Ф-ОБ-001/033

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
МЕЖДУНАРОДНЫЙ КАЗАХСКО-ТУРЕЦКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Х.А.ЯСАВИ

УДК 517.95: 517.956.223

На правах рукописи

Ахмет Тузун

НОРМИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ПОСТРОЕНИЮ РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Магистрская диссертация по специальности 6М060100-МАТЕМАТИКА на соискание академической степени магистра естественных наук

ТУРКЕСТАН -2016

Ф-ОБ-001/033

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
МЕЖДУНАРОДНО КАЗАХСКО ТУРЕЦСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Х.А.ЯСАВИ

Допущен к защите :
Заведующая кафедрой
“Математика” к.техн.н
_________Қошанова М.Д.
«_____»_____________2016 г.

Магистерская диссертация

НОРМИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ПОСТРОЕНИЮ РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

специальность: 6М060100-МАТЕМАТИКА

Магистрант _________________________ А. Тузун

(подпись)

Научный руководитель,
д.ф.-м.н., профессор _______________________ Б.Х.Турметов
(подпись)

ТУРКЕСТАН -2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВЕДЕНИЕ

Актуальность работы: В последние годы возрос интерес к исследованию так называемых дифференциальных уравнений дробного порядка. Это обусловлено как развитием самой теории дробного интегрирования и дифференцирования, так и многочисленными применениями. Теория дробного исчисления применяются при описании широкого класса физических и химических процессов протекающих во фрактальных средах. А также при моделировании экономических и социально-биологических явлений. По этой тематике опубликованы, многочисленные монографии и обзорные статьи [1-26].

Дробные интегралы и производные - это обычные интегралы и производные. Однако в случае дробного порядка эти понятия имеют своеобразную специфику, которая проявляется, например, в том что для них в разных ситуациях возникают их различные модификации. Различные определения дробных интегралов и производных и их модификации приведены в работе [12]. Использования операторов дробного порядка позволяет глубже понять известные результаты теории функции и краевых задач, и получить новый класс решений, позволяющий охватить широкий круг задач.

Одним из приоритетных направлений теории дифференциальных уравнений дробного порядка является методы построения решения этих уравнений.

Первоначальные результаты, связанные с интегро-дифференцированием дробного порядка, принадлежат Н. Абелью и Ж Лиувиллю. Следует особо отметить цикл работ А.В. Летникова [27-29], который за время своей 20-летней научной деятельности разработал полную теорию дифференцирования с произвольным показателем.

Развитию дробного исчисления способствовала весьма содержательная книга С. Г. Самко, А. А. Килбаса и О. А. Маричева «Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения». В ней впервые в мировой монографической литературе систематически излагаются классические и современные результаты, полученные по указанной теории.

Физическая интерпретация интегралов дробного порядка впервые приведена в работе Р.Р. Нигматуллина [7]. Подробный обзор, посвящённый проблемам использования дробного интегро - дифференциального исчисления для описания динамики различных систем и процессов управления, приведены в работах А.Г. Бутковского и других [2,3]. Приложение дробного исчисления в моделировании динамических систем описана в работе В.В.Васильева [4], а различные модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка изложены в работах В. Е.Тарасова [8] и В. В. Учайкина [9].

Одним из приоритетных направлений теории дифференциальных уравнений дробного порядка является методы построения решения этих уравнений. Для решения этого вопроса применялись различные методы.

В этих работах в частности при решении задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка применялись метод интегральных преобразований, операционный метод, метод сведения к интегральному уравнению Вольтера с дальнейшим применением метода последовательных приближений и другие. При этом в зависимости от рассматриваемых операторов дробного дифференцирования постановка задачи Коши имеют различный вид. Такие же методы могут быть применены для получения явных решений дифференциальных уравнений вида (1). Существуют различные методы решения задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка. Подробное изложение данных методов приведено в работах [12,15].

Так в работе Джрбашяна М.М. и Нерсесяна [23] была изучена задача Коши для специального класса дифференциальных уравнений дробного порядка. Задача Коши решена сведением ее к эквивалентному интегральному уравнению. Одним из распространенным методом решения дифференциальных уравнений дробного порядка является метод интегральных преобразований. Подробное изложение этого метода можно изучить в статье [30] и книгах [12,15].

Эффективным методом построения явных решений и решение задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка является метод операционного исчисления Микусинского. В работах Лучко и соавторов [31-33] данный метод был применен для решения линейных дифференциальных уравнений дробного порядка с постоянными коэффициентами с производными типа Римана-Лиувилля, Капуто и Хилфера. В дальнейшем в работе [34] данный метод применен для общего уравнения с оператором Хилфера.

В работе А.Псху [35] сформулирована и решена начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с производными Римана–Лиувилля. Задача редуцирована к интегральному уравнению, построено явное представление решения в терминах функции Райта.

Отметим также, что в работах [36 - 40] задача Коши для уравнений дробного порядка решена методом декомпозиции Адомайна.

В настоящей работе разрабатывается алгоритм построения решения дифференциальных уравнений дробного порядка отличных от выше указанных методов. Данный метод основан в построении нормированных систем связанных с операторами дифференцирования дробного порядка. В отличии от рассмотренных методов, данный метод не требует ввода специальных пространств, углубленных знаний операционного исчисления и т.д. Этим обоснуется актуальность данной тематики.

Цель диссертации: Основной целью диссертационной работы является разработка операторных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка. Изучение качественных свойств, специальных функций, связанных с решениями дифференциальных уравнений дробного порядка. Исследования начальных задач для дифференциальных уравнений дробного порядка.

Основными задачами диссертации являются: Построение нормированных систем связанных с обобщенными однородными операторами и их применения к построению решений дифференциальных уравнений дробного порядка с производными дробного порядка в смысле Римана-Лиувилля , Капуто и их различных модификации. Нормированные системы строятся в виде ряда и будут доказаны сходимости этих рядов.

Применение нормированных систем для построения решения обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка. Используя свойства нормированных систем, будут построены точные решения дифференциальных уравнений дробного порядка.

Разработка методов построения частных решений однородных и неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка.

Построение фундаментальных решений обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка и их применения к решению задачи Коши.

Исследование свойств специальных функций связанных с решениями дифференциальных уравнений дробного порядка. Будут исследованы свойства специальных функций типа Миттаг-Лефллера.

Методы исследования. В диссертационной работе используются методы уравнений математической физики, математического анализа, функционального анализа, и методы интегральных уравнений.

Личный вклад автора. Подстановка задачи принадлежить научному руководителю автора. Теоретические расчеты и основные научные выводы основаны на широкомасштабном исследовании диссертанта. Результаты издания материалов и обработки и подготовки докладов с конференций выполнил сам диссертант.

Апробация работы. По материалам диссертации были проведены доклады на научном семинаре МКТУ кафедры «Математика» и в международной конференции в городе Шымкент .

Публикации работы. По материалом исследовательских работ были опубликованы 2 статья, в том числе 1 статья опубликовано в трудах конференции и 1 статья опубликовано в журнале Вестник МКТУ

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введение, двух глав, заключения и использованных литератур. Основной материал состоит из 67 страниц, список использованных литератур 55 нименований.

Краткое содержание диссертации

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение вида

$$D^{\alpha}y(t)-a_1D^{\alpha-1}y(t)-...-a_{m-1}D^{\alpha-m+1}y(t)-a_my(t)=f(t),t>0, \tag{0.1}$$

где a_i - постоянные, $\alpha > 0, \alpha \in (m-1, m], m = 1, 2, \ldots$, D^{β}- оператор дробного дифференцирования порядка β.

В настоящей работе разрабатывается операторный метод решения дифференциальных уравнений дробного порядка, который основывается на построения нормированных систем относительно операторов дробного порядка.

В работе [41] в случае $\alpha = m$, т.е. для линейного обыкновенного дифференциального уравнения m-го порядка с постоянными коэффициентами, на основе построенных нормированных систем разработан новый метод построения решения задачи Коши и фундаментальной системы решений. Отметим, что данный метод не требует нахождения корней характеристического уравнения соответствующий дифференциальному уравнению (1).

В настоящей диссертационной работе рассматриваются развитие метода нормированных систем для уравнения вида (1) в общем случае т.е. при всех $\alpha \in (m-1, m], m = 1, 2, \ldots$. При этом в уравнении (1) в качестве оператора D^{α} будут рассмотрены производные в смысле Римана-Лиувилля, Капуто и различные их модификации.

Как уже мы отметили, решение рассматриваемых дифференциальных уравнений дробного порядка строятся в виде ряда и поэтому необходимо исследовать равномерную и абсолютную сходимость этих рядов. Разрабатываемый метод применим, как и обыкновенным дифференциальным уравнениям и так уравнениям в частных производных дробного порядка. При этом строится фундаментальные системы решений рассматриваемых уравнений, которые позволяют рассматривать задачи Коши и краевые задачи.

Отметим, что в работах [42 - 45] данный метод были применены для построения точных решений уравнений вида

$$(D^{\alpha} - \lambda)^n y(t) = f(t), n = 1, 2, \ldots .$$

где D^{α}-один из операторов дробного дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля, Капуто и Адамара.

Кроме того, в диссертационной работе доказывается, что с помощью операторного метода можно построит точные решения дифференциальных уравнений дробного порядка в частных производных.

Переходим к изложению основных результатов диссертации.

В разделе 1.1 приводится определение и основные свойства нормированных систем.

Пусть $X = X(\Omega)$- некоторое линейное пространство функций определенных в области $\Omega \subset R^n$ и L_1, L_2- линейные операторы, заданные в пространстве $X = X(\Omega)$. Бесконечная система функций $f_k(x) \in X, k = 0, 1, 2, \ldots$, любая конечная подсистема которой линейна независима называется f-нормированной относительно (L_1, L_2) в области Ω с основанием $f_0(x)$, если всюду в этой области выполняются равенства

$$L_1 f_0(x) = f(x), L_1 f_k(x) = L_2 f_{k-1}(x), k = 0,1,2,...$$

Если система $f_k(x) \in X, k = 0,1,2,...$ является f - нормированной относительно операторов (L_1, L_2), то формальное решение уравнения вида

$$(L_1 - L_2)u(x) = f(x) \tag{0.2}$$

представляется посредством ряда $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} L_2^k f_k(x)$.

В разделе 1.2 мы приведем методику построения нормированных систем для некоторых классов операторов.

Определение 1. Оператор D_β называется обобщенно-однородным порядка β относительно переменной t, если

$$D_\beta t^\mu = C_{\beta,\mu} t^{\mu-\beta}, \tag{0.3}$$

где $\beta, \mu \in R, 0 < \beta \le \mu,\ C_{\beta,\mu}$ -постоянное.

Далее, изучается дифференциальное уравнения вида

$$D_\beta y(t) = \lambda y(t). \tag{0.4}$$

Пусть коэффициенты $C(\beta, s, i)$ определяются равенством

$$C(\beta, s, 1) = \left(t^{-\beta i - s} D_\beta t^{\beta i + \beta + s}\right)$$

Рассмотрим функцию

$$y_s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \frac{t^{\beta i + s}}{C(\beta, s, i)} \tag{0.5}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть ряд (0.5) сходится и к нему можно почленно применят оператор D_β. Если существует значения параметра $s,$ при которых

$$\left(t^{-\beta i - s + \beta} D_\beta t^{\beta i + s}\right)\Big|_{i=0} = 0,$$

то функции $y_s(x)$ при таких значениях параметра s удовлетворяют уравнению (0.4).

Следствие 1. Функции $y_s(x)$ при всех значений $s=0,1,...$ являются собственными функциями оператора D_β.

Рассмотрим теперь следующее обобщение функции (0.5):

$$y_{s,p}(t)=\sum_{i=p}^{\infty}\lambda^{i-p}\binom{i}{p}\frac{t^{\beta i+s}}{C(\beta,s,i)}, \quad (0.6)$$

где $\binom{i}{p}=\frac{i!}{p!(i-p)!}, p=0,1,2,...$. Очевидно, что $y_{s,0}(t)=y_s(t)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть ряд (0.6) сходится и к нему можно почленно применят оператор $D_\beta-\lambda$. Если существует значения параметра s, при которых выполняется равенство

$$\left(t^{-\beta i-s+\beta}D_\beta t^{\beta i+s}\right)\Big|_{i=0}=0,$$

то функции $y_{s,p}(x)$ при всех таких значениях s, удовлетворяют уравнениям

$$\left(D_\beta-\lambda\right)y_{s,p}(t)=y_{s,p-1}(t), p\ge 1, \quad (0.7)$$

$$\left(D_\beta-\lambda\right)y_{s,0}(t)=0, \quad (0.8)$$

Следствие 2. В условиях теоремы 2 функции $y_{s,p}(t)$ при всех значений $s=0,1,...,$ являются присоединенными функциями оператора D_β.

Следствие 3. В условиях теоремы 2 функции $y_{s,p}(t)$ при значениях $p=0,1,...,N-1$ являются решениями уравнения

$$\left(D_\beta-\lambda\right)^N y(t)=0.$$

т.е. образуют нормированную по параметру p систему относительно оператора $D_\beta-\lambda$.

В третьем параграфе главы 1 рассматриваются применение обобщенно-однородних операторов к решению итерационных дифференциальных уравнений дробного порядка.

Пусть $m-1<\alpha\le\gamma\le m, m=1,2,...$. Рассмотрим оператор

$$D^{\alpha,\gamma}f(t)={}_{RL}J^{(\gamma-\alpha)}\cdot\frac{d^m}{dt^m}\cdot{}_{RL}J^{(m-\gamma)}f(t), t>0.$$

Данный оператор в случае $m=1$ был введен в работе [32] и обобщают известные операторы дифференцирования дробного порядка. В частности

$D^{\alpha,\alpha} =_{RL} D^{\alpha}$ - оператор дифференцирования дробного порядка в смысле Римана-Лиуивлля, $D^{\alpha,m} =_{C} D^{\alpha}$ - оператор дифференцирования в смысле Капуто, а если $\gamma = \beta(m-\alpha)+\alpha, 0<\beta\le 1$, то $D^{\alpha,\gamma} = D^{\alpha,\beta} -$ оператор Хильфера [33].

Справедливо следующее утверждение

Теорема 3. Пусть $m-1<\alpha\le\gamma\le m, m=1,2,\dots$, $s=\gamma-1,\dots,\gamma-m$. Тогда функции

$$y_{s,p}(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^{i-p}\frac{t^{i\alpha+s}}{\Gamma(i\alpha+s+1)}$$

для всех значений $p=0,1,\dots,n-1$ являются решениями следующего уравнения дробного порядка

$$\left(D^{\alpha,\gamma}-\lambda\right)^{n}y(t)=0, t>0 \tag{0.9}$$

Этот же метод применим для неоднородного уравнения. А именно, пусть

$$E^{p}_{\alpha,\alpha}(\lambda,t)=\sum_{i=p}^{\infty}\lambda^{i-p}\binom{i}{p}\frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+\alpha)}, p=0,1,\dots.$$

Рассмотрим следующую функцию

$$y_p(f)(t)=\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E^{p}_{\alpha,\alpha}(-\lambda(t-\tau)^{\alpha})f(\tau)d\tau, \tag{0.10}$$

Теорема 4. Пусть $m-1<\alpha\le\gamma\le m,\ m=1,2,\dots$. Тогда функции $y_p(f)(t), p=0,1,\dots$ образуют f-нормированную систему относительно оператора $D^{\alpha,\gamma}-\lambda$ то есть справедливы равенства

$$\begin{cases}\left(D^{\alpha,\gamma}-\lambda\right)y_0(f)(t)=f(t),\\ \left(D^{\alpha,\gamma}-\lambda\right)y_p(f)(t)=f_{p-1}(t),\ \ p\ge 1\end{cases}$$

Вторая глава работы посвящена к построению решении обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка общего вида.

Пусть $m-1<\alpha\le m, m=1,2,\dots$. Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение

$$D^{\alpha}y(t)-a_1D^{\alpha-1}y(t)-\dots-a_{m-1}D^{\alpha-(m-1)}y(t)-a_my(t)=0,\ \ t>0 \tag{0.11}$$

где a_j-действительные числа, $j=1,2,\dots,m,\ m=1,2,\dots,\ D^{\alpha} =_{RL} D^{\alpha}$ или $D^{\alpha} =_{C} D^{\alpha}$ т.е. оператор дробного дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля или Капуто [12].

Обозначим

$$L_1 = D^{\alpha}, L_2 = a_1 D^{\alpha-1} + \ldots + a_{m-1} D^{\alpha-(m-1)} + a_m .$$

Теорема 5. Пусть $m-1 < \alpha \le m, m = 1,2,\ldots$ и параметр s принимает значения $s = 0,1,\ldots,m-1$. Тогда функции

$$y_s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(a_1 D^{\alpha-1} + \ldots + a_{m-1} D^{\alpha-(m-1)} + a_m \right)^i \frac{t^{\alpha i+s}}{\Gamma(\alpha i + s + 1)} \tag{0.12}$$

для всех $t > 0$ удовлетворяют уравнению (0.11).

Теорема 6. Ряд (0.12) сходится равномерно в любом сегменте $[0,T], T > 0$. Для любого $t \in R_+$ допускается почленное дифференцирование и применение оператора L_1.

Теорема 7. Функции $y_s(t),\ \ s = 0,1,\ldots,m-1$ являются линейно независимыми на любом отрезке $[t_1, t_2] \subset R_+$.

Во втором параграфе главы мы исследуем следующую задачу Коши

$$D^{\alpha} y(t) - a_1 D^{\alpha-1} y(t) - \ldots - a_{m-1} D^{\alpha-(m-1)} y(t) - a_m y(t) = 0, \quad t > 0 \tag{0.13}$$

$$y^{(i)}(0) = b_i, i = 0,1,\ldots,m-1 \tag{0.14}$$

Доказывается, что решение задачи Коши (0.13), (0.14) представляется в виде

$$y(t) = \left(Y^{-1}(0) b, y_F(t) \right), \tag{0.15}$$

где $y_F(t) = (y_0(t), y_1(t), \ldots, y_{m-1}(t))$ и

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_0(t) & y_1(t) & \ldots & y_{m-1}(t) \\ y_0^{(1)}(t) & y_1^{(1)}(t) & \ldots & y_{m-1}^{(1)}(t) \\ . & . & \ldots & . \\ y_0^{(m-1)}(t) & y_1^{(m-1)}(t) & \ldots & y_{m-1}^{(m-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Причем,

$$Y^{-1}(0) = A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -a_2 & -a_1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{m-1} & -a_{m-2} & -a_{m-3} & & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее, в третьем разделе главы 2 мы рассмотрим методы построения решения следующего неоднородного дифференциального уравнения дробного порядка

$$D^{\alpha} y(t) - a_1 D^{\alpha-1} y(t) - \ldots - a_{m-1} D^{\alpha-(m-1)} y(t) - a_m y(t) = f(t), t \in (0,T) \qquad (0.16)$$

где $f(t)$-непрерывная в $[0,T]$ функция.

Для уравнения (0.16) мы изучим задачу Коши с начальными данными

$$y^{(i)}(0) = b_i, i = 0,1,\ldots,m-1 \qquad (0.17)$$

Если рассмотреть начальные данные

$$y^{(i)}(0) = 0, i = 0,1,\ldots,m-1, \qquad (0.18)$$

то как было отмечено выше, эта задача Коши имеет единственное решение. Обозначим это решение через $y_f(t)$. Пусть $\tilde{y}(t)$ единственное решение задачи (0.16), (0.17), которая имеет вид (0.15). Тогда, в силу линейности, функция $y_f(t) + \tilde{y}(t)$ будет единственным решением задачи (0.16), (0.17). Таким образом, для того чтобы решить задачу Коши (0.16), (0.17) необходимо найти функцию $y_f(t)$.

