|\xi|=1}\frac{\lambda\omega(\xi)}{\xi-z}d\xi\right],\ \ |z|=1, \tag{2}$$

$$\operatorname{Im}\omega(z)=\operatorname{Im}\alpha\left[\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{|\xi|=1}\frac{\lambda\omega(\xi)}{\xi-z}d\xi\right]. \tag{3}$$

В работах [40-41] полностью исследовались случай, где $\alpha=1$, которое в настоящем подразделе нами будет изложены результаты данных работ.

Общее решение дифференциального уравнения в частных производных имеет вид

$$\omega(z)=\Phi(z)\cdot e^{\lambda\bar{z}}, \tag{1.2.1}$$

где $\Phi(z)$ голоморфная в круге $|z|<1$ функция. Действительно, умножим обе части (1.2.1) на $e^{-\lambda\bar{z}}$, тогда

$$e^{-\lambda\bar{z}}\frac{\partial\omega(z)}{\partial\bar{z}}-\lambda e^{-\lambda\bar{z}}\omega(z)=0.$$

Так как $\dfrac{\partial e^{-\lambda\bar{z}}}{\partial\bar{z}}=-\lambda e^{-\lambda\bar{z}}$, имеем равенство $\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(e^{-\lambda\bar{z}}\omega(z)\right)=0$.

Отсюда следует, что произведение $e^{-\lambda\bar{z}}\omega(z)$ является голоморфной функцией в $|z|<1$. Функция $\Phi(z)$ выражается по формуле Шварца через реальную часть следующим образом

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{|t|=1}u(t)\frac{t+z}{t-z}\cdot\frac{dt}{t}+iC,$$

где $u(t)=\mathrm{Re}\Phi(t)$, $C=\mathrm{Im}\Phi(0)$. Вследствие чего формула (1.2.1) примет вид

$$\omega(z)=\frac{e^{\lambda\bar{z}}}{2\pi i}\cdot\int\limits_{|t|=1}u(t)\frac{t+z}{t-z}\cdot\frac{dt}{t}+iCe^{\lambda\bar{z}},\ \ |z|<1.$$

▼ **Теорема 2.** Пусть

$$a(z)=\frac{1}{2}\left[(\lambda-2)\cdot e^{\lambda\bar{z}}+(\bar{\lambda}-2)\cdot e^{\bar{\lambda}z}\right],$$

$$b(z)=\frac{1}{2}\left[(2-\lambda)\cdot e^{\lambda\bar{z}}+(2-\bar{\lambda})\cdot e^{\bar{\lambda}z}\right],$$

$$T(z,t)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{t}\left[e^{\lambda\bar{z}}-e^{\bar{\lambda}z}-\lambda-\bar{\lambda}+\frac{1}{t-z}\cdot\left(\lambda t\cdot e^{\lambda\bar{t}}-\bar{\lambda}z\cdot e^{\bar{\lambda}t}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\cdot\frac{t+z}{t-z}\frac{1}{t-z}\cdot\left(\lambda e^{\lambda\bar{z}}-\bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}z}\right)\right]+\left(e^{\lambda\bar{t}}-e^{\bar{\lambda}z}\right)\cdot\frac{\lambda t}{t-z}+\bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}z}-$$

$$-\frac{1}{t-z}\left(e^{\bar{\lambda}t}-e^{\bar{\lambda}z}\right)\cdot\bar{\lambda}z-\frac{i}{4\pi(1-\mathrm{Re}\lambda)}\cdot\left(\frac{e^{\bar{\lambda}z}-e^{\lambda\bar{z}}+\bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}z}}{2-\lambda e^{\lambda\bar{z}}+\lambda-\bar{\lambda}}\right)\cdot\frac{1}{t}\times$$

$$\times\left(2\bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}t}+2\lambda e^{\lambda\bar{t}}-3\lambda-3\bar{\lambda}\right).$$

Тогда для вещественной функции $u(z)$ на окружности $|z|=1$ справедливо следующее сингулярное интегральное уравнение

$$a(z)\cdot u(z)-\frac{b(z)}{\pi i}\cdot\int\limits_{|t|=1}\frac{u(t)}{t-z}dt+\int\limits_{|t|=1}T(z,t)\cdot u(t)dt=0,$$

где $T(z,t)$ – непрерывное ядро. При $\mathrm{Re}\lambda\neq 1$ константа C из общего решения представима в виде

$$C=-\frac{1}{4\pi(1-\mathrm{Re}\lambda)}\cdot\int u(t)\cdot\left(2\overline{\lambda}e^{\overline{\lambda}t}+2\lambda e^{\lambda\bar{t}}-3\lambda-3\overline{\lambda}\right)\cdot\frac{dt}{t}.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы общее решение уравнения (1) подставляем в граничное условие (2). Используя формулу Сохоцкого-Племеля ([17], с.55), найдем граничные значения решения $|z|=1$.

$$\omega(z)=\frac{e^{\lambda\bar{z}}}{2\pi i}\cdot\int_{|t|=1}u(t)\frac{t+z}{t-z}\cdot\frac{dt}{t}+iCe^{\lambda\bar{z}}+u(z)\cdot e^{\lambda\bar{z}}.$$

Тогда

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{\lambda\bar{z}}}{2\pi i}\cdot\int_{|t|=1}u(t)\frac{t+z}{t-z}\cdot\frac{dt}{t}+iCe^{\lambda\bar{z}}+u(z)e^{\lambda\bar{z}}\right\}=$$

$$=\mathrm{Re}\left\{\frac{\lambda}{2\pi i}\cdot\int_{|t|=1}\frac{e^{\lambda\bar{z}}}{t-z}\cdot\frac{dt}{2\pi i}\cdot\int_{|\theta|=1}\frac{\theta+t}{\theta-t}\cdot\frac{d\theta}{\theta}+\frac{i\lambda C}{2\pi i}\cdot\int_{|t|=1}\frac{e^{\lambda\bar{t}}}{t-z}dt+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda}{2\pi i}\cdot\int_{|t|=1}\frac{e^{\lambda\bar{t}}u(t)}{t-z}dt\right\}. \qquad (1.2.2)$$

По формуле перестановки Пуанкаре-Бертрана ([17], с.102)

$$\int_L\frac{dt}{t-t_0}\cdot\int_L\frac{\varphi(t,t_1)}{t_1-t}dt_1=-\pi^2\varphi(t_0,t_0)+\int_L dt_1\cdot\int_L\frac{\varphi(t,t_1)dt}{(t-t_0)\cdot(t_1-t)},$$

где $t_0,t_1\in L$, в повторном интеграле (1.2.2)

$$I=\lambda\oint_{|t|=1}\frac{dt}{t-z}e^{\lambda\bar{t}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{|\theta|=1}u(\theta)\frac{\theta+t}{\theta-t}\cdot\frac{d\theta}{\theta}$$

изменим порядок интегрирования

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{\lambda\bar{z}}}{2\pi i}\cdot\int_{|t|=1}u(t)\frac{t+z}{t-z}\cdot\frac{dt}{t}+iCe^{\lambda\bar{z}}+u(z)e^{\lambda\bar{z}}\right\}=$$

$$= \operatorname{Re}\left\{\frac{-\lambda\pi^2}{(2\pi i)^2}e^{\lambda\bar{z}}\cdot u(z)\frac{2z}{z}+\frac{\lambda}{2\pi i}\cdot\int_{|\theta|=1}u(\theta)\frac{d\theta}{\theta}\cdot\int_{|t|=1}\frac{e^{\lambda\bar{t}}(\theta+t)}{2\pi i\,(t-z)\cdot(\theta-t)}dt+\right.$$

$$\left.+\frac{i\lambda C}{2\pi i}\cdot\int_{|t|=1}\frac{e^{\lambda\bar{t}}}{(t-z)}dt+\frac{\lambda}{2\pi i}\cdot\int_{|t|=1}\frac{e^{\lambda\bar{t}}u(t)}{t-z}dt\right\}. \qquad (1.2.3)$$

Как известно ([21], с.145), если аналитическая функция $f(z)$ в точке $z=a$ имеет изолированную особую точку (устранимую, существенную, полюс), то коэффициент при степени $(z-a)^{-1}$ в разложении $f(z)$ в ряд Лорана называют в ы ч е т о м аналитической функции $f(z)$ относительно точки a и обозначают $\underset{a}{res}\, f(z)$. Если $a\neq\infty$, то $\underset{z=a}{res}\, f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}f(\xi)d\xi=c_{-1}$, если $a=\infty$, то $\underset{z=a}{res}\, f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}f(\xi)d\xi=-c_{-1}$, причем Г – любая замкнутая гладкая кривая Жордана, охватывающая точку $z=a$ (только a), которая обходится против часовой стрелки в первом $(a\neq\infty)$ и в противоположном направлении – во втором случае (т.е. при $a=\infty$).

▼ **Теорема о вычетах.** Если $f(z)$ – аналитическая функция в области D, за исключением конечного числа точек $a_1,a_2,...,a_k$ и Г – замкнутая кусочно-гладкая кривая, охватывающая особые точки a_j $(j=1,...,k)$ и лежащая целиком в области D, то

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}f(\xi)d\xi=\sum_{j=1}^{k}\underset{z=a_j}{res}\, f(z).$$

Интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{e^{\lambda\bar{t}}(\theta+t)}{(t-z)\cdot(\theta-t)}dt$ в силу очевидного равенства

$$\frac{\theta+t}{\theta-t}\cdot\frac{1}{t-z}=\frac{2\theta}{\theta-t}\cdot\frac{1}{\theta-t}+\frac{\theta+t}{\theta-t}\cdot\frac{1}{t-z},$$

запишем в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}e^{\lambda\bar{t}}\frac{\theta+t}{\theta-t}\cdot\frac{1}{t-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}e^{\lambda\bar{t}}\left(\frac{2\theta}{\theta-t}\cdot\frac{1}{\theta-t}+\frac{\theta+t}{\theta-t}\cdot\frac{1}{t-z}\right)dt. \qquad (1.2.4)$$

Так как на единичной окружности $t \cdot \bar{t} = 1$, то из равенства (1.2.4) заметим, точка $t = 0$ является существенно особой точкой, а $t = z$ и $t = \theta$ – полюсами 1-го порядка функции $f(t) = e^{\lambda/t} \dfrac{\theta + t}{(\theta - t) \cdot (t - z)}$. На основе определения вычета имеем, что

$$\operatorname*{res}_{t=0} \frac{e^{\lambda/t}}{t - A} = 1 - e^{\lambda/A}. \tag{1.2.5}$$

Действительно, $e^{\lambda/t}$ имеет существенно особую точку при $t = 0$ и ее разложение в ряд Лорана в окрестности этой точки имеет вид

$$e^{\lambda/t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n! t^n},$$

а при $|t| < |A|$ имеет место следующее разложение

$$\frac{1}{t - A} = \frac{-1}{A - t} = \frac{-1}{A} - \frac{t}{A^2} - \frac{t^2}{A^3} - \frac{t^3}{A^4} - \ldots = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{A^{n+1}},$$

то отсюда следует, что

$$\frac{e^{\lambda/t}}{t - A} = \left(1 + \frac{\lambda}{1! t} + \frac{\lambda^2}{2! t^2} + \frac{\lambda^3}{3! t^3} + \ldots\right) \cdot \left(-\frac{1}{A} - \frac{t}{A^2} - \frac{t^2}{A^3} - \frac{t^3}{A^4} - \ldots\right) =$$

$$= -\frac{\lambda}{1! A} \cdot \frac{1}{t} - \frac{\lambda^2}{2! A} \cdot \frac{1}{t^2} - \frac{\lambda^3}{3! A} \cdot \frac{1}{t^3} - \ldots - \frac{t}{A^2} - \frac{\lambda}{1! A^2} \cdot \frac{t}{t} - \frac{\lambda^2}{2! A^2} \cdot \frac{t}{t^2} - \frac{\lambda^3}{3! A^2} \cdot \frac{t}{t^2 t} - \ldots -$$

$$- \frac{t^2}{A^3} - \frac{\lambda}{1! A^3} \cdot \frac{t^2}{t} - \frac{\lambda^2}{2! A^3} \cdot \frac{t^2}{t^2} - \frac{\lambda^3}{3! A^3} \cdot \frac{t^2}{t^2 t} - \ldots - \frac{t^3}{A^4} - \frac{\lambda}{1! A^4} \cdot \frac{t \cdot t^2}{t} -$$

$$- \frac{\lambda^2}{2! A^4} \cdot \frac{t^2 t}{t^2} - \frac{\lambda^3}{3! A^4} \cdot \frac{t^3}{t^3} - \frac{\lambda^4}{4! A^4} \cdot \frac{t^3}{t^3 t} - \ldots .$$

Из последнего получим

$$\underset{t=0}{res}\,\frac{e^{\lambda/t}}{t-A}=-\frac{\lambda}{A}-\frac{\lambda^2}{2!A^2}-\frac{\lambda^3}{3!A^3}-\frac{\lambda^4}{4!A^4}-...-e^{\lambda/A}+1$$

Теперь представляя (1.2.7) в виде

$$\frac{2\theta}{\theta-z}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}e^{\lambda\bar{t}}\,\frac{1}{\theta-t}dt+\frac{\theta+t}{\theta-t}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}e^{\lambda\bar{t}}\,\frac{1}{t-z}dt\,. \qquad (1.2.6)$$

вычислим сумму этих интегралов на основании теоремы о вычетах. По формуле (1.2.5) вычислим вычет в существенной особой точке $t=0$

$$\underset{t=0}{res}\left[\frac{2\theta}{\theta-z}\cdot\frac{e^{\lambda\bar{t}}}{\theta-t}+\frac{\theta+z}{\theta-z}\cdot\frac{e^{\lambda\bar{t}}}{t-z}\right]=-\frac{2\theta}{\theta-z}\cdot(1-e^{\lambda\theta})+\frac{\theta+z}{\theta-z}\cdot(1-e^{\lambda\bar{z}})\,.(1.2.7)$$

Точка $t=\theta$ и $t=z$ являются полюсами 1-го порядка, то

$$\frac{1}{2}\underset{t=\theta}{res}\left[\frac{2\theta}{\theta-z}\cdot\frac{e^{\lambda\bar{t}}}{\theta-t}+\frac{\theta+z}{\theta-z}\cdot\frac{e^{\lambda\bar{t}}}{t-z}\right]=-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\lambda\bar{\theta}}2\theta}{\theta-z}, \qquad (1.2.8)$$

$$\frac{1}{2}\underset{t=z}{res}\left[\frac{2\theta}{\theta-z}\cdot\frac{e^{\lambda\bar{t}}}{\theta-t}+\frac{\theta+z}{\theta-z}\cdot\frac{e^{\lambda\bar{t}}}{t-z}\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{\theta+z}{\theta-z}e^{\lambda\bar{z}}, \qquad (1.2.9)$$

