Ф-ОБ-003/018

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫНЫҢ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Қ.А.ЯСАУИ АТЫНДАҒЫ ХАЛЫҚАРАЛЫҚ ҚАЗАҚ-ТҮРІК УНИВЕРСИТЕТІ

ӘОЖ - 514.853

Қолжазба құқығында

Насырла Дана Насырлақызы

«Қалыңдығы айнымалы тұтқырсерпімді пластинада толқындардың таралуын санды модельдеу»

6М060200 – ИНФОРМАТИКА мамандығы бойынша техника ғылымдарының магистрі академиялық дәреже алу үшін магистрлік диссертация

ТҮРКІСТАН – 2018

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫНЫҢ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІҚ.А.ЯСАУИ АТЫНДАҒЫ ХАЛЫҚАРАЛЫҚ ҚАЗАҚ-ТҮРІК УНИВЕРСИТЕТІ

Қорғауға жіберілді:
«Компьютерлік ғылымдар»
кафедрасының меңгерушісі,
п.ғ.к., доцент
_______ НиязоваГ.
(қолы)
«___»__________20__ ж.

Магистрлік диссертация

«ҚАЛЫҢДЫҒЫ АЙНЫМАЛЫ ТҰТҚЫРСЕРПІМДІ ПЛАСТИНАДА ТОЛҚЫНДАРДЫҢ ТАРАЛУЫН САНДЫ МОДЕЛЬДЕУ»

мамандығы: 6М060200 - ИНФОРМАТИКА

Магистрант ___________________ Насырла Д.Н

(қолы) (аты-жөні,тегі)

Ғылыми жетекшісі,

техн.ғ.д.,доцент ___________________МарасуловА.М

(қолы) (аты-жөні,тегі)

ТҮРКІСТАН – 2018

МАЗМ   Ы

АҢДАТПА

Табиғи толқындардың қалыңдығы айнымалы пластинада таралуы зерттелді. Ықтимал ығысулар принципіне сүйене отырып, біз механикалық жүйелер динамикасының интегралды-дифференциалдық теңдеулер жүйесі алынған инерция күштерін қоса алғанда, барлық белсенді күштердің жұмысының нөліне теңестіреміз. Мәселенің расталуы әдістемесі Мюллер және Гаусс әдістерін қолданып, Годуновтың ортогональдік қуу негізінде жасалды. Нәтижелерді сандық талдау барысында сына тәрізді пластинадағы бірінші режим материалдың Пуассон қатынасына тәуелсіз болып табылатыны анықталды.

Кілттік сөздер:қалыңдығы айнымалы пластина, жеке тербелістер, еріксіз тербелістер, Кирхгоф –Ляв гипотезасы, вариациялық есеп, тербелістің ғаламдық нысаны, толқындық сан, демпферлік коэффициенттер, фазалық жылдамдық, жиілік,ядро релаксациясы.

АННОТАЦИЯ

В работе исследовано распространение собственных волн в пластинке с пкременной толщины. Исходя из принципа возможных перемещений, приравняем нулю сумму работ всех активных сил, включая силы инерции получено, системы интегро-дифференциальных уравнения динамики механических систем. Разработано методики ращения поставленного задачи на основе ортогонального прогонки Годунова, методом Мюллера и Гаусса. В ходе численного анализа результатов установлено что, первой моды в клиновидной пластине практически не зависит от коэффициента Пуассона материала.

Ключевые слова:Пластина переменной толщины, собственных колебаний, вынужденных колебаний, гипотеза Крихгоф –Ляв, вариационная задача, глобальное формы колебаний, волновая число, коэффициентов демпфирования, фазовая скорость, частота,ядро релаксация.

ANNOTATION

The propagation of natural waves in a plate with a current thickness is investigated. Proceeding from the principle of possible displacements, we equate to zero the sum of the work of all active forces, including inertia forces, obtained, systems of integro-differential equations of the dynamics of mechanical systems. The methods for the rasterization of the problem were developed on the basis of the orthogonal run of Godunov, using the Mueller and Gauss methods. In the course of a numerical analysis of the results it is established that the first mode in a wedge-shaped plate is practically independent of the Poisson's ratio of the material.

Key words: plate of variable thickness, natural oscillations, forced oscillations, Krichgoff-Lyav hypothesis, variational problem, global waveforms, wave number, damping coefficients, phase velocity, frequency, core relaxation.

AÇIKLAMA

Doğal dalgaların mevcut bir kalınlığa sahip bir plakada yayılımı araştırılmaktadır. Olası yer değiştirmeler prensibinden yola çıkarak, mekanik sistemlerin dinamiklerinin integro-diferansiyel denklemleri, elde edilen eylemsizlik kuvvetleri de dahil olmak üzere tüm aktif kuvvetlerin çalışmalarının toplamını sıfıra eşitlemekteyiz. Sorunun rasterleştirilmesi için yöntemler, Mueller ve Gauss yöntemleri kullanılarak, Godunov'un ortogonal koşusu temelinde geliştirilmiştir. Sonuçların sayısal analizi sırasında, kama şeklinde bir plakadaki ilk modun, Poisson'un malzemenin oranından pratik olarak bağımsız olduğu tespit edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Değişken kalınlıktaki levha, doğal salınımlar, zorlanmış salınımlar, Krichgoff-Lyav hipotezi, varyasyonel problem, küresel dalga şekilleri, dalga sayısı, sönüm katsayıları, faz hızı, frekans, çekirdek gevşemesi.