Теорема 8. Единственное решение задачи Коши (0.16), (0.18) имеет вид

$$y_f(t) = \int_0^t f(\tau) y_{\alpha-1}(t-\tau) d\tau \text{,}$$

где функция $y_{\alpha-1}(t)$ определяется равенством

$$y_{\alpha-1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} L_2^k f_{\alpha-1,k}(t)$$

SUMMARY

This is some of the retail order for the operator to develop a method of creting slotions to differential equations. Linear functions in the space of a standardized system introduced and investigated the properties of these system. And these qualities to the creation of a fractional order differential equations using analytical solutions investigated. Retail order operators are examples of the functions of standard systems. And retail operators who participated in the differential nonlinearity of the equation are investigated.

РЕЗЮМЕ

Это некоторые из розничной торговли порядка для оператора, чтобы разработать метод создания решений дифференциальных уравнений. Линейные функции в пространстве стандартизированной системы введены и исследованы свойства этих систем. И эти качества к созданию дробно-дифференциальных уравнений первого порядка с использованием аналитических решений исследованы. Операторы розничного заказа являются примерами функций стандартных систем. А розничные операторы, которые участвовали в дифференциальной нелинейности уравнения исследованы.

ТҮЙІНДЕМЕ

Бұл жұмыс кейбір бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулердің шешімін құрудың операторлық әдісін дамытуға арналған. Сызықтық функциялар кеңістігінде нормаланған жүйе түсінігі енгізіледі, бұл жүйелердің қасиеттері зерттелінеді және бқл қасиеттердің қолданысы ретінде бөлшек реттысқаті дифференциалдық теңдеулердің аналитикалық шешімдерін құру мәселелері зерттелінеді. Бөлшек ретті дифференциалдық операторлармен байланысты болған функциялардың нормаланған жүйелерінің мысалдары келтірілген. Және де бөлшек ретті операторлар қатысқан копсызықтык дифференцалдық теңдеулер зерттелінген.

1 НОРМИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

1.1 Определение и некоторые свойства нормированных систем функций

Пусть Ω - некоторая область пространства $R^n, n \geq 1$, X - линейное пространство функций определенных в области Ω. Элементы пространство X обозначим через $f(x)$. В дальнейщем будем обозначать $N_0 = N \cup \{0\}, N$ – множество натуральных чисел.

Предположим, что заданы линейные операторы L_1 и L_2 действующие из X в X.

Определение 1.1.1. Систему функций $\{f_k(x) : k \in N_0\}$ из X назовем f – нормированной относительно (L_1, L_2) в Ω с основанием $f_0(x)$, если всюду в этой области выполняются равенства

$$L_1 f_0(x) = f(x), L_1 f_k(x) = L_2 f_{k-1}(x), k \in N_0, x \in \Omega.$$

Мы в дальнейщем выделим важный частный случай введенного выше класс f – нормированных систем, когда $L_2 = I$, I – единичный оператор.

В этом случае f – нормированная система функций относительно (L_1, I) обладает свойством

$$L_1 f_0(x) = f(x), L_1 f_k(x) = f_{k-1}(x), k \in N_0, x \in \Omega. \tag{1.1.1}$$

Если в равенстве (1.1.1) $f(x) = 0$, то в этом случае систему функций $\{f_k(x) : k \in N_0\}$ назовем просто нормированной относительно оператора L_1 в Ω.

Приведем некоторые простие примеры нормированных систем.

Пример 1.1.1. Пусть $L = \frac{d}{dx}$-оператор дифференцирования первого порядка. Тогда система функций $f_k(x) = \frac{x^{k+s}}{(k+s)!}, k \in N_0, s \geq 1,$ является $\frac{x^{s-1}}{(s-1)!}$ – нормированной относительно оператора $\frac{d}{dx}$ в области $\Omega = R.$ Если здесь $s = 0$, то система $f_k(x) = \frac{x^k}{k!}, k \in N_0$ будет просто нормированной.

Пример 1.1.2. Пусть $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$- мультииндекс с длиной $|\beta| = |\beta_1| + |\beta_2| + ... + |\beta_n|$ и $L \equiv D^\beta = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_1^{\beta_1} ... \partial x_1^{\beta_1}}$. Тогда система функций

$$f_k(x)=\frac{x_1^{(k+1)\beta_1+\gamma_1}}{((k+1)\beta_1+\gamma_1)!}\cdot\frac{x_2^{(k+1)\beta_2+\gamma_2}}{((k+1)\beta_2+\gamma_2)!}\cdot\ldots\cdot\frac{x_n^{(k+1)\beta_n+\gamma_n}}{((k+1)\beta_n+\gamma_n)!},k\in N_0,$$

будет $f(x)=\frac{x_1^{\gamma_1}}{\gamma_1!}\cdot\frac{x_2^{\gamma_2}}{\gamma_2!}\cdot\ldots\cdot\frac{x_n^{\gamma_n}}{\gamma_n!}-$нормированной относительно оператора D^β в области $\Omega=R^n$.

В дальнейщем, в следующих параграфах мы приведем более содержательные примеры нормированных систем.

Приведем некоторые свойства номированных систем функций.

Утверждение 1.1.1. Если система функций $\{f_k(x):k\in N_0\}$ - $f-$нормированная, а система функций $\{g_k(x):k\in N_0\}$ - $g-$нормированная относительно оператора L в Ω, то система функций $\{f_k(x)+g_k(x):k\in N_0\}$ является $(f+g)-$ нормированной в области Ω.

Доказательство. Пусть заданы системы $\{f_k(x):k\in N_0\}$ и $\{g_k(x):k\in N_0\}$ удовлетворящие условиям леммы. Составим систему $\{f_k(x)+g_k(x):k\in N_0\}$. Так как L - линейный оператор, то для любого $k\in N_0$ выполняется равенство

$$L\left(f_k(x)+g_k(x)\right)=Lf_k(x)+Lg_k(x).$$

По условию нормированности систем $\{f_k(x):k\in N_0\}$ и $\{g_k(x):k\in N_0\}$ выполняются равенства

$$Lf_0(x)=f(x),Lf_k(x)=f_{k-1}(x),k\in N_0,x\in\Omega Lf_0(x)=f(x).$$

и

$$Lg_0(x)=g(x),Lg_k(x)=g_{k-1}(x),k\in N_0,x\in\Omega.$$

Следовательно,

$$L\left(f_0(x)+g_0(x)\right)=f(x)+g(x),L\left(f_k(x)+g_k(x)\right)=f_{k-1}(x)+g_{k-1}(x),k\in N,x\in\Omega,$$

т.е. система функций $\{f_k(x)+g_k(x):k\in N_0\}$ является $(f+g)-$ нормированной в области Ω. Свойство доказано.

Рассмотрим уравнение

$$\left(L_1-L_2\right)y(x)=f(x),x\in\Omega \qquad (1.1.2)$$

Утверждение 1.1.2. Пусть система функций $\{f_k(x): k \in N_0\}$ является f – нормированной относительно (L_1, L_2) в Ω с основанием $f_0(x)$. Тогда функциональный ряд

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x), x \in \Omega, \tag{1.1.3}$$

является формальным решением уравнения (1.1.2).

Доказательство. Так как система функций $\{f_k(x): k \in N_0\}$ является f – нормированной относительно (L_1, L_2) в Ω, то

$$\left(L_1 - L_2\right) y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(L_1 - L_2\right) f_k(x) = L_1 f_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} L_1 f_k(x) - \sum_{k=0}^{\infty} L_2 f_k(x) =$$

$$= f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} L_2 f_{k-1}(x) - \sum_{k=0}^{\infty} L_2 f_k(x) = f(x).$$

Свойство доказано.

Заметим, что если ряд (1.1.3) сходится и к нему можно почленно применить операторы L_1 и L_2, то этот сумма этого ряда п является обычным решением уравнения (1.1.2).

В силу этого свойства нормированных систем для нахождения решения уравнения (1.1.2) необходимо уметь строить нормированные системы относительно операторов (L_1, L_2). Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1.1.3. Если операторы L_1 и L_2 коммутируют, а система функций $\{f_k(x): k \in N_0\}$ является f-нормированной относительно оператора L_1 в Ω, то формальное решение уравнения (1.1.2) можно записать в виде

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} L_2^k f_k(x), x \in \Omega. \tag{1.1.4}$$

Доказательство. Пусть система функций $\{f_k(x): k \in N_0\}$ является f – нормированной относительно L_1 в Ω. Рассмотрим систему фунций система $\left\{\varphi_k(x) = L_2^k f_k(x): k \in N_0\right\}$. Покажем, что система $\left\{\varphi_k(x) = L_2^k f_k(x): k \in N_0\right\}$ будет f-нормированной относительно $\left(L_1, L_2\right)$ в области Ω.

Действительно,

$$L_1 \varphi_0(x) = L_1 f_0(x) = f(x). \; .$$

Далее, поскольку операторы L_1 и L_2 коммутируют, то

$$L_1\varphi_k(x) = L_1L_2^k f_k(x) = L_2^k f_{k-1}(x) = L_2\varphi_{k-1}(x), k \in N .$$

Таким образом, система функция $\left\{\varphi_k(x) = L_2^k f_k(x) : k \in N_0\right\}$ является f-нормированной относительно (L_1, L_2) в области Ω. Тогда по в силу утверждения 1.3 ряд (1.1.4) является решением уравнения (1.1.2). Утверждение доказано.

Утверждение 1.1.4. Пусть операторы L_1 и L_2 коммутируют, а система функций $\{f_k(x) : k \in N_0\}$ является f-нормированной относительно оператора L_1 в Ω. Тогда система функций

$$\varphi_k(x) = \sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}L_2^{n-k}f_n(x), x \in \Omega, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \tag{1.1.5}$$

является f- нормированной относительно оператора $L_1 - L_2$ в Ω.

Доказательство. Пусть система функций $\{f_k(x) : k \in N_0\}$ является f – нормированной относительно L_1 в Ω. Тогда в силу утверждения 1.2 имеем

$$(L_1 - L_2)\varphi_0(x) = (L_1 - L_2)\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f(x).$$

Пусть $k \geq 1$. Тогда

$$L_1\varphi_k(x) = \sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}L_2^{n-k}L_1 f_n(x) = \sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}L_2^{n-k}f_{n-1}(x) = \sum_{j=k-1}^{\infty}\binom{j+1}{k}L_2^{j+1-k}f_j(x),$$

С другой стороны

$$\varphi_{k-1}(x) = \sum_{j=k-1}^{\infty}\binom{j}{k-1}L_2^{j-(k-1)}f_j(x).$$

Отсюда

$$L_1\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x) = \sum_{j=k-1}^{\infty}\binom{j+1}{k}L_2^{j+1-k}f_j(x) - \sum_{j=k-1}^{\infty}\binom{j}{k-1}L_2^{j-(k-1)}f_j(x) =$$

$$= \sum_{j=k-1}^{\infty}\left[\binom{j+1}{k} - \binom{j}{k-1}\right]L_2^{j+1-k}f_j(x).$$

Далее, так как

$$\binom{k}{k} - \binom{k-1}{k-1} = 0,$$

$$\binom{j+1}{k}-\binom{j}{k-1}=\frac{(j+1)!}{k!\big(j-(k-1)\big)!}-\frac{j!}{(k-1)!(j-(k-1))!}=\frac{j!}{(k-1)!(j-(k-1))!}\left[\frac{j+1}{k}-1\right]=$$

$$=\frac{j!}{(k-1)!(j-(k-1))!}\frac{j-(k-1)}{k}=\frac{j!}{k!(j-k)!}=\binom{j}{k}$$

То

$$L_1\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)=\sum_{j=k}^{\infty}\binom{j}{k}L_2^{j+1-k}f_j(x)=L_2\left\{\sum_{j=k}^{\infty}\binom{j}{k}L_2^{j-k}f_j(x)\right\}=L_2\varphi_k(x).$$

Следовательно,

$$L_1\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)=L_2\varphi_k(x).$$

Отсюда получаем

$$\left(L_1-L_2\right)\varphi_k(x)=\varphi_{k-1}(x),k\ge 1$$

Утверждение доказано.

1.2 Построение нормированных систем для обобщенно-однородных операторов

В этом пункте мы приведем методику построения нормированных систем для некоторых классов операторов.

Определение 1.2.1. Оператор D_β называется обобщенно-однородным порядка β относительно переменной t, если

$$D_\beta t^\mu = C_{\beta,\mu}t^{\mu-\beta}, \tag{1.2.1}$$

где $\beta,\mu\in R, 0<\beta\le\mu,\ C_{\beta,\mu}$ -постоянное.

Пусть D_β-обобщенно-однородный оператор порядка β и пусть для некоторых $s=0,1,...$, выполняется равенство $D_\beta t^s=0$. Рассмотрим одночлен $t^{\beta k+s}, k=0,1,2,...$. В силу равенства (1.2.1)

$$D_\beta t^{\beta k+s}=C_{\beta,k,s}t^{\beta k+s-\beta}, \tag{1.2.2}$$

Умножим равенство (1.2.2) с двух сторон на одночлен $t^{-\beta k-s+\beta}$. Тогда

$$C_{\beta,k,s} = t^{-\beta k - s + \beta} D_\beta t^{\beta k + s}.$$

Пусть $s = 0,1,\ldots$. Рассмотрим коэффициенты

$$C(\beta,s,i) = \prod_{k=1}^{i} C_{\beta,k,s} \equiv \prod_{k=1}^{i}\left(t^{-\beta k - s + \beta} D_\beta t^{\beta k + s}\right), i \ge 1, C(\beta,s,0) = 1.$$

Легко показать, что для коэффициентов $C(\beta,s,i)$ имеет место равенство

$$\frac{1}{C(\beta,s,i)} = \frac{\left(t^{-\beta i - s} D_\beta t^{\beta i + \beta + s}\right)}{C(\beta,s,i+1)}. \qquad (1.2.3)$$

Действительно, по определению

$$C(\beta,s,i+1) = \prod_{k=1}^{i+1} C_{\beta,k,s} \equiv \prod_{k=1}^{i+1}\left(t^{-\beta k - s + \beta} D_\beta t^{\beta k + s}\right) = \left(t^{-\beta(i+1) - s + \beta} D_\beta t^{\beta(i+1)+s}\right)\prod_{k=1}^{i}\left(t^{-\beta k - s + \beta} D_\beta t^{\beta k + s}\right) =$$

$$= \left(t^{-\beta i - s} D_\beta t^{\beta i + \beta + s}\right) C(\beta,s,i).$$

Отсюда получаем равенство (1.2.3).

Рассмотрим систему функций

$$f_{s,i}(t) = \frac{t^{\beta i + s}}{C(\beta,s,i)}. \qquad (1.2.4)$$

Лемма 1.2.1. Пусть оператор D_β является обобщенно-однородным порядка β относительно переменной t и для некоторых $s = 0,1,\ldots$ выполняется равенство $D_\beta t^s = 0$. Тогда система функций (1.2.4) является 0-нормированной относительно оператора D_β.

Доказательство. По определению оператора D_β имеем $D_\beta t^\mu = \left(t^{-\mu+\beta} D_\beta t^\mu\right) t^{\mu-\beta}$. Тогда $D_\beta f_0(t) = 0$ и для всех $s = 0,1,\ldots$ и $i \ge 1$ выполняется равенство

$$D_\beta f_i(t) = \frac{D_\beta t^{\beta i + s}}{C(\beta,s,i)} = \frac{\left(t^{-\beta i + \beta - s} D_\beta t^{\beta i + s}\right)}{C(\beta,s,i)} t^{\beta i + s - \beta}.$$

Далее, в силу равенства (1.2.3) имеем, $\dfrac{\left(t^{-\beta i + \beta - s} D_\beta t^{\beta i + s}\right)}{C(\beta,s,i)} = \dfrac{1}{C(\beta,s,i-1)}, i \ge 1$.

Следовательно,

$$D_\beta f_i(t) = \frac{t^{\beta(i-1)+s}}{C(\beta,s,i-1)} = f_{i-1}(t).$$

Лемма доказана.

Пусть коэффициенты $C(\beta,s,i)$ определяются равенством (1.2.4). Рассмотрим функцию

$$y_s(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i\frac{t^{\beta i+s}}{C(\beta,s,i)} \tag{1.2.5}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.2.1. Пусть ряд (1.2.5) сходится и к нему можно почленно применят оператор D_β. Если существует значения параметра s, при которых

$$\left(t^{-\beta i-s+\beta}D_\beta t^{\beta i+s}\right)\Big|_{i=0}=0,$$

то функции $y_s(x)$ при таких значениях параметра s удовлетворяют уравнению

$$D_\beta y(t)=\lambda y(t). \tag{1.2.6}$$

Доказательство. В силу утверждения Леммы 1.2.1 система $f_{s,i}(t)=\dfrac{t^{\beta i+s}}{C(\beta,s,i)}$ является 0-нормированной относительно оператора D_β. Поэтому применяя, оператор D_β к функции $y_s(x)$ и учитывая, что слагаемое при $i=0$ по условию теоремы равен нулю, будем иметь

$$D_\beta y_s(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^i D_\beta f_{s,i}(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^i f_{s,i-1}(t)$$

Далее, заменяя индекс суммирования i на $j+1$, получаем

$$D_\beta y_s(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^{j+1}f_{s,j}(t)=\lambda\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j f_{s,j}(t)=\lambda y_s(t).$$

$$D_\beta y_s(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^{j+1}\frac{t^{\beta j+s}}{C(\beta,s,j)}=\lambda y_s(t).$$

Теорема доказана.

Следствие 1.2.1. Функции $y_s(x)$ при всех значений $s=0,1,...$ являются собственными функциями оператора D_β.

Рассмотрим теперь следующее обобщение функции (1.2.5):

$$y_{s,p}(t)=\sum_{i=p}^{\infty}\lambda^{i-p}\binom{i}{p}\frac{t^{\beta i+s}}{C(\beta,s,i)}, \tag{1.2.7}$$

где $\binom{i}{p}=\frac{i!}{p!(i-p)!}, p=0,1,2,\ldots$. Очевидно, что $y_{s,0}(t)=y_s(t)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.2.2. Пусть ряд (1.2.7) сходится и к нему можно почленно применят оператор $D_\beta-\lambda$. Если существует значения параметра s, при которых выполняется равенство

$$\left(t^{-\beta i-s+\beta}D_\beta t^{\beta i+s}\right)\Big|_{i=0}=0,$$

то функции $y_{s,p}(x)$ при всех таких значениях s, удовлетворяют уравнениям

$$\left(D_\beta-\lambda\right)y_{s,p}(t)=y_{s,p-1}(t), p\geq 1, \tag{1.2.8}$$

$$\left(D_\beta-\lambda\right)y_{s,0}(t)=0, \tag{1.2.9}$$

т.е. образуют нормированную по параметру p систему относительно оператора $D_\beta-\lambda$.

Доказательство. Равенство (1.2.9) доказано в теореме 1.2.1. Докажем равенство (1.2.8). Применяя к функции, $y_{s,p}(x)$ оператор D_β в силу нормируемости системы $f_{s,i}(t)=\frac{t^{\beta i+s}}{C(\beta,s,i)}$ имеем

$$D_\beta y_{s,p}(t)=\sum_{i=p}^{\infty}\lambda^{i-p}\binom{i}{p}D_\beta f_{s,i}(t)=\sum_{i=p}^{\infty}\lambda^{i-p}\binom{i}{p}f_{s,i-1}(t).$$

Меняя индекс суммирования i на $j+1$, получаем

$$D_\beta y_{s,p}(t)=\sum_{j=p-1}^{\infty}\lambda^{j-(p-1)}\binom{j+1}{p}f_{s,j}(t)$$

Рассмотрим теперь функцию $D_\beta y_{s,p}(t)-y_{s,p-1}(t)$. По определению функции $y_{s,p-1}(t)$ имеем

$$D_\beta y_{s,p}(t)-y_{s,p-1}(t)=\sum_{j=p-1}^{\infty}\lambda^{j-(p-1)}\binom{j+1}{p}f_{s,j}(t)-\sum_{j=p-1}^{\infty}\lambda^{j-(p-1)}\binom{j}{p-1}f_{s,j}(t)=$$

$$= \sum_{j=p-1}^{\infty} \lambda^{j-(p-1)} \left[\binom{j+1}{p} - \binom{j}{p-1} \right] f_{s,j}(t)$$

Далее, для $\binom{j+1}{p} - \binom{j}{p-1}$ имеем

$$\binom{j+1}{p} - \binom{j}{p-1} = \frac{(j+1)!}{p!(j+1-p)!} - \frac{j!}{(p-1)!(j-(p-1))!} = \frac{j!}{(p-1)!(j-(p-1))!}\left[\frac{j+1}{p} - 1\right] =$$

$$= \frac{j!}{(p-1)!(j-(p-1))!} \cdot \frac{j+1-p}{p} = \frac{j!}{p!(j-p)!} = \binom{j}{p}.$$

Причем, если $j = p-1$, то $\left.\binom{j+1}{p} - \binom{j}{p-1}\right|_{j=p-1} = \binom{p}{p} - \binom{p-1}{p-1} = 0$.