Таким образом, используя найденные вычеты, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}e^{\lambda\bar{t}}\,\frac{\theta+t}{\theta-t}\cdot\frac{1}{t-z}dt=\frac{\theta+z}{\theta-z}(1-e^{\lambda\bar{z}})-\frac{2\theta}{\theta-z}(1-e^{\lambda\bar{\theta}})-\frac{\theta}{\theta-z}e^{\lambda\bar{\theta}}+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\theta+z}{\theta-z}e^{\lambda\bar{z}}=-1+\frac{\theta}{\theta-z}e^{\lambda\bar{\theta}}-e^{\lambda\bar{z}}\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{\theta-z}\right).$$

Для интеграла $\frac{\lambda}{2\pi}C\cdot\oint\limits_{|t|=1}\frac{e^{\lambda\bar{t}}}{t-z}dt$ аналогично применяем вышеприведенную методику и получим

$$\frac{\lambda}{2\pi}C\cdot\oint\limits_{|t|=1}\frac{e^{\lambda\bar{t}}}{t-z}dt=\frac{\lambda}{2\pi}C\cdot(2\pi i-2\pi ie^{\lambda\bar{z}}+\pi ie^{\lambda\bar{z}})=\frac{C\lambda i}{2}(2-e^{\lambda\bar{z}})\,.$$

Подставляя полученные результаты в равенство (1.2.3), получим

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{\lambda\bar z}}{2\pi i}\cdot\int\limits_{|t|=1}u(t)\frac{t+z}{t-z}\cdot\frac{dt}{t}+iCe^{\lambda\bar z}+u(z)e^{\lambda\bar z}\right\}=$$

$$=\mathrm{Re}\left\{\lambda e^{\lambda\bar z}\cdot\frac{u(z)}{2}-\frac{\lambda}{2\pi i}\cdot\int\limits_{|t|=1}u(t)\frac{dt}{t}+\frac{\lambda}{2\pi i}\cdot\int\limits_{|t|=1}\frac{e^{\lambda\bar t}u(t)}{t-z}dt-\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda}{4\pi i}\cdot\int\limits_{|t|=1}e^{\lambda\bar z}u(t)\cdot[(t+z)/(t-z)]\frac{dt}{t}+i\lambda C+\frac{i\lambda Ce^{\lambda\bar z}}{2}+\frac{\lambda}{2\pi i}\cdot\int\limits_{|t|=1}\frac{e^{\lambda\bar t}u(t)}{t-z}dt\right\}\quad(1.2.10)$$

Распишем вещественную часть комплексного числа в виде полусуммы комплексного числа и его сопряженного, тогда приходим к соотношению при $|z|=1$:

$$\frac{\bar\lambda}{2\pi i}\cdot\int\limits_{|t|=1}e^{\bar\lambda t}u(t)\frac{-dt}{t^2}\cdot\frac{-tz}{t-z}+\frac{\lambda}{4\pi i}\cdot\int\limits_{|t|=1}e^{\lambda\bar z}u(t)\cdot[(t+z)/(t-z)]\cdot\frac{dt}{t}-$$

$$-\frac{\bar\lambda}{4\pi i}\cdot\int\limits_{|t|=1}e^{\bar\lambda z}u(t)\cdot[(t+z)/(t-z)]\cdot\frac{dt}{t}-i\lambda C+\bar\lambda iC+\frac{i\lambda Ce^{\lambda\bar z}}{2}-$$

$$-\frac{\bar\lambda iCe^{\bar\lambda z}}{2}+u(z)e^{\lambda\bar z}+u(z)e^{\bar\lambda z}+\frac{e^{\lambda\bar z}}{2\pi i}\cdot\int\limits_{|t|=1}u(t)\cdot[(t+z)/(t-z)]\cdot\frac{dt}{t}-$$

$$-\frac{e^{\bar\lambda z}}{2\pi i}\cdot\int\limits_{|t|=1}u(t)\cdot[(t+z)/(t-z)]\cdot\frac{dt}{t}+iCe^{\lambda\bar z}-iCe^{\bar\lambda z}=$$

$$=\lambda u(z)\cdot\frac{e^{\lambda\bar z}}{2}+\bar\lambda u(z)\cdot\frac{e^{\bar\lambda z}}{2}-\frac{\lambda}{2\pi i}\cdot\int\limits_{|t|=1}u(t)\cdot\frac{dt}{t}+\frac{\bar\lambda}{2\pi i}\cdot\int\limits_{|t|=1}u(t)\cdot t\cdot\frac{(-dt)}{t^2}+$$

$$+\frac{\lambda}{2\pi i}\cdot\int\limits_{|t|=1}e^{\lambda\bar t}\frac{u(t)}{t-z}dt+\frac{\lambda e^{\lambda\bar z}}{2\pi i}\cdot\int\limits_{|t|=1}\frac{u(t)}{t-z}dt+\frac{\lambda}{2\pi i}\cdot\int\limits_{|t|=1}\frac{u(t)(e^{\lambda\bar t}-e^{\lambda\bar z})}{t-z}dt-$$

$$-\frac{\bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}z}}{2\pi i}\cdot\int\limits_{|t|=1}\frac{u(t)}{z(t-z)}\frac{dt}{t}-\frac{\bar{\lambda}}{2\pi i}\cdot\int\limits_{|t|=1}\frac{u(t)(e^{\bar{\lambda}t}-e^{\bar{\lambda}z})}{z(t-z)}\frac{dt}{t}.$$

Последнее соотношение преобразуем к виду

$$\frac{e^{\lambda\bar{z}}}{\pi i}\cdot\oint\limits_{|t|=1}u(t)\cdot\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{2t}\right)dt-\frac{\lambda e^{\bar{\lambda}z}}{\pi i}\cdot\oint\limits_{|t|=1}u(t)\cdot\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{2t}\right)dt+iCe^{\lambda\bar{z}}-iCe^{\bar{\lambda}z}=$$

$$=\frac{\lambda}{2}e^{\lambda\bar{z}}u(z)+\frac{\bar{\lambda}}{2}e^{\bar{\lambda}z}u(z)-\frac{\lambda}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=1}u(t)\cdot\frac{dt}{t}-\frac{\bar{\lambda}}{2\pi i}\cdot\oint\limits_{|t|=1}u(t)\cdot\frac{dt}{t}+$$

$$+\frac{\lambda}{2\pi i}\cdot\oint\limits_{|t|=1}\frac{u(t)}{t-z}e^{\lambda\bar{z}}dt-\frac{\bar{\lambda}}{2\pi i}\cdot\oint\limits_{|t|=1}\frac{u(t)z}{t(t-z)}e^{\bar{\lambda}z}dt-\frac{\lambda}{4\pi i}\cdot\oint\limits_{|t|=1}u(t)\frac{t+z}{t-z}e^{\lambda\bar{z}}\frac{dt}{t}+$$

$$+\frac{\bar{\lambda}}{4\pi i}\cdot\oint\limits_{|t|=1}u(t)\frac{t+z}{t-z}e^{\bar{\lambda}z}\frac{dt}{t}+\lambda Ci-\bar{\lambda}Ci-\frac{\lambda}{2}Cie^{\lambda\bar{z}}+\frac{\bar{\lambda}}{2}Cie^{\bar{\lambda}z}-$$

$$-u(z)e^{\lambda\bar{z}}-u(z)e^{\bar{\lambda}z}+\frac{\lambda e^{\lambda\bar{z}}}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{u(t)}{t-z}dt-\frac{\bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}z}}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{u(t)}{t-z}dt+\frac{\bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}z}}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{u(t)}{t}dt+$$

$$+\frac{\lambda}{2\pi i}\cdot\int\limits_{|t|=1}\frac{u(t)(e^{\lambda\bar{t}}-e^{\lambda\bar{z}})}{t-z}dt-\frac{\bar{\lambda}}{2\pi i}\cdot\int\limits_{|t|=1}\frac{u(t)(e^{\lambda\bar{t}}-e^{\lambda\bar{z}})}{z(t-z)}\cdot\frac{dt}{t}.$$

Следовательно, имеем

$$\frac{e^{\lambda\bar{z}}}{\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{u(t)}{t-z}dt-\frac{e^{\lambda\bar{z}}}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}u(t)\frac{dt}{t}-\frac{e^{\bar{\lambda}z}}{\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{u(t)}{t-z}dt+\frac{e^{\bar{\lambda}z}}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}u(t)\frac{dt}{t}+$$

$$+iC(e^{\lambda\bar{z}}-\bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}z})=(\lambda e^{\lambda\bar{z}}+\bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}z})\cdot\frac{u(z)}{2}-\int\limits_{|t|=1}u(t)\cdot\left[\frac{\lambda}{2\pi it}+\frac{\bar{\lambda}}{2\pi it}\right]dt+$$

$$+\int\limits_{|t|=1}\frac{u(t)}{t-z}\cdot\left[\frac{\lambda e^{\lambda\bar{t}}}{2\pi i}-\frac{\bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}z}z}{2\pi it}\right]dt-u(z)(e^{\lambda\bar{z}}+e^{\bar{\lambda}z})+\frac{(\lambda e^{\lambda\bar{z}}-\bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}z})}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{u(t)}{t-z}dt-$$

$$-\int_{|t|=1} u(t)dt\left\{\frac{(t+z)e^{\lambda\bar z}}{4\pi i t(t-z} - \frac{\bar\lambda e^{\bar\lambda z}(t+z)}{4\pi i t(t-z}\right\} + \frac{\lambda}{2\pi i}\cdot\int_{|t|=1} u(t)(e^{\lambda\bar t} - e^{\lambda\bar z})\frac{dt}{t-z} +$$

$$+iC\left(\lambda-\bar\lambda-\frac{\lambda e^{\lambda\bar z}}{2}+\frac{\bar\lambda e^{\bar\lambda z}}{2}\right)+\frac{\bar\lambda e^{\bar\lambda z}}{2\pi i}\cdot\int_{|t|=1}u(t)\frac{dt}{t}-\frac{\bar\lambda}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{u(t)(e^{\bar\lambda z}-e^{\bar\lambda z})}{z(t-z)}\frac{dt}{t}.$$

Таким образом,

$$0=\left[(\lambda-2)\cdot e^{\lambda\bar z}+(\bar\lambda-2)\cdot e^{\bar\lambda z}\right]\cdot\frac{u(z)}{2}-\frac{e^{\lambda\bar z}(1-\lambda/2)}{\pi i}\int_{|t|=1}\frac{u(t)}{t-z}dt+$$

$$+\frac{e^{\bar\lambda z}(1-\bar\lambda/2)}{\pi i}\int_{|t|=1}\frac{u(t)}{t-z}dt+\oint_{|t|=1}u(t)\frac{\frac{1}{t}e^{\lambda\bar z}-\frac{1}{t}e^{\bar\lambda z}}{2\pi i}dt-$$

$$-\oint_{|t|=1}u(t)\cdot\left[\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{t}(\lambda+\bar\lambda)-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{t}\frac{1}{t-z}\cdot\left(\lambda e^{\lambda\bar t}-\bar\lambda e^{\bar\lambda z}\right)+\frac{\lambda\left(e^{\lambda\bar t}-e^{\lambda\bar z}\right)}{2\pi i(t-z)}+\frac{\bar\lambda e^{\bar\lambda z}}{2\pi i t}-\right.$$

$$\left.-\frac{\bar\lambda z\left(e^{\bar\lambda t}-e^{\bar\lambda z}\right)}{2\pi i(t-z)t}+\frac{1}{4\pi i}\frac{t+z}{t-z}\cdot\frac{1}{t}\left(\lambda e^{\lambda\bar z}-\bar\lambda e^{\bar\lambda z}\right)\right]+iC\left(\lambda-\bar\lambda-\frac{\lambda e^{\lambda\bar z}}{2}+\frac{\bar\lambda e^{\bar\lambda z}}{2}\right)-$$

$$-iC\left(e^{\lambda\bar z}-e^{\bar\lambda z}\right).$$

Выделяя сингулярную часть, запишем в канонической форме

$$\left[(\lambda-2)\cdot e^{\lambda\bar z}+(\bar\lambda-2)\cdot e^{\bar\lambda z}\right]\cdot\frac{u(z)}{2}-\frac{(2-\lambda)\,e^{\lambda\bar z}-(2-\bar\lambda)e^{\bar\lambda z}}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{u(t)}{t-z}dt+$$

$$+\int_{|t|=1}H(z,t)\cdot u(t)dt+iC\left(\lambda-\bar\lambda-e^{\lambda\bar z}+e^{\bar\lambda z}-\frac{\lambda e^{\lambda\bar z}}{2}+\frac{\bar\lambda e^{\bar\lambda z}}{2}\right)=0, \qquad (1.2.11)$$

где

$$H(z,t)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{t}\cdot\left[e^{\lambda\bar z}-e^{\bar\lambda z}-\lambda-\bar\lambda+\frac{1}{t-z}\left(\lambda t e^{\lambda\bar t}-\bar\lambda z e^{\bar\lambda t}\right)-\right.$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{t+z}{t-z}\cdot\left(\lambda e^{\lambda\bar{z}}-\bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}t}\right)+\left(e^{\lambda\bar{t}}-e^{\lambda\bar{z}}\right)\cdot\frac{\lambda t}{t-z}+\bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}z}-\left(e^{\bar{\lambda}t}-e^{\bar{\lambda}z}\right)\cdot\frac{\bar{\lambda}z}{t-z}\Bigg].$$

Использовав условие (1.2.3), исключим вещественную константу C. Тогда

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=1}\frac{u(t)}{t}dt+iC\right)=\operatorname{Im}\left(\frac{\lambda}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=1}\frac{dt}{t}\cdot\frac{e^{\lambda\bar{t}}}{2\pi i}\oint\limits_{|\theta|=1}u(\theta)\frac{\theta+t}{\theta-t}\frac{d\theta}{\theta}+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda}{2\pi i}iC\oint\limits_{|t|=1}\frac{dt}{t}\cdot e^{\lambda\bar{t}}+\frac{\lambda}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}u(t)e^{\lambda\bar{t}}\frac{dt}{t}\right).$$

Известно, что $\overline{\frac{dt}{t}}=-\frac{dt}{t}$. Значит, $\frac{dt}{t}$ есть чисто мнимое число. Учитывая, что $u(t)$ – вещественная функция, получим:

$$\operatorname{Im}\oint\limits_{|t|=1}\frac{1}{2\pi i}u(t)\frac{dt}{t}=0$$

.