НОРМАТИВТІК СІЛТЕМЕЛЕР

1. Қазақстан Республикасы Президентінің 2017 жылғы 31 қаңтардағы "Қазақстанның үшінші жаңғыруы: жаһандық бәсекеге қабілеттілік" атты Жолдауы

2. "Цифрлық Қазақстан" мемлекеттік бағдарламасын бекіту туралы.Қазақстан Республикасы Үкіметінің 2017 жылғы 12 желтоқсандағы № 827 қаулысы

3. Ақпараттық технологиялар саласындағы ұлттық стандарттар:

    - 35.060 Ақпараттық технологияларда қолданылатын тілдер
    - 35.080 Бағдарламалық қамтамасыз ету
    - 35.200 Интерфейстер мен өзара қосылыс құрылғылары
    - 35.240 Ақпараттық технологияларды қолдану
    - 35.240.99 Басқа салаларда ақпараттық технологияларды қолдану

КІРІСПЕ

Жұмыстың жалпы сипаттамасы

Магистрлік диссертация вариациялық әдістер негізінде математикалық модельдеуді дамытуға, сонымен қатар қойылған есептің алгоритмін шешу әдісіне арналған. Жұмыс теориялық-зерттеу сипаттамасына ие.

Зерттеудің өзектілігі. Толқындардың серпімді және тұтқырсерпімді ортада таралуын зерттеу қазіргі таңдағы толқындық динамикада маңызды бағыт болып табылады. Қазіргі таңдағы машиналар мен аппараттар конструкцияларды жасауда квазистатикалық және динамикалық түрлі жүктемелермен жұмыс жасайтын полимерлік материалдарды кең қолданылуымен сипатталады. Осыған орай, конструкция беріктілігі бойынша материалдарға қатаң шектеу қойылады. Осының барлығы тұтқырсерпімді денелер мен конструкциялардың және жасалатын бұйымның геометриялық кернеулік концентрациясы минималды болатындай етіп, есептеудің сенімді әдістерін жасауды талап етеді. Тағы да тұтқырсерпімді денедегі толқындық процесстер сигналдарды өңдеу есебімен байланысты геофизика саласында маңызды рөл атқарады. Сондықтан, есептеудің алгоритмін және бірыңғай әдістерін жасау математикалық модельдеудің өзекті мәселесі болып табылады. Деформацияланатын дененің динамикалық кернеулік деформацияланған күйін, оның тұтқырсерпімді қасиеттерін және геометриялық құрылымын ескере отырып,ондағы толқынның таралуын зерттеуге отандық және шетелдік ғалымдар көп көңіл бөлуде. Осындай денелердің негізгі ерекшелігі оның бір бағытта созыңқы таралуы, ал басқа бағыттар үшін толқын шоғырының шектелуі мен оқшаулануы болып табылады. Материалдың толқынды бәсеңдету қабілеті және оның динамикалық өтуі конструкциялардың динамикалық әрекетінде үлкен рөл атқарады. Мұндай қабілетті бағалау тек тербеліс кезіндегі энергияның жұтылу табиғатын түсінгенде ғана мүмкін болады. Жүйенің диссипативті қасиеттерін және оның кернеулі-деформацияланған күйін зерттеу негізгі мәселе болып табылады. Бұл нәтижелер машина құрылысында , құрылыста және технологиялық процесстерде үлкен мағынаға ие. Жоғарыда айтылғандарды ескере отырып, толқындардың тұтқырсерпімді созыңқы пластиналарда таралуының ғылыми негізін және де нақты берілген есептердің шешу әдістерінің алгоритмін және программасын жасау қазіргі техника мен технолоияның мәселесі болып табылатын деформацияланатын дененің механикасы үшін өте қажет болып табылады.

Зерттеудің мақсаты қалыңдығы айнымалы созыңқы пластиналық денедегі толқындардың таралуының теориясын дамыту және ғылыми негізін жасау болып табылады.

Мақсатқа жету үшін зерттеудің келесі **мәселесі құрылды**:

- мүмкін болатын ауыстырулар (Кирхгоф-Ляв және С.П. Тимошенко гипотезаларының негізінде) қағидасының негізіне сүйене отырып үшөлшемді қалыңдығы айнымалы тұтқырсерпімді пластина үшін комплексті коэффициентті бірінші ретті шешімі бар теңдеулер жүйесін алу. Дифференциалдық теңдеулер жүйесін ортогональді қуу әдісі мен Мюллер әдісін қолдана отырып, комплексті арифметикада шешу және сандық мәнін алу;

Зерттеу нысаны қалыңдығы айнымалы тұтқырсерпімді пластина болып табылады.

Зерттеу әдістері. Диссертациядағыосьтік интегро-дифференциалды теңдеу мүмкін болатын ауыстырулар негізінде алынған. Зерттеу барысында айнымалыларды бөлу әдістері, тұрақтану әдістері, Мюллер әдісі және Годуновтың ортогональді қуу әдістері қолданылған.

Зерттеу тақырыбы – материалдардың түрлі реологиялық қасиеттерін ескере отырып, диссипативті механикалық жүйенің динамикалық есептерін шешу әдістерін және математикалық модельдеуді дамыту. Спектральді есепті зерттеу үшін комплексті арифметикада алгоритм жасау.

Зерттеу болжамдары. Қалыңдығы айнымалы пластинаның үшөлшемді есебі үшін Крихгоф–Ляв және С.П Тимошенко болжамдары қолданылады. Сонымен қатар жұмыс тұтас ортаның механикалық болжамдарын толықтай және деформацияланатын қатты дененің механикасын қанағаттандырады.