Следовательно,

$$D_\beta y_{s,p}(t) - y_{s,p-1}(t) = \sum_{j=p}^{\infty} \lambda^{j-(p-1)} \binom{j}{p} f_{s,j}(t) = \lambda \sum_{j=p}^{\infty} \lambda^{j-p} \binom{j}{p} f_{s,j}(t) = \lambda y_{s,p}(x).$$

т.е. верно равенство

$$\left(D_\beta - \lambda\right) y_{s,p}(t) = y_{s,p-1}(t).$$

Теорема доказана.

Следствие 1.2.2. В условиях теоремы 1.2.2 функции $y_{s,p}(t)$ при всех значений $s = 0,1,...,$ являются присоединенными функциями оператора D_β.

Следствие 1.2.3. В условиях теоремы 1.2.2 функции $y_{s,p}(t)$ при значениях $p = 0,1,...,N-1$ являются решениями уравнения

$$\left(D_\beta - \lambda\right)^N y(t) = 0.$$

Теперь рассмотрим некоторые примеры обобщенно-однородных операторов.

Пример 1.2.1. Пусть $D = \frac{d}{dt}$ и $D_{nL} = Dt...DtDtD,$ где t умножается $n-$раз, а оператор D применяется $n+1-$раз. В этом случае

$$D_{nL}t^m = m^{n+1}t^{m-1},$$

т.е данный оператор является обобщенно-однородным порядка 1. Очевидно, что $D_{nL}t^0 = 0$ и $C(1,0,i) = \prod_{k=1}^{i}\left(t^{-k+1}D_{nL}t^k\right) = \prod_{k=1}^{i}k^{n+1} = \left(i!\right)^{n+1}$. Тогда из утверждения следствие 1.2.1 и следствие 1.2.2 вытекают, что

$$y_p(t) = \sum_{i=p}^{\infty}\lambda^{i-p}\binom{i}{p}\frac{t^i}{(i!)^{n+1}}$$

при $p = 0$ является собственной функцией, а в случае $p \geq 1$ присоединенными функциями оператора D_{nL}.

Утверждение, а том, что $y_0(t)$ является собственной функцией для оператора D_{nL}, было доказано в работе [46]. Функцию $y_0(t)$ в этом случае авторы назвали обобщенной экспонентой и обозначали его $e_n(\lambda t)$.

Пример 1.2.2. Пусть $D_2 = D^2t^2D^2$ где $D^2 = \frac{d^2}{dt^2}$. В этом случае $D^2t^s = 0, s = 0,1,$ и $D^2t^m = m(m-1)t^{m-2}, m \geq 2$. Следовательно,

$$D_2t^m = D^2t^2D^2t^m = m(m-1)D^2t^m = m^2(m-1)^2t^{m-2}$$

Таким образом, оператор $D_2 = D^2t^2D^2$ является обобщенно-однородным порядка 2.Для этого случая

$$C(2,s,i) = \prod_{k=1}^{i}\left(t^{-2k-s+2}D_2t^{2k+s}\right) = \prod_{k=1}^{i}(2k+s)^2(2k+s-1)^2$$

Если $s = 0$, то

$$C(2,0,i) = \prod_{k=1}^{i}(2k+s)^2(2k+s-1)^2 = 2^2\cdot(2-1)^2\cdot4^2\cdot(4-1)^2\cdot\ldots\cdot(2i)^2(2i-1)^2 =$$

$$= 2^2\cdot1^2\cdot4^2\cdot3^2\cdot\ldots(2i)^2(2i-1)^2 = 1^2\cdot2^2\cdot3^2\cdot4^2\cdot\ldots\cdot(2i-1)^2(2i)^2 = [(2i)!]^2.$$

Аналогично, если $s = 1$, то

$$C(2,1,i) = \prod_{k=1}^{i}(2k+s)^2(2k+s-1)^2 = (2+1)^2\cdot(2)^2\cdot\ldots\cdot(2i+1)^2(2i)^2 =$$

$$= 3^2\cdot2^2\cdot5^2\cdot4^2\cdot\ldots\cdot(2i+1)^2(2i)^2 = 1^2\cdot2^2\cdot3^2\cdot4^2\cdot\ldots\cdot(2i)^2(2i+1)^2 = [(2i+1)!]^2.$$

Тогда функции

$$y_0(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-\lambda)^i \frac{x^{2i}}{[(2i)!]^2}, y_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-\lambda)^i \frac{x^{2i+1}}{[(2i+1)!]^2}$$

являются собственными функциями, а

$$y_{0,p}(x) = \sum_{i=p}^{\infty} (-\lambda)^{i-p} \binom{i}{p} \frac{x^{2i}}{[(2i)!]^2}, y_{1,p}(x) = \sum_{i=p}^{\infty} (-\lambda)^{i-p} \binom{i}{p} \frac{x^{2i+1}}{[(2i+1)!]^2}, p \geq 1$$

присоединенными функциями оператора D_2.
Так как

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} = \cos x, \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} = \sin x,$$

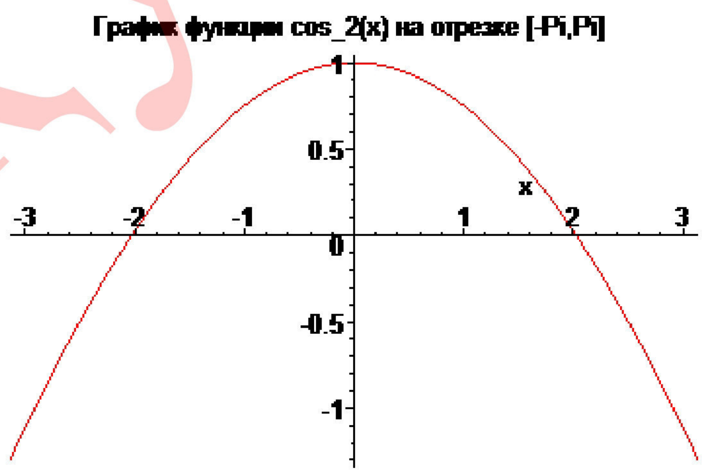
то полученные нами функции обобщают тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$.Обозначим их $\sin_2 x, \cos_2 x$ т.е.

$$\cos_2(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{[(2i)!]^2}, \sin_2(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{[(2i+1)!]^2}.$$

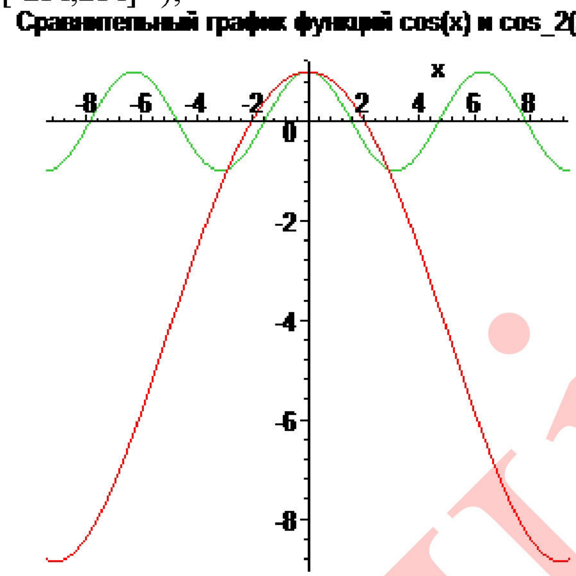
Эти функции совпадают с обобщенными тригонометрическими функциями полученные в работе [47].

Используя средства системы Maple построим график функции $\cos_2(x)$ и $s\text{in}_2(x)$

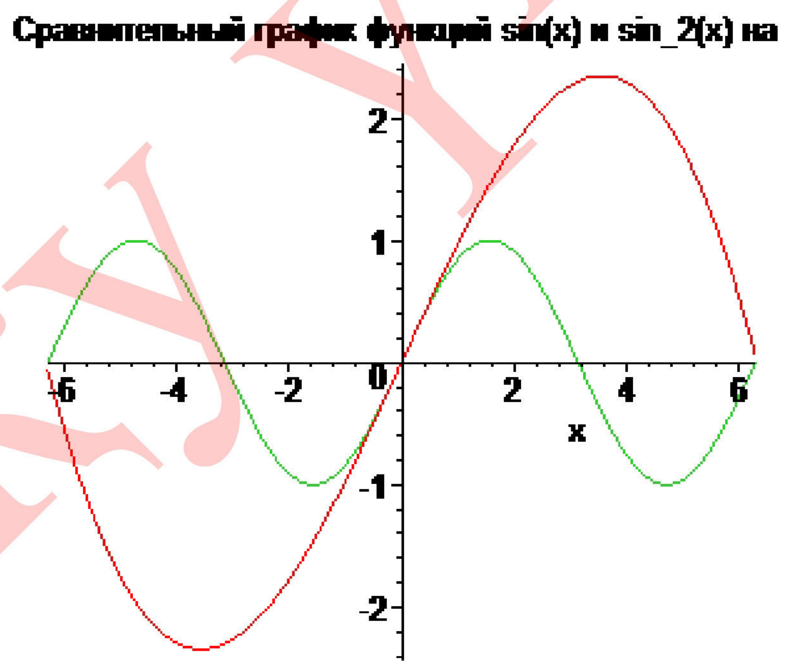
> plot(f,x=-Pi..Pi,title="График функции cos_2(x) на отрезке [-Pi,Pi] ");



> plot([f,cos(x)],x=-3*Pi..3*Pi,title="Сравнительный график функций cos(x) и cos_2(x) на отрезке [-2Pi,2Pi] ");

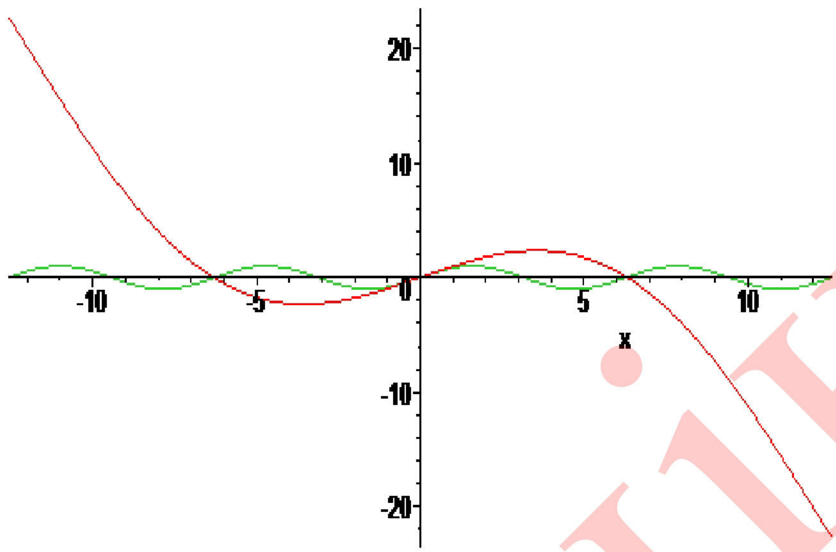


> plot([g,sin(x)],x=-2*Pi..2*Pi,title="Сравнительный график функций sin(x) и sin_2(x) на отрезке [-2Pi,2Pi] ");



> plot([g,sin(x)],x=-4*Pi..4*Pi,title="Сравнительный график функций sin(x) и sin_2(x) на отрезке [-4Pi,4Pi] ");

Сравнительный график функций sin(x) и sin_2(x) на отрезке [-4Pi,4Pi]



Пример 1.2.3. Пусть $D_\alpha = D^\alpha t^\alpha D^\alpha$, где $m-1<\alpha\le m, m=1,2,\ldots$ $D^\alpha ={}_{RL}J^{m-\alpha}\dfrac{d^m}{dt^m}$,

$$_{RL}J^\alpha f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau, \alpha>0.$$

Применим оператор D^α к функциям вида $t^r, r\ge 0$.
По определению,

$$D^\alpha t^r = J^{m-\alpha}\frac{d^m}{dt^m}t^r.$$

Ясно, что $D^\alpha t^r = 0, r=0,1,\ldots,m-1$. Если $r>m-1$, то

$$D^\alpha t^r = J^{m-\alpha}\frac{d^m}{dt^m}t^r = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+1-\alpha)}t^{r-\alpha}.$$

Далее, рассмотрим оператор вида $D_{\alpha,n}=D^\alpha t^\alpha \ldots D^\alpha t^\alpha D^\alpha t^\alpha D^\alpha$, где t^α умножается $n-$раз, а оператор D^α применяется $n+1-$раз. Тогда

$$D_{\alpha,1}t^r = D^\alpha t^\alpha D^\alpha t^r = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+1-\alpha)}D^\alpha t^r = \gamma^2_{r-\alpha}t^{r-\alpha},$$

$$D_{\alpha,n}t^m = D^\alpha t^\alpha \ldots D^\alpha t^\alpha D^\alpha t^\alpha D^\alpha t^m = \gamma^{n+1}_{m,\alpha}t^{m-\alpha},$$

где обозначено $\gamma_{r,\alpha}^{k}=\left[\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+1-\alpha)}\right]^{k}$.

Значит, оператор $D_{\alpha,n}$ является обобщенно-однородным порядка α. Построим функции $y_{s,p}(x)$. Для этого находим коэффициенты $C(\alpha,s,i)$. Для этого случая r выберем в виде $r=\alpha k+s, s=0,1,...,p-1$.

$$C(\alpha,s,i)=\prod_{k=1}^{i}\left(t^{-\alpha k-s+\alpha}D_{\alpha,n}t^{\alpha k+s}\right)=\prod_{k=1}^{i}\gamma_{\alpha k+s,\alpha}^{n+1}=\prod_{k=1}^{i}\left[\frac{\Gamma(\alpha k+s+1)}{\Gamma(\alpha k+s+1-\alpha)}\right]^{n+1}=$$

$$=\left[\frac{\Gamma(\alpha+s+1)}{\Gamma(\alpha+s+1-\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha 2+s+1)}{\Gamma(\alpha 2+s+1-\alpha)}\cdots\frac{\Gamma(\alpha i+s+1)}{\Gamma(\alpha i+s+1-\alpha)}\right]^{n+1}=$$

$$=\left[\frac{\Gamma(\alpha+s+1)}{\Gamma(s+1)}\frac{\Gamma(2\alpha+s+1)}{\Gamma(\alpha+s+1)}\cdots\frac{\Gamma(\alpha i+s+1)}{\Gamma(\alpha(i-1)+s+1)}\right]^{n+1}=\left[\frac{\Gamma(\alpha i+s+1)}{\Gamma(s+1)}\right]^{n+1}.$$

Для удобства можно отказаться от требования $C(\alpha,s,i)=1$ и рассмотреть коэффициенты $C(\alpha,s,i)=\Gamma^{n+1}(\alpha i+s+1)$. Тогда, функции вида

$$y_{s,p}(x)=\sum_{i=p}^{\infty}\lambda^{i-p}\binom{i}{p}\frac{t^{\alpha i+s}}{\Gamma^{n+1}(\alpha i+s+1)}$$

в случае $p=0$ при всех $s=0,1,...,m-1$ будут собственными функциями, а в случае $p\geq 1$ присоединенными функциями оператора $D_{\alpha,n}$.

Если $\alpha=m$-целое, то

$$\frac{\Gamma(\alpha i+s+1)}{\Gamma(s+1)}=\frac{\Gamma(mi+s+1)}{\Gamma(s+1)}=\frac{(mi+s)!}{s!}$$

и значит,

$$y_{s,p}(t)=\sum_{i=p}^{\infty}\lambda^{i-p}\binom{i}{p}\frac{(s!)^{n+1}}{[(mi+s)!]^{n+1}}t^{mi+s}.$$

В случае $m=1$ получаем, $s=0$ и получаем функцию $y_{0,0}(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^{i}\frac{t^{i}}{[i!]^{n+1}}=e_{n}(\lambda t)$ рассмотренную в примере 1.2.1.

Пример 1.2.4. Для любого $\alpha>0$ рассмотрим оператор интегрирования дробного порядка в смысле Адамара

$$ {}_{H}J^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{t}\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1}f(\tau)\frac{d\tau}{\tau}. $$

Пусть $m-1<\alpha\le m, m=1,2,...,\delta=t\frac{d}{d},\delta^{k}=\delta\left(\delta^{k-1}\right)$ и ${}_{HC}D^{\alpha}={}_{H}J^{m-\alpha}\delta^{m}$ - оператор дифференцирования типа Адамара - Капуто. Легко показать, что справедливы равенства ${}_{HC}D^{\alpha}t^{0}=0$ и ${}_{HC}D^{\alpha}t^{k}=k^{\alpha}t^{k}, k\ge 1.$

Рассмотрим, оператор $D_{\alpha,1}=\frac{d}{dt}\cdot{}_{HC}D^{\alpha}$. Тогда, $D_{\alpha,1}t^{0}=0, D_{\alpha,1}t^{k}=k^{\alpha+1}t^{k-1}, k\ge 1$ Этот оператор будет обобщенно-однородным порядка 1 и для него

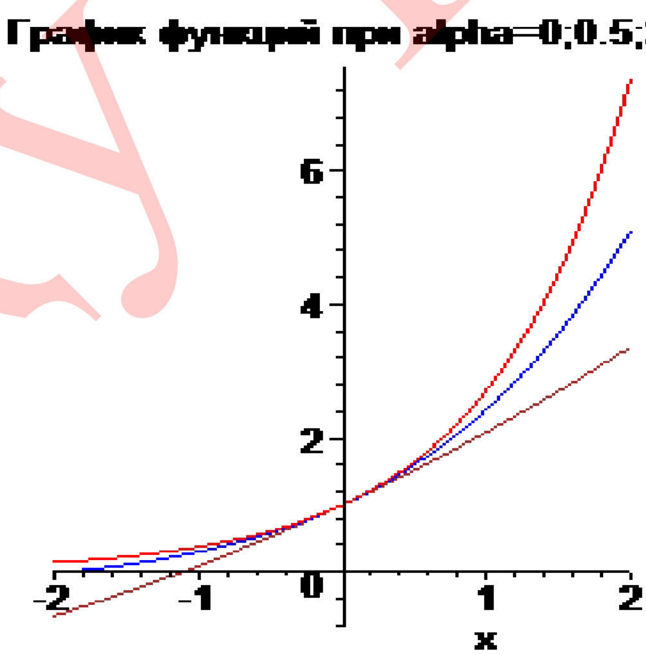
$$ C(\alpha,0,i)=\prod_{k=1}^{i}k^{\alpha+1}=\left(i!\right)^{\alpha+1}. $$

В силу утверждения следствия 1.2.1 собственная функция этого оператора имеет вид

$$ y_{0}(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^{i}\frac{t^{i}}{\left(i!\right)^{\alpha+1}}, \qquad (1.2.10) $$

График этой функции при значениях $\alpha=0;0.5;2.5$

> plot([f1,f2,f3],x=-2..2,title="График функций при alpha=0;0.5;2.5 ",
color=[red,blue,yellow]);



Некоторые свойства функции (1.2.10) изучены в работе [48]. В частности утверждается (Теорема 3.3), что данная функция является собственной функцией оператора вида $\frac{d}{dt}\delta^r {}_H D^{\alpha+1-r}, r = 1,2,...,m,$ где ${}_H D^{\alpha} = \delta^m \left[{}_H J^{\alpha} \right]$- дифференцирования дробного порядка Адамара. Но, оператор ${}_H J^{\alpha}$ в классе гладких функций не определен, если $f(0) \neq 0$ и соответственно при любом дробном $\alpha > 0$ значение ${}_H D^{\alpha} t^0$ – не определяется. Авторы этой работы по видимо не заметили это свойство оператора ${}_H J^{\alpha}$ и привели ошибочное утверждение.