Итак,

$$\operatorname{Im}iC=\operatorname{Im}\frac{\lambda}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=1}\frac{dt}{t}\cdot\frac{e^{\lambda\bar{t}}}{2\pi i}\cdot\oint\limits_{|\theta|=1}u(\theta)\frac{\theta+t}{\theta-t}\cdot\frac{d\theta}{\theta}+\operatorname{Im}\frac{\lambda}{2\pi}C\oint\limits_{|t|=1}\frac{dt}{t}\cdot e^{\lambda\bar{t}}+$$

$$+\operatorname{Im}\frac{\lambda}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}u(t)e^{\lambda\bar{t}}\frac{dt}{t}.$$

В интеграле $\operatorname{Im}\frac{\lambda i}{2\pi i}C\oint\limits_{|t|=1}\frac{dt}{t}\cdot e^{\lambda\bar{t}}$ для подынтегральной функции точка t=0 является существенно особой точкой, то

$$\operatorname{Im}\frac{\lambda i}{2\pi i}C\oint\limits_{|t|=1}\frac{dt}{t}\cdot e^{\lambda\bar{t}}=\operatorname{Im}\frac{\lambda i}{2\pi i}\cdot C\cdot 2\pi i\cdot 1=\operatorname{Re}\lambda C.$$

Отсюда

$$C = \operatorname{Im}\frac{\lambda}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=1}\frac{dt}{t}\cdot\frac{e^{\lambda\bar t}}{2\pi i}\cdot\oint\limits_{|\theta|=1}u(\theta)\frac{\theta+t}{\theta-t}\cdot\frac{d\theta}{\theta}+\operatorname{Re}\lambda C+\operatorname{Im}\frac{\lambda}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}u(t)e^{\lambda\bar t}\frac{dt}{t}.$$

Следовательно, для определения числа C получим равенство

$$C(1-\operatorname{Re}\lambda C)=\operatorname{Im}\frac{\lambda}{2\pi i}\cdot\int\limits_{|\theta|=1}\frac{u(\theta)}{2\pi i}\cdot\frac{d\theta}{\theta}\cdot\int\limits_{|t|=1}\frac{\theta+t}{\theta-t}\cdot e^{\lambda\bar t}\cdot\frac{dt}{t}+\operatorname{Im}\frac{\lambda}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}u(t)e^{\lambda\bar t}\frac{dt}{t}.$$

Теперь отдельно вычислим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{|t|=1}\frac{\theta+t}{\theta-t}\cdot e^{\lambda\bar t}\cdot\frac{dt}{t}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}e^{\lambda\bar t}\left[\frac{2}{\theta-t}-\frac{1}{t}\right]dt.$$

Здесь для подынтегральных функций $t=0$ – существенно особая точка, а $t=\theta$ – полюс 1-го порядка, тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{|t|=1}e^{\lambda\bar t}\cdot\frac{2}{\theta-t}dt-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{e^{\lambda\bar t}}{t}dt=-2\cdot(1-e^{\lambda\bar\theta})-e^{\lambda\bar\theta}-1=-3+e^{\lambda\bar\theta}.$$

Поэтому

$$\mathrm{C}(1-\operatorname{Re}\lambda)=\left[-\int\limits_{|\theta|=1}u(\theta)\cdot(2\bar\lambda\cdot e^{\lambda\bar\theta}-3\bar\lambda)\frac{d\theta}{\theta}-\int\limits_{|\theta|=1}u(\theta)\cdot(2\lambda\cdot e^{\lambda\bar\theta}-3\lambda)\frac{d\theta}{\theta}\right]\Big/(4\pi)=$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\cdot\int\limits_{|\theta|=1}u(\theta)\cdot(2\bar\lambda\cdot e^{\bar\lambda\theta}+2\lambda e^{\lambda\bar\theta}-3\bar\lambda-3\lambda)\frac{d\theta}{\theta}.$$

Отсюда при $\operatorname{Re}\lambda\neq 1$ получим

$$C=-\frac{1}{4\pi(1-\operatorname{Re}\lambda)}\cdot\int\limits_{|\theta|=1}u(\theta)\cdot(2\bar\lambda\cdot e^{\bar\lambda\theta}+2\lambda e^{\lambda\bar\theta}-3\bar\lambda-3\lambda)\frac{d\theta}{\theta}.$$

Подставляя это в равенство (1.2.11), имеем

$$\left[(\lambda-2)\cdot e^{\lambda\bar z}+(\bar\lambda-2)\cdot e^{\bar\lambda z}\right]\cdot\frac{u(z)}{2}-\frac{(2-\lambda)\,e^{\lambda\bar z}-(2-\bar\lambda)e^{\bar\lambda z}}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{u(t)}{t-z}dt+$$

$$+\int_{|t|=1} H(z,t)\cdot u(t)dt-\frac{i}{4\pi(1-\operatorname{Re}\lambda)}\cdot\left(\lambda-\overline{\lambda}-e^{\lambda\bar{z}}+e^{\overline{\lambda}z}-\frac{\lambda e^{\lambda\bar{z}}}{2}+\frac{\overline{\lambda}e^{\overline{\lambda}z}}{2}\right)\times$$

$$\times\int_{|\theta|=1} u(\theta)\cdot(2\overline{\lambda}\cdot e^{\overline{\lambda}\theta}+2\lambda e^{\lambda\bar{\theta}}-3\overline{\lambda}-3\lambda)\frac{d\theta}{\theta}=0.$$

Если в последнем равенстве введем обозначения:

$$a(z)=\frac{(\lambda-2)\cdot e^{\lambda\bar{z}}+(\overline{\lambda}-2)\cdot e^{\overline{\lambda}z}}{2};$$

$$b(z)=\frac{(2-\lambda)\,e^{\lambda\bar{z}}-(2-\overline{\lambda})e^{\overline{\lambda}z}}{2};$$

$$T(z,t)=H(z,t)-\frac{i}{4\pi(1-\operatorname{Re}\lambda)}\cdot\left(\lambda-\overline{\lambda}-e^{\lambda\bar{z}}+e^{\overline{\lambda}z}-\frac{\lambda e^{\lambda\bar{z}}}{2}+\frac{\overline{\lambda}e^{\overline{\lambda}z}}{2}\right)\times$$

$$\times\frac{(2\overline{\lambda}\cdot e^{\overline{\lambda}\theta}+2\lambda e^{\lambda\bar{\theta}}-3\overline{\lambda}-3\lambda)}{t},$$

то для вещественной функции $u(z)$ на окружности $|z|=1$ получим сингулярное интегральное уравнение

$$a(z)\cdot u(z)-\frac{b(z)}{\pi i}\cdot\oint_{|t|=1}\frac{u(t)}{t-z}dt+\oint_{|t|=1}T(z,t)\cdot u(t)dt=0. \qquad (1.2.12)$$

1.3 О регуляризации сингулярного интегрального уравнения

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение для функции $u(z)$ на $|z|=1$

$$a(z)\cdot u(z)-\frac{b(z)}{\pi i}\cdot\oint_{|t|=1}\frac{u(t)}{t-z}dt+\oint_{|t|=1}T(z,t)\cdot u(t)dt=0, \qquad (1.3.1)$$

полученное в предыдущем подразделе. Индексом ([17], стр. 161) этого уравнения называется целое число

$$æ = \frac{1}{2\pi i} \cdot \left[\ln \frac{a(z)+b(z)}{a(z)-b(z)} \right] \Bigg|_{|z|=1}, \qquad (1.3.2)$$

где $[\cdot]_\Gamma$ – означает приращение функции, заключенной в квадратные скобки, при обходе Г в положительном направлении.

Приведем теорему эквивалентности И.Н. Векуа ([17], стр. 189).

▼ **Теорема 3.** (И.Н. Векуа). Сингулярное интегральное уравнение (1.3.1) всегда эквивалентно (в определенном, указанном ниже смысле) некоторому уравнению Фредгольма, получаемому, исходя из данного, при помощи квадратур.

Рассмотрим отдельный случай.

I. æ≥0. Тогда существует оператор М, регуляризующий оператор (1.3.1) и такой, что однородное уравнение $M\omega(z)=0$ не имеет решений, отличных от нулевого. В качестве такого оператора можно взять, например, союзный оператор

$$M\omega(z) = a(z)\cdot\omega(z) + \frac{b(z)}{\pi i}\cdot \oint_{|t|=1} \frac{\omega(t)}{t-z}dt,$$

причем М имеет индекс, равный – æ ≤ 0, и поэтому при таком выборе М уравнение $M\omega(z)=0$ имеет лишь тривиальное решение $\omega = 0$. Тогда уравнение Фредгольма $M\omega(z)=0$, где $\omega(z)$– левая часть соотношения (1.3.1), эквивалентна исходному уравнению (1.3.1).

II. Пусть æ < 0. Тогда существует оператор М такой, что оператор К будет регуляризующим для М и что, кроме того, уравнение

$$M\psi = g, \qquad (1.3.3)$$

где ψ – новая неизвестная функция.

Тогда исходное уравнение (1.3.1) приводится к уравнению Фредгольма, которое получается из (1.3.1), если сделать подстановку (1.3.3). Полученное интегральное уравнение Фредгольма эквивалентно исходному в следующем смысле: исходное уравнение (1.3.1) и уравнение Фредгольма одновременно разрешимы или неразрешимы. Приведенная схема регуляризации будет осуществлена в следующих параграфах.

1.4 Вычисление индекса и нётеровость сингулярного интегрального уравнения

В сингулярном интегральном уравнении (1.3.1) подраздела 3

$$a(z)=\frac{(\lambda-2)\cdot e^{\lambda\bar{z}}+(\bar{\lambda}-2)\cdot e^{\bar{\lambda}z}}{2};\quad b(z)=\frac{(2-\lambda)\,e^{\lambda\bar{z}}-(2-\bar{\lambda})e^{\bar{\lambda}z}}{2}.$$

Нетёровость уравнения определяется неравенствами $a(z)\neq 0$ или $b(z)\neq 0$ при всех $|z|=1$.

Следовательно, нетёровость нарушается при выполнении

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda-2)\cdot e^{\lambda\bar{z}}+(\bar{\lambda}-2)\cdot e^{\bar{\lambda}z}=0,\\ (2-\lambda)\,e^{\lambda\bar{z}}-(2-\bar{\lambda})e^{\bar{\lambda}z}=0\end{array}\right\}\Rightarrow\lambda=2.$$

Таким образом, нетёровость гарантируется при $\lambda\neq 2$. В следующей теореме дается значение индекса, определяемое по формуле

$$æ=\frac{1}{2\pi i}\cdot\left[\ln\frac{a(z)+b(z)}{a(z)-b(z)}\right]\Bigg|_{|z|=1},$$

где $[\cdot]_{z=1}$ – означает приращение функции, заключенной в квадратные скобки, при обходе единичной окружности в положительном направлении.

▼ **Теорема 4.** Сингулярное интегральное уравнение для $u(t)$ нетёрово при условии, когда $\lambda\neq 2$, $\operatorname{Re}\lambda\neq 1$. Больше того, индекс нетёра

$æ=\dfrac{1}{\pi i}\cdot[\ln(a(z)+b(z))]\big|_{|z|=1}$ равен нулю при $\lambda\neq 2$, $\operatorname{Re}\lambda\neq 1$.

Поскольку выражения $a(z)+b(z)$ и $a(z)-b(z)$ комплексно сопряжены, следовательно, индекс æ выражается формулой

$$æ=\frac{1}{\pi i}\Delta_{|z|=1}\arg(a(z)+b(z)),$$

здесь Δ_Γ, $\arg f$ – приращение $\arg f$ вдоль Г, пробегаемом в положительном направлении.

Известно ([22], стр. 126), что $\arg(a(z)+b(z))=Arg\,(\bar{\lambda}-2)\cdot e^{\bar{\lambda}z}=\arg(\bar{\lambda}-2)+\operatorname{Im}\bar{\lambda}z$.

Здесь учтено, что $b(z)$– чисто мнимая, $a(z)$– вещественная функция. Пусть окружность $\Gamma=\{z:|z|=1\}$ обходится против часовой стрелки. Найдем индекс

$$æ=\frac{1}{\pi i}\Delta_\Gamma\arg(\bar{\lambda}-2)+\frac{1}{\pi}\Delta_\Gamma\operatorname{Im}\bar{\lambda}z.$$

Приращение $\arg(\bar{\lambda}-2)$ будет нулевым, поскольку величина $(\bar{\lambda}-2)$ не зависит от z. Для вычисления приращения мнимой части $\bar{\lambda}z$ заметим, что когда z делает один оборот против часовой стрелки вдоль единичной окружности, величина $\bar{\lambda}z$ совершает такой же оборот вдоль окружности радиуса $|\lambda|$. При этом мнимая часть $\bar{\lambda}z$ изменяется на вертикальном отрезке от $-|\lambda|$ до $|\lambda|$ дважды: один раз проходит от $-|\lambda|$ до $|\lambda|$ вверх, а затем совершает тот же путь в обратном направлении. Итак, приращение мнимой части величины $\bar{\lambda}z$ равно нулю, когда z делает один оборот вдоль единичной окружности. Следовательно, индекс æ сингулярного интегрального уравнения равен нулю.

1.5 Сведение к интегральному уравнению Фредгольма

Поскольку индекс æ=0, то исходное сингулярное интегральное уравнение эквивалентно интегральному уравнению Фредгольма [23]. В данном параграфе, согласно результатам подраздела 3, приведем исходное сингулярное интегральное уравнение к уравнению Фредгольма.