Диссертациялық зерттеудің **ғылыми жаңалығы** келесідей:

- материалдың тұтқырлық қасиетін ескеру фазалық жылдамдықтардың шамасын 10 – 15% төмендетеді;

- алғаш рет таралу жылдамдығының толқындық саны өсуімен сына тәрізді пластинаның нормаль модасының нақты және жорамал бөліктері Кирхгоф-Ляв және С.П Тимошенко жолағында тұрақты санға ұмтылады. Сонымен қатар толқын арнасының сүйір жиегіне жақын жердегі қозғалыстың оқшаулануы бақыланады. Сынаның бұрышы кіші болған кездегі нәтижелерді салыстыру арқылы Кирхгоф-Ляв және С.П.Тимошенко теориясы бойынша алынған нәтижелердің қанағаттанарлық екенін көреміз.

-алғаш рет сына тәрізді пластинадағы бірінші моданың фазалық жылдамдығының нақты және жорамал бөліктері Пуассон коэффициентіне тәуелді еместігі анықталды.

Зерттеудің **практикалық қорытындылары** келесідей:

Қалыңдығы айнымалы пластинаның динамикалық есебі үшін жасалған алгоритм дербес компьютердегі стандартты ішкі бағдарламаларда кеңінен қолданылғандықтан, инженер-талдаушы үшін қолжетімді. Әдістің есептеулік тиімділігі қанағаттанарлық нәтижеде есептеуге және зерттеуге мүмкіндік береді. Алынған нәтижелер радиоэлектронды аппаратураның тербелісін төмендетуге және де деформацияланған кернеулі күйін оптимизациялауға мүмкіндік береді.

Алынған қорытындылардың дұрыстығы спектральді шектік есептің қисынды қойылуымен, математикалық өрнектің қатаңдығымен, негізделген шешу әдістерін қолданумен және шешімнің нақты бағалануымен, басқа математикалық қойылымдағы шешімдер мен салыстырумен негізделген.

Диссертацияның көлемі және құрылымы. Диссертация кіріспеден, үш бөлімнен, қорытынды және 43 атаулы әдебиеттер тізімінен тұрады. Жұмыс 68 бетке мазмұндалған, соның ішінде 41 сурет және таблица бар.

Кілттік сөздер тізімі.

Қалыңдығы айнымалы пластина, жеке тербелістер, еріксіз тербелістер, Кирхгоф –Ляв гипотезасы, вариациялық есеп, тербелістің ғаламдық нысаны, толқындық сан, демпферлік коэффициенттер, фазалық жылдамдық, жиілік,ядро релаксациясы.

Басылым жайлы мәлімет. Диссертация жұмысының негізгі мазмұны үш жарияланған жұмыста көрсетілген.

Диссертация тақырыбы бойынша ғылыми зерттеулерге шолу. Деформация толқынының серпімді және тұтқырсерпімді ортада таралуын зерттеу заманауи толқындық динамикада маңызды бағыт болып табылады.Деформация толқындарының геометриялық және физикалық сызықты емес серпімді және тұтқырсерпімді біліктердежәне пластиналарда деформацияның толқындарын модельдеу және зерттеу мына жұмыстарда қарастырылған [5,10,11,17]. Мұнайды барлау жұмыстарында сейсмикалық толқындардың таралуын зерттеу маңызды рөл атқаратындығы оның ауқымды қолданылуына дәлел болады. Мұнайды барлау жұмыстарында сейсмикалық толқындардың таралуын зерттеу маңызды рөл атқаратындығы оның ауқымды қолданылуына дәлел болады. Бұл әдістің тура емес жанама әдіс екеніне қарамастан көп жағдайларда сейсмикалық барлау жұмыстарының қорытындысы мұнайды тікелей табуға емес, геологиялық құрылымды табуға мүмкіндік береді. Сәтті кәсіпорынның ықтималдығы сейсмикалық барлау жұмыстараның шығындарының орнын толтырып, қосымша табыс әкелуге жеткілікті. Сейсо барлау жұмыстарында жер астында жатқан пайдалы қазбаларды табуға мүмкіндік беретін(су,көмірсутек,кен,геотермальді су) серпімді толқындар жасанды жолмен беріледі [34,37,40,41].