Из утверждения следствие 1.2.2 вытекает, что функции

$$y_{s,p}(t) = \sum_{i=p}^{\infty} \lambda^{i-p} \binom{i}{p} \frac{t^i}{(k!)^{\alpha+1}}$$

в случае $p \geq 1$ являются присоединенными функциями оператора $D_{\alpha,1}$.

1.3. Применение нормированных систем к решению дифференциальных уравнений дробного порядка.

Пусть $m-1 < \alpha \leq \gamma \leq m, m = 1,2,...$. Рассмотрим оператор

$$D^{\alpha,\gamma} f(t) = {}_{RL} J^{(\gamma-\alpha)} \cdot \frac{d^m}{dt^m} \cdot {}_{RL} J^{(m-\gamma)} f(t), t > 0.$$

Данный оператор в случае $m = 1$ был введен в работе [49] и обобщают известные операторы дифференцирования дробного порядка. В частности $D^{\alpha,\alpha} = {}_{RL} D^{\alpha}$ - оператор дифференцирования дробного порядка в смысле Римана-Лиувилля, $D^{\alpha,m} = {}_C D^{\alpha}$ - оператор дифференцирования в смысле Капуто, а если $\gamma = \beta(m-\alpha) + \alpha, 0 < \beta \leq 1$, то $D^{\alpha,\gamma} = D^{\alpha,\beta}$ – оператор Хильфера [50].

Сначала покажем, что система функций

$$f_{s,i}(t) = \frac{t^{i\alpha+s}}{\Gamma(i\alpha+s+1)}, i \in N_0 \tag{1.3.1}$$

при всех значений $s = \gamma-1,...,\gamma-m$ является 0-нормированной относительно оператора $D^{\alpha,\gamma}$.

Лемма 1.3.1. Пусть $f(t) = t^{\mu}, \mu > -1$. Тогда для любого $\delta > 0$ справедливо равенство

$$J^{\delta} f(t) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1+\delta)} t^{\mu+\delta} \tag{1.3.2}$$

Доказательство. Используя определение оператора J^{δ} получаем

$$J^{\delta}t^{\mu}=\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^t(t-\tau)^{\delta-1}\tau^{\mu}d\tau=\left[\tau=\xi t,d\tau=td\xi\right]=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^1(1-\xi)^{\delta-1}\xi^{\mu}d\tau t^{\mu+\delta}=\frac{1}{\Gamma(\delta)}\frac{\Gamma(\delta)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1+\delta)}t^{\mu+\delta}=\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1+\delta)}t^{\mu+\delta}$$

Лемма доказана.

Лемма 1.3.2. Если $m-1<\gamma\le m, m=1,2,...,s=\gamma-k,k=1,...,m-1,$, то справедливо равенство

$$\frac{d^m}{dt^m}J^{m-\gamma}t^s=0 \tag{1.3.3}$$

Доказательство. Пусть $\delta=m-\gamma,s=\gamma-k,k=0,1,...,m-1$. Тогда в силу равенства (1.3.2) имеем

$$J^{m-\gamma}t^s=\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+1+m-\gamma)}t^{s+m-\gamma}=\frac{\Gamma(\gamma-k+1)}{\Gamma(m+1-k)}t^{m-k},k=1,2,...,m.$$

Отсюда, получаем (1.3.3). Лемма доказана.

Следствие 1.3.1. Если $m-1<\alpha\le\gamma\le m, m=1,2,...,s=\gamma-k,k=1,...,m-1,$ то

$$D^{\alpha,\gamma}t^{\gamma-k}=0,k=0,1,...,m-1. \tag{1.3.4}$$

Лемма 1.3.3. Если $m-1<\alpha\le\gamma<m, m=1,2,...,\mu>m-1$, то имеет место равенство

$$D^{\alpha,\gamma}t^{\mu}=\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1-\alpha)}t^{\mu-\alpha} \tag{1.3.5}$$

Доказательство.Пусть $\mu>m-1$. Тогда в силу равенства (1.3.2) получаем

$$J^{m-\gamma}t^{\mu}=\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1+m-\gamma)}t^{\mu+m-\gamma}..$$

Отсюда

$$\frac{d^m}{dt^m}J^{m-\gamma}t^{\mu}=\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1+m-\gamma)}(\mu+m-\gamma)...(\mu+1-\gamma)t^{\mu-\gamma}.$$

Далее, используя свойство гамма функции $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ имеем

$$\Gamma(\mu+1+m-\gamma)=(\mu+m-\gamma)...(\mu+1-\gamma)\Gamma(\mu+1-\gamma)$$

Следовательно,

$$\frac{d^m}{dt^m}J^{m-\gamma}t^{\mu}=\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1-\gamma)}t^{\mu-\gamma}.$$

Далее, так как

$$J^{\gamma-\alpha}t^{\mu-\gamma}=\frac{\Gamma(\mu-\gamma+1)}{\Gamma(\mu-\gamma+1+\gamma-\alpha)}t^{\mu-\gamma+\gamma-\alpha}=\frac{\Gamma(\mu-\gamma+1)}{\Gamma(\mu+1-\alpha)}t^{\mu-\alpha},$$

то получаем

$$D^{\alpha,\gamma}t^{\mu}=J^{\gamma-\alpha}\frac{d^m}{dt^m}J^{m-\gamma}t^{\mu}=\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1-\alpha)}t^{\mu-\alpha}.$$

Равенство (1.3.5) доказано.

Следствие 1.3.2. Если $\mu=i\alpha+\gamma-k, i=1,2,...,k=0,1,...,m-1$, то

$$D^{\alpha,\gamma}t^{\mu}=\frac{\Gamma(i\alpha+\gamma-k+1)}{\Gamma\left((i-1)\alpha+\gamma-k+1\right)}t^{(i-1)\alpha+\gamma-k} \tag{1.3.6}$$

Следствие 1.3.3. Система функций (1.3.1) при всех значений $s=\gamma-1,...,\gamma-m$ является 0-нормированной относительно оператора $D^{\alpha,\gamma}$.

Справедливо следующее утверждение

Теорема 1.3.1. Пусть $m-1<\alpha\le\gamma\le m, m=1,2,...,$ $s=\gamma-1,...,\gamma-m$. Тогда функции

$$y_{s,p}(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^{i-p}\frac{t^{i\alpha+s}}{\Gamma(i\alpha+s+1)}$$

для всех значений $p=0,1,...,n-1$ являются решениями следующего уравнения дробного порядка

$$\left(D^{\alpha,\gamma}-\lambda\right)^n y(t)=0, t>0 \tag{1.3.1}$$

Доказательство теоремы вытекает из утверждения следствия 1.1.3. Сходимость соответствующих рядов проверятся применением признака Даламбера и свойств гамма функции.

Теперь приведем пример f- нормированной. относительно оператора $D^{\alpha,\gamma}$ систему и построим решение неоднородного уравнения

$$\left(D^{\alpha,\gamma}-\lambda\right)^{n} y(t)=f(t), t>0 \qquad (1.3.2).$$

Отметим, что операторный метод построения решения уравнение (1.3.2) в случае $\gamma=\beta(m-\alpha)+\alpha, 0<\beta\leq 1$ ранее был изучен в работе [8].

Пусть

$$E_{\alpha,\alpha}^{p}(\lambda,t)=\sum_{i=p}^{\infty}\lambda^{i-p}\binom{i}{p}\frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+\alpha)}, p=0,1,\dots .$$

Рассмотрим следующую функцию

$$y_p(f)(t)=\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}^{p}(-\lambda(t-\tau)^{\alpha})f(\tau)d\tau , \qquad (1.3.3)$$

где

Теорема 1.3.2. Пусть $m-1<\alpha\leq\gamma\leq m,\ m=1,2,\dots$. Тогда функции $y_p(f)(t), p=0,1,\dots$ образуют f-нормированную систему относительно оператора $D^{\alpha,\gamma}-\lambda$ то есть справедливы равенства

$$\begin{cases}\left(D^{\alpha,\gamma}-\lambda\right)y_0(f)(t)=f(t),\\ \left(D^{\alpha,\gamma}-\lambda\right)y_p(f)(t)=f_{p-1}(t),\ \ p\geq 1\end{cases} \qquad (1.3.4)$$

Доказательство. В случае $p=0$ функция $E_{\alpha,\alpha}^{0}(-\lambda(t-\tau)^{\alpha})$ совпадает с функцией типа Миттаг – Леффлера [4], т.е.

$$E_{\alpha,\alpha}^{0}(-\lambda(t-\tau)^{\alpha})=\sum_{i=0}^{\infty}(-\lambda)^{i}\frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(\alpha i+\alpha)}$$

Тогда равенство (1.3.4) для случая $p=0$ доказывается, как и в случае оператора Римана - Лиувилля. Действительно,

$$J^{m-\alpha}y_0(f)(t)=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1}y_0(f)(\tau)d\tau=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(m-\gamma)}\int_0^t (t-\tau)^{m-\gamma-1}\int_0^{\tau}(\tau-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(\tau-\xi)^{\alpha})f(\xi)d\xi d\tau=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(m-\gamma)}\int_0^t f(\xi)\int_{\xi}^t (t-\tau)^{m-\gamma-1}(\tau-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(\tau-\xi)^{\alpha})d\tau d\xi$$

Вычислим внутренний интеграл. Используя, представление функции $E_{\alpha,\alpha}$ имеем

$$\int_{\xi}^{t}(t-\tau)^{m-\gamma-1}(\tau-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(\tau-\xi)^{\alpha})d\tau=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^{i}}{\Gamma(\alpha i+\alpha)}\int_{\xi}^{t}(t-\tau)^{m-\gamma-1}(\tau-\xi)^{\alpha i+\alpha-1}d\tau=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^{i-p}(t-\xi)^{\alpha i+\alpha+m-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\alpha)}\int_{0}^{1}(1-\theta)^{m-\gamma-1}\theta^{\alpha i+\alpha-1}d\theta=\Gamma(m-\gamma)\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^{i}(t-\xi)^{\alpha i+\alpha+m-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\alpha+m-\gamma)}.$$

Таким образом,

$$J^{m-\gamma}y_0(f)(t)=\int_0^t\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^{i}(t-\xi)^{\alpha i+\alpha+m-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\alpha+m-\gamma)}f(\xi)d\xi=$$

$$=\int_0^t(t-\xi)^{m-\gamma-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda(t-\xi)^{\alpha}\right)f(\xi)d\xi.$$

Далее,

$$\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}J^{m-\gamma}y_0(f)(t)=\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\int_0^t\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^{i}(t-\xi)^{\alpha i+\alpha+m-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\alpha+m-\gamma)}f(\xi)d\xi=$$

$$=\int_0^t f(\xi)\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^{i}(\alpha i+\alpha+m-\gamma-1)\ldots(\alpha i+\alpha+1-\gamma)\frac{(t-\xi)^{\alpha i+\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha i+\alpha+m-\gamma)}d\xi=$$

$$=\int_0^t f(\xi)\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^{i}\frac{(t-\xi)^{\alpha i+\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha i+\alpha+1-\gamma)}d\xi.$$

Здесь отметим, что так как $\alpha>m-1$, то $\alpha-\gamma>m-1-\gamma>m-1-m>-1$ т.е интеграл от функции $(t-\xi)^{\alpha i+\alpha-\gamma}$ сходится.

Далее,

$$J^{\gamma-\alpha}\frac{d^m}{dt^m}J^{m-\gamma}y_0(f)(t)=\frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\gamma-\alpha-1}\frac{d}{d\tau}\left(\int_0^{\tau}f(\xi)\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^{i}\frac{(\tau-\xi)^{\alpha i+\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha i+\alpha+1-\gamma)}d\xi\right)d\tau$$

Представим последний интеграл в виде

$$J^{\gamma-\alpha}\frac{d^m}{dt^m}J^{m-\gamma}y_0(f)(t)=\frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{\gamma-\alpha}}{\gamma-\alpha}\frac{d}{d\tau}\left(\int_0^{\tau}f(\xi)\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^{i}\frac{(\tau-\xi)^{\alpha i+\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha i+\alpha+1-\gamma)}d\xi\right)d\tau$$

Далее, интегрируя по частям, получаем

$$J^{\gamma-\alpha}\frac{d^m}{dt^m}J^{m-\gamma}y_0(f)(t)=\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\gamma-\alpha-1}\left(\int_0^\tau f(\xi)\sum_{i=0}^\infty\lambda^i\frac{(\tau-\xi)^{\alpha i+\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha i+\alpha+1-\gamma)}d\xi\right)d\tau\right]=$$

$$=\sum_{i=0}^\infty\frac{\lambda^i}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\alpha i+\alpha+1-\gamma)}\frac{d}{dt}\left[\int_0^t(t-\tau)^{\gamma-\alpha-1}\left(\int_0^\tau(\tau-\xi)^{\alpha i+\alpha-\gamma}f(\xi)d\xi\right)d\tau\right]=$$

$$=\sum_{i=0}^\infty\frac{\lambda^i}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\alpha i+\alpha+1-\gamma)}\frac{d}{dt}\left[\int_0^t f(\xi)\left(\int_\xi^t(t-\tau)^{\gamma-\alpha-1}(\tau-\xi)^{\alpha i+\alpha-\gamma}d\tau\right)d\xi\right]=$$

$$=\sum_{i=0}^\infty\frac{\lambda^i\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\alpha i+\alpha+1-\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\alpha i+\alpha+1-\gamma)\Gamma(\alpha i+1)}\frac{d}{dt}\left[\int_0^t(t-\xi)^{\alpha i}f(\xi)d\xi\right]=f(t)$$

Случай $p\geq 1$ проверяется аналогично. Действительно, пусть $p\geq 1$. Тогда применяя к функции $y_p(f)(t)$ оператор $J^{m-\gamma}$, имеем

$$J^{m-\alpha}y_p(f)(t)=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{m-\alpha-1}y_p(f)(\tau)d\tau=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(m-\gamma)}\int_0^t(t-\tau)^{m-\gamma-1}\int_0^\tau(\tau-\xi)^{\alpha-1}E^p_{\alpha,\alpha}(\lambda(\tau-\xi)^\alpha)f(\xi)d\xi d\tau=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(m-\gamma)}\int_0^t f(\xi)\int_\xi^t(t-\tau)^{m-\gamma-1}(\tau-\xi)^{\alpha-1}E^p_{\alpha,\alpha}(\lambda(\tau-\xi)^\alpha)d\tau d\xi$$

Вычислим внутренний интеграл. Используя, представление функции $E^p_{\alpha,\alpha}$ имеем

$$\int_\xi^t(t-\tau)^{m-\gamma-1}(\tau-\xi)^{\alpha-1}E^p_{\alpha,\alpha}(\lambda(\tau-\xi)^\alpha)d\tau=\sum_{i=p}^\infty\binom{i}{p}\int_\xi^t(t-\tau)^{m-\gamma-1}\frac{\lambda^{i-p}(\tau-\xi)^{\alpha i+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha i+\alpha)}d\tau=$$

$$=\sum_{i=p}^\infty\binom{i}{p}\int_0^1(1-\theta)^{m-\gamma-1}\theta^{\alpha i+\alpha-1}d\theta\frac{\lambda^{i-p}(t-\xi)^{\alpha i+\alpha+m-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\alpha)}=\Gamma(m-\gamma)\sum_{i=p}^\infty\binom{i}{p}\frac{\lambda^{i-p}(t-\xi)^{\alpha i+\alpha+m-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\alpha+m-\gamma)}$$

Таким образом,

$$J^{m-\gamma}y_p(f)(t)=\int_0^t f(\xi)\sum_{i=p}^\infty\binom{i}{p}\frac{\lambda^{i-p}(t-\xi)^{\alpha i+\alpha+m-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\alpha+m-\gamma)}d\xi=$$

$$= \int_0^t (t-\xi)^{m-\gamma-1} E^p_{\alpha,\alpha}\left(\lambda(t-\xi)^\alpha\right) f(\xi)d\xi .$$

Далее,

$$\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} J^{m-\gamma} f_p(t) = \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \int_0^t f(\xi) \sum_{i=p}^{\infty} \binom{i}{p} \frac{\lambda^{i-p}(t-\xi)^{\alpha i+\alpha+m-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\alpha+m-\gamma)} d\xi =$$

$$= \int_0^t f(\xi) \sum_{i=p}^{\infty} \lambda^{i-p} \binom{i}{p} (\alpha i+\alpha+m-\gamma-1)...(\alpha i+\alpha+1-\gamma) \frac{(t-\xi)^{\alpha i+\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha i+\alpha+m-\gamma)} d\xi =$$

$$= \int_0^t f(\xi) \sum_{i=p}^{\infty} \lambda^{i-p} \binom{i}{p} \frac{(t-\xi)^{\alpha i+\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha i+\alpha+1-\gamma)} d\xi .$$

И наконец

$$J^{\gamma-\alpha} \frac{d^m}{dt^m} J^{m-\gamma} y_p(f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\gamma-\alpha-1} \frac{d^m}{d\tau^m} J^{m-\gamma} y_p(f)(\tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\gamma-\alpha-1} \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau \left[\sum_{i=p}^{\infty} \lambda^{i-p} \binom{i}{p} \frac{(\tau-\xi)^{\alpha i+\alpha+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\alpha+\gamma-m)} \right] f(\xi) d\xi d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\gamma-\alpha}}{\gamma-\alpha} \frac{d}{d\tau} \left(\int_0^\tau f(\xi) \sum_{i=p}^{\infty} \lambda^{i-p} \binom{i}{p} \frac{(\tau-\xi)^{\alpha i+\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha i+\alpha+1-\gamma)} d\xi \right) d\tau =$$

$$= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\gamma-\alpha-1} \left(\int_0^\tau f(\xi) \sum_{i=p}^{\infty} \lambda^{i-p} \binom{i}{p} \frac{(\tau-\xi)^{\alpha i+\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha i+\alpha+1-\gamma)} d\xi \right) d\tau \right] =$$

$$= \sum_{i=p}^{\infty} \frac{\lambda^{i-p}}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\alpha i+\alpha+1-\gamma)} \binom{i}{p} \frac{d}{dt} \left[\int_0^t (t-\tau)^{\gamma-\alpha-1} \left(\int_0^\tau (\tau-\xi)^{\alpha i+\alpha-\gamma} f(\xi) d\xi \right) d\tau \right] =$$

$$= \sum_{i=p}^{\infty} \frac{\lambda^{i-p}}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\alpha i+\alpha+1-\gamma)} \binom{i}{p} \frac{d}{dt} \left[\int_0^t f(\xi) \left(\int_\xi^t (t-\tau)^{\gamma-\alpha-1} (\tau-\xi)^{\alpha i+\alpha-\gamma} d\tau \right) d\xi \right] =$$

$$= \sum_{i=p}^{\infty} \frac{\lambda^{i-p}\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\alpha i+\alpha+1-\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\alpha i+\alpha+1-\gamma)\Gamma(\alpha i+1)} \binom{i}{p} \frac{d}{dt} \left[\int_0^t (t-\xi)^{\alpha i} f(\xi) d\xi \right] =$$

$$= \sum_{i=p}^{\infty} \frac{\lambda^{i-p}}{\Gamma(\alpha i+1)} \binom{i}{p} \frac{d}{dt} \left[\int_0^t (t-\xi)^{\alpha i} f(\xi) d\xi \right] =$$

$$=\sum_{i=p}^{\infty}\frac{\alpha i\lambda^{i-p}}{\Gamma(\alpha i+1)}\binom{i}{p}\int_0^t(t-\xi)^{\alpha i-1}f(\xi)d\xi=\int_0^t\sum_{i=p}^{\infty}\lambda^{i-p}\binom{i}{p}\frac{(t-\xi)^{\alpha i-1}}{\Gamma(\alpha i)}f(\xi)d\xi=$$

$$=\int_0^t\sum_{j=p-1}^{\infty}\lambda^{j-(p-1)}\binom{j+1}{p}\frac{(t-\xi)^{\alpha j+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha j+\alpha)}f(\xi)d\xi\,.$$

Значит,

$$D^{\alpha,\gamma}y_p(f)(t)=\int_0^t\left[\sum_{i=p-1}^{\infty}\lambda^{i-(p-1)}\binom{i+1}{p}\frac{(t-\xi)^{\alpha i+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha i+\alpha)}\right]f(\xi)d\xi$$

Тогда

$$D^{\alpha,\gamma}y_p(f)(t)-y_{p-1}(f)(t)=\int_0^t\sum_{i=p-1}^{\infty}\binom{i+1}{p}\frac{\lambda^{i-(p-1)}(t-\xi)^{\alpha i+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha i+\alpha)}f(\xi)d\xi-$$

$$-\int_0^t\sum_{i=p-1}^{\infty}\binom{i}{p-1}\frac{\lambda^{i-(p-1)}(t-\xi)^{\alpha i+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha i+\alpha)}f(\xi)d\xi=$$

$$=\int_0^t\sum_{i=p}^{\infty}\binom{i}{p}\frac{\lambda^{i-(p-1)}(t-\xi)^{\alpha i+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha i+\alpha)}f(\xi)d\xi=\lambda\int_0^t\sum_{i=p}^{\infty}\binom{i}{p}\frac{\lambda^{i-p}(t-\xi)^{\alpha i+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha i+\alpha)}f(\xi)d\xi=\lambda f_p(t)$$

Итак,

$$D^{\alpha,\gamma}y_p(f)(t)-y_{p-1}(f)(t)=\lambda y_p(f)(t),$$

то есть при всех значениях $p=1,2,...$ выполняются равенства

$$\left(D^{\alpha,\gamma}-\lambda\right)y_p(f)(t)=y_{p-1}(f)(t)\,.$$

Теорема доказана.