В теореме 2 из подраздела 2 введены следующие функции при $|z|=|t|=1$

$$2a(z)=(\lambda-2)\cdot e^{\lambda\bar{z}}+(\bar{\lambda}-2)\cdot e^{\bar{\lambda}z},$$

$$2b(z)=(2-\lambda)\,e^{\lambda\bar{z}}-(2-\bar{\lambda})e^{\bar{\lambda}z},$$

$$T(z,t)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{t}\cdot\left[\frac{e^{\lambda\bar{z}}-e^{\bar{\lambda}z}-\lambda-\bar{\lambda}+1}{t-z}\cdot(\lambda t e^{\lambda\bar{t}}-\bar{\lambda}z e^{\bar{\lambda}t})-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\cdot\frac{t+z}{t-z}\cdot(\lambda e^{\lambda\bar{z}}-\bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}z})\right]+e^{\lambda\bar{t}}\,\frac{\lambda t}{t-z}+\bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}z}-(e^{\bar{\lambda}t}-e^{\bar{\lambda}z})\cdot\bar{\lambda}z-$$

$$-\frac{i}{4\pi(1-\operatorname{Re}\lambda)}\cdot(e^{\lambda\bar{z}}-e^{\bar{\lambda}z}+\bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}z}/2-\lambda e^{\lambda\bar{z}}+\lambda-\bar{\lambda})\times$$

$$\times(2\bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}t}+2\lambda e^{\lambda\bar{t}}-3\lambda-3\bar{\lambda}).$$

Обозначим через

$$\psi(z)=a(z)\cdot u(z)-\frac{b(z)}{\pi i}\cdot\oint_{|t|=1}\frac{u(t)}{t-z}dt+\oint_{|t|=1}T(z,t)\cdot u(t)dt.$$

Рассмотрим выражение

$$M\psi(z)=a(z)\cdot\psi(z)+\frac{b(z)}{\pi i}\cdot\oint\limits_{|t|=1}\frac{\psi(t)}{t-z}dt\,,$$

которое на единичной окружности тождественно нуль, если $u(z)$ решение сингулярного интегрального уравнения из теоремы 1 подраздела 2. Преобразование выражения $M\psi$ осуществим с применением формулы Пуанкаре-Бертрана

$$M\psi(z)=a^2(z)\cdot u(z)-\frac{a(z)\cdot b(z)}{\pi i}\cdot\oint\limits_{|t|=1}\frac{u(t)}{t-z}dt+a(z)\oint\limits_{|t|=1}T(z,t)\cdot u(t)dt+$$

$$+\frac{b(z)}{\pi i}\cdot\oint\limits_{|t|=1}\frac{a(t)\cdot u(t)}{t-z}dt-\frac{b(z)}{\pi i}\cdot\oint\limits_{|t|=1}\frac{b(t)}{t-z}dt\cdot\frac{1}{\pi i}\cdot\oint\limits_{|\tau|=1}\frac{u(\tau)}{\tau-z}d\tau+\frac{b(z)}{\pi i}\cdot\oint\limits_{|t|=1}\frac{dt}{t-z}\times$$

$$\times\oint\limits_{|\tau|=1}T(t,\tau)\cdot u(\tau)d\tau=a^2(z)\cdot u(z)-\frac{a(z)\cdot b(z)}{\pi i}\cdot\oint\limits_{|t|=1}\frac{u(t)}{t-z}dt+\frac{a(z)\cdot b(z)}{\pi i}\times$$

$$\times\oint\limits_{|t|=1}\frac{u(t)}{t-z}dt+\frac{b(z)}{\pi i}\oint\limits_{|t|=1}\frac{a(t)-a(z)}{t-z}u(t)dt-b^2(z)u(z)+a(z)\oint\limits_{|t|=1}T(z,t)\cdot u(t)dt+$$

$$+\frac{b(z)}{\pi^2}\cdot\oint\limits_{|\tau|=1}u(\tau)d\tau\cdot\oint\limits_{|t|=1}\frac{b(t)}{(t-z)\cdot(\tau-t)}dt+\frac{b(z)}{\pi i}\cdot\oint\limits_{|\tau|=1}u(\tau)d\tau\oint\limits_{|t|=1}\frac{T(t,\tau)}{t-z}dt=$$

$$=(a^2(z)-b^2(z))\cdot u(z)+\oint\limits_{|t|=1}u(t)\cdot K(z,t)dt,$$

где

$$K(z,t)=\frac{b(z)\cdot a(t)-a(z)\cdot}{t-z}+\frac{b(z)}{\pi^2}\cdot\oint\limits_{|\tau|=1}\frac{b(\tau)}{(\tau-z)\cdot(t-\tau)}d\tau+$$

$$+\frac{b(z)}{\pi i}\cdot\oint\limits_{|\tau|=1}\frac{T(\tau,t)}{(\tau-z)}d\tau+a(z)\cdot T(z,t).$$

Следующие две леммы получаются непосредственным вычислением.

♦**Л е м м а 1.** Справедлива формула

$$\int\limits_{|\tau|=1} \frac{b(\tau)}{\tau - z} \cdot \frac{d\tau}{t-\tau} = \frac{\pi i \cdot (2-\lambda) \cdot (e^{\lambda/t} - e^{\lambda/z})}{t-z} + \frac{\pi i}{2} \cdot \frac{(2-\lambda)\cdot e^{\lambda/z} - (2-\bar{\lambda}) e^{\bar{\lambda} t})}{t-z},$$

когда $|z| = |t| = 1$.

Доказательство. Чтобы доказать лемму 1, вычислим два интеграла. Вычислим интеграл

$$\frac{1}{2}(2-\lambda) \oint\limits_{|\tau|=1} \frac{e^{\lambda/t}}{(\tau - z)\cdot(t-\tau)} d\tau = \frac{2-\lambda}{2} \oint\limits_{|\tau|=1} \frac{e^{\lambda/t}}{t-z} \cdot \left(\frac{1}{\tau - z} + \frac{1}{t-\tau} \right) d\tau =$$

$$= \frac{2-\lambda}{2(t-z)} \cdot \oint\limits_{|\tau|=1} \frac{e^{\lambda/\tau}}{t-z} d\tau + \frac{2-\lambda}{2(t-z)} \cdot \oint\limits_{|\tau|=1} \frac{e^{\lambda/\tau}}{t-\tau} d\tau = \frac{2-\lambda}{2(t-z)} \cdot \oint\limits_{|\tau|=1} \frac{e^{\lambda/\tau} - e^{\lambda/z}}{t-z} d\tau +$$

$$+ \frac{(2-\lambda)\cdot e^{\lambda/z}}{2(t-z)} \cdot \oint\limits_{|\tau|=1} \frac{d\tau}{\tau - z} + \frac{(2-\lambda)}{2(t-z)} \cdot \oint\limits_{|\tau|=1} \frac{e^{\lambda/\tau} - e^{\lambda/t}}{t-\tau} d\tau + \frac{(2-\lambda)\cdot e^{\lambda/t}}{2(t-z)} \cdot \oint\limits_{|\tau|=1} \frac{d\tau}{t-\tau}.$$

Заметим, что функции

$$f(\tau) = \frac{e^{\lambda/\tau} - e^{\lambda/z}}{\tau - z},\ g(\tau) = \frac{e^{\lambda/\tau} - e^{\lambda/t}}{t-\tau}$$

имеют существенно особую точку $\tau = 0$ и устранимые особенности при $\tau = z$ и $\tau = t$. Поэтому интегралы от этих функций вычисляются по теореме о вычетах

$$\oint\limits_{|\tau|=1} f(\tau) d\tau = 2\pi i \cdot \underset{\tau=0}{res} \frac{e^{\lambda/\tau} - e^{\lambda/z}}{\tau - z},$$

$$\oint\limits_{|\tau|=1} g(\tau) d\tau = 2\pi i \cdot \underset{\tau=0}{res}\, g(\tau) = \frac{e^{\lambda/\tau} - e^{\lambda/t}}{t-\tau}.$$

Ясно, что

$$\underset{\tau=0}{res} \frac{e^{\lambda/\tau} - e^{\lambda/z}}{\tau - z} = \underset{\tau=0}{res}\, g(\tau) = \frac{e^{\lambda/\tau}}{\tau - z} = 1 - e^{\lambda/z}.$$

С другой стороны, используя формулу Сохоцкого-Племеля, вычисляются интеграл в смысле главного значения

$$\oint\limits_{|\tau|=1} \frac{d\tau}{\tau - z} = \pi i\,,$$

так как $|z|=1$.

Следовательно, искомый интеграл примет вид

$$\frac{1}{2}(2-\lambda)\cdot \oint\limits_{|\tau|=1} \frac{e^{\lambda/\tau}}{(\tau - z)\cdot(t-\tau)}d\tau = \frac{2-\lambda}{2(t-z)}\cdot 2\pi i\cdot(1-e^{\lambda/z}) +$$

$$+\frac{2-\lambda}{2(t-z)}\cdot \pi i e^{\lambda/z} - \frac{2-\lambda}{2(t-z)}\cdot 2\pi i\,(1-e^{\lambda/t}) - \frac{2-\lambda}{2(t-z)}\cdot \pi i e^{\lambda/t}.$$

Теперь вычислим другой интеграл

$$\frac{(2-\lambda)}{2}\cdot \oint\limits_{|\tau|=1} \frac{e^{\bar\lambda/\tau}}{(\tau - z)\cdot(t-\tau)}d\tau = \frac{2-\bar\lambda}{2(t-z)}\cdot \oint\limits_{|\tau|=1}\frac{e^{\bar\lambda/\tau}}{\tau - z}d\tau + \frac{2-\bar\lambda}{2(t-z)}\cdot \oint\limits_{|\tau|=1}\frac{e^{\bar\lambda/\tau}}{t-\tau}d\tau =$$

$$= \frac{2-\bar\lambda}{2(t-z)}\cdot \oint\limits_{|\tau|=1}\frac{e^{\bar\lambda/\tau} - e^{\bar\lambda/z}}{t-z}d\tau + \frac{2-\bar\lambda}{2(t-z)}\cdot \oint\limits_{|\tau|=1}\frac{d\tau}{t-\tau} +$$

$$= \frac{2-\bar\lambda}{2(t-z)}\cdot \oint\limits_{|\tau|=1}\frac{e^{\bar\lambda/\tau} - e^{\bar\lambda/z}}{t-\tau}d\tau + \frac{2-\bar\lambda}{2(t-z)}e^{\bar\lambda t}\cdot \oint\limits_{|\tau|=1}\frac{d\tau}{t-\tau} =$$

$$= \frac{2-\bar\lambda}{2(t-z)}e^{\bar\lambda z} i\pi - \frac{2-\bar\lambda}{2(t-z)}e^{\bar\lambda t} i\pi\,.$$

♦**Л е м м а 2.** Справедливо соотношение

$$\oint\limits_{|\tau|=1} \frac{T(\tau,t)}{(\tau - z)}d\tau = \pi i\cdot T(z,t) + \frac{1}{t}(1-e^{\lambda\bar z}) + \frac{\lambda}{2t}(1-e^{\lambda\bar z}) - 2\lambda\left(\frac{e^{\lambda\bar t} - e^{\lambda\bar z}}{t-z}\right) -$$

$$-\frac{i\,(1+\lambda/2)}{4i\pi(1-\mathrm{Re}\lambda)}\left(2\bar\lambda \mathrm{e}^{\bar\lambda \mathrm{t}} + 2\lambda e^{\lambda\bar t} - 3\lambda - 3\bar\lambda\right)\cdot(e^{\lambda\bar z} - 1)$$

при $|z|=1$.

С учетом лемм 1 и 2 сформулируем теорему.

▼ **Теорема 5.** Пусть $\lambda \neq 2$, $\mathrm{Re}\lambda \neq 1$. Тогда сингулярное интегральное уравнение для $u(t)$ из теоремы 1.2.1 эквивалентно интегральному уравнению Фредгольма

$$(a^2(z) - b^2(z)) \cdot u(z) + \oint_{|t|=1} K(z,t) \cdot u(t) dt = 0, \tag{1.5.1}$$

где

$$K(z,t) = \frac{b(z)}{\pi i} \cdot \frac{a(t) - a(z)}{t - z} - \frac{(2-\lambda)b(z)}{\pi i} + \frac{b(z)}{\pi i} \cdot \frac{b(t) - a(z)}{t - z} +$$

$$+ \frac{b(z)}{2\pi t i} \cdot (1 - e^{\lambda \bar{z}}) \cdot (2 + \lambda) - \frac{2b(z)\lambda}{\pi t i} \cdot \frac{e^{\lambda \bar{t}} - e^{\lambda \bar{z}}}{t - z} + a(z)T(z,t) +$$

$$+ \frac{b(z) \cdot (2+\lambda)}{8\pi(1 - \mathrm{Re}\lambda)} \cdot \left(2\bar{\lambda} e^{\bar{\lambda} t} + 2\lambda e^{\lambda \bar{t}} - 3\lambda - 3\bar{\lambda}\right) \cdot (1 - e^{\lambda \bar{z}}) + b(z)T(z,t)$$

1.6 О структуре ядра и о приближенном решений уравнения Фредгольма 2 – го рода

Несколько замечаний о структуре ядра $K(z,t)$. Отметим, что

$$a^2(z) - b^2(z) \neq 0 \text{ при } |z| = 1 \text{ и } \lambda \neq 2.$$

Итак, ядро $K(z,t)$ имеет представление

$$K(z,t) = \frac{e^{\lambda \bar{t}} - e^{\lambda \bar{z}}}{t - z} A(z,\lambda) + \frac{e^{\bar{\lambda} t} - e^{\bar{\lambda} z}}{t - z} B(z,\bar{\lambda}) + \frac{C(z,\lambda)}{t} +$$

$$+ E(z,\lambda)D(t,\lambda) + F(z,\lambda)Q(t,\lambda), \tag{1.6.1}$$

где E, A, B, C, D, F, Q зависят от t и z. Конкретный вид E, A, B, C, D, F, Q можно восстановить из предыдущей формулы для $K(z,t)$. Заметим, что дробь $\frac{e^{\bar{\lambda} t} - e^{\bar{\lambda} z}}{t - z}$ с точностью до множителя $exp(\bar{\lambda} z)$ зависит (в виде степенного ряда) от разности $(t - z)$. Аналогичное рассуждение верно и для $\frac{e^{\lambda \bar{t}} - e^{\lambda \bar{z}}}{t - z}$ при $|t| = |z| = 1,$ так как справедливо разложение

$$\frac{e^{\lambda \bar{t}} - e^{\lambda \bar{z}}}{t - z} \frac{1}{tz} = -\frac{\exp(\lambda \bar{z})}{tz} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\bar{t} - \bar{z})^{k-1}}{k!} \lambda^k .$$

Последние три слагаемых в правой части (1.5.2) представляют сумму, соответствующую вырожденному ядру. Таким образом, ядро (1.5.2) состоит из вырожденной части, а другая часть содержит слагаемые, зависящие от разности. Вырожденные ядра изучались в монографии [24]. Интегральные операторы, зависящие от разности $t - z$ рассматривались в работах [25,26]. Однако прямое применение результатов этих работ не дает эффекта. Согласно результатам главы 4 монографии [24] необходимым и достаточным условием существования ненулевого решения интегрального уравнения является обращение в нуль так называемого определителя Фредгольма. Определитель Фредгольма строится по формуле $\widehat{K}$

$$\Delta(\lambda) = 1 + \frac{1}{1!} \oint_{|z|=1} \widehat{K}(z,z) dz + \frac{1}{2!} \oint_{|z|=1} dz \oint_{|t|=1} dt \begin{vmatrix} \widehat{K}(z,z) & \widehat{K}(z,t) \\ \widehat{K}(t,z) & \widehat{K}(t,t) \end{vmatrix} +$$

$$. + \frac{1}{3!} \oint_{|z|=1} dz \oint_{|t|=1} dt \oint_{|\tau|=1} d\tau \begin{vmatrix} \widehat{K}(z,z) & \widehat{K}(z,t) & \widehat{K}(z,\tau) \\ \widehat{K}(t,z) & \widehat{K}(t,t) & \widehat{K}(t,\tau) \\ \widehat{K}(\tau,z) & \widehat{K}(\tau,t) & \widehat{K}(\tau,\tau) \end{vmatrix} + ..+,$$

где $\widehat{K}(z,t) = K(z,t) / (a^2(z) - b^2(z))$.