Серпімділік теориясының динамикалық есептерінің маңыздысының бірі ретінде деформацияланатын денелерде (тұтқырсерпімділік қасиетін ескереді) кернеулі-деформацияланған күйіндегі толқынның таралуын зерттеу болып табылады, және де оның геометриялық құрылымын ескеріп, механикалық толқыныс деген түсінікпен біріктіріледі [15,26,27]. Толқыныстың негізгі ерекшелігі оның бір бағыт бойындағы созыңқылығы, және басқа бағыттар бойынша шектелуі және толқын шоғырының оқшаулануы. Толқын материалының демпферлік қаситінің есебі құрылымның динамикалық күй-өзгерісінде үлкен маңызға ие. Ол еріксіз тербеліс кезіндегі және тербеліс кезіндегі шоғырлану зонасындағы кернеуді тегістеу кезіндегі амплитуданың төмендеуі кезінде болатын жеке тербелістің әлсіреуіне әкеліп соқтырады. Бұл қасиетке тек қана тербеліс кезіндегі жұтылу энергиясының табиғатын түсіну арқылы ғана баға беруге болады. Бұл механизмге көптеген көзқарастар бар, яғни гипотеза немесе ішкі үйкеліс теориясы, айта кететітіні бұл жерде елеулі кезең серпімді қарама-қайшылық гипотезасынан басым болды, есептеуге ыңғайлы, бірақ металдарға арналған экспериментпен расталмайды. Материалдың демпферлік қасиеті, қайтымсыз процесстер есебінен жұтылу энергиясының деформациясының қайталануы кезінде, оның өзінде вибросіңіргіш қабаттың талдануы кезінде және вибросіңіргіш құрылым материалы кезінде пайдаланылды [9,30]. Мұндай қабаттардың міндеті резонансты тербеліс деңгейінің төмендеуінен, оның бастауына қарамастан дыбыс деңгейінің төмендеуінен тұрады. Қабаттың мұндай түрлері бірнеше елдер қатарында құрылған [28,29,30] және инженерлік жұмыстың түрлі аумағында пайдаланылады-авиацияда, құрылыста, кеме құрылысында, транспорттық машина құрылысында және т.б. [32,33]. Негізгі көңіл біртекті бастапқы күй кезіндегі түрлі геометриялық форма денесіндегі толқындардың таралу заңдылығын зерттеуге бөлінген. Механикалық жүйенің математикалық моделінің үлкен санына қарамастан, мәселені шешудің математикалық әдісі акустикалық сияқты, сызықты дифференциалды теңдеулер жүйесімен [14,16] сипатталатын серпімді қимылдармен талданған. [7,29] анықтау әрекеті және диссипативті сипаттаманы оңтайландыру қабылданған, сонымен қатар механикалық жүйенің кернеулі-деформацияланған күйі қабылданған. Жоғарыда айтылған жұмыстарда жұмыс тәртібінің екі жүйесі қарастырылған- жеке және еріксіз тербелістер. Жеке тербелістердің астында жүйенің барлық нүктелері бірдей жиіліктермен және демпфрлеудің көрсеткіштерімен (бірақ әр түрлі амплитудамен) тербеліс жасайтын қимылдар жобаланып тұрады. Серпімді толқын арнасында толқынның таралуы және қоздырылуы туралы тапсырманың математикалық берілісінде кеңістікткгі [3,9] өшу шарты сияқты рөлді ойнайтын шексіздікке қойылатын шарттың қиындығын анықтау пайда болады. Демек, жарты кеңістік үшін шарттарды – Рэлея толқындарын бетүсті буырқануы шарттарын қою керек. Мұнда тұжырымдалған талаптар, тұрақты Рэлея толқынының шешімінің жалпы көрінісінен алынып тасталады. Ұқсас типтің шарты, сондай-ақ қосымша қиындықтарды ескере отырып, толқын арнасындағы режимдердің геометриялық дисперсиясы қалыпты толқындар жағдайында қойылу керек [1,2,4]. Серпімді толқын арнасындағы мұндай шарттардың қойылуы жағдай қатарындағы модтардыңфазалық және топтық жылдамдық жағынан қарама-қарсы белгілерге ие болатындығына байланысты қиынға түседі. Сондықтан, көрсетілген шарттардың мағынасын анықтау үшін бірінші толқынды бағыттағы қарапайым күйлердің сипаттамаларын зерттеу орынды, жалпы жағдайда толқындық өріс болып табылатын суперпозициямен зерттеу орынды. Серпімді толқын арнасындағы қарапайым модтарды зерттеу сипатының теориялық қорытындылары акустикалық және электромагниттік толқын арнасындағы мод үшін ұқсастығы жоқ қызықты ерекшеліктері бар қатар санын көрсетті. Қарастырылып отырған жұмыста түрлі реологиялық сипатқа ие қатпарлы(екі және үшқатпарлы) денедегі еркін толқындардың таралуы зерттеледі. Еркін толқындардың таралуы кезінде сыртқы әсер жоқ деп болжамданады. Толқындардың таралуы қозғалатын жүктемелердің әсерінен болады. Кейбір жағдайларда тұтқырсерпімді материалдың физикалық қасиеті сызықты тұқым қуалаушы Больцман-Вольтер ядроларының интегралдық айырмашылықтарымен қарым-қатынаста сипатталады. Негізгі мәселе толық түрдегі жүйенің диссипативті қасиетін зерттеу, сонымен қатар оның кернеулі-деформацияланған күйі болып табылады. Толқынның еркін таралуы кезінде диссипация еркін толқынның өшуіне алып келеді. Өшу жылдамдығы жүйенің диссипативті қасиетін сандық бағалайды: өшу жылдамдығы жоғары болған сайын, диссипация да жоғарылайды. [6,12] жұмысында шағын деформацияларды бастан өткерген нақты органдардың деформация механизмінің жалпы негізін ұсыну көрсетілген. Кернеулер және деформациялар арасында және олардан шығатын аз амплитудалы сейсмикалық тербелістердің таралу деңгейінде сәйкес келетін тәуелділіктер келтіріледі. Осы деңгейлерден нәтиже қарастырылады. Эксперименттік деректер талқыланады. Қатты денедегі механикалық тербелістердің таралуы оның өшуімен сүйемелденеді [7,35]. Қатты заттардың кең класы