1.4 Операторный алгоритм построения решения дифференциальных уравнений дробного порядка в частных производных

Приведем некотрые определения из книги [51].

Определение 1.4.1. Порядком итерации или полилинейным порядком функции $f(t)$ относительно оператора L в $(a,b)\subset R_+$, назовем наименьшее натуральное число p , такое, что всюду в области $(a,b)\subset R_+$

$$L^p f(t) = 0.$$

Если выражение $L^p f(t)$ имеет смысл для любых p, но ни при одном из них не выполняется равенство $L^p f(t) = 0$, то полилинейный порядок такой функции относительно данного оператора L будем считать равным бесконечности.

Пример 1.4.1. Пусть $f(t) = \frac{t^i}{i!}, i \ge 1, L = \frac{d}{dt}.$ Тогда

$$L^p f(t) = \frac{d^p}{dt^p}\frac{t^i}{i!} = \begin{cases} \frac{t^{i-p}}{(i-p)!}, p \le i \\ 0, p \ge i+1 \end{cases}$$

т.е. полилинейный порядок функции $f(t) = \frac{t^i}{i!}, i \ge 1,$ относительно оператора $L = \frac{d}{dt}$ равен $p = i + 1.$

Пример 1.4.2. Пусть $f(t) = \cos t, L = \frac{d}{dt}.$ Тогда

$$L^p f(t) = \frac{d^p}{dt^p}\cos t = \begin{cases} (-1)^{2k}\cos t, p = 2k \\ (-1)^{2k+1}\sin t, p = 2k+1 \end{cases}.$$

Следовательно, в этом случае $L^p f(t) \ne 0, \forall p \in N$, т.е. полилинейный порядок функции $f(t) = \cos t$ относительно оператора $L = \frac{d}{dt}$ равен бесконечности.

Пример 1.4.3. Пусть $f(t) = t^s, s = 0,1,..., L = {}_C D^\alpha, m-1 < \alpha \le m, m \in N.$ Так как ${}_C D^\alpha t^s = 0$ для всех $s = 0,1,...,m-1$, то полилинейный порядок этой функции равен 1.

Пример 1.4.4. Пусть $f(t) = t^{m\alpha}, m = 1,2,..., L = {}_C D^\alpha, 0 < \alpha \le 1.$
Так как ${}_C D^\alpha t^{m\alpha} = C(m,\alpha)t^{m\alpha-\alpha} = C(m,\alpha)t^{(m-1)\alpha}$, то

$${}_C D^{p\alpha} t^{m\alpha} = 0, p = m+1.$$

Следовательно, полилинейный порядок этой функции равен $m+1$.

Пусть $0 < \alpha \le 1$ и задана функция $f(y)$, полилинейный порядок которой относительно оператора ${}_C D_y^\alpha$ в области $(a,b) \subset R_+$ равняется q. Здесь q может принимать конечное или бесконечное значение.

Рассмотрим функцию

$$W^{p,q}(x,y,f)=\sum_{i=p}^{q+p-1}(-1)^{i-p}\binom{i}{p}\frac{x^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)}D^{(i-p)\alpha}f(y), \tag{1.4.1}$$

где $p=0,1,...,D^{k\alpha}={}_{C}D^{\alpha}\left({}_{C}D^{(k-1)\alpha}\right),k\geq 2$.

Исследуем свойство функции (1.4.1).

Пусть $p\neq 0$. Применяя оператор ${}_{C}D^{\alpha}$ к функции (1.4.1) по переменной x , находим

$${}_{C}D_{x}^{\alpha}W^{p,q}\left(x,f(y)\right)=\sum_{i=p}^{q+p-1}(-1)^{i-p}\binom{i}{p}\frac{x^{(i-1)\alpha}}{\Gamma((i-1)\alpha+1)}D^{(i-p)\alpha}f(y). \tag{1.4.2}$$

Аналогично, применяя оператор ${}_{C}D^{\alpha}$ к функции (1.4.1) по переменной y с учетом равенства $0=\left({}_{C}D_{y}^{\alpha}\right)^{q}f(y)=D^{q\alpha}f(y)$, имеем

$${}_{C}D_{y}^{\alpha}W^{p,q}\left(x,f(y)\right)=\sum_{i=p}^{q+p-2}(-1)^{i-p}\binom{i}{p}\frac{x^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)}D^{(i+1-p)\alpha}f(y). \tag{1.4.3}$$

Меняем в равенстве (1.4.2) индекс суммирования $i-1$ на j. Тогда

$${}_{C}D_{x}^{\alpha}W^{p,q}\left(x,f(y)\right)=\sum_{j=p-1}^{q+p-2}(-1)^{j-p+1}\binom{j+1}{p}\frac{x^{j\alpha}}{\Gamma(j\alpha+1)}D^{(j+1-p)\alpha}f(y). \tag{1.4.4}$$

Далее, для $j\geq p$ имеет место равенство

$$\binom{j}{p-1}+\binom{j}{p}=\frac{j!}{(p-1)!(j-p+1)!}+\frac{j!}{p!(j-p)!}=\frac{j!}{(p-1)!(j-p)!}\left[\frac{1}{(j-p+1)}+\frac{1}{p}\right]=$$

$$=\frac{j!}{(p-1)!(j-p)!}\frac{j+1}{p(j-p+1)}=\frac{(j+1)!}{p!(j-p+1)!}=\binom{j+1}{p},$$

т.е.

$$\binom{j+1}{p}=\binom{j}{p-1}+\binom{j}{p}.$$

Тогда для (1.4.4) получаем

$${}_{C}D_{x}^{\alpha}W^{p,q}\left(x,f(y)\right)=\sum_{j=p-1}^{q+p-2}(-1)^{j-p+1}\binom{j}{p-1}\frac{x^{j\alpha}}{\Gamma(j\alpha+1)}D^{(j+1-p)\alpha}f(y)+$$

$$+\sum_{j=p}^{q+p-2}(-1)^{j-p+1}\binom{j}{p}\frac{x^{j\alpha}}{\Gamma(j\alpha+1)}D^{(j+1-p)\alpha}f(y).$$

Обратно меняем j на i и получим

$$ {}_C D_x^{\alpha} W^{p,q}\left(x, f(y)\right) = \sum_{i=p-1}^{q+p-2} (-1)^{i-p+1} \binom{i}{p-1} \frac{x^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} D^{(i+1-p)\alpha} f(y) + $$

$$ -\sum_{i=p}^{q+p-2} (-1)^{i-p} \binom{i}{p} \frac{x^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} D^{(i+1-p)\alpha} f(y). $$

Теперь для функции ${}_C D_x^{\alpha} W^{p,q}\left(x, f(y)\right) + {}_C D_y^{\alpha} W^{p,q}\left(x, f(y)\right)$ получаем

$$ {}_C D_x^{\alpha} W^{p,q}\left(x, f(y)\right) + {}_C D_y^{\alpha} W^{p,q}\left(x, f(y)\right) = \sum_{i=p-1}^{q+p-2} (-1)^{i-p+1} \binom{i}{p-1} \frac{x^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} D^{(i+1-p)\alpha} f(y). $$

Последнее выражение по определению равняется функции $W^{p-1,q}\left(x, f(y)\right)$, т.е. выполняется равенство

$$ {}_C D_x^{\alpha} W^{p,q}\left(x, f(y)\right) + {}_C D_y^{\alpha} W^{p,q}\left(x, f(y)\right) = W^{p-1,q}\left(x, f(y)\right), \; p \geq 1. $$

Если $p = 0$, то

$$ {}_C D_x^{\alpha} W^{0,q}\left(x, f(y)\right) = \sum_{i=1}^{q-1} (-1)^{i} \frac{x^{(i-1)\alpha}}{\Gamma((i-1)\alpha+1)} D^{i\alpha} f(y) = $$

$$ = -\sum_{j=0}^{q-2} (-1)^{j} \frac{x^{j\alpha}}{\Gamma(j\alpha+1)} D^{(j+1)\alpha} f(y) = -\sum_{i=0}^{q-2} (-1)^{i} \frac{x^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} D^{(i+1)\alpha} f(y), $$

и

$$ {}_C D_y^{\alpha} W^{0,q}\left(x, f(y)\right) = \sum_{i=0}^{q-2} (-1)^{i} \frac{x^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} D^{(i+1)\alpha} f(y). $$

Отсюда

$$ {}_C D_x^{\alpha} W^{0,q}\left(x, f(y)\right) + {}_C D_y^{\alpha} W^{0,q}\left(x, f(y)\right) = 0. $$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1.4.1. Пусть $0 < \alpha \leq 1$, полилинейный порядок функции $f(y)$ относительно оператора ${}_C D_y^{\alpha}$ в области R_+ равняется q. Тогда для функции $W^{p,q}(x, f(y))$ справедливы равенства

$$ {}_C D_x^{\alpha} W^{0,q}\left(x, f(y)\right) + {}_C D_y^{\alpha} W^{0,q}\left(x, f(y)\right) = 0, $$

$$ {}_C D_x^\alpha W^{p,q}\left(x, f(y)\right) + {}_C D_y^\alpha W^{p,q}\left(x, f(y)\right) = W^{p-1,q}\left(x, f(y)\right),\ p \geq 1. $$

Из этой теоремы вытекают следующие следствия.

Следствие 1.4.1. Пусть $0 < \alpha \leq 1$, полилинейный порядок функции $f(y)$ относительно оператора ${}_C D_y^\alpha$ в области R_+ равняется q. Тогда функция

$$ W^{0,q}(x, y, f) = \sum_{i=0}^{q-1} (-1)^i \frac{x^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} D^{i\alpha} f(y) $$

является решением уравнения

$$ \left(D_x^\alpha + D_y^\alpha\right) u(x, y) = 0 . $$

Следствие 1.4.2. Пусть $0 < \alpha \leq 1$, полилинейный порядок функции $f(y)$ относительно оператора ${}_C D_y^\alpha$ в области R_+ равняется q. Тогда функции

$$ W^{p,q}(x, y, f) = \sum_{i=p}^{q+p-1} (-1)^{i-p} \binom{i}{p} \frac{x^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} D^{(i-p)\alpha} f(y) $$

при всех значениях $p = 0, 1, ..., n-1$ являются решениями уравнения

$$ \left(D_x^\alpha + D_y^\alpha\right)^n u(x, y) = 0 . $$

Пример 1.4.5. Пусть $f(y) = \dfrac{y^{(q-1)\alpha}}{\Gamma\left((q-1)\alpha+1\right)}, q = 1, 2, ..., L = {}_C D^\alpha, 0 < \alpha \leq 1.$

Рассмотрим действия оператора ${}_C D^\alpha$ к функции $f(y)$. По определению оператора ${}_C D^\alpha$ имеем

$$ {}_C D^\alpha \left[\frac{y^{(q-1)\alpha}}{\Gamma\left((q-1)\alpha+1\right)}\right] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y (y-\tau)^{-\alpha} \frac{d}{d\tau} \frac{\tau^{(q-1)\alpha}}{\Gamma\left((q-1)\alpha+1\right)} d\tau = $$

$$ = \frac{(q-1)\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y (y-\tau)^{-\alpha} \frac{\tau^{(q-1)\alpha-1}}{\Gamma\left((q-1)\alpha+1\right)} d\tau = \frac{(q-1)\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (1-\xi)^{-\alpha} \xi^{(q-1)\alpha-1} d\xi \frac{y^{(q-1)\alpha-\alpha}}{\Gamma\left((q-1)\alpha+1\right)} = $$

$$ = \frac{(q-1)\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma\left((q-1)\alpha\right)}{\Gamma\left((q-1)\alpha+1-\alpha\right)} \frac{y^{(q-1)\alpha-\alpha}}{\Gamma\left((q-1)\alpha+1\right)} = \frac{y^{(q-1)\alpha-\alpha}}{\Gamma\left((q-2)\alpha+1\right)} = \frac{y^{(q-2)\alpha}}{\Gamma\left((q-2)\alpha+1\right)}, q \geq 2 . $$

А если $q = 1$, то

$$ {}_C D^{\alpha}\left[1\right] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y (y-\tau)^{-\alpha} \frac{d}{d\tau}\left[1\right] d\tau = 0 . $$

Таким образом,

$$ {}_C D^{\alpha}\left[\frac{y^{(q-1)\alpha}}{\Gamma\left((q-1)\alpha+1\right)}\right] = \begin{cases} \dfrac{y^{(q-2)\alpha}}{\Gamma\left((q-2)\alpha+1\right)}, q \geq 2 \\ 0, q=1 \end{cases} . $$

Тогда очевидно, что

$$ {}_C D^{q\alpha} f(y) = \underbrace{{}_C D^{\alpha} \cdot {}_C D^{\alpha} \cdot \ldots \cdot {}_C D^{\alpha}}_{q} f(y) = 0 , $$

т.е. функция $f(y) = \dfrac{y^{(q-1)\alpha}}{\Gamma\left((q-1)\alpha+1\right)}, q = 1, 2, ...,$ имеет относительно оператора ${}_C D^{\alpha}$ полилинейный порядок равный q.

Далее, так как

$$ {}_C D^{(i-p)\alpha}\left[\frac{y^{(q-1)\alpha}}{\Gamma\left((q-1)\alpha+1\right)}\right] = \frac{y^{(q+p-i-1)\alpha}}{\Gamma\left((q+p-i-1)\alpha+1\right)} , $$

то в случае $f(y) = \dfrac{y^{(q-1)\alpha}}{\Gamma\left((q-1)\alpha+1\right)}, q = 1, 2, ...,$ для функции $W^{p,q}(x, y, f)$ получаем выражение

$$ W^{p,q}(x, y, f) = \sum_{i=p}^{q+p-1} (-1)^{i-p} \binom{i}{p} \frac{x^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} \frac{y^{(q+p-i-1)\alpha}}{\Gamma\left((q+p-i-1)\alpha+1\right)} . $$

2 ПРИМЕНЕНИЕ НОРМИРОВАННЫХ СИСТЕМ К РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА ОБЩЕГО ВИДА

2.1 Решение дифференциальных уравнений дробного порядка с оператором Капуто

Пусть $m-1<\alpha\le m, m=1,2,\dots$. Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение

$$D^{\alpha}y(t)-a_1D^{\alpha-1}y(t)-\dots-a_{m-1}D^{\alpha-(m-1)}y(t)-a_my(t)=0,\quad t>0 \tag{2.1.1}$$

где a_j-действительные числа, $j=1,2,\dots,m,\ m=1,2,\dots,\ D^{\alpha}={}_{RL}D^{\alpha}$ или $D^{\alpha}={}_{C}D^{\alpha}$ т.е. оператор дробного дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля или Капуто [12].

Обозначим

$$L_1=D^{\alpha}, L_2=a_1D^{\alpha-1}+\dots+a_{m-1}D^{\alpha-(m-1)}+a_m$$

Тогда уравнение (2.1.1) можно переписать в виде

$$\left(L_1-L_2\right)y(t)=0 \tag{2.1.2}$$

Справедливо следующие утверждения [12].

Лемма 2.1.1. Пусть $m-1<\alpha\le m, m=1,2,\dots$ и $\mu\in R$. Справедливы следующие равенства

1) для всех $s=0,1,\dots,m-1$

$${}_{C}D^{\alpha}t^{\mu+s}=\begin{cases}0,\mu=0\\ \dfrac{\Gamma(\mu+s+1)}{\Gamma(\mu+s+1-\alpha)}t^{\mu+s-\alpha},\mu>m-1\end{cases}$$

2) для всех $s=\alpha-1,\alpha-2,\dots,\alpha-m$

$${}_{RL}D^{\alpha}t^{\mu+s}=\begin{cases}0,\mu=0\\ \dfrac{\Gamma(\mu+s+1)}{\Gamma(\mu+s+1-\alpha)}t^{\mu+s-\alpha},\mu>m-1\end{cases}$$

Из этой леммы вытекает следующее

Следствие 2.1.1. Пусть $m-1<\alpha\le m, m=1,2,...,\ \ s=0,1,...,m-1$. Тогда система функции $f_{s,i}(t)=\dfrac{t^{\alpha i+s}}{\Gamma(\alpha i+s+1)}, i=0,1,2,...$ при всех $s=0,1,...,m-1$ является 0-нормированной относительно оператора ${}_{C}D^{\alpha}$.

Следствие 2.1.2. Пусть $m-1<\alpha\le m, m=1,2,...,\ \ s=0,1,...,m-1$. Тогда система функции $g_{s,i}(t)=\dfrac{t^{\alpha i+\alpha-1-s}}{\Gamma(\alpha i+\alpha-s)}, i=0,1,2,...$ при всех $s=0,1,...,m-1$ является 0-нормированной относительно оператора ${}_{RL}D^{\alpha}$.

Лемма 2.1.2. Пусть $s=0,1,...,m-1$. Тогда для всех $t>0$ справедливы равенства

(i) ${}_{C}D^{\alpha}f_{s,i}(t)=f_{s,i-1}(t), i\ge 1$,

(ii) $D^{\alpha}f_{0}(t)=0$

Доказательство. Рассмотрим действия оператора D^{α} к функции $t^{\alpha i+s}, i=0,1,2,...$. Очевидно, что $D^{\alpha}t^{s}=0$ для всех значений $s=0,1,...,m-1$.
Тогда $D^{\alpha}f_{0}(t)=0$.Пусть $i\ge 1$. По определению оператора D^{α} имеем

$$D^{\alpha}t^{\alpha i+s}=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{m-1-\alpha}\frac{d^m}{d\tau^m}\tau^{\alpha i+s}d\tau=$$

$$=\frac{(\alpha i+s)...\left(\alpha i+s-(m-1)\right)}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{m-1-\alpha}\tau^{\alpha i+s-m}d\tau=$$

$$=\frac{(\alpha i+s)...\left(\alpha i+s-(m-1)\right)}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\alpha i+s+1-m)}{\Gamma(\alpha i+s+1-\alpha)}t^{\alpha i+s-\alpha}=$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha i+s+1)}{\Gamma(\alpha i+s+1-\alpha)}t^{\alpha i+s-\alpha}=\frac{\Gamma(\alpha i+s+1)}{\Gamma\left(\alpha(i-1)+s+1\right)}t^{\alpha(i-1)+s}$$

Итак

$$D^{\alpha}t^{\alpha i+s}=\frac{\Gamma(\alpha i+s+1)}{\Gamma\left(\alpha(i-1)+s+1\right)}t^{\alpha(i-1)+s}, i\ge 1 \qquad (2.1.3)$$

Тогда

$$D^{\alpha}f_i(t)=\frac{1}{\Gamma(i\alpha+s+1)}\frac{\Gamma(\alpha i+s+1)}{\Gamma\left(\alpha(i-1)+s+1\right)}t^{\alpha(i-1)+s}=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha(i-1)+s+1\right)}t^{\alpha(i-1)+s}=f_{i-1}(t), i\ge 1$$

Лемма доказана.