Сходимость приведённого ряда следует из следующего неравенства Адамара. Если D – определитель с комплексными элементами

$$c_{hk} = p_{hk} - i s_{hk} \quad (h, k = 1, 2, \ldots, n),$$

то верно неравенство

$$D \le P_1 P_2 \ldots P_n \text{ где } P_h = \left(\sum_{k=1}^{n} |c_{hk}|^2 \right)^{1/2}.$$

Действительно, при фиксированном λ,удовлетворяющем условиям $\lambda \neq 2, \operatorname{Re} \lambda \neq 1,$ модуль ядра $\left|\hat{K}(z,t)\right|$ ограничен при $|t| = |z| = 1$ некоторым числом M. тогда из вышеуказанного неравенства Адамара следует, что определитель порядка n с элементами, не превосходящими по модулю числа M, сам по модулю не больше $M^n n^{n/2}$. Тогда $|\Delta(\lambda)|$ мажорируется следующим сходящимся рядом:

$$1+2\pi M+\frac{1}{2!}(2\pi)^2M^2 2+\frac{1}{3!}(2\pi)^3M^3 3^{3/2}+\ldots.$$

Таким образом, детерминант Фредгольма $\Delta(\lambda)$ определен при всех λ, удовлетворяющих условиям $\lambda\neq 2, \operatorname{Re}\lambda\neq 1.$ Однако нахождение нулей определителя $\Delta(\lambda)$, записанного в вышеприведенной форме, неэффективно, поскольку $\Delta(\lambda)$ не является целой функцией от λ и не выделена его главная часть.

В работе [27] вышеуказанным образом исследовалась структура ядра $K(z,t)$, при этом линейное интегральное уравнения Фредгольма (1.5.1) решить точно не удалось. Поэтому в настоящей работе для приближённого решения уравнения применим результаты работы [28], где дана оценка абсолютной величины разности между точным и приближенным решениями интегрального уравнения с выделением из данного ядра его главной части.

Введём функцию

$$R(x,y)=K(x,y)-\widetilde{K}(x,y).$$

В нашем случае

$$R(z,t)=\frac{e^{\lambda t}-e^{\lambda\bar{z}}}{t-z}\widehat{A}(z,\lambda)+\frac{e^{\bar{\lambda}t}-e^{\bar{\lambda}z}}{t-z}\widehat{A}(z,\bar{\lambda}),$$

$$\widetilde{K}(z,t)=\frac{\widehat{C}(z,\lambda)}{t}+\widehat{E}(z,\lambda)D(t,\lambda)+\widehat{P}(z,\lambda)Q(t,\lambda),$$

$$A(z)=e^{\lambda\bar{z}}\left(\frac{\lambda^2-2\lambda}{2\pi i}-\frac{2-\lambda}{\pi i}\right)+e^{\bar{\lambda}z}\left(\frac{\lambda\bar{\lambda}-2\lambda}{2\pi i}-\frac{2-\bar{\lambda}}{\pi i}\right),$$

поэтому для модуля $A(z)$ справедлива оценка

$$|A(z)|<e^{|\lambda|}(1+|\lambda|^2).$$

Точно так же оценивается функция $B(z)$:

$$|B(z)|\leq C(|\lambda|^2+1)e^{|\lambda|},$$

где C зависит от λ и z,

$$B(z) = \frac{e^{\bar{\lambda}t} - e^{\bar{\lambda}z}}{t - z}\left\{\frac{a(z)}{\pi i}\bar{\lambda} - \frac{2b(z)}{\pi i}\right\},$$

$$a(z) = \frac{(\lambda - 2)e^{\lambda\bar{z}} + (\bar{\lambda} - 2)e^{\bar{\lambda}z}}{2},\ b(z) = \frac{(2 - \lambda)e^{\lambda\bar{z}} - (2 - \bar{\lambda})e^{\bar{\lambda}z}}{2}.$$

Таким образом, справедлива оценка для ядра возмущения

$$\left|R(z,t,\lambda)\right| \le C_1 e^{4|\lambda|}\frac{|\lambda|^2 + |\lambda| + 1}{a^2(z_0(\lambda)) - b^2(z_0(\lambda))},$$

где C_1 не зависит от $\lambda, z, t,$ т.е. в качестве малой величины можно взять правую часть последнего неравенства.

Далее оценим сверху резольвенту $\left|\widetilde{\Gamma}(z,t,\lambda)\right|$, соответствующую вырожденному ядру $\widetilde{K}(z,t)$, оценивая снизу $\left|a^2(z) - b^2(z)\right|$. В то же время для величин $|C(z;\lambda)|, |E(z;\lambda)|, |D(z;\lambda)|,\ |F(z;\lambda)|, |Q(z;\lambda)|$ нужны верхние неравенства. Поскольку величина $a^2(z) - b^2(z)$ при $\lambda \ne 2$ строго положительна, при фиксированном λ, для которого $\lambda \ne 2$ существует минимум по z, изменяющийся вдоль единичной окружности $|z| = 1$:

$$\min_{|z|=1}(a^2(z) - b^2(z)) = a^2(z_0(\lambda)) - b^2(z_0(\lambda)) > 0,$$

где

$$|z_0(\lambda)| = 1,\quad \widetilde{\Gamma}_1(z,t) = \frac{(-1)}{\Delta_1(\lambda)}\left|\widetilde{\Gamma}(z,t;\lambda)\right|,$$

то есть

$$\widetilde{\Gamma}_1(z,t) = \frac{(-1)}{\Delta_1(\lambda)}\Delta$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \widehat{C}(z,\lambda) & \widehat{E}(z,\lambda) & \widehat{F}(z,\lambda) & 0 \\ 1 + \oint\frac{\widehat{C}(\tau,\lambda)}{\tau}d\tau & 1 + \oint\frac{\widehat{E}(\tau,\lambda)}{\tau}d\tau & 1 + \oint\frac{\widehat{F}(\tau,\lambda)}{\tau}d\tau & 1 \\ \oint\widehat{C}(\tau,\lambda)D(\tau,\lambda)d\tau & \oint\widehat{E}(\tau,\lambda)D(\tau,\lambda)d\tau & \oint\widehat{F}(\tau,\lambda)D(\tau,\lambda)d\tau & D(\tau,\lambda) \\ \oint\widehat{C}(\tau,\lambda)Q(\tau,\lambda)d\tau & \oint\widehat{E}(\tau,\lambda)Q(\tau,\lambda)d\tau & \oint\widehat{F}(\tau,\lambda)Q(\tau,\lambda)d\tau & Q(\tau,\lambda) \end{vmatrix},$$

$\Delta_1(\lambda)$- соответствующий определитель Фредгольма, а все интегралы в Δ берутся по контуру $|\tau|=1$.

Оценим сверху по отдельности величины, составляющие $R(z,t;\lambda)$. Оценим

$$\frac{e^{\lambda\bar{t}}-e^{\lambda\bar{z}}}{t-z} \quad \text{при } |t|=|z|=1:$$

$$\left|\frac{e^{\lambda(\bar{t}-\bar{z})}-1}{t-z}\right|\cdot\left|e^{\lambda\bar{z}}\right|\le e^{|\lambda|}\left\{|\lambda|+\frac{|\lambda|^2 2}{2}+\frac{|\lambda|^3 2^2}{3}+s\right\}=e^{|\lambda|}\frac{e^{2|\lambda|}-1}{2}\le\frac{1}{2}e^{3|\lambda|}.$$

Величины

$$\max_{|z|=1}|C(z,\lambda)|,\max_{|z|=1}|E(z,\lambda)|,\max_{|z|=1}|D(z,\lambda)|,\ \max_{|z|=1}|F(z,\lambda)|,\ \max_{|z|=1}|Q(z,\lambda)|$$

легко оцениваются мажорантой

$$\frac{C}{|1-\operatorname{Re}\lambda|}e^{2|\lambda|}(|\lambda|^2+|\lambda|\ +1).$$

Пусть при фиксированном λ определитель Фредгольма $\Delta_1(\lambda)\ne 0$. Тогда, следуя [28], имеем верхнюю оценку для резольвенты $\widetilde{\Gamma}_1(z,t,\lambda)$:

$$\left|\widetilde{\Gamma}_1(z,t)\right|\le\frac{C_1(|\lambda|^2+|\lambda|\ +1)^3 e^{6|\lambda|}}{\left|\Delta_{(\lambda)}\right|\left|a^2(z_0(\lambda))-b^2(z_0(\lambda))\right|\left|1-\operatorname{Re}\lambda\right|^3},\quad \operatorname{Re}\lambda\ne 1.$$

Учитывая все оценки, получим

$$2\pi C_1 e^{4|\lambda|}(|\lambda|^2+|\lambda|\ +1)\times\left(1+2\pi\frac{C_2(|\lambda|^2+|\lambda|\ +1)^3 e^{6|\lambda|}}{|\Delta_1(\lambda)|\cdot\left|a^2(z_0(\lambda))-b^2(z_0(\lambda))\right|\cdot|1-\operatorname{Re}\lambda|^3}\right)<1\ . \quad (1.6.2)$$

Условие $\operatorname{Re}\lambda\ne 1$ может выполнятся только если C_1 меньше единицы. В то же время на константу C_1 нельзя накладывать ограничения. Таким образом, из приведённых рассуждений видим, что применение результатов [28] требует малости величины, т.е. константа в нашем случае определяется малостью ядра возмущения $R(z,t)=K(z,t)-\widetilde{K}(z,t)$.

Следовательно, при удачной аппроксимации ядра $K(z,t)$ вырожденным ядром $\widetilde{K}(z,t)$ приходим к первому результату настоящего раздела.

Утверждение. Если $\lambda \neq 2$ и определитель Фредгольма вырожденного ядра $\widetilde{K}(z,t)$ отличен от нуля, то λ не является собственным значением исходной задачи (1)-(3) для уравнения Коши – Римана.

Для приближенного ядра $K(z,t)$ вырожденным ядром $\widetilde{K}(z,t)$ достаточно аппроксимировать величину $\dfrac{e^{\bar{\lambda}t}-e^{\bar{\lambda}z}}{t-z}$ вырожденным ядром. Поскольку,

$$\frac{e^{\bar{\lambda}t}-e^{\bar{\lambda}z}}{t-z}=e^{\bar{\lambda}z}\,\frac{e^{\bar{\lambda}(t-z)}-1}{t-z}=e^{\bar{\lambda}z}\left\{\bar{\lambda}+\frac{\bar{\lambda}^{2}(t-z)}{2!}+\frac{\bar{\lambda}^{3}(t-z)^{2}}{3!}+\dots\right\},$$

при $|\lambda|<R_1$ (R_1 -фиксировано) соответствующая аппроксимация выглядит так:

$$e^{\bar{\lambda}z}U_N(t-z,\bar{\lambda})\equiv e^{\bar{\lambda}z}\left\{\bar{\lambda}+\frac{\bar{\lambda}^{2}(t-z)}{2!}+\dots+\frac{\bar{\lambda}^{N}(t-z)^{N-1}}{N!}\right\},$$

где N – натуральное число (ниже будет указан алгоритм его выбора).

Таким образом, аппроксимирующее вырожденное ядро может быть записано в виде

$$\tilde{K}(z,t)=e^{\bar{\lambda}z}\left\{\bar{\lambda}+\frac{\bar{\lambda}^{2}(t-z)}{2!}+\dots+\frac{\bar{\lambda}^{N}(t-z)^{N-1}}{N!}\right\}B(z,\bar{\lambda})-$$

$$\frac{A(z,\lambda)}{tz}e^{\bar{\lambda}z}\left\{\bar{\lambda}+\frac{\bar{\lambda}^{2}(\bar{t}-\bar{z})}{2!}+\dots+\frac{\bar{\lambda}^{N}(\bar{t}-\bar{z})^{N-1}}{N!}\right\}+$$

$$+\frac{1}{t}C(z,\lambda)+E(z,\lambda)D(t,\lambda)+F(z,\lambda)Q(z,\lambda), \qquad (1.6.3)$$

т.е. $\widetilde{K}(z,t)$ записано через элементарные функции в явном виде. Для оценки погрешности аппроксимации $R(z,t)=K(z,t)-\widetilde{K}(z,t)$ достаточно оценить погрешности приближений его отдельных слагаемых. В частности, пользуясь остаточным членом формулы Тейлора в форме Лагранжа, имеем оценки

$$\left|\frac{e^{\bar{\lambda}t}-e^{\bar{\lambda}z}}{t-z}-e^{\bar{\lambda}z}P_N(t-z,\bar{\lambda})\right|\equiv\left|e^{\bar{\lambda}z}\right|\frac{|\lambda|^{N+1}(t-z)^{N}}{(N+1)!}\left|e^{\theta(\lambda(t-z))}\right|\le e^{3|\lambda|}\frac{|\lambda|^{N+1}2^{N}}{(N+1)!}$$

Здесь учтено, что $|z|=|t|=1.$ Точно так же оценивается величина

$$\left|\frac{e^{\bar{\lambda}t}-e^{\bar{\lambda}z}}{t-z}-e^{\bar{\lambda}z}\widetilde{P}_N(t-z,\bar{\lambda})\right|\leq e^{3|\lambda|}\,\frac{|\lambda|^{N+1}2^N}{(N+1)!}.$$

Следовательно, для погрешности $|R(z,t)|$ справедливо неравенство

$$|R(z,t)|<e^{3|\lambda|}\frac{|\lambda|^{N+1}2^N}{(N+1)!}\left(\left|\hat{A}(z)\right|+\left|\hat{B}(z)\right|\right)\leq$$

$$\leq Ce^{4|\lambda|}\frac{|\lambda|^{N+1}2^N\left(|\lambda|^2+1\right)}{(N+1)!}\frac{1}{a^2(z_0(\lambda))-b^2(z_0(\lambda))},\qquad(1.6.4)$$

где C не зависит от N.

Оценим резольвенту, соответствующую вырожденному ядру $\widetilde{K}(z,t)$. Резольвента $\widetilde{\Gamma}_N$ имеет вид

$$\widetilde{\Gamma}_N=\frac{H_N(z,t,\lambda)}{\Delta_N(\lambda)},\qquad |\Delta_N(\lambda)|=\det\left|\delta_{ij}+\left\langle f_i,h_j\right\rangle\right|,$$

где $\Delta_N(\lambda)$- определитель размерности $(2N+3)$, $H_N(\lambda)$- определитель размерности $(2N+4)$.

Размерность $\Delta_N(\lambda)$ соответствует количеству слагаемых вырожденного ядра $\widetilde{K}(z,t)$. Непосредственный подсчет позволяет $\widetilde{K}(z,t)$ записать в виде

$$\widetilde{K}(z,t)=\sum_{j=1}^{2N+3}f_j(z)h_j(t),$$

где $\{f_j(z)\}$ и $\{h_j(t)\}$ представляют линейно независимые системы функции. В то же время определитель $H_N(z,t,\lambda)$ отличается от $\Delta_N(\lambda)$ одной строкой и одним столбцом, которые выглядят так:

$$\left\|f_1(z),f_2(z),\ldots,f_{2N+3}(z),0\right\|,$$

последний столбец H_N имеет вид

$$\left\|0,h_1(t),h_2(t),\ldots,h_{2N+3}(t),\right\|^T$$

где значок «T» означает транспонирование.