үшін Максвелл денесінің жалпыланған теңдеуі негізінде жиіліктен жоғарылату коэффициентінің сызықтық тәуелділігі байқалады. [20,35] жұмысында сейсмикалық толқындардың таралуын үйрену үшін және жер қыртысының реологиялық қасиеттері мен топырақтарын анықтау үшін Максвелл көріністері пайдаланылады. Жылжу деформациясын сезінетін ғана емес, жан-жақты қысу мен кеңейтуді де сезінетін серпімді-пластикалық орта қаралады. Бойлық және көлденең толқынның таралу жылдамдығын анықтайтын және өшу коэффициентінің байланысы мен ортаның релаксация уақытын анықтайтын формуланың, серпімді-пластикалық ортаның жылжуының дифференциалдық теңдеуі алынды. Көлденең толқынның өшу коэффициенті ортаның серпімділік коэффициентіне кері пропорционал. Үлкен серпімді ортада көлденең толқындар баяу өшеді және бойлық толқыннан басым болады. Керісінше, аз серпімді ортада өшу коэффициенті серпімділікке тура пропорционал болатын ортада бойлық толқындар басым келеді. Бұл құрал-жабдық арқылы бақылауды растайды. Сейсмикалық толқындардың таралуы кезінде құрыл-жабдық бақылауының берілгені арқылы өшу коэффициентін анықтауға болады, ал одан соң релаксация уақытын. Жұмыс [3,25] гидрастатикалық қысымның әсер етуі және бірөстік қысуы кезінде тау жыныстарының үлгісіндегі серпімді толқындардың өшуін зерттеуге арналған. Үлгілер диаметрі 2 см, ұзындығы 10 см болатын цилиндр түрінде дайындалған. Жан-жақты қысу мультипликатормен құрылады; дизель майы пайдаланылатын қысым таратушы орта ретінде. Үлгіге бірөстік жүктеме қысу арқылы құрылады. Бойлық толқындардың жылдамдығының қарқынды өсуі гидрастатикалық қысым кезінде болатыны айтылған. (Установлено) . Заманауи техникалық құрылғының маңызды торап мен бөлшек қатары оларға әсер ететін сыртқы күштің әсерінің жылдам өзгеруінен тез динамикалық жағдайда жұмыс жасайды [18,24,31]. Осыған орай, беріктілік пен жұмысқа қабілеттілігіне баға беруді сонымен қатар кейбір серпімді элементтердің функционалды оңтайлы күйін таңдау барысында ескерілетін құрылымда динамикалық кернеу туындайды. Жұмыс істеу принципі стационарлы емес толқындық өрістің пайдаланылуына және солармен байланысты механикалық эффектісіне негізделеді, әсіресе соңғысы техникалық құрылғы үшін маңызды. Мұндай есептің ғылыми негізі серпімді денедегі тербеліс және толқын теориясы болып табылады. Серпімді денедегі жүктеменің тез өзгеруі кезінде нақты толқындық сипаты бар жағдай орын алады. Бұл құбылыстың физикасына сәйкес келетін зат осы шикізатта болады. Динамикалық есептің маңызды жеке жағдайы сыртқы жүктемесі уақыттың тригонометриялық функциясы болатын, ω айналу жиілігімен өзгеретін гармоникалық тербелістердің есебі болып табылады, ал механикалық жағдай уақыттың шексіз интервалында ($-\infty< t<\infty$) қарастырылады. Гармоникалық есепте алғашқы шарттар қойылмайды. Механикалық ауыстырулар, кернеу және деформациялар координата және уақыт функциясымен көрсетіледі. Түрлі ортадағы толқынның жалпы таралу заңдылықтарын үйрену қазіргі таңда үлкен дамуға ие болған тербеліс теорисының тақырыбын құрайды [21,22,23]. Соңғы уақытқа дейін бұл толқындар үш себепке байланысты ауқымды қолданылмаған. Бұл себептердің бірі әдеттегідей толқынмен жазылатын екі кемшілікпен байланысты: жоғалту және қозғау тиімділігінің төмендігі. Бұл кемшіліктер дәлелсіз болып табылады [38,39,42]. Екінші себеп сирек пайдаланылатын толқындардың заманауи талаптарға жауап бере алатын құрылғыны алуға көмектесе алады ма деген сұрақпен байланысты. Қазіргі уақытта бөгелудің үлкен уақытындағы бөгелу сызығында толқындарды пайдалану шындап қарастырылып жатыр, негізінен сәуленің кеңеюін болдырмау үшін. Алайда бұл бағдарлама өте тар және санаулы дисперсиядағы төмен шығындарды талап етеді. Үшінші себеп, сәулені қолданатын сақтау құрылғыларының сыйымдылығын айтарлықтай арттыратын әлі де болса бір де бір толқынның жоқтығына тіреледі. Бұл қалдық дисперсиямен түсіндіреледі, және дәл осы дисперсия толқындарды пайдалану жолында және ақпаратты сақтау құрылғысында өзімен бірге негізгі кедергіні көрсетеді. Толқындағы толқындық процесстерді қарастыруда екі типті белгілеуге болады. Дәйекті мәнге сәйкес, дұрыс түрдегі мәселелерде біз толқынды қозғалыс көзіне қызығушылық білдірмейміз, мұнда қозғалыс теңдеулерінің нақты шешімдері үшін статикалық және кинематикалық факторлардың санына қатысты нөлдік шекаралық шарттарды қамтамасыз ететін кейбір резонанстық жағдайларды табу туралы айтылады. Бұл ерекше шешімдер қалыпты режим деп аталады немесе толқын арнасындағы қалыпты толқындар деп аталады. Мәселенің екінші түрі толқын арнасындағы мәжбүрлі толқынды қозғалыстарды зерттеуге байланысты. Толқын арнасындағы ықтимал күйлердің шексіз жиынтығының болуына байланысты, осы жерде туындайтын проблемалар үлкен қиындықтағы жарты кеңістік үшін ұқсас талқылау мәселесінен ерекшеленеді. Толқындардың қозу және таралу проблемасын математикалық тұжырымдау кезінде өте серпімді толқын арнасында кеңістік жағдайында үйрену шартындай дәл сол рөлді ойнайтын шексіздік жағдайын қалыптастырудың белгілі бір қиындықтары пайда болады.