Лемма 2.1.3. Пусть $s = 0,1,...,m-1$, $j = 1,2,...,m-1$. Тогда для всех $t > 0$ справедливы равенства

$$D^{\alpha} D^{\alpha-j} f_i(t) = D^{\alpha-j} D^{\alpha} f_i(t), i \geq 1. \qquad (2.1.4)$$

Доказательство. Рассмотрим действия оператора $D^{\alpha-j}$ к функции $f_i(t)$.

Если $m-1 < \alpha \leq m, m = 1,2,...,$ то $m-1-j < \alpha - j \leq m-j, m = 1,2,...$. Тогда по определению

$$D^{\alpha-j} t^{\alpha i+s} = I^{m-j-(\alpha-j)} \frac{d^{m-j}}{dt^{m-j}} t^{\alpha i+s} = I^{m-\alpha} \frac{d^{m-j}}{dt^{m-j}} t^{\alpha i+s} = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-1-\alpha} \frac{d^{m-j}}{d\tau^{m-j}} \tau^{\alpha i+s} d\tau =$$

$$= \frac{(\alpha i+s)...\left(\alpha i+s-(m-j-1)\right)}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-1-\alpha} \tau^{\alpha i+s-(m-j)} d\tau =$$

$$= \frac{(\alpha i+s)...\left(\alpha i+s-(m-j-1)\right)}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^1 (1-\xi)^{m-1-\alpha} \xi^{\alpha i+s-(m-j)} d\xi \cdot t^{\alpha i+s-(m-j)+m-1-\alpha+1} =$$

$$= \frac{(\alpha i+s)...\left(\alpha i+s-(m-j-1)\right)}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{\Gamma(m-\alpha)\Gamma\left(\alpha i+s+1-(m-j)\right)}{\Gamma\left(\alpha i+s+1-(\alpha-j)\right)} t^{\alpha i+s-(\alpha-j)} =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha i+s+1)}{\Gamma\left(\alpha i+s+1-(\alpha-j)\right)} t^{\alpha i+s-(\alpha-j)}$$

Таким образом, при всех $i \geq 1$

$$D^{\alpha-j} t^{\alpha i+s} = \frac{\Gamma(\alpha i+s+1)}{\Gamma\left(\alpha i+s+1-(\alpha-j)\right)} t^{\alpha i+s-(\alpha-j)}.$$

Отсюда

$$D^{\alpha-j} \frac{t^{\alpha i+s}}{\Gamma\left(\alpha i+s+1\right)} = \frac{1}{\Gamma\left(\alpha i+s+1\right)} \frac{\Gamma(\alpha i+s+1)}{\Gamma\left(\alpha i+s+1-(\alpha-j)\right)} t^{\alpha i+s-(\alpha-j)} = \frac{t^{\alpha i+s-(\alpha-j)}}{\Gamma\left(\alpha i+s+1-(\alpha-j)\right)}.$$

Значит,

$$D^{\alpha} D^{\alpha-j} t^{\alpha i+s} = \frac{\Gamma(\alpha i+s+1)}{\Gamma\left(\alpha i+s+1-(\alpha-j)\right)} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-1-\alpha} \frac{d^m}{d\tau^m} \tau^{\alpha i+s-(\alpha-j)} d\tau$$

В последнем выражении, если $i=1$, то $\alpha\cdot 1+s-(\alpha-j)=s+j$. Тогда в случае $s=0,1,\ldots,m-j-1$ параметр $s+j$ принимает значения $s+j=j,j+1,\ldots,m-1$ и в этом случае

$$D^{\alpha}D^{\alpha-j}t^{\alpha i+s}=0.$$

В остальных случаях

$$D^{\alpha}D^{\alpha-j}t^{\alpha i+s}=\frac{\Gamma(\alpha i+s+1)\left(\alpha i+s-(\alpha-j)\right)\ldots\left(\alpha i+s-(\alpha-j)-(m-1)\right)}{\Gamma\left(\alpha i+s+1-(\alpha-j)\right)\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{m-1-\alpha}\tau^{\alpha i+s-(\alpha-j)-m}d\tau=$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha i+s+1)\left(\alpha i+s-(\alpha-j)\right)\ldots\left(\alpha i+s-(\alpha-j)-(m-1)\right)}{\Gamma\left(\alpha i+s+1-(\alpha-j)\right)\Gamma(m-\alpha)}\frac{\Gamma(m-\alpha)\Gamma\left(\alpha i+s+1-(\alpha-j)-m\right)t^{\alpha i+s-(\alpha-j)-\alpha}}{\Gamma\left(\alpha i+s+1-(\alpha-j)-\alpha\right)}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha i+s+1)}{\Gamma\left(\alpha i+s+1-(\alpha-j)\right)}\frac{\Gamma\left(\alpha i+s+1-(\alpha-j)\right)}{\Gamma\left(\alpha i+s+1-(\alpha-j)-\alpha\right)}t^{\alpha i+s-(\alpha-j)-\alpha}=\frac{\Gamma\left(\alpha i+s+1\right)t^{\alpha i+s-(\alpha-j)-\alpha}}{\Gamma\left(\alpha i+s+1-(\alpha-j)-\alpha\right)}$$

Итак

$$D^{\alpha}D^{\alpha-j}t^{\alpha i+s}=\frac{\Gamma\left(\alpha i+s+1\right)}{\Gamma\left(\alpha i+s+1-(\alpha-j)-\alpha\right)}t^{\alpha i+s-(\alpha-j)-\alpha}.$$

Тогда ,если $i\geq 1$ и $s\neq 0,1,\ldots,m-j-1$, то

$$D^{\alpha}D^{\alpha-j}f_i(t)=D^{\alpha}D^{\alpha-j}\frac{t^{\alpha i+s}}{\Gamma\left(\alpha i+s+1\right)}=\frac{t^{\alpha i+s-(\alpha-j)-\alpha}}{\Gamma\left(\alpha i+s+1-(\alpha-j)-\alpha\right)} \qquad (2.1.5)$$

Далее, из равенства (2.1.3) следует

$$D^{\alpha-j}D^{\alpha}t^{\alpha i+s}=\frac{\Gamma(\alpha i+s+1)}{\Gamma\left(\alpha(i-1)+s+1\right)}D^{\alpha-j}t^{\alpha i+s-\alpha}.$$

Если в последнем выражении $i=1$, то $\alpha\cdot 1+s-\alpha=s$ и в случае $s=0,1,\ldots,m-j-1$ получаем $D^{\alpha-j}t^{s}=0$. В остальных случаях

$$D^{\alpha-j}D^{\alpha}t^{\alpha i+s}=\frac{\Gamma(\alpha i+s+1)}{\Gamma\left(\alpha i+s+1-\alpha\right)}\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{m-1-\alpha}\frac{d^{m-j}}{d\tau^{m-j}}\tau^{\alpha i+s-\alpha}d\tau=$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha i+s+1)}{\Gamma\left(\alpha i+s+1-\alpha\right)}\frac{(\alpha i+s-\alpha)\ldots\left(\alpha i+s-\alpha-(m-j-1)\right)}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{m-1-\alpha}\tau^{\alpha i+s-\alpha-(m-j)}d\tau=$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha i+s+1)}{\Gamma\left(\alpha i+s+1-\alpha\right)}\frac{(\alpha i+s-\alpha)\ldots\left(\alpha i+s-\alpha-(m-j-1)\right)}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{\Gamma(m-\alpha)\Gamma\left(\alpha i+s+1-\alpha-(m-j)\right)}{\Gamma\left(\alpha i+s+1-(\alpha-j)-\alpha\right)}t^{\alpha i+s-\alpha-(\alpha-j)}=$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha i+s+1)}{\Gamma\left(\alpha i+s+1-\alpha\right)}\frac{\Gamma\left(\alpha i+s+1-\alpha\right)}{\Gamma\left(\alpha i+s+1-(\alpha-j)-\alpha\right)}t^{\alpha i+s-\alpha-(\alpha-j)}=\frac{\Gamma\left(\alpha i+s+1\right)}{\Gamma\left(\alpha i+s+1-(\alpha-j)-\alpha\right)}t^{\alpha i+s-\alpha-(\alpha-j)}.$$

Итак

$$D^{\alpha-j}D^{\alpha}t^{\alpha i+s}=\frac{\Gamma\left(\alpha i+s+1\right)}{\Gamma\left(\alpha i+s+1-(\alpha-j)-\alpha\right)}t^{\alpha i+s-(\alpha-j)-\alpha}.$$

Тогда ,если $i\geq 1$ и $s\neq 0,1,...,m-j-1$, то

$$D^{\alpha-j}D^{\alpha}f_i(t)=D^{\alpha-j}f_{i-1}(t)=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha i+s+1-(\alpha-j)-\alpha\right)}t^{\alpha i+s-(\alpha-j)-\alpha} \tag{2.1.6}$$

Сравнивая (2.1.5) и (2.1.6) приходим к равенству (2.1.4).
Лемма доказана.

Из утверждения леммы 2.1.2 следует , что система функций $f_{s,i}(t)=\dfrac{t^{\alpha i+s}}{\Gamma(\alpha i+s+1)}, i=0,1,2,...$ при всех $s=0,1,...,m-1$ является 0-нормированной относительно оператора L_1.

Теорема 2.1.1. Пусть $m-1<\alpha\leq m, m=1,2,...$ и параметр s принимает значения $s=0,1,...,m-1$. Тогда функции

$$y_s(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\left(a_1D^{\alpha-1}+...+a_{m-1}D^{\alpha-(m-1)}+a_m\right)^i\frac{t^{\alpha i+s}}{\Gamma(\alpha i+s+1)} \tag{2.1.7}$$

для всех $t>0$ удовлетворяют уравнению (2.1.1).

Доказательство. Уравнению (2.1.1) перепишем в виде (2.1.2).

По утверждению леммы 2.1.2 операторы D^{α} и $D^{\alpha-j}, j=1,2,...,m-1$ в функциях вида $f_i(t)$ коммутируют. Тогда в силу леммы 2.1.1 получаем

$$L_1y_s(t)\equiv D^{\alpha}y_s(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\left(a_1D^{\alpha-1}+...+a_{m-1}D^{\alpha-(m-1)}+a_m\right)^i\frac{D^{\alpha}t^{\alpha i+s}}{\Gamma(\alpha i+s+1)}=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\left(a_1D^{\alpha-1}+...+a_{m-1}D^{\alpha-(m-1)}+a_m\right)^i\frac{t^{\alpha(i-1)+s}}{\Gamma(\alpha(i-1)+s+1)}.$$

В последнем выражении сделаем замену индекса i на $i+1$. Тогда

$$D^{\alpha}y_s(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\left(a_1D^{\alpha-1}+...+a_{m-1}D^{\alpha-(m-1)}+a_m\right)^{i+1}\frac{t^{\alpha i+s}}{\Gamma(\alpha i+s+1)}.$$

С другой стороны

$$L_2 y_s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(a_1 D^{\alpha-1} + \ldots + a_{m-1} D^{\alpha-(m-1)} + a_m\right)^{i+1} \frac{t^{\alpha i+s}}{\Gamma(\alpha i + s + 1)}.$$

Следовательно,

$$\left(L_1 - L_2\right) y_s(t) = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.1.2. Ряд (2.1.7) сходится равномерно в любом сегменте $[0,T], T > 0$. Для любого $t \in R_+$ допускается почленное дифференцирование и применение оператора L_1.

Доказательство. Если $m = 1$, т.е. $0 < \alpha \le 1$, то утверждение теоремы следует из следующей оценки Гамма функции

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \left\{1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right\}.$$

Пусть $m > 1$, $\varepsilon = \alpha - m - 1$ и $a = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_m|\}$. Тогда легко получить следующую оценку

$$\left|\left(a_1 D^{m-2+\varepsilon} + a_2 D^{m-3+\varepsilon} + \ldots + a_{m-1} D^{\varepsilon} + a_m\right)^k \frac{t^{k\alpha+s}}{\Gamma(k\alpha + s + 1)}\right| \le$$

$$\le a^k \left(D^{m-2+\varepsilon} + D^{m-3+\varepsilon} + \ldots + D^{\varepsilon} + 1\right)^k \frac{t^{k\alpha+s}}{\Gamma(k\alpha + s + 1)}.$$

Заметим, что $\sum\limits_{i_1+i_2+\ldots+i_m=k} \begin{pmatrix} k \\ i_1 \ldots i_m \end{pmatrix} = m^k$.

Поэтому

$$\left(D^{m-2+\varepsilon} + D^{m-3+\varepsilon} + \ldots + D^{\varepsilon} + 1\right)^k f_{s,k}(t) = \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=k} \begin{pmatrix} k \\ i_1 \ldots i_m \end{pmatrix} D^{(m-2+\varepsilon)i_1} \ldots D^{\varepsilon i_{m-1}} f_{s,k}(t) =$$

$$= \sum_{n=0}^{(m-2)k} \sum_{(m-2)i_1+(m-3)i_2+\ldots+i_{m-2}=n} \begin{pmatrix} k \\ i_1 \ldots i_m \end{pmatrix} D^n D^{\varepsilon(i_1+i_2+\ldots+i_{m-1})} f_{s,k}(t) \le m^k \sum_{n=0}^{(m-2)k} D^n \sum_{j=0}^{k} D^{\varepsilon j} f_{s,k}(t).$$

Далее, для производных $D^{j+\varepsilon} f_{s,k}(t)$ имеет место равенство

$$D^{j+\varepsilon} f_{s,k}(t) = D^j D^{\varepsilon} f_{s,k}(t).$$

Пусть $(D-1) g_{s,k}(t) = f_{s,k}(t)$ и $(D^{\varepsilon} - 1) h_{s,k}(t) = g_{s,k}(t)$ т.е.

$$g_{s,k}(t)=\int_0^t e^{\tau} f_{s,k}(t-\tau)d\tau .$$

и

$$h_{s,k}(t)=\int_0^t \tau^{\varepsilon-1}E_{\varepsilon,\varepsilon}(\tau^{\varepsilon})g_{s,k}(t-\tau)d\tau .$$

Тогда имеет место представление

$$f_{s,k}(t)=(D_r-1)(D_r^{\varepsilon}-1)h_{s,k}(t),$$

и поэтому

$$m^k\sum_{n=0}^{(m-2)k}D^n\sum_{j=0}^{k}D^{\varepsilon j}f_{s,k}(t)=m^k(D^{(m-2)k+1}-1)(D^{\varepsilon(k+1)}-1)h_{s,k}(t)=$$

$$=m^k(D^{(\alpha-1)k+1+\varepsilon}-D^{(m-2)k+1}-D^{\varepsilon(k+1)}+1)h_{s,k}(t).$$

Из представления функции $h_{s,k}(t)$ получаем следующие оценки

$$h_{s,k}(t)\le\frac{E_{\varepsilon,\varepsilon}(t^{\varepsilon})e^t}{\Gamma(\alpha k+s+1)}\int_0^t\tau^{\varepsilon-1}\int_0^{t-\tau}(t-\tau-p)^{\alpha k+s}\,dpd\tau=$$

$$=\frac{E_{\varepsilon,\varepsilon}(t^{\varepsilon})e^t}{\Gamma(\alpha k+s+2)}\int_0^t\tau^{\varepsilon-1}(t-\tau)^{\alpha k+s+1}d\tau=$$

$$=\frac{E_{\varepsilon,\varepsilon}(t^{\varepsilon})e^t}{\Gamma(\alpha k+s+2)}\frac{\Gamma(\varepsilon)\cdot\Gamma(\alpha k+s+2)}{\Gamma(\alpha k+s+2+\varepsilon)}t^{\alpha k+s+1+\varepsilon}=\frac{G(t)t^{\alpha k+s+1+\varepsilon}}{\Gamma(\alpha k+s+2+\varepsilon)},.$$

где $G(t)=\Gamma(\varepsilon)E_{\varepsilon,\varepsilon}(t^{\varepsilon})e^t$, которая является ограниченной на отрезке $[0,T]$.
Пусть $N-1<\beta\le N$ и $0<N\le(m-1)k+2$ -целое число. Пусть далее, k_0 такое, что $k_0\varepsilon>1$. В дальнейшем мы можем предполагать, что $k\ge k_0$.

Применим, оператор D^{β} к функции $g_{s,k}(t)$.

Заметим, что

$$\frac{d^N}{dt^N}g_{s,k}(t)=\int_0^t e^{\tau}\frac{d^N}{dt^N}f_{s,k}(t-\tau)d\tau$$

Таким же образом, получаем

$$\frac{d^N}{dt^N}h_{s,k}(t)=\int_0^t \tau^{\varepsilon-1}E_{\varepsilon,\varepsilon}(\tau^{\varepsilon})\frac{d^N}{dt^N}g_{s,k}(t-\tau)d\tau$$

Поэтому

$$D^{\beta}h_{s,k}(t)=I^{N-\beta}\frac{d^N}{dt^N}h_{s,k}(t)=\frac{1}{\Gamma(N-\beta)}\int_0^t (t-x)^{N-1-\beta}\frac{d^N}{d\tau^N}h_{s,k}(x)dx=$$

$$=\int_0^t \tau^{\varepsilon-1}E_{\varepsilon,\varepsilon}(\tau^{\varepsilon})\left[\frac{1}{\Gamma(N-\beta)}\int_\tau^t (t-x)^{N-1-\beta}\frac{d^N}{d\tau^N}g_{s,k}(x-\tau)dx\right]d\tau=$$

$$=\int_0^t \tau^{\varepsilon-1}E_{\varepsilon,\varepsilon}(\tau^{\varepsilon})\left[\frac{1}{\Gamma(N-\beta)}\int_0^{t-\tau} (t-\tau-p)^{N-1-\beta}\frac{d^N}{dp^N}g_{s,k}(p)dp\right]d\tau.$$

Тогда

$$D^{\beta}h_{s,k}(t)=\int_0^t \tau^{\varepsilon-1}E_{\varepsilon,\varepsilon}(\tau^{\varepsilon})\left(D^{\beta}g_{s,k}\right)(t-\tau)d\tau,$$

или после замены переменных

$$D^{\beta}h_{s,k}(t)=\int_0^t \tau^{\varepsilon-1}E_{\varepsilon,\varepsilon}(\tau^{\varepsilon})\int_0^{t-\tau} e^{p}\left(D^{\beta}f_{s,k}\right)(t-\tau-p)dpd\tau.$$

Далее, оценим $D^{\beta}h_{s,k}(t)$. По лемме 2.1.1 имеем

$$D^{\beta}f_{s,k}(t)=D^{\beta}\frac{t^{\alpha i+s}}{\Gamma\left(\alpha i+s+1\right)}=\frac{t^{\alpha i+s-\beta}}{\Gamma\left(\alpha i+s+1-\beta\right)}.$$

$$D^{\beta}h_{s,k}(t)\le\frac{G(t)t^{\alpha i+s+2+\varepsilon-\beta}}{\Gamma\left(\alpha i+s+2+\varepsilon-\beta\right)}.$$

Используя последную неравенство, получаем

$$\sum_{k=k_0}^{\infty}\left|\left(a_1D^{m-2+\varepsilon}+\ldots+a_{m-1}D^{\varepsilon}+a_m\right)^k\frac{t^{\alpha k+s}}{\Gamma(\alpha k+s+1)}\right|\le$$

$$\le G(t)\left\{t^{s}\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{(amt)^k}{\Gamma(k+s+1)}+t^{s+1+\varepsilon}\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{(am)^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+s+2+\varepsilon)}\right\}<\infty.$$

Отсюда следует равномерная сходимость ряда (2.1.7) и поэтому для любого $t \in R_+$ можно почленно дифференцировать данный ряд.