Оценим сверху модуль определителя H_N. Для этого заметим, что при фиксированном $\lambda(\lambda \neq 2, \operatorname{Re}\lambda \neq 1)$ нормы каждой строки H_N ограничены некоторой величиной М, не зависящей от натурального числа N. Тогда, согласно неравенству Адамара [24, стр. 192], имеем

$$H_N < M^{2N+3} \tag{1.6.5}$$

Подставляя правые части неравенства (1.6.4) и (1.6.5) в неравенства (1.6.2), получим соотношение для выбора натурального числа N :

$$C_2 \frac{|\lambda|^{N+1} 2^N}{(N+1)!}\left(1 + C_3 \frac{M^{2N+4}}{|\Delta_N(\lambda)|}\right) < 1, \tag{1.6.6}$$

где C_2, C_3 зависят от λ, но не зависят от N.

Поскольку $\dfrac{C^{N+2}}{(N+1)!} \to 0,$ ясно, что левая часть стремится к нулю при $N \to \infty$. Таким образом, выбор N гарантируется. Сформулируем основной результат настоящего раздела.

▼ **Теорема 6.** Пусть $|\lambda| < R_1$ (R_1 - фиксировано) и $\lambda \neq 2, \operatorname{Re}\lambda \neq 1$. Пусть N выбрано согласно (1.6.6). Определим $\widetilde{K}(z,t)$ по формуле (1.6.3), а через $\Delta_N(\lambda)$ обозначим определитель Фредгольма, соответствующий вырожденному ядру $\widetilde{K}(z,t)$. Если $\Delta_N(\lambda) \neq 0$, то λ является точкой резольвентного множества оператора Коши – Римана (1)-(3), при $\alpha = 1$.

В теореме охарактеризованы те λ, при которых неоднородная краевая задача со смещением оператора Коши – Римана (1)-(3) всюду разрешима в классе непрерывных в смысле Гёлдера функций на единичном круге, причём показана явная конструкция, аппроксимирующая решение неоднородной задачи. Для этого достаточно $u(z)$, определяемое как решение неоднородного линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода, аппроксимировать решениями неоднородного линейного интегрального уравнения с вырожденными ядрами.

1.7 К спектральному вопросу дифференциального оператора Коши – Римана с однородными краевыми условиями типа задачи Дирихле.

В настоящем подразделе рассматривается задача на собственные значение оператора Коши-Римана с однородными краевыми условиями типа Дирихле

$$\frac{\partial \omega(z)}{\partial \bar{z}} = \lambda \omega(z), \quad |z| < 1, \tag{1}$$

$$\operatorname{Re}\omega(z)=0, \quad |z|=1, \tag{2''}$$

$$\operatorname{Im}\omega(0)=0 . \tag{3''}$$

Имеет место следующая

▼ **Теорема 7.** Решение задачи (1)-(3'') определяется по формуле

$$\omega(z)=\frac{e^{-\lambda\bar{z}}}{2\pi i}\oint_{|t|=1}u(t)\frac{t+z}{t-z}\cdot\frac{dt}{t}+iCe^{-\lambda\bar{z}}+u(z)e^{-\lambda\bar{z}},$$

причем вещественная функция u(z) является решением интегрального уравнения

$$(e^{-\lambda\bar{z}}+e^{-\bar{\lambda}z})u(z)+\frac{(e^{-\lambda\bar{z}}-e^{-\bar{\lambda}z})}{2\pi i}\oint_{|t|=1}\frac{u(t)}{t-z}dt=0 \tag{*}$$

на окружности $|z|=1$, индекс æ которого равен нулю, константа C определяется из общего решения $\operatorname{Im}\omega(0)=C=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{u(t)}{t}dt, |t|=1$, при z =0, где

$$a(z)=e^{-\lambda\bar{z}}+e^{-\bar{\lambda}z}, \quad b(z)=e^{-\lambda\bar{z}}-e^{-\bar{\lambda}z}.$$

Далее, согласно [17] дается значение индекса (*), то есть

$$æ=\frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{2e^{\bar{\lambda}z}}{2e^{\lambda\bar{z}}}\right]_{|z|=1}=\frac{1}{2\pi i}\left[\ln e^{(\bar{\lambda}z-\lambda\bar{z})}\right]_{|z|=1}=\frac{1}{2\pi i}\left[\bar{\lambda}z-\lambda\bar{z}\right]_{|z|=1}=0,$$

где $[\cdot]_{|z|=1}$ – означает приращение функции, заключенной в квадратные скобки при обходе единичной окружности в положительном направлении. Интегральное уравнение для $u(t)$ нетерево при условии, когда

$e^{\lambda\bar{z}}\neq e^{\bar{\lambda}z}$, $e^{\lambda\bar{z}}\neq -e^{\bar{\lambda}z}$, ,33 при всех $|z|=1$.

Второе слагаемое в левой части уравнения (*), при $|z|=1$ является интегралом типа Коши.

1.8 О непрерывности интеграла типа Коши в замкнутой области

В данном подразделе исследуется вопрос непрерывности интеграла типа Коши из предыдущего подраздела

$$W(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(t)}{t-z}d\psi(t) \qquad (1.8.1)$$

вплоть до границы, где γ– замкнутая жорданова спрямляемая кривая, $f \in C_{\gamma}$ - пространство непрерывных на γ функций, $\varphi(t)$- непрерывная функция ограниченной вариации на γ.

Пусть H – пространство голоморфных функции в C\γ. Обозначим символом E=E(H) класс всех функций $g \in H$, представимых в виде интеграла

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{d\psi(t)}{t-z}.$$

Обозначим через $g^{+}(\xi), g^{-}(\xi)$ соответственно предельные значения голоморфной функции $g(z)$ изнутри и извне кривой γ.

Введем следующие характеристики кривой γ

$$\tau^{\psi}(\delta) = \sup_{\xi\in\gamma}\int_{\gamma_{\delta}(\xi)}\left|d\psi(t)\right|, \gamma_{\delta}(\xi) = \left\{t\in\gamma : \left|\xi - t\right| \le \delta\right\},$$

$$\delta \in \left(0, d\right], d = \sup_{\xi, t\in\gamma}\left|\xi - t\right|$$

Если $\psi(t) \equiv t,$ то $\tau^{\psi}(\delta) = \tau(\delta), (def),$ где $\tau(\delta)$- характеристики кривой. Обозначим через M_{γ} -множество всех функций ограниченной вариации на γ, для которых $\left|\oint\limits_{\gamma/\gamma_{\delta}(\xi)}\frac{d\psi(t)}{|t-z|}\right|$ равномерно ограничен.

Для непрерывной на γ функции f введём характеристику – модуль непрерывности f

$$\omega_{f}(\delta) = \delta\sup_{\theta\ge\delta}\frac{1}{\theta}\max_{|\xi-t|}\left|f(t) - f(\xi)\right|, \delta \in \left(0, d\right]$$

При некоторых предположениях относительно f и контура существует достаточные условия непрерывности интеграла (1.8.1) вплоть до границы.

Если $f \in C_{\gamma}, \psi \in M, \tau^{\psi}(\delta) \approx \delta$, то

$$\left|Z(f, \xi, z, \psi)\right| \le C_{\gamma}\rho(z,\gamma)\int_{\rho(z,\gamma)}^{d}\frac{\omega_{f}(\eta)}{\eta^{2}}d\eta,$$

где $C > 0$ зависит лишь от γ.

2 СПЕКТРАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА КОШИ – РИМАНА С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА БИЦАДЗЕ – САМАРСКОГО

2.1 Теоретическое описание раздела 2

Цель работы. Рассмотрим спектральную задачу

$$K\omega(z) = \frac{\partial \omega(z)}{\partial \bar{z}} = \lambda \omega(z), \qquad |z|<1 \tag{1}$$

$$\operatorname{Re}\omega(z) = \operatorname{Re}\alpha\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}\frac{d\xi}{\xi - z}\cdot\oint_{|\tau|=r<1}\frac{\lambda\cdot\omega(\tau)}{\tau-\xi}d\tau\right),\ |z|=1, \tag{2'}$$

$$\operatorname{Im}\omega(0) = \operatorname{Im}\alpha\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}\frac{d\xi}{\xi}\cdot\oint_{|\tau|=r<1}\frac{\lambda\cdot\omega(\tau)}{\tau-\xi}d\tau\right) \tag{3'}$$

где λ – спектральный параметр. Если $\alpha = 1$, тогда получим результаты из работы [29], а если $\alpha = 0$, тогда требуется дополнительное исследование.

Целью работы является исследования спектра эллиптических операторов, в частности, задачи (1) - (3’).

Обоснование результата. Наиболее глубокие результаты в этой проблематике имеются в работе [30]. В общем случае спектр эллиптического оператора существенно определяется спектральными свойствами граничного оператора G из теоремы М. Отелбаева и А.Н. Шыныбекова [11]. Однако выяснение зависимости спектра оператора **К** в исходных терминах граничных условий представляет актуальную (нерешенную) проблему. Из общих результатов подобные факты не прослеживаются, поэтому приходится привлекать более глубокие методы, связанные со спецификой конкретных краевых условий. Описание общих регулярных краевых задач для дифференциального выражения Коши-Римана, разработаны Дж.Ф. Нейманом, М.И. Вишиком, А.А. Дезиным, М. Отелбаевым.

Приведенная задача (1)-(3’) является задачей со смещением внутрь области, которое называется типа Бицадзе-Самарского, т.е. (регулярными) и подобные задачи для операции Коши-Римана описаны в 1982 году М. Отелбаевым, А.Н. Шыныбековым [11].

В работах [12, 31] исследован вопрос устойчивости свойства базисности систем собственных и присоединенных векторов оператора Шредингера с регулярными, но не усиленно регулярными краевыми условиями. В работе [13] исследована спектральные вопросы задачи со смещением для обыкновенного дифференциального оператора третьего порядка на отрезке в пространстве квадратично суммируемых функций.

С другой точки зрение вопросы разрешимости и поведения решения краевой задачи для обобщенного уравнения Коши-Римана глубоко изучались в работах [12,13,15]. Краевые задачи для обобщенной системы Коши-Римана с негладкими коэффициентами исследовались в работах [17, 32].

2.2 Редукция к сингулярному интегральному уравнению

Основной результат.

▼ **Теорема 8.** Решение задачи на собственные значение дифференциального оператора Коши-Римана (1)-(3') определяется по формуле

$$\omega(z) = \frac{e^{\lambda\bar{z}}}{2\pi i} \oint_{|\xi|=1} u(\xi) \frac{\xi + z}{\xi - z} \cdot \frac{d\xi}{\xi} + iCe^{\lambda\bar{z}} + u(z) e^{\lambda\bar{z}},$$

причем для вещественной функции $u(z)$ на окружности $|z|=1$ справедливо следующее сингулярное интегральное уравнение

$$a(z)u(z) - \frac{b(z)}{\pi i} \oint_{|\xi|=1} \frac{u(\xi)}{\xi - z} d\xi + \oint_{|\xi|=1} H(z,\xi) u(\xi) d\xi = 0, \ |z|=1$$

где

$$a(z) = e^{\lambda\bar{z}} + e^{\bar{\lambda}z}, \ b(z) = e^{\lambda\bar{z}} - e^{\bar{\lambda}z},$$

$$H(z,\xi) = \left(i(e^{\lambda\bar{z}} - e^{\bar{\lambda}z})\right)$$

$H(z,\xi)$ – непрерывное ядро.

Константа C из общего решения представим в виде

$$C = \mathrm{Im}\left\{\lambda \oint_{|\xi|=1} u(\xi)(1 - e^{\lambda r^2/\xi} \frac{d\xi}{\xi}\right\} = 0.$$

Доказательство. Общее решение дифференциального уравнения в частных производных имеет вид

$$\omega(z) = \Phi(z)\, e^{\lambda\bar{z}}, \tag{2.2.1}$$

где $\Phi(z)$– голоморфная в круге $|z|<1$ функция. Действительно, умножая обе части (2.1.1) на $e^{-\lambda\bar{z}}$, получим

$$e^{-\lambda\bar{z}}\frac{\partial\omega(z)}{\partial\bar{z}}-\lambda e^{-\lambda\bar{z}}\omega(z)=0.$$

Так как

$$\frac{\partial e^{-\lambda\bar{z}}}{\partial\bar{z}}=-\lambda e^{-\lambda\bar{z}},$$

имеем равенство

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}(e^{-\lambda\bar{z}}\omega(z))=0.$$

Отсюда следует, что произведение $e^{-\lambda\bar{z}}\omega(z)$ является голоморфной функцией в $|z|<1$. Голоморфная функция $\Phi(z)$ выражается по интегральной формуле Шварца через свою реальную часть следующим образом:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}u(\xi)\frac{\xi+z}{\xi-z}\cdot\frac{d\xi}{\xi}+iC, \qquad |z|<1,$$

где $u(\xi)=\operatorname{Re}\Phi(\xi),|\xi|=1, C=\operatorname{Im}\Phi(0)$.

Вследствие чего формула (2.2.1) примет вид

$$\omega(z)=\frac{e^{\lambda\bar{z}}}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}u(\xi)\frac{\xi+z}{\xi-z}\cdot\frac{d\xi}{\xi}+iCe^{\lambda\bar{z}}, \qquad |z|<1.$$

Последняя формула является общим решением уравнения (1), которое подставляем в граничное условие (2’’). Используя формулу Сохоцкого-Племеля ([17], стр. 55), найдем граничные значения решения при $|z|=1$

$$\omega(z)=\frac{e^{\lambda\bar{z}}}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}u(\xi)\frac{\xi+z}{\xi-z}\cdot\frac{d\xi}{\xi}+iCe^{\lambda\bar{z}}+u(z)e^{\lambda\bar{z}}.$$

Тогда имеем соотношение

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{e^{\lambda\bar{z}}}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}u(\tau)\frac{\tau+z}{\tau-z}\cdot\frac{d\tau}{\tau}+iCe^{\lambda\bar{z}}+u(z)e^{\lambda\bar{z}}\right\}=0,\ |z|=1. \qquad (2.2.2)$$

Так как $\bar{\tau} = \dfrac{1}{\tau}$, то с помощью вычетов можно вычислить интегралы из (2.2.2), содержащую неизвестную функцию $u(\tau)$. Имеет место следующая лемма.

Лемма. Вычет в особой точке $\tau = 0$ от интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\tau|=r<1} e^{\lambda\bar{\tau}}\,\frac{d\tau}{\tau - A}$$

вычисляется по формуле

$$\operatorname*{res}_{\tau=0}\frac{e^{\lambda\bar{\tau}}}{\tau - A} = \frac{-\lambda r^2}{A} - \frac{-\lambda^2 r^4}{2!A^2} - \frac{-\lambda^3 r^6}{3!A^3} - \ldots = 1 - e^{\frac{\lambda r^2}{A}}.$$

На основе этой леммы вычислим вычеты подынтегральных функций, которые имеют особенности в точке $\tau = 0$. Вычеты в других особых точках подынтегральных функций легко вычисляются, так как особенности имеют вид полюсов первого порядка [23].