Әдебиеттерді шолуды жинақтай келе, келесі қорытындыларды шығара аламыз.

1. Баяғыдай, деформацияланатын дененің жазық және үшөлшемді механика аясында тұтқырсерпімді денедегі толқындық процессті зерттеу өзекті болып қала береді.
2. Сонымен қатар үшөлшемді тұтқырсерпімділік аясында дөңгелектік қиманың деформацияланатын толқын арнасындағы толқындық процессті зерттеу өзекті болып табылады.
3. Осылайша,кернеулі пластиналық және цилиндрлік денедегі толқындардың таралуына арналған жұмыстың анағұрлым мөлшеріне қарамастан материалдың тұтқырсерпімді қасиеті бар денедегі толқындардың таралуын зерттеу мәселесі соңғы шешімнен алыс. Бұл мәселені шешу жұмысқа арналған. Жұмыстың қорытындылары 3 бөлімде салынған.

Бірінші бөлімде Кирхгоф-Ляв және С.П Тимошенкогипотезаларының негізінде тұтқырсерпімді сына тәрізді пластинадағы шоғыр толқынныңтаралуы туралы есептің алгоритмі және шешу әдісінің математикалық қойылымы қойылған.Серпімділік теориясының есебінің үшөлшемді қойылымы вариациялық теңдеудің шешіміне алып келеді. (Кирхгоф–Ляв гипотезаларының сәйкестіктерін қанағаттандырады). Бұл теңдеудің қалыпты орта жазықтыққа айналудың инерциясын ескере отырып, қараусыз қалдырады. Бірнеше қарапайым операциялардан кейін бірінші ретті комплексті коэффициентті дифференциалды теңдеулер жүйесі алынды.

Екінші бөлімде ауыспалы қимасы бар пластинадағы табиғи толқындардың таралуы жайлы қарастырылады және комплексті арифметикада Мюллер әдісімен байланысты ортогональді қуу әдісімен шешіледі. Сына тәрізді пластина үшін дисперсиялық арақатынастар алынды.

Үшінші бөлімде қалыңдығы айнымалы кеңейтілген пластинаның таралуы үшін біріктірілген спектральды мәселе және биортогональдылық жағдайлары жасалды.Қалыңдығы айнымалы шексіз кеңейтілген толқынның таралуы туралы сандық қорытындылар және есептің шешу әдісі сипатталады.Әдіс Годунованың ортогональді қуу әдісімен шешілетін кеңістіктік айнымалыларды бөлу және жеке мәнге шектік мәселені құрастыруға негізделген.Толқындық санға тәуелді фазалық жылдамдықтың нақты және жорамал бөлігінің сандық мәндері алынды.

I.ТОЛҚЫНДЫҚ ЕСЕПТІҢ ОРНАТЫЛУЫ ЖӘНЕ ПЛАСТИНА ҮШІН НЕГІЗГІ ҚАТЫНАСТАР

Бірінші бөлімде қалыңдығы айнымалы шексіз тұтқырсерпімді пластинадағы жеке толқындардың таралуы қаралады. Серпімділік теориясының үшөлшемді есебі вариациялық теңдеудің шешіміне алып келеді. (Кирхгоф–Ляв гипотезасымен сәйкестікті қанағаттандырады) . Бұл теңдеуді қалыпты орта жазықтыққа айналудың инерциясын ескере отырып,қараусыз қалдырады. Бірнеше қарапайым операциялардан кейін бірінші реттік комплекстік коэффициенттік дифференциалдық теңдеу жүйесі алынды.

1.1 Толқындық есептің орнатылуы және қалыңдығы айнымалы Крихгоф - Ляв пластинасы үшін негізгі қатынастар

Мүмкін болатын орын ауыстырулар негізінде қалыңдығы айнымалы пластинаның классикалық теориямен негізгі сәйкестігін шығарамыз. Серпімділік теориясының үшөлшемді есебі мынандай түрге ие болатын вариациялық теңдеу шешіміне әкеледі:

$$\delta A_F + \delta A_I = 0 \tag{1.1}$$

Ішкі күштердің виртуалды жұмысы (δA_F) үшін:

$$\delta A_F = -\delta \Pi = -\int_V \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} dV \tag{1.2}$$

Мұндағы Π – потенциалды энергия; σ_{ij} – кернеу тензорының құраушылары; ε_{ij} – деформация тензорының құраушылары; V – дене көлемі.