Далее. если применить к нему оператор L_1, то из следующих оценок

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} L_1 \left| \left(a_1 D^{m-2+\varepsilon} + \ldots + a_{m-1} D^{\varepsilon} + a_m\right)^k \frac{t^{\alpha k+s}}{\Gamma(\alpha k+s+1)} \right| \le$$

$$\le G(t) \left\{ t^s \sum_{k=k_0+m}^{\infty} \frac{t^{s-\alpha}(amt)^k}{\Gamma(k+s-\alpha+1)} + \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{t^{s-\alpha+1+\varepsilon}(am)^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+s-\alpha+2+\varepsilon)} \right\} < \infty,$$

получаем, что почленное применение оператора L_1 также законно.

Теорема доказана.

Из этого утверждения заключаем, что функции (2.1.7) при всех $s = 0,1,....,m-1$ являются решениями уравнение (2.1.1).

Теорема 2.1.2. Функции $y_s(t)$, $s = 0,1,....,m-1$ являются линейно независимыми на любом отрезке $[t_1,t_2] \subset R_+$.

Доказательство. Доказательство теоремы мы проведем от противного. Предположим, что функции $y_s(t)$, $s = 0,1,....,m-1$ являются линейно зависимыми на отрезке $[t_1,t_2] \subset R_+$ т.е. существуют постоянные C_s такие, что некоторые из них являются ненулевыми и выполняется равенство

$$\varphi(t) := \sum_{s=0}^{m-1} C_s y_s(t) = 0, \; t \in [t_1,t_2] \subset R_+.$$

По теореме 2.1.1 функция $\varphi(t)$ представляется в виде сходящегося в R_+ степенного ряда. Поэтому из равенства $\varphi(t) = 0$, $\forall t \in [t_1,t_2]$ следует выполнение равенства $\varphi(t) = 0, \forall t \in R_+$.

Но тогда $0 = \sum_{s=0}^{m-1} C_s y_s(t) = C_0$ т.е. $C_0 = 0$.

Дифференцируя последнее равенство и учитывая, что $y_s'(t) = y_{s-1}(t)$ получаем

$$\sum_{s=1}^{m-1} C_s y_{s-1}(t) = \sum_{s=0}^{m-2} C_{s+1} y_s(t) = 0.$$

Последовательно проделав эту процедуру мы получаем, что $C_1 = C_2 = \ldots = C_{m-1} = 0$ т.е. противоречие. А это доказывает, что функции $y_s(t)$, $s = 0,1,....,m-1$ являются линейно независимыми на любом отрезке $[t_1,t_2] \subset R_+$.

Теорема доказана.

Замечание . Функцию $y_s(t)$ можно записать в терминах обобщенной функции Миттаг- Леффлера (см. например [12])

Действительно, пусть $\alpha_j = \alpha - j,\, j = 1,2,...,m-1$ и $C_{k,i_1...i_m} = \dfrac{k!}{i_1!...i_{m-1}!i_m!}$. Тогда

$$L_2^k f_{s,k}(t) = \left(a_1 D^{\alpha_1} + a_2 D^{\alpha_2} + ... + a_{m-1} D^{\alpha_{m-1}} + a_m\right)^k f_{s,k}(t)$$

$$= \sum_{i_1+...+i_{m-1}+i_m=k} C_{k,i_1...i_m} a_1^{i_1} ... a_{m-1}^{i_{m-1}} a_m^{i_m} D^{\alpha_1 i_1} ... D^{\alpha_{m-1} i_{m-1}} \frac{t^{\alpha(i_1+...+i_{m-1}+i_m)+s}}{\Gamma(\alpha(i_1+...+i_{m-1}+i_m)+s+1)}$$

$$= \sum_{i_1+...+i_{m-1}+i_m=k} C_{k,i_1...i_m} a_1^{i_1} ... a_{m-1}^{i_{m-1}} a_m^{i_m} \frac{t^{\alpha(i_1+...+i_{m-1}+i_m)+s-\alpha_1 i_1 - ... - \alpha_{m-1} i_{m-1}}}{\Gamma(\alpha(i_1+...+i_{m-1}+i_m)-\alpha_1 i_1 - ... - \alpha_{m-1} i_{m-1} + s + 1)} =$$

$$= \sum_{i_1+...+i_{m-1}+i_m=k} \frac{k!}{i_1!...i_{m-1}!i_m!} a_1^{i_1} ... a_{m-1}^{i_{m-1}} a_m^{i_m} \frac{t^{(\alpha-\alpha_1)i_1} ... t^{(\alpha-\alpha_{m-1})i_{m-1}} t^{\alpha i_m}}{\Gamma\left(s+1+(\alpha-\alpha_1)i_1 + ... + (\alpha-\alpha_{m-1})i_{m-1} + \alpha i_m\right)}$$

Далее, так как $\alpha_j = \alpha - j,\, j = 1,2,...,m-1,$ то

$$y_s(t) = t^s \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_1+...+i_{m-1}+i_m=k} \frac{k!}{i_1!...i_{m-1}!i_m!} a_1^{i_1} ... a_{m-1}^{i_{m-1}} a_m^{i_m} \frac{t^{i_1} ... t^{(m-1)i_{m-1}} t^{\alpha i_m}}{\Gamma\left(s+1+i_1+...+(m-1)i_{m-1}+\alpha i_m\right)} =$$

$$= t^s E_{(1,...,m-1,\alpha),s+1}(a_1 t, ..., a_{m-1} t^{m-1}, a_m t^\alpha) .$$

Определение 2.1.1. Линейно независимые функции $y_s(t), s = 0,1,...,m-1$ называются фундаментальными решениями уравнения (2.1.1).

Пример 2.1.1. Пусть $m-1 < \alpha \le m, m = 1,2,...$. Предположим, что $a_j = 0,$ $j = 0,1,...,m-1$ и $a_m = \lambda \ne 0.$

Тогда уравнение (2.1.1) имеет вид

$$D^\alpha y(t) - \lambda y(t) = 0, \quad t > 0 \tag{2.1.8}$$

и по утверждению Теоремы 2.1.1 следующие функции

$$y_s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} L_2^k \frac{t^{\alpha k+s}}{\Gamma(\alpha k+s+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{t^{\alpha k+s}}{\Gamma(\alpha k+s+1)} = t^s \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{t^{\alpha k+s}}{\Gamma(\alpha k+s+1)} =$$

$$= t^s E_{\alpha,s+1}(\lambda t^\alpha)$$

являются фундаментальными решениями уравнения (2.1.8). Здесь $E_{\alpha,s+1}(\lambda t^{\alpha})$ - функция типа Миттаг-Леффлера.

2.2 Фундаментальная матрица и задача Коши

В этом параграфе мы исследуем следующую задачу Коши

$$D^{\alpha}y(t)-a_1D^{\alpha-1}y(t)-\ldots-a_{m-1}D^{\alpha-(m-1)}y(t)-a_my(t)=0,\quad t>0 \tag{2.2.1}$$

$$y^{(i)}(0)=b_i, i=0,1,\ldots,m-1 \tag{2.2.2}$$

Пусть $y_s(t)$, $s=0,1,2,\ldots,m-1$ фундаментальная система решений уравнения (2.2.1).

Определение 2.2.1. Следующая матрицу

$$Y(t)=\begin{pmatrix} y_0(t) & y_1(t) & \ldots & y_{m-1}(t) \\ y_0^{(1)}(t) & y_1^{(1)}(t) & \ldots & y_{m-1}^{(1)}(t) \\ . & . & \ldots & . \\ y_0^{(m-1)}(t) & y_1^{(m-1)}(t) & \ldots & y_{m-1}^{(m-1)}(t) \end{pmatrix}$$

называется фундаментальной матрицей уравнения (2.2.1).
Мы используем данную матрицу для представления решения задачи Коши (2.2.1),(2.2.2).

Если функция

$$y(t)=\sum_{s=0}^{m-1}C_sy_s(t)$$

является решением уравнения (2.2.1), то

$$y^{(i)}(t)=\sum_{s=0}^{m-1}C_sy_s^{(i)}(t), i=0,1,\ldots,m-1$$

Тогда имеет место равенство

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ y^{(1)}(t) \\ \ldots \\ y^{(m-1)}(t) \end{pmatrix}=Y(t)\begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \ldots \\ C_{m-1} \end{pmatrix}.$$

Если вектор $C=(C_0,C_1,\ldots,C_{m-1})^T$ удовлетворяет уравнению $Y(0)C=b$, где $b=(b_0,b_1,\ldots,b_{m-1})^T$, то функция $y(t)$ является решением задачи Коши (2.2.1),(2.2.2).

Если мы докажем выполнение равенства $C = Y^{-1}(0)b$, то решение задачи Коши (2.2.1), (2.2.2) представляется в виде

$$y(t) = \left(Y^{-1}(0)b, y_F(t)\right), \tag{2.2.3}$$

где $y_F(t) = (y_0(t), y_1(t), ..., y_{m-1}(t))$.
Для того чтобы получить решение в виде (2.2.3) надо доказать, что $\det Y(0) \neq 0$.

Предложение 2.2.1. $\det Y(0) \neq 0$.

Доказательство. Утверждение докажем от противного. Предположим, что $\det Y(0) = 0$. В этом случае существует постоянный вектор $C = \left(C_0, C_1, ..., C_{m-1}\right)^T$ такой, что не все координаты этого вектора являются не нулевыми и выполняется равенство $Y(0)C = 0$.
Далее, если рассмотрим функцию

$$y(t) = \sum_{s=0}^{m-1} C_s y_s(t),$$

то данная функция будет решением уравнения (2.2.1) с начальными данными Коши $y^{(i)}(0) = 0, i = 0,1,...,m-1$. Но, задача Коши имеет единственное решение и поэтому

$$y(t) = \sum_{s=0}^{m-1} C_s y_s(t) \equiv 0.$$

По предположению не все из постоянных $C_s, s = 0,1,...,m-1$ являются нулевыми, а это противоречит тому утверждению, что функции $y_s(t), s = 0,1,...,m-1$ являются линейно независимыми. Поэтому $\det Y(0) \neq 0$.
Предложение доказано.

Предложение 2.2.2. Пусть $x(t), t \geq 0$ произвольное решение уравнения (2.2.1). Тогда функция $x(t)$ представляется в виде линейной комбинации функций $y_s(t), s = 0,1,...,m-1$.

Доказательство. Пусть $x(t), t \geq 0$ произвольное решение уравнения (2.2.1) и $x^{(i)}(0) = x_i, i = 0,1,...,m-1$. Очевидно, что функция $y(t) = \left(Y^{-1}(0)\vec{x}_0, y_F(t)\right)$ является решением уравнение (2.2.1) и удовлетворяет тем же начальным условиям. Здесь $\vec{x}_0 = \left(x_0, x_1, ..., x_{m-1}\right)^T$. Поскольку задача Коши имеет единственное решение, то

$$x(t) = \left(Y^{-1}(0)\vec{x}_0, y_F(t)\right).$$

Предложение доказано.

Таким образом, формула (2.2.3) дает нам выражение решения задачи Коши (2.2.1), (2.2.2). Далее мы находим явный вид матрицы $Y^{-1}(0)$.
Пусть $p \geq 0$ любое действительное число. Рассмотрим функции

$$y_p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_1 D^{\alpha-1} + \ldots + a_{m-1} D^{\alpha-(m-1)} + a_m\right)^k \frac{t^{\alpha k + p}}{\Gamma(\alpha k + p + 1)}, t \geq 0 \qquad (2.2.4)$$

Очевидно, что если $p = 0, 1, \ldots, m-1$, то $y_p(t)$ является одним из фундаментальных решениями уравнения (2.2.1). Далее, для удобства для любого положительного действительного числа β мы используем обозначение $y^{(\beta)}(t) = D^\beta y(t)$.

Теорема 2.2.1. Пусть $p \geq 0$, n - целое и $n < \alpha$. Тогда

$$y_p^{(n)}(t) = \begin{cases} y_{p-n}(t), p \geq n \\ a_1 y_p^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{m-1} y_{p+m-2}^{(n-1)}(t) + a_m y_{p+\alpha-1}^{(n-1)}(t), p+1 \leq n \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $n \leq p$. Тогда

$$y_p^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_1 D^{\alpha-1} + \ldots + a_{m-1} D^{\alpha-(m-1)} + a_m\right)^k \frac{t^{\alpha k + p - n}}{\Gamma(\alpha k + p + 1 - n)},$$

т.е. $y_p^{(n)}(t) = y_{p-n}(t)$ и первая часть теоремы доказана.

Пусть $p + 1 \leq n < \alpha$. Тогда используя равенство, полученное выше, имеем

$$y_p^{(n)}(t) = y_0^{(n-p)}(t) = \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_1 D^{\alpha-1} + \ldots + a_{m-1} D^{\alpha-(m-1)} + a_m\right)^k \frac{t^{\alpha(k-1)+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha k)}\right]^{(n-p-1)} =$$

$$= \left(a_1 D^{\alpha-1} + \ldots + a_{m-1} D^{\alpha-(m-1)} + a_m\right) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(a_1 D^{\alpha-1} + \ldots + a_{m-1} D^{\alpha-(m-1)} + a_m\right)^k \frac{t^{\alpha k + \alpha - 1}}{\Gamma(\alpha k + (\alpha-1) + 1)}\right]^{(n-p-1)} =$$

$$= \left(a_1 D^{\alpha-1} + \ldots + a_{m-1} D^{\alpha-(m-1)} + a_m\right) y_{\alpha-1}^{(n-p-1)}(t) = \left(a_1 D^{\alpha-1} + \ldots + a_{m-1} D^{\alpha-(m-1)} + a_m\right) y_{p+\alpha-1}^{(n-1)}(t) =$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(a_1 D^{\alpha-1} + \ldots + a_{m-1} D^{\alpha-(m-1)} + a_m\right)^k \frac{\left(a_1 D^{\alpha-1} + \ldots + a_{m-1} D^{\alpha-(m-1)} + a_m\right) t^{\alpha k + \alpha - 1 + p}}{\Gamma(\alpha k + (\alpha-1) + p + 1)}\right]^{(n-1)} =$$

$$a_1 y_p^{(n-1)}(t) + a_2 y_{p+1}^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{m-1} y_{p+m-2}^{(n-1)}(t) + a_m y_{p+\alpha-1}^{(n-1)}(t).$$

Теорема доказана.

Следствие 2.2.1. Пусть n - целое и $1 \leq n \leq m-1$. Тогда

$$y_0^{(n)}(t) - a_1 y_0^{(n-1)}(t) - a_2 y_1^{(n-2)}(t) - \ldots - a_{m-1} y_{m-2}^{(n-1)}(t) - a_m y_{\alpha-1}^{(n-1)}(t) = 0$$

Доказательство. Если в теореме 2.2.1 положим $p = 0$, то получаем искомое равенство.

Следствие 2.2.2. Пусть n - целое и $1 \leq n \leq m-1$. Тогда

$$y_0^{(n)}(t)-a_1y_0^{(n-1)}(0)-a_2y_0^{(n-2)}(0)-...-a_{n-1}y_0^{(1)}(t)-a_n=0$$

Доказательство. Пусть $p>0$, тогда $y_p(0)=0$ и $y_0(0)=1$. Поэтому, если $p\geq n$, то по теореме 2.2.1 мы получаем $y_p^{(n)}(0)=\delta_{p,n}$-символ Кронекера. Используя это утверждение и первую часть теореме 2.2.1 из следствия 1 имеем

$$0=y_0^{(n)}(0)-a_1y_0^{(n-1)}(0)-a_2y_1^{(n-2)}(0)-...-a_{m-1}y_{m-2}^{(n-1)}(0)-a_my_{\alpha-1}^{(n-1)}(0)=$$

$$=y_0^{(n)}(t)-a_1y_0^{(n-1)}(0)-a_2y_0^{(n-2)}(0)-...-a_{n-1}y_0^{(1)}(t)-a_n.$$

Теорема 2.2.2. Обратное, к фундаментальной матрице $Y(t)$ при $t=0$ задается следующим выражением

$$Y^{-1}(0)=A:=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ -a_1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ -a_2 & -a_1 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -a_{m-1} & -a_{m-2} & -a_{m-3} & & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Как утверждается в теореме 2.2.2, все элементы выше диогональных у матрицы $Y(0)$ равны нулю, то есть $y_s^{(n)}(0)=0$ если $s>n$. Кроме того, диагональные элементы имеют вид $y_s^{(s)}(0)=1$ т.е.

$$Y(0)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ y_0^{(1)}(0) & 1 & 0 & ... & 0 \\ y_0^{(2)}(0) & y_0^{(1)}(0) & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ y_0^{(n-1)}(0) & y_0^{(n-2)}(0) & y_0^{(n-3)}(0) & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через Y_i i-строку матрицы Y (0) и через A_i j-столбец матрицы А т.е.

$$Y_i=\left(y_0^{(i-1)}(0),...,y_0^{(1)}(0),1,0,...,0\right),$$

$$A_j=\left(0,...,0,1,a_1,...,a_{m-j}\right)^T.$$

Тогда $Y(0)\cdot A=\left(Y_i\cdot A_j\right)_{i,j=\overline{1.m}}$.

Как мы отметили выше $m-i$ - элементы вектора Y_i и первые $j-1$-элементы вектора A_j равны нулю. Поэтому , если $i=j$, то $Y_i \cdot A_j = 1$ и если $i<j$, то $Y_i \cdot A_j = 0$. И наконец, если $i>j$, то

$$Y_i \cdot A_j = 1 \cdot y_0^{(i-j)}(0) - a_1 \cdot y_0^{(i-j-1)}(0) - \ldots - 1 \cdot a_{i-j}.$$

Далее, используя утверждение следствия 2 с $n=i-j$ мы получаем $Y_i \cdot A_j = 0$.

Таким образом, $Y_i \cdot A_j = \delta_{ij} = 0$. Откуда следует, что $Y(0)\cdot A$- единичная матрица. Теорема доказана.

Пример 2.2.1. Пусть $2<\alpha \le 3.$. Рассмотрим следующую задачу Коши

$$D^{\alpha} y(t) - a_1 D^{\alpha-1} y(t) - a_2 D^{\alpha-2} y(t) - a_3 D^{\alpha-3} y(t) - a_4 y(t) = 0, \quad t>0 \qquad (2.1.5)$$

$$y^{(j)}(0) = b_j,\ j=0,1,2,3. \qquad (2.1.6)$$

По формуле (2.1.3) решение задачи (2.1.5),(2.1.6)

$$y(t) = \left(Y^{-1}(0) b, y_F(t)\right), \qquad (2.2.7)$$

где

$$Y^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_1 & 1 & 0 & 0 \\ -a_2 & -a_1 & 1 & 0 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}, y_F(t) = \left(y_0, y_1, y_2, y_3\right),$$

и

$$y_s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_1 D^{\alpha-1} + a_2 D^{\alpha-2} + a_3 D^{\alpha-3} + a_4\right)^k \frac{t^{\alpha k+s}}{\Gamma(\alpha k + s + 1)}, s = 0,1,2,3.$$

Используя, начальные условия получаем

$$y(t)=b_0y_0(t)+(b_1-a_1b_0)y_1(t)+(b_2-a_2b_0-a_1b_1)y_2(t)+(b_3-a_3b_0-a_2b_1-a_1b_2)y_3(t).$$

В частности, если $a_1=a_2=a_3=0, a_4\neq 0$ и $b_0=1, b_1=b_2=b_3=0,$ то решение задачи (2.1.5),(2.1.6) имеет вид

$$y(t)=b_0y_0(t)=y_s(t)=b_0\sum_{k=0}^{\infty}a_4^k\frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)}=b_0E_{\alpha,1}(a_4t^{\alpha}).$$

Если $a_1\neq 0, a_2=a_3=a_4=0$ и $b_3=1, b_0=b_1=b_2=0,$ то решение уравнение (2.1.5) имеет вид

$$y(t)=(b_3-a_3b_0-a_2b_1-a_1b_2)y_3(t)=y_3(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_1^kD^{(\alpha-1)k}\frac{t^{\alpha k+3}}{\Gamma(\alpha k+1)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}a_1^k\frac{t^{\alpha k+3-(\alpha-1)k}}{\Gamma(\alpha k+4-(\alpha-1)k)}=\sum_{k=0}^{\infty}a_1^k\frac{t^{3+k}}{(k+3)!}=a_1^{-3}\sum_{k=3}^{\infty}a_1^k\frac{t^3}{k!}=.$$

.

$$=a_1^{-3}\left[e^{a_1t}-1-a_1t-a_1^2\frac{t^2}{2!}\right].$$

Таким образом, решение задачи Коши

$$D^{\alpha}y(t)-a_1D^{\alpha-1}y(t)=0,\quad t>0$$

$$y^{(j)}(0)=0,\ j=0,1,2,\ y^{(3)}(0)=1,$$

имеет вид

$$y(t)=a_1^{-3}\left[e^{a_1t}-1-a_1t-a_1^2\frac{t^2}{2!}\right].$$

Пример 2.2.2. Пусть $m-1<\alpha\leq m, m=1,2,\ldots$ Рассмотрим следующую задачу Коши

$$D^{\alpha}y(t)-\lambda y(t)=0,\quad t>0$$

$$y^{(j)}(0)=b_j,\ j=0,1,\ldots,m-1.$$

В этом случае

$$Y^{-1}(0)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}=E.$$

Фундаментальная матрица является единичной и являются фундаментальные решения этого уравнения найдены в Примере 2.1.1. Тогда решение задачи Коши имеет

$$y(t)=\sum_{s=0}^{m-1} b_s t^s E_{\alpha,s+1}(\lambda t^{\alpha})$$

т.е. в этом случае мы получаем известную формулу из работы [4].