Распишем вещественную часть комплексного числа в виде полу - суммы комплексного числа и его сопряженного, тогда приходим к соотношению при $|z| = 1$:

$$\frac{e^{\lambda\bar{z}}}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1} u(\xi)\frac{\xi+z}{\xi-z}\cdot\frac{d\xi}{\xi} - \frac{e^{\bar{\lambda}z}}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1} u(\xi)\frac{\xi+z}{\xi-z}\cdot\frac{d\xi}{\xi} + iCe^{\lambda\bar{z}} - iCe^{\bar{\lambda}z} + u(z)e^{\lambda\bar{z}} + u(z)e^{\bar{\lambda}z} = 0$$

Последнее соотношение преобразуем к виду

$$\frac{e^{\lambda\bar{z}} - e^{\bar{\lambda}z}}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1} u(\xi)\frac{\xi+z}{\xi-z}\cdot\frac{d\xi}{\xi} + iC(e^{\lambda\bar{z}} - e^{\bar{\lambda}z}) + (e^{\lambda\bar{z}} + e^{\bar{\lambda}z})\,u(z) = 0,\quad |z| = 1.$$

Выделяя сингулярную часть, полученное соотношение запишем в виде канонической формы

$$(e^{\lambda\bar{z}} + e^{\bar{\lambda}z})\,u(z) + (e^{\lambda\bar{z}} - e^{\bar{\lambda}z})\cdot\frac{1}{\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{u(\xi)}{\xi - z}d\xi + \oint\limits_{|\xi|=1} u(\xi)\{i(e^{\lambda\bar{z}} - e^{\bar{\lambda}z})\}d\xi = 0 \qquad (2.2.3)$$

Итак, задача (1)-(3’) редуцирована к сингулярному интегральному уравнению (2.2.3). Теорема 8 доказана.

В работе [23, 29, 32] доказана эквивалентность подобных краевых задач со смещением к сингулярному интегральному уравнению.

2.3 Об истоках понятия краевых задач со смещением

Проблема поиска корректных краевых задач для уравнений смешанного типа в многомерных областях, когда поверхность пароболического вырождения является пространственно ориентированной, приводит к краевым задачам со смещением. Метод Трикоми решения локальных краевых задач для уравнений с оператором Чаплыгина в главной части приводит также к краевым задачам для эллиптических (гиперболических) уравнений с нелокальным условием на части границы области их задания.

В работе [3] вводятся понятия: краевых задач со смещением; нелокального оператора; нелокальных внутренних, краевых и внутреннекраевых задач; краевых и внутреннекраевых условий и задач с локальным (нелокальным) смещением (или сдвигом) для дифференциальных уравнений и систем основных типов.

К краевым задачам с локальным (нелокальным) смещением сводятся многие проблемы биологической синергетики [33, с.136].

Пусть Ω^+ - конечная односвязная область плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная одним простым контуром Ляпунова σ , а Ω^- - бесконечная область, дополняющая $\Omega^+ \cup \sigma$ до полной плоскости. Пусть далее α(t) обозначает некоторой заданный гомеоморфизм контура σ на себя. Н.И. Мусхелишвили [17] *граничной задачей сопряжения со смещением* (или сдвигом) назвал задачу отыскания кусочно – голоморфной функции Ф(z) с линией скачков σ , имеющей конечный порядок на бесконечности, по граничному условию

$$\Phi^+[\alpha(z)] = G(z)\Phi^-(z) + g(z) \quad \forall z \in \sigma \qquad (2.3.1)$$

где $G(z)$ и $g(z)$ - заданные на σ функции, удовлетворяющие условию Гельдера, причем $G(z) \neq 0$ всюду на σ ; $\Phi^+(z) = \Phi(z)$ при $z \in \Omega^+$ и $\Phi^-(z) = \Phi(z)$ при $z \in \Omega^-$.

Задача сопряжения со смещением побудила для голоморфных (аналитических) в области Ω^+ с границей σ функций $\Phi^+(z) = u + iv$ можно отнести задачу, сформулированную еще Риманом, в следующих его предложениях:

"Разделим, например, границу на n частей и каждой точке на одной части сопоставим $n-1$ точек из других частей – по одной из каждой части, а затем свяжем значения u и v в этих n точках n уравнениями, изменяющимися непрерывно при изменении положения n выбранных точек. Эти условия, совокупность которых образует непрерывное множество и которые выражаются посредством уравнений, связывающих произвольные функции, являются, вообще говоря, необходимыми и достаточными для определения функции, всюду непрерывной в данной области, только при дальнейшем ограничении, именно, при добавлении равенств, связывающих входящие произвольные постоянные".

T.Carleman [34] предполагая, что $\alpha[\alpha(\mathrm{z})]=\mathrm{z}$ всюду на σ, в области Ω^+ рассмотрел однородную задачу, соответствующую следующей граничной задаче:

Найти функцию $\Phi(\mathrm{z})$, *голоморфную в области* Ω^+, *за исключением конечного числа полюсов, и непрерывно продолжаемую на* σ, *по граничному условию*

$$\Phi[\alpha(\mathrm{z})]=\mathrm{G}(\mathrm{z})\Phi(\mathrm{z})+\mathrm{g}(\mathrm{z}),\quad \forall\,\mathrm{z}\in\sigma \tag{2.3.2}$$

Для записанной в комплексной форме системы Коши – Римана

$$\Phi_{\bar z}=0, \tag{2.3.3}$$

заданной в объединении Ω областей Ω^+ и Ω^-, условие (2.3.1) является условием сопряжения со смещением на линии скачков σ. Условие (2.3.2) для уравнения (2.3.3) в области Ω^+ представляет собой граничное (или краевое) условие со смещением. Условие (2.3.1) сопрягает граничные значения $\Phi^+(\mathrm{z})$ и $\Phi^-(\mathrm{z})$ в точках z и $\alpha(\mathrm{z})$, смещенных друг относительно друга. Краевое условие (2.3.2) связывает значение искомого решения уравнения (2.3.3) в сдвинутых (смещенных) друг относительно друга точках z и $\alpha(\mathrm{z})$ границы σ области Ω^+. Поэтому задача (2.3.2) для системы (2.3.3) в области Ω^+ является задачей с локальным смещением.

Регулярное в области Ω решение $\Phi(\mathrm{z})$ системы (2.3.3), непрерывное в $\overline{\Omega}=\Omega\cup\sigma$ и удовлетворяющее условию Гельдера на σ, удовлетворяет следующему краевому условию с нелокальным (интегральным) смещением

$$\Phi(\mathrm{z})=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\sigma}\frac{\Phi(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\xi-z}\qquad\forall\xi\in\sigma,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Любая гормоническая в круге $|z|<1$ функция $u(z)\equiv u(x,y)$ из класса $C^1(|z|\le 1)$ удовлетворяет необходимому краевому условию с нелокальным смещением

$$\frac{\partial u}{\partial v}(\theta)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u'(\varphi)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi-\theta}{2}\,d\varphi,\qquad z=e^{i\varphi},$$

где v - внешняя к окружности $|z|=1$ единичная нормаль в точке $\exp(i\theta)$.

Задача Франкеля (см. [35, с.99]) можно отнести к классу краевых задач с локальным смещением на части границы.

Задача, предложенная А.В. Бицадзе и А.А. Самарским [4] для эллиптического уравнения второго порядка, является внутреннекраевой задачей с локальным смещением. Своеобразие этой задачи состоит в том, что искомое решение должно удовлетворять условию, связывающему его значения в гомоморфных точках, одна из которых лежит на части границы, а другая – внутри области задания уравнения.

2.4 О задачах Фурье и Стеклова

В.А. Стеклов [1] в 1896 г. обратил внимание, что различные задачи об охлаждении тел линейных размеров, переведенные на язык анализа, сводятся к интегрированию дифференциального уравнения в частных производных типа

$$p(x)u_t=u_{xx}-q(x)u,\qquad a<x<b,\quad 0<t<T, \tag{2.4.1}$$

при начальном условии

$$u(x,0)=\tau(x),\quad a\le x\le b, \tag{2.4.2}$$

и предельных условиях

$$a_1u(a,t)+a_2u_x(a,t)+a_3u(b,t)+a_4u_x(b,t)=0, \tag{2.4.3}$$

$$b_1u(a,t)+b_2u_x(a,t)+b_3u(b,t)+b_4u_x(b,t)=0, \tag{2.4.4}$$

Здесь: $u=u(x,t)$ искомое в области $\Omega=\{(x,t):a<x<b,0<t<T\}$ функция; T - расчетное время; $p(x),q(x),\tau(x)$ - заданные функции из класса $C[a,b]$; a_j,b_j $(j=1,2,3,4)$ суть некоторые заданные постоянные; $p(x)>0,q(x)\ge 0$ для всех $x\in[a,b]$; линейные формы в левых частях (2.4.3)-(2.4.4) линейно независимы между собой, т.е. по крайней мере одна из разностей $a_ib_j-a_jb_i$ $(i,j=1,2,3,4;i\ne j)$ например, $a_2b_4-a_4b_2$, отлична от нуля.

Условия (2.4.3)-(2.4.4), имеющие, по словам А.А. Самарского [36], нестандартный вид, являются краевыми условиями со смещением; они устанавливают связь значений искомого решения u и его производной u_x в точках (a,t) и (b,t), лежащих на частях σ_{at} и σ_{bt} границы $\sigma_{xt}=\sigma_{at}\cup\sigma_{bt}\cup\sigma_{x0}\sigma_{xT}$.

Преобразования

$$x=\int_0^{\xi}\frac{ds}{k(\mathrm{s})}+a,\quad a=const<b=\int_0^{l}\frac{ds}{k(\mathrm{s})}+a,$$

$$U=u\left(\int_0^{\xi}\frac{ds}{k(\mathrm{s})}+a,\mathrm{t}\right),\quad p(\mathrm{x})=\mathrm{c}\,\rho(\xi)\mathrm{k}(\xi),\quad q(\mathrm{x})=m(\xi)\mathrm{k}(\xi)$$

связывают уравнение (2.4.1) с уравнением

$$gU_t=\left[\mathrm{k}(\xi)\mathrm{U}_{\xi}\right]_{\xi}-mU,\quad g=c\rho \tag{2.4.5}$$

которому должна удовлетворять температура $U=U(\xi,t)$ в каждый момент времени $t>0$ и для всякой точки ξ твердого стержня $0\le\xi\le l$ конечной длины l с удельной теплотой, плотностью ρ, внутренней теплопроводностью $k(\xi)$ и лучеиспускательной способностью m.

Из краевых условий (2.4.3), (2.4.4) в случае, когда $a_2=a_4=0,\mathrm{b}_1=b_3=0$, получаем

$$a_1u(\mathrm{a},\mathrm{t})+a_3u(\mathrm{b},\mathrm{t})=0,\ \ 0\le\mathrm{t}\le\mathrm{T}, \tag{2.4.6}$$

$$b_2u_x(\mathrm{a},\mathrm{t})+b_4u_x(\mathrm{b},\mathrm{t})=0,\quad 0<\mathrm{t}<\mathrm{T}. \tag{2.4.7}$$

Задача об охлаждении сплошного кольца при определенной ее схематизации редуцируется к задаче отыскания решения $u(\mathrm{x},\mathrm{y})$ уравнения (2.4.1), удовлетворяющего начальному условию (2.4.2) и краевым условиям

$$u(\mathrm{a},\mathrm{t})=u(\mathrm{b},\mathrm{t}) \tag{2.4.8}$$

$$u_x(\mathrm{a},\mathrm{t})=u_x(\mathrm{b},\mathrm{t}) \tag{2.4.9}$$

которые следуют из (2.4.6) и (2.4.7) при $a_1=-a_3\ne0$ и $b_2=-b_4\ne0$. Эта задача была поставлена еще Фурье [1].

Задача Фурье (2.4.8)-(2.4.9) для параболического уравнения с сосредоточенным запаздыванием является математической моделью процесса размножения отдельной популяции в одномерном биологическом реакторе, имеющем форму достаточно длинной трубки, замкнутой только в кольцо [33, с.137].

Пусть $a_4 \neq 0, a_2 = 0, \mathrm{b}_2 \neq 0, \mathrm{b}_4 = 0$. Тогда (2.4.3) и (2.4.4) соответственно можно переписать следующим образом:

$$u_x(\mathrm{b},\mathrm{t}) = \alpha_{11} u(\mathrm{a},\mathrm{t}) + \alpha_{12} u(\mathrm{b},\mathrm{t}), \tag{2.4.10}$$

$$u_x(\mathrm{a},\mathrm{t}) = \alpha_{21}\, \mathrm{u}(\mathrm{a},\mathrm{t}) + \alpha_{22} u(\mathrm{b},\mathrm{t}). \tag{2.4.11}$$

Если $a_2 = a_4 = 0, a_3 \neq 0$ и $b_3 = 0, b_4 \neq 0,$ то

$$u(\mathrm{b},\mathrm{t}) = \beta_{11} u(\mathrm{a},\mathrm{t}), \tag{2.4.12}$$

$$u_x(\mathrm{a},\mathrm{t}) = \beta_{21}\, \mathrm{u}(\mathrm{a},\mathrm{t}) + \beta_{22} u_x(\mathrm{a},\mathrm{t}). \tag{2.4.13}$$

В.А. Стеклов [1] различал два класса задач: к первому классу он относил те, которые требуют найти решения уравнения (2.4.1), удовлетворяющие условиям (2.4.10) - (2.4.11), ко второму – те, когда ищется решение уравнения (2.4.1) по краевым условиям (2.4.12) - (2.4.13).

Условия (2.4.10) - (2.4.11) заключают в себе задачи об охлаждении незамкнутых твердых тел линейных размеров (прямой стержень; стержень, изогнутый в незамкнутую кривую), условия же (2.4.12) - (2.4.13) соответствуют задачам об охлаждении замкнутых твердых тел линейных размеров (сплошное кольцо; стержень, изогнутый в незамкнутую кривую).

2.5 Необходимые краевые и внутреннекраевые условия со смещением для оператора Коши – Римана

Пусть Ω - ограниченная область плоскости комплексной переменной $z = x_1 + ix_2$, граница σ которой состоит из конечного числа непересекающихся кусочно – гладких замкнутых линий.