Пластика материалының физикалық қасиеті келесі сәйкестікпен сипатталады

$$\sigma_{ij} = \bar{\lambda}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\bar{\mu}\varepsilon_{ij} \quad (i, j, k = 1,2,3) \tag{1.3}$$

Мұндағы $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$-кернеу және деформация тензорының құраушылары.

$$\tilde{\lambda}_j = \frac{v_j \tilde{E}_j}{(1+v_j)(1-2v_j)}; \qquad \tilde{\mu}_j = \frac{v_j \tilde{E}_j}{2(1+v_j)},$$

мұндағы $\tilde{E}$ – [7,20] түрге ие серпімділіктің операторлық модулі:

$$\widetilde{E}\varphi(t) = E_{01}\left[\varphi(t) - \int_0^t R_E(t-\tau)\varphi(t)d\tau\right] (1.4)$$

$\varphi(t)$–уақыттың еркін функциясы; $R_E(t-\tau)$–релаксация ядросы; E_{01} – серпімділіктің шапшаң модулі; (1.4) ең аз интегралды мүшені қабылдаймыз, онда $\varphi(t) = \psi(t)e^{-i\omega_R t}$ функциясы $\psi(t)$-уақыттың баяу өзгеретін функциясы болатын, ω_R-нақты константа. Әрі қарай қатыру [20] процедурасын қабылдау арқылы мына түрге жақын (1.2) сәйкестігін байқаймыз

$$\overline{E}\varphi = E\left[1 - \Gamma^C(\omega_R) - i\Gamma^S(\omega_R)\right]\varphi,$$

мұндағы

$$\Gamma^C(\omega_R) = \int_0^\infty R(\tau)\cos\omega_R\tau\, d\tau, \quad \Gamma^S(\omega_R) = \int_0^\infty R(\tau)\sin\omega_R\tau\, d\tau -$$

Фурье ядросының релаксация материалының косинус және синус түріне сәйкес келеді.Мысал ретінде тұтқырсерпімді материалға үш параметрлі ядро релаксациясын аламыз $R(t) = Ae^{-\beta t}/t^{1-\alpha}$.

Инерция күшіне (δA_I) виртуалды жұмыс үшін келесі сәйкестікті жазамыз:

$$\delta A_I = -\int_V \rho\ddot{u}_i\delta u_i\, dV \qquad , \qquad (1.3)$$

мұндағы ρ- дененің тығыздығы; u_i – орын ауыстыру компоненттері; $\ddot{u}_i = \partial^2 ui/\partial t^2$; t-уақыт. Осы жерде және әрі қарай қайталанатын индекстердің жиынтығы ескеріледі. 1.1 суретінде көрсетілген x_2осінің шексіз бойымен берілген сына пластинаны қарастырайық. Кирхгофа – Ляв гипотезаларының сәкесімен аламыз:

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0;$$

$$u_i = -x_3\frac{\ddot{a}W}{\ddot{a}x_i}; \qquad (1.4)$$

$$W(x_3) \equiv W\ ,$$

Мұндағы W – пластинаның орталық жазықтығындағы иілімі.

Нормалдік айналу инерциясын орта жазықтық деп есептейтін (1.3) мүшелерін есептемегенде мынаны аламыз:

$$
\begin{aligned}
&-\int_s ds \int_{-h/2}^{h/2} \left(\sigma_{11}\delta\varepsilon_{11} + 2\sigma_{12}\delta\varepsilon_{12} + \sigma_{22}\delta\varepsilon_{22}\right) dx_3 - \\
&-\int_s ds \int_{-h/2}^{h/2} \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\delta W dz = 0
\end{aligned}
\qquad (1.5)
$$

Кинематикалық гипотезаларды (2.4) есептегенде мынандай түрге ие болатын деформация тензорының және кернеудің компоненттері геометриялық қатынаспен және Гук заңының жалпы қатынасымен анықталады:

$$
\begin{cases}
\varepsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - x_3 \dfrac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j}; \qquad i, j = 1{,}2 \\
\sigma_{11} = \dfrac{E}{1-\nu}\left(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}\right)\Gamma_\kappa; \\
\sigma_{22} = \dfrac{E}{1-\nu}\left(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}\right)\Gamma_\kappa \\
\sigma_{12} = \dfrac{E}{1-\nu}\varepsilon_{12}\Gamma_\kappa,
\end{cases}
\qquad (1.6)
$$

Мұндағы E – Юнгмодулі; ν – пластина материалының Пуассонкоэффициенті.

Келесі мәндерді енгізе отырып:

$$
\begin{aligned}
M_{11} &= -D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2}\right); \\
M_{22} &= -D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2}\right); \qquad (1.7) \\
M_{12} &= -D(1-\nu)\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2};
\end{aligned}
$$

$$
\overline{D} = \frac{\overline{E}h^3}{12\left(1-\nu^2\right)} = D_1\Gamma_k; \quad D_1 = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}; \; \Gamma_\kappa = 1 - \Gamma^C(\omega_R) - i\Gamma^S(\omega_R)
$$

және пластина қалыңдығы бойымен интегралдау арқылы (1.5) теңдігін келесі түрге келтіреміз:

$$
\int_s \left(M_{11}\frac{\partial^2 \delta W}{\partial x_1^2} + 2M_{12}\frac{\partial^2 \delta W}{\partial x_1 \partial x_2} + M_{22}\frac{\partial^2 \delta W}{\partial x_2^2}\right) dS -
$$

$$-\int_s \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \delta W ds = 0 \qquad (1.8)$$

(1.8) бірінші интегралын бөліктерге бөліп екі рет түрлендіру арқылы және дененің ішкі және шектеріндегі δWвариация кезіндегі коэффициенттерді нөлге теңестіру арқылы келесі дифференциалды теңдеуді аламыз:

$$\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial x_2^2} - \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.9)$$

Нақты шектік шарттармен

$$M_{11}(0,\, l_1) = 0;$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + 2\frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} = 0\,, \qquad x_1 = 0, \qquad l_1$$

Келесідей мәндер болатын нақты баламалармен:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial x_1} = 0, \\ W = 0,\ \ x_1 = 0,\ \ l_1 \end{cases},$$

Жаңа өзгерістерді енгіземіз

$$W, \varphi_1 = \frac{\partial W}{\partial x_1},\ M_{11}, Q_1 = \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + 2\frac{\partial M_{12}}{\partial x_2}$$

(1.7) қатынасының көмегі арқылы M_{22}теңестіреміз. Сонда

$$M_{22} = -D\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} + \nu M_{11} + \nu^2 D\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2},$$

немесе

$$M_{22} = -\frac{Eh^3}{12}\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} + \nu M_{11} \qquad (1.10)$$

M_{11}жәнеM_{22}иілу кезі, ал M_{12}- айналу кезі екенін байқаймыз.

Осылайша,келесі теңдеулер жүйесіне өтеміз:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial x_1} = \varphi_1; \\ \quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} = -\dfrac{M_{11}}{D} - \nu \dfrac{\partial^2 W}{\partial x_2^2}; \\ \dfrac{\partial M_{11}}{\partial x_1} = Q_1 + \dfrac{\bar{E} h^3}{6(1+\nu)} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}; \\ \dfrac{\partial Q_1}{\partial x_1} = -\nu \dfrac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_2^2} + \dfrac{\bar{E} h^3}{12} \dfrac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} + \rho h \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \end{cases} \tag{1.11}$$

немесе

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial x_1} = \varphi_1; \\ \quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} = -\dfrac{6(1-\nu)}{h^3} \dfrac{M_{11} \cdot 2(1-\nu)}{\bar{E}} - \nu \dfrac{\partial^2 W}{\partial x_2^2}; \\ \quad \dfrac{2(1+\nu)}{\bar{E}} \dfrac{\partial M_{11}}{\partial x_1} = \dfrac{2(1+\nu)}{\bar{E}} Q_1 + \dfrac{h^3}{3} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2}; \\ \dfrac{2(1+\nu)}{\bar{E}} \dfrac{\partial Q_1}{\partial x_1} = -\nu \dfrac{2(1+\nu)}{\bar{E}} \dfrac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_2^2} + \dfrac{(1+\nu) h^3}{6} \dfrac{\partial^4 W}{\partial x_2^4} + \dfrac{2(1+\nu)}{\bar{E}} \rho h \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \end{cases}$$

немесе

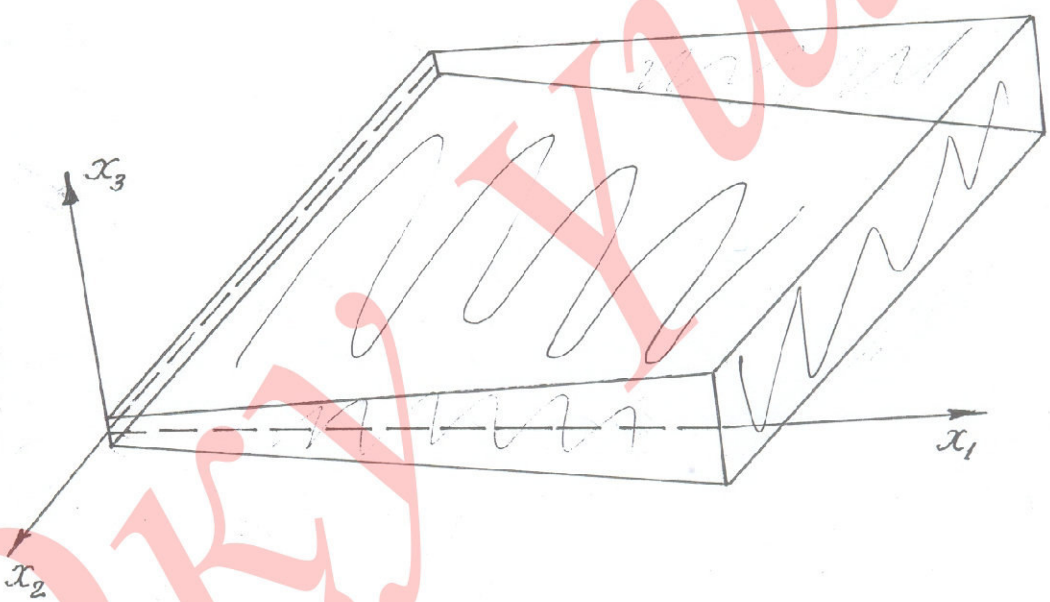
$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} = y_2; \\ \quad \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} = -\dfrac{6(1-\nu)}{h^3} y_3 - \nu \dfrac{\partial^2 y_1}{\partial x_2^2}; \\ \quad \dfrac{\partial y_3}{\partial x_1} = y_4 + \dfrac{h^3}{3} \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}; \\ \quad \dfrac{\partial y_4}{\partial x_1} = -\nu \dfrac{\partial^2 y_3}{\partial x_2^2} + \dfrac{(1+\nu) h^3}{6} \dfrac{\partial^4 y_1}{\partial x_2^4} + \dfrac{h}{C_s^2} \dfrac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}, \end{cases} \tag{1.12}$$

мұндағы $y_1 = W$, $y_2 = \varphi_1$, $y_3 = \dfrac{2(1+\nu)}{E} M_{11}$, $y_4 = \dfrac{2(1+\nu)}{E} Q$, $\tilde{N}_s^2 = \dfrac{E}{2(1+\nu)\rho}$, C_s – жылжу толқынының жылдамдығы. (1.12) жүйесінің көп шешімдерінің арасынан x_2 осі бойымен таралатын гармоникалық жазық толқындарды сипаттайтынды таңдаймыз.