Пример 2.2.3. Пусть в задаче Коши (2.2.1), (2.2.2) все коэффициенты $a_j=-1,\ j=1,2,\ldots,m-1$. Тогда решение задачи (2.2.1), (2.2.2) имеет вид

$$y(t)=\sum_{s=0}^{m-1}\left(\sum_{i=0}^{s} b_s\right) y_s(t)=\sum_{s=0}^{m-1}\left(\sum_{i=0}^{s} b_s\right) t^s E_{(1,\ldots,m-1,\alpha),s+1}(a_1 t,\ldots,a_{m-1}t^{m-1},a_m t^{\alpha}).$$

2.3 Неоднородное уравнение.

В этом разделе мы рассмотрим методы построения решения следующего неоднородного дифференциального уравнения дробного порядка

$$D^a y(t)-a_1 D^{a-1}y(t)-\ldots-a_{m-1}D^{a-(m-1)}y(t)-a_m y(t)=f(t),\ t\in(0,T) \qquad (2.3.1)$$

где $f(t)$-непрерывная в $[0,T]$ функция. Для уравнения (2.3.1) мы изучим задачу Кошу с начальными данными

$$y^{(i)}(0)=b_i,\ i=0,1,\ldots,m-1 \qquad (2.3.2)$$

Если рассмотреть начальные данные

$$y^{(i)}(0)=0,\ i=0,1,\ldots,m-1, \qquad (2.3.3)$$

то как было отмечено выше, эта задача Коши имеет единственное решение. Обозначим это решение через $y_f(t)$. Пусть $\tilde{y}(t)$ единственное решение задачи (2.2.1), (2.2.2), которая имеет вид (2.2.3). Тогда, в силу линейности, функция $y_f(t)+\tilde{y}(t)$ будет единственным решением задачи (2.3.1), (2.3.2). Таким образом, для того чтобы решить задачу Коши (2.3.1), (2.3.2) необходимо найти функцию

$y_f(t)$. Пусть функция $y_{\alpha-1}(t)$ определяется равенством (2.2.4) и $L_0 = \frac{d}{dt}D^{\alpha-1}$. Мы сначала изучим некоторые свойства функция $y_{\alpha-1}(t)$.

Лемма 2.3.1. Функция $y_{\alpha-1}(t)$ является решением следующей задачи Коши

$$\left(L_0 - L_2\right) y(t) = 0, t > 0,$$

$$y^{(i)}(0) = 0, i = 0,1,...,m-2, y^{(\alpha-1)}(0) = 1 .$$

Доказательство. Рассмотрим систему функций

$$f_{\alpha-1,k}(t) = \frac{t^{\alpha k+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}, k = 0,1,2,... .$$

Непосредственным вычислением можно проверить, что $D^{\alpha-1} f_{\alpha-1,0}(t) = 1$.Следовательно, $L_0 f_{\alpha-1,0}(t) = \frac{d}{dt} D^{\alpha-1} f_{\alpha-1,0}(t) = 0$. Отсюда так же, как в разделе 2.2.2 можно показать, что система $f_{\alpha-1,k}(t)$ является 0-нормированной по отношению к оператору L_0 и удовлетворяет условиям (i) и (ii) из раздела 1.1.1. Поэтому функция

$$y_{\alpha-1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} L_2^k f_{\alpha-1,k}(t)$$

является решением уравнения $\left(L_0 - L_2\right) y(t) = 0, t > 0$. Кроме того, нетрудно показать, что $y_{\alpha-1}(t)$ удовлетворяет условиям Коши $y^{(i)}(0) = 0, i = 0,1,...,m-2, y^{(\alpha-1)}(0) = 1$. Лемма доказана.

Теорема 2.3.1. Единственное решение задачи Коши (2.3.1), (2.3.3) имеет вид

$$y_f(t) = \int_0^t f(\tau) y_{\alpha-1}(t-\tau) d\tau \qquad (2.3.4)$$

Доказательство. Поскольку $f(t)$ является непрерывной функцией в области $[0,T]$, то используя условия Коши для $y_{\alpha-1}(t)$, получаем

$$\frac{d^j}{dt^j} y_f(t) = \int_0^t f(\tau) \frac{d^j}{dt^j} y_{\alpha-1}(t-\tau) d\tau,\ j = 1,2,...,m-1, t \in [0,T] .$$

Поэтому функция $y_f(t)$ удовлетворяет условиям Коши (2.3.3). С другой стороны (см доказательство теоремы 1.1.1)

$$D^{\alpha-j}y_f(t)=\int_0^t f(\tau)\left(D^{\alpha-j}y_{\alpha-1}\right)(t-\tau)d\tau,\ j=1,2,...,m-1, t\in[0,T] \qquad (2.3.5)$$

Функция $F(t):=\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}y_f(t)$ является абсолютно непрерывной в [0, T) и выполняется равенство $F(0)=0$. Поэтому (см.например [1], с. 40)

$$I^{m-\alpha}\frac{d}{dt}F(t)=\frac{d}{dt}I^{m-\alpha}F(t).$$

Пользуясь этим равенством и применяя, оператор $\frac{d}{dt}$ к (2.3.5) при $j=1$ с учетом равенства $y^{(\alpha-1)}(0)=1$, получаем

$$L_1y_f(t)=D^{\alpha}y_f(t)=f(t)+\int_0^t f(\tau)\left(L_0y_{\alpha-1}\right)(t-\tau)d\tau.$$

Следовательно, в силу леммы 2.3.1, имеем

$$\left(L_1-L_2\right)y_f(t)=f(t)+\int_0^t f(\tau)\left(\left(L_0-L_2\right)y_{\alpha-1}\right)(t-\tau)d\tau=f(t)$$

Теорема доказана.

Пример 2.3.1. Пусть $m-1<\alpha\le m, m=1,2,...$. Рассмотрим следующую задачу Коши

$$D^{\alpha}y(t)-y(t)=\frac{t^n}{n!},\quad t>0$$

$$y^{(j)}(0)=0,\ j=0,1,...,m-1.$$

В этом случае по утверждению леммы 2.3.4 решение этой задачи имеет вид

$$y_f(t)=y_{\alpha+n}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{\alpha k+\alpha+n}}{\Gamma(\alpha k+\alpha+n)}=t^{\alpha+n}E_{\alpha,\alpha+n}(t^{\alpha}).$$

Замечание 2. Как и в случае функции $y_s(t)$, решение неоднородного уравнения можно записать в терминах обобшенной функции Миттаг-Леффлера.Действительно,

$$y_{\alpha-1}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}L_2^k f_{\alpha-1,k}(t)=\sum_{i_1+...+i_{m-1}+i_m=k}C_{k,i_1...i_m}a_1^{i_1}...a_{m-1}^{i_{m-1}}a_m^{i_m}\frac{t^{\alpha-1}t^{i_1}...t^{(m-1)i_{m-1}}t^{\alpha i_m}}{\Gamma\left(s+1+i_1+...+(m-1)i_{m-1}+\alpha i_m\right)}=$$

$$=t^{\alpha-1}E_{(1,...,m-1,\alpha),s+1}(a_1t,...,a_{m-1}t^{m-1},a_mt^{\alpha})\,.$$

Отсюда

$$y_f(t)=\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{(1,...,m-1,\alpha),s+1}\left(a_1(t-\tau),...,a_{m-1}(t-\tau)^{m-1},a_m(t-\tau)^{\alpha}\right)f(\tau)d\tau$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе разработан операторный алгоритм построения решения дифференциальных уравнений дробного порядка. Данный метод основан на построении нормированных систем связанных с операторами дифференцирования дробного порядка. Для разработки этого метода определены классы операторов дифференцирования дробного порядка, для которых можно построит нормированные системы.

Основными результатами данной работы является:

- Введены понятия обобщенных однородных операторов;

- Построены нормированные системы, связанные с обобщенными однородными операторами;

- Изучены свойства обобщенных однородных операторов;

- Построены собственные и присоединенные функции некоторых классов операторов связанных с производными типа Лагера и дробными производными;

- Рассмотрены применения нормированных систем к построению решений итерационных дифференциальных уравнений дробного порядка;

- Доказаны сходимость рядов определяющие решения дифференциальных уравнений дробного порядка;

- Разработаны методы построения частных решений однородных и неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка;

- Построены 0-нормируемые системы для одного класса дифференциальных операторов дробного порядка;

- Рассмотрены применение нормированных систем для построения решения обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка общего вида;

- Используя свойства нормированных систем, построены точные решения дифференциальных уравнений дробного порядка;

- Построены фундаментальные решения обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка;

- Построены и изучены свойства фундаментальных матриц связанные с решением задачи Коши;

- Рассмотрено применение фундаментальных решение к построению решения задачи Коши для общего класса ;

Исследованы свойства специальных функций связанных с решениями дифференциальных уравнений дробного порядка;

- Приведена формула представления решения однородного дифференциального уравнения дробного общего вида припомощи обобщенной функции Миттаг-Леффлера;

- Построены f - нормируемые системы для некоторых классов дифференциальных операторов дробного порядка;

- С помощью построенных 0 – нормируемых систем связанных с дифференциальными операторами дробного порядка найдена решение специальной задачи Коши;
- Разработан алгоритм построения частного решения неоднородного дифференциального уравнения дробного порядка;
- Рассмотрены различные примеры построения частных решений неоднородного дифференциального уравнения дробного порядка

ЛИТЕРАТУРА

1 Бабенко Ю.И. Метод дробного дифференцирования в прикладных задачах теории тепломассообмена // – Ленинград, Химия . – 1986. – 656 с.

2 Бутковский А.Г., Постнов С.С., Постнова Е.А. Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. I. Математические основы и проблема интерпретации // Автоматика и телемеханика. –2013. –№ 4. – С. 3 – 42.

3 Бутковский А.Г., Постнов С.С., Постнова Е.А. Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. II. Дробные динамические системы: моделирование и аппаратная реализация // Автоматика и телемеханика. –2013. –№ 5. – С. 3 – 34.

4 Васильев В.В. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем / В. В. Васильев, Л. А. Симак. – Киев : НАН Украины, 2008. – 256 с.

5 Нахушев А.М. Элементы дробного исчисления и их применения. Нальчик. – 2000г.-298с.

6 Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.

7 Нигматуллин Р.Р. Физическая интерпретация дробных интегралов // Теоретическая и математическая физика. – 1992. – Т. 90, № 3. – С. 354-367.

8 Тарасов В. Е. Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка. – Москва, Ижевск: РХД. – 2010. –568с.

9 Учайкин В.В. Метод дробных производных . – Ульяновск: Издательство « Артишок».– 2008. –512 с.

10 Baleanu D.,Diethelm K., Scalas E, Trujillo J.J.Fractional Calculus: Models and Numerical Methods. World Scientific Publishing Company .New Jersey. – 2012. – 428 p

11 Diethelm K., Ford N.J. Analysis of Fractional Differential Equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2002. – V. 265. – P. 229–248.

12 Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. – Amsterdam, Elsevier Science B.V, 2006. – 523 p.

13 Magin R. L. Fractional calculus in bioengineering //Critical Reviews in Biomedical Engineering. – 2004. – V. 32,№ 1. –P. 1-104.

14 Miller K. S., Ross B. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. – John Wiley & Sons, New York, 1993. –276 p.

15 Podlubny I. Fractional Differential Equations. – San Diego, Academic Press, 1999. –340 p.

16 Sabatier J., Agrawal O. P., Machado J. A. T., Eds. Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering. – Springer, Dordrecht, The Netherlands, 2007. –416 p.
17 Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications. –Gordon and Breach, Switzerland,1993. –976 p.
18 Ortigueira M. D., and Tenreiro Machado J. A. Special issue on Fractional signal processing and applications // Signal Processing. –2003. –V. 83,№ 11. – P. 2285–2286.
19 Oldham K. B. Fractional differential equations in electrochemistry //Advances in Engineering Software. –2010. –V. 41, №. 1. –P. 9–12.
20 Sorrentinos G. Fractional derivative linear models for describing the viscoelastic dynamic behavior of polymeric beams //in Proceedings of IMAS. – Saint Louis, Mo, USA, 2006.
21 Aghajani A., Jalilian Y., Trujillo J. J. On the existence of solutions of fractional integro-differential equations //Fractional Calculus and Applied Analysis. –2012. –V. 15, № 1, –P. 44–69.
22 Agarwal R. P., Ahmad B., Alsaedi A., Shahzad N. Existence and dimension of the set of mild solutions to semilinear fractional differential inclusions //Advances in Difference Equations. –2012. –V. 2012. article 74.
23 Jarad F., Abdeljawad T., Baleanu D., K. Bisen. On the stability of some discrete fractional nonautonomous systems //Abstract and Applied Analysis. – 2012. –Vl. 2012, Article ID 476581, 9 pages.
24 Atangana A. Secer A. He time-fractional coupled-Korteweg-de-Vries equations //Abstract and Applied Analysis. –2013. –V. 2013, Article ID 947986, 8 pages.
25 Xiang Sh., Han Zh., Zhao P., Sun Y. Oscillation Behavior for a Class of Differential Equation with Fractional-Order Derivatives //Abstract and Applied Analysis. –2014. –V.2014. Article ID 419597, 9 pages.
26 Baleanu D., Mustafa O. G., Agarwal R. On the solution set for a class of sequential fractional differential equations //Journal of Physics A. –2010. –V. 43, № 38. –7p.
27 Летников А.В. Теория дифференцирования с произвольным указателем // Матем. сб., – 1868. –Т.3, № 1. – С.1 - 68.
28 Летников А.В. Об историческом развитии теории дифференцирования с произвольным указателем // Матем. сб., – 1868. –Т.3, № 2. – С.85 -112.
29 Летников А.В. К разъяснению главных положений теории дифференцирования с произвольным указателем // Матем. сб., – 1873. – Т.6, № 4. – С.413 - 445.
30 Dzerbashyan M.M, Nersesyan A.B. Fractional derivatives and the Cauchy problem for differential equations of fractional order. Izv. Akad. Nauk Armyan. SSR, Ser. Mat. – 1968. – №3. – P. 3 – 29.
31 Luchko Y., Hilfer R., Tomovski Z. Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann-Liouville fractional derivatives //Fract. Calc. Appl. Anal. –2009. –V.12. –P.299-318.

32 Luchko Y. Operational method in fractional calculus//Fract. Calc. Appl. Anal. –1999. –V2. –P.463-489.
33 Luchko Y. Gorenflo R . An operational method for solving fractional differential equations with the Caputo derivatives//Acta Mathematica Vietnamica. –1999. –V.24. – P.207-233 .
34 Kim M.H., Ri G.C, Hyong-Chol O. Operational method for solving multi-term fractional differential equations with the generalized fractional derivatives. Fract. Calc. Appl. Anal. – – 2014. V.17, No 1– P. 79–95.
35 Pskhu A.V. Initial-value problem for a linear ordinary differential equation of noninteger order //Sbornik Mathematics. –2011. –V. 202:4. P.571–582.
36 Daftardar-Gejji V., Bhalekar S. Solving multi-term linear and non-linear diffusion–wave equations of fractional order by Adomian decomposition method //Applied Mathematics and Computation. –2008. –V.202. –P. 113–120.
37 Daftardar-Gejji V., Bhalekar S. Solving fractional boundary value problems with Dirichlet boundary conditions using a new iterative method.//Computers & Mathematics with Applications. –2010. –V. 59,№ 5. –P. 1801–1809.
38 Hua Y., Luoa Y, Lua Z. Analytical solution of the linear fractional differential equation by Adomian decomposition method // Journal of Computational and Applied Mathematics. –2008. –V.215. –P.220 – 229.
39 Saha R.S., Bera R.K. Analytical solution of the Bagley Torvik equation by Adomian decomposition method //Appl. Math. Comput. –2005. –V.168. –P.398–410.
40 Saha R.S., Bera R.K. Solution of an extraordinary differential equation by Adomian decomposition method// J. Appl. Math. –2004. –V.4. –P.331–338.
41 Karachik V.V. Method for constructing solutions of linear ordinary differential equations with constant coefficients //Comput. Math. Math. Phys. – 2012. –V. 52:2. –P.219–234.
42 Turmetov B.Kh., Shinaliyev K.M. On a method for constructing solutions of differential equations of fractional order with a Hadamard type operator // International Journal of Pure and Applied Mathematics. –2013. –V.84(4). –P. 435 – 450.
43 Shinaliyev K.M., Umarov S.R., Turmetov B.Kh. A fractional operator algorithm method for construction of solutions of fractional order differential equations //Fractional Calculus and Applied Analysis. –2012. –V.15(2), –P. 267 – 281.
44 Турметов Б.Х., Касимов Ш.Г. Шиналиев К.М. Об одном методе решения дифференциальных уравнений дробного порядка с оператором Миллера-Росса. Вестник НУУз. Ташкент. –2011. –№4/1. –С.96-103
45 Турметов Б.Х., Шиналиев К.М.Об одном операторном методе построения решения дифференциальных уравнений дробного порядка // Вестник ЕНУ. –2011. –№ 2(81). – С.10-17.

46 Dattoli G., Ricci P.E. Laguerre-type exponents and the relevant L- circular and L-hyperbolic functions // Georgian Mathematical Journal. – 2003. – V.10, N.3. – P.481–494.
47 Dattoli G., He M.X., Ricci P.E. Eigenfunctions of laguerre-type operators and generalized evolution problems // Mathematical and Computer Modelling. – 2005. – V.42. – P.1263-1268.
48 Garra R., Polito F. On some operators involving Hadamard derivatives // Integral Transforms and Special Functions. – 2013. – V.24, N 10. – P.773-782.
49 Furati Kh. M., Iyiola O. S., Kirane M. An inverse problem for a generalized fractional diffusion // Applied Mathematics and Computation. – 2014. – V. 249. – P.24–31.
50 Hilfer R. Fractional diffusion based on Riemann-Liouville fractional derivatives. J. Phys. Chem. – 2000. – N B 104. – P. 3914-3917.
51 Бондаренко Б.А. Операторные алгоритмы в дифференциальных уравнениях. – Ташкент: Изд. «Фан». – 1984. – 184 с.
52. Турметов Б.Х., Тузун А. Обобщенно-однородные операторы и их применения // Материалы международной научно-практической конференции “ Оразовские чтение-2”, Шымкент , 26-27 ноября 2015 г.с.363-368.
53. Турметов Б.Х., Тузун А. Применение нормированных систем к решению дифференциальных уравнений дробного порядка // Вестник МКТУ. -2016 .№ 1 (в печати)