В области Ω рассмотрим уравнение

$$Lu = f(\mathrm{z}), \tag{2.5.1}$$

задаваемое оператором Коши – Римана $L = \partial / \partial \bar{z}$, где

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \ \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = u_{\bar{z}},$$

$$u = u(\mathrm{z}) = u_1(z) + iu_2(z), \quad f(\mathrm{z}) = f_1(z) + if_2(z), \quad \mathrm{z} = (\mathrm{x}_1, x_2).$$

При $f(z) \equiv 0$ уравнение (2.5.1) переходит в комплексную форму записи системы Коши – Римана:

$$u_{\bar{z}} = 0, \quad z \in \Omega \tag{2.5.2}$$

Для любой функции $u \in D(\mathrm{L})$ и v из области определения $D(\mathrm{L}^*) = D(\mathrm{L})$ оператора $\mathrm{L}^* = -\partial/\partial\bar{z}$, сопряженного по Лагранжу к оператору L, справедливо равенство

$$vLu - uL^*v = L(\mathrm{uv}) = (\mathrm{uv})_{\bar{z}}. \tag{2.5.3}$$

Если область определения $D(\mathrm{L})$ и область значения $R(\mathrm{L})$ оператора L принадлежат классу $C(\overline{\Omega})$, то из (2.5.3) на основании формулы Грина получаем

$$(v, Lu)_0 - (u, L^*v)_0 = \int_\Omega (\mathrm{uv})_{\bar{z}}\, d\Omega = -\frac{i}{2}\int_\sigma u(\mathrm{z})\,\mathrm{v}(\mathrm{z})\,\mathrm{dz}. \tag{2.5.4}$$

Пусть $v(\mathrm{z})$ принадлежит ядру $KerL^*$ оператора L^*. Тогда из (2.5.4) заключаем: если $u(\mathrm{z}) \in \mathrm{D(L)}$ - решение уравнения (2.5.1) с правой частью $f(\mathrm{z}) \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$, то оно удовлетворяет следующему краевому условию с нелокальным смещением:

$$\int_\sigma v(\mathrm{z})\,\mathrm{u(z)\,dz} = 2\mathrm{i}(\mathrm{v}, \mathrm{f})_0 \tag{2.5.5}$$

Условие (2.5.5), в частности, позволяет получить известную формулу Бореля – Помпею:

$$u(\mathrm{z}) = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{u(\mathrm{t})\,\mathrm{dt}}{t - z} - \frac{1}{\pi}\int_\sigma \frac{\mathrm{f(t)}}{t - z} dt_1 dt_2, \ \ t = t_1 + it_2, \tag{2.5.6}$$

которая справедлива для любого решения $\mathrm{u(z)}$ уравнения (2.5.1) с $f(\mathrm{z})\in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$ удовлетворяет необходимому внутреннекраевому условию (2.5.6).

Если $\mathrm{u(z)}$ - решение (2.5.2), то (2.5.6) получаем интегральную формулу Коши

$$u(\mathrm{z})=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma}\frac{u(\mathrm{t})\,\mathrm{dt}}{t-z}\quad \forall z\in\Omega \tag{2.5.7}$$

Любое непрерывное в замкнутой области $\overline{\Omega}$ решение $u(\mathrm{z})$ нагруженного интегрального уравнения (2.5.7) является аналитической в области Ω функцией комплексной переменной z. Поэтому на основании формул Сохоцкого – Племеля [17, с.66] справедлива следующая

Лемма. Пусть $\mathrm{u(z)}$ - решение уравнения (2.5.7) из класса $\mathrm{C}(\overline{\Omega})\cap \mathrm{C}^{(0,\lambda)}(\sigma)$ Тогда оно удовлетворяет нелокальному краевому условию

$$u(\mathrm{z})=\frac{1}{\pi i}\int_{\sigma}\frac{u(\mathrm{t})\,\mathrm{dt}}{t-z}\quad \forall z\in\Omega \tag{2.5.8}$$

для всех точек z , принадлежащих гладким частям границы σ области Ω.

Хорошо известно, что условие (2.5.8) является необходимым и достаточным, чтобы функция $u(\mathrm{t})$ была краевым значением функции $\mathrm{u}(z)$, аналитической в области Ω.

В теории аналитических в области Ω функции $\mathrm{u}(z)$ условие (2.5.8) рассматривается в системе с обобщенным краевым условием Римана – Гильберта – Пуанкаре на контуре $\sigma=\partial\Omega$

$$\mathrm{Re}\left[a_j(\mathrm{z})\mathrm{u}^{(\mathrm{j})}(\mathrm{z})+\int_{\sigma}K_j(\mathrm{z},\xi)\mathrm{u}^{(\mathrm{j})}(\xi)\,\mathrm{d}\sigma\right]=c(\mathrm{z}). \tag{2.5.9}$$

Здесь по индексу j производится суммирование от 0 до m; $c(\mathrm{z}),\mathrm{a}_0(\mathrm{z}),\mathrm{a}_1(\mathrm{z}),...,\mathrm{a}_m(\mathrm{z})$ - заданные на σ функции класса $\mathrm{C}^{(0,\lambda)}(\sigma);\mathrm{K}_j(\mathrm{z},\xi)$ - заданные на $\sigma\times\sigma$ функции вида

$$K_j(\mathrm{z},\xi)=\frac{K_j^0(\mathrm{z},\xi)}{|z-\xi|^{\alpha}},\ 0\le\alpha=const<1,\quad j=0,1,...,\mathrm{m},$$

причем $K_j^0(z,\xi)$ на σ удовлетворяет условию Гельдера по обеим переменным; под $u^j(z)$ подразумевается граничное значение на σ изнутри области Ω производной j - го порядка, $u^0(z) = u(z)$.

Задача Римана – Гильберта – Пуанкаре (2.5.2) и (2.5.9) была поставлена в предложении, что $a_m(z) \neq 0$ для всех $z \in \Omega$, и решена И.Н.Векуа в 1942 г. [37, с. 1096]. Эта задача, очевидно, относится к краевым задачам с нелокальным смещением.

Пусть $u(z)$- непрерывное в замкнутой области $\overline{\Omega}$ решение обобщенной системы Коши – Римана

$$u_{\bar{z}} + A(z)u + \overline{B}(z)\overline{u} = 0$$

С непрерывными в $\overline{\Omega}$ коэффициентами $A(z), B(z)$, а $v(z)$- решение сопряженного с ним уравнения

$$v_{\bar{z}} - A(z)v + \overline{B}(z)\overline{v} = 0$$

из класса $C\overline{\Omega}$. Тогда они удовлетворяют следующему краевому условию с интегральным смещением:

$$\mathrm{Re}\left[i\int_{\sigma} u(z)\,v(z)\,dz \right] = 0,$$

которое в теории обобщенных аналитических функции известно как тождество Грина [18, с.140].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей диссертационной работе получены следующие новые результаты по спектральным вопросам дифференциального оператора Коши – Римана, в основном для краевой задачи типа Дирихле.

- Задача на собственные значения дифференциального оператора Коши – Римана с краевыми условиями типа Дирихле редуцирована к квазисингулярному интегральному уравнению.
- Вычислен индекс и установлена условие нётеровости квазисингулярного интегрального уравнения.
- Получен аналог условии Лопатинского.
- Доказана непрерывность интеграла типа Коши, квазисингулярного уравнения в главном значении, связанные союзным оператором.

При выполнении диссертационной работы рассмотрены дополнительные спектральные краевые задачи имеющие внутреннее единство:

- при $\lambda \neq 2$, $\mathrm{Re}\,\lambda \neq 0$ для оператора Коши – Римана с нелокальными краевыми условиями указана область, где отсутствует спектр исходного оператора Коши – Римана, то есть указаны те λ, которые принадлежат к резольвентному множеству оператора Коши – Римана;

- регуляризованы сингулярное интегральное уравнение в смысле С.Г. Михлина и доказано эквивалентность с исходной спектральной задачей;

- редуцировано сингулярное интегральное уравнение к линейному интегральному уравнению Фредгольма 2 – го рода;

- изучены структуры ядра Фредгольмого уравнения;

В заключении отметим, что вопросы локализации собственных значении исходного оператора **К**, а также о полноте, минимальности, базисности системы корневых векторов при существовании собственных и присоединенных векторов остается открытым, в котором требуется дальнейшие дополнительные исследования.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. А. Стеклов. Основные задачи математической физики. Т.I,II, Петроград: Петроградский ун-т,-1922.
2. Ф. И. Франкль Обтекание профилей газом с местной сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения// Прик. матем. и механика, 1956. Т.20, №2. С.196-202.
3. А.М.Нахушев Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения // Докл. АН СССР, 1969. Т.187, №4. С. 736-739.
4. А.В.Бицадзе, А. А. Самарский О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР,1969. Т.185, №4. С. 739-740.
5. А. М. Нахушев Задачи со смещением для уравнений в частных производных, М.:Наука,2006.287с.
6. Е.Ю. Арланова, Задача со смещением для уравнения Бицадзе – Лыкова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ. – мат. науки, 2012. №4(29). С.26-36.
7. А. М. Нахушев, О современном состоянии краевых задач со смещением для основных типов уравнений в частных производных / Труды Третьей Всероссийской научной конференции (29-31 мая 2006г.). Часть 3, Дифференциальные уравнения и краевые задачи/ Матем. Моделирование и краев. задачи, Самара:СамГТУ, 2006. С.170-173.
8. Д. Е. Касымова, А. Б. Тунгатаров, Об одной краевой задаче со смещением для уравнения Карлемана – Векуа с сингулярной точкой / Обобщенные аналитические функции и их приложения, Межвузовский сб. науч. трудов, Караганда: КарГУ, 1997. С.48-53.
9. Дезин А.А. Дифференциально – операторные уравнения. Метод модельных операторов в теории граничных задач// Тр. мат. ин-та им. В.А.Стеклова. 2000. Т.229.
10. Кальменов Т.Ш. Критерий единственности решения задачи Дарбу для одного вырождающегося уравнения// Там же. 1971. Т.12. №1. С. 178-181.
11. М. Отелбаев, А. Н. Шыныбеков, О некоторых задачах типа Бицадзе – Самарского // Докл. АН СССР, 1982. Т.265,№4. С. 815-819.
12. Ying Wang, Yufeng Wang, Two Boundary – Value Problems for the Cauchy – Riemann Equation in a sector, Complex Analysis and Operator theory, 2012, vol.6, no. 6, pp. 1121-1138.
13. А. Ю. Тимофеев Краевая задача для обобщенного уравнения Коши – Римана в пространствах, описываемых модулем непрерывности// Уфимс. матем. журн.,2012. Т.4, №1. С. 146-152.
14. А. С. Ильчуков О поведении решения краевой задачи для обобщенного уравнения Коши – Римана // Вест. Удмуртск. ун – та. Матем. Мех. Компьют. науки, 2013. №2. С. 27-34.

15. К. Н. Оспанов, М. Отелбаев, Краевые задачи для обобщенной системы Коши – Римана с негладкими коэффициентами // Докл. АН СССР, 1985. Т. 283, №1. С. 46-49.
16. К. Н. Оспанов, М. Отелбаев Об обобщенной системе Коши – Римана с негладкими коэффициентами // Изв. вузов. Матем.,1989.№3. С.48-56.
17. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения.–М.: Наука, 1968.–511 с.
18. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции.–М.: Наука, 1988.–512 с.
19. Блиев Н.К. обобщенные аналитические функции в дробных пространствах.-Алма – Ата:Наука,1985.-322с.
20. Михайлец В.А. Спектральные задачи с общими краевыми условиями: Автореф. докт. физ.-мат. наук.–Киев, 1989.–29 с.
21. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ.–М., 1976.–Ч.1.–320 с.
22. Титчмарш Е. Теория функций.–М.: Наука, 1980.–463 с.
23. Михлин С.Г. Сингулярные интегральные уравнения //УМН.–1948.–Вып. 3(25).–С.30-111.
24. Ф.Рисс,Б. Секефальви-Надь,Лекции по функциональному анализу,М.:Наука,1979. 588 с.
25. Кальмушевский И.И. О решениях некоторых интегральных уравнений с ядрами, зависящими от разности и суммы аргументов // Дифференциальные уравнения.–1980.–Т.16, №5.–С.941-943.
26. Сахнович Л.А. О подобии операторов //Сиб. мат. журнал.–1972.–Т.13, №4.–С.868-883.
27. Н.С.Иманбаев, Б.Е.Кангужин, Ж.Киргизбаев О фредгольмовости одной спектральной задачи, связанной с оператором Коши-Римана/ Вопросы устойчивости, прочности и управляемости динамических систем, Межвузовский сб. науч. трудов, М.: РГОТУПС,2002. С.54-59.
28. И.А.Акбергенов, О приближенном решении интегрального уравнения Фредгольма и об определении его собственных значений// матем. сб., 1935. Т.42,№6. С. 679-698.
29. Иманбаев Н.С. О задаче на собственные значения оператора Коши-Римана с краевыми условиями типа Бицадзе-Самарского //Вестник КазНПУ им. Абая. Серия «физико-математические науки». 2013. №3 (43).- с. 86-93.
30. Михайлец В.А. Спектральные задачи с общими краевыми условиями: Автореф. докт. физ.- мат. наук.– Киев, 1989. – 29 с.
31. Sadybekov M.A., Imanbaev N.S. On the Basis Property of Root Functions of a Periodic Problem with an Integral Perturbation of the Boundary Condition//ISSN 0012-2661, Differential Equations, 2012, Vol. 48, № 6, pp. 896-900. Moscow.
32. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ.–М., 1976.–Ч.1.–320 с.
33. Нахушев А.М. уравнение математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.

34. Carleman T. Sur la theorie des equations integrals et ses applications // Verhandl. des intern. math. kongr. Zurich, 1932. Bd.1.
35. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
36. Самарский А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений// Дифференц. Уравнения. 1980. Т. 16, №11. С. 1925-1935.
37. Бицадзе А.В. граничные задачи теории аналитических функций// Мат. энциклопедия, 1977. Т.1.
38. Иманбаев Н.С., Кангужин Б.Е., Токибетов Ж.А., Кубенова Ш. И. // О спектре оператора Коши – Римана. Межвузовский сборник научных трудов. Караганда: КарПИ, 1995. С. 46-51.
39. Иманбаев Н.С., Кангужин Б.Е., Ержанов Н.Е. О Фредгольмовости сингулярного интегрального уравнения, связанное с оператором Коши – Римана// Материалы МНК "Современные проблемы математики и информационных технологии." Астана:ЕНУ им.Л.Гумилева. (3-5 октября 2002г.). С.92.
40. Иманбаев Н.С. О приближенном решении уравнении Коши-Римана и об определении их собственнных значений. Автореф. дисс. … к.ф.-м.н. Алматы. КазНУ им. аль-Фараби,- 1997. 21с.
41. Иманбаев Н.С. Задача о собственных значениях дифференциального оператора Коши-Римана с нелокальными краевыми условиями// Вестник Самарского Государственного Технического Университета. Серия «физико-математические науки», 2014. №1(34). С.25-36.
42. A.B.Amanzholova., N.S.Imanbaev.,A.D.Niyazimbetov., On an inhomogeneous boundary value problem with shift into the region for the Cauchy-Riemann equations with spectral parameter// International Journal of Pure and Applied Mathematics. -Volume 93.- No.3. -2014. Pp.449-461.
43. Аманжолова А.Б. К спектральному вопросу дифференциального оператора Коши-Римана с однородными краевыми условиями типа задачи Дирихле// Қазақстанның қарқынды даму кезеңінде жаратылыстану – гуманитарлық білім беру және ғылымды жетілдіру мәселелері" атты халықаралық ғылыми-практикалық конференция жинағы, 15-16 мамыр 2014 жыл.
44. Аманжолова А.Б. К спектральному вопросу дифференциального оператора Коши-Римана с однородными краевыми условиями типа задачи Дирихле// Вестник МКТУ.- №2. -2014 г.С.15-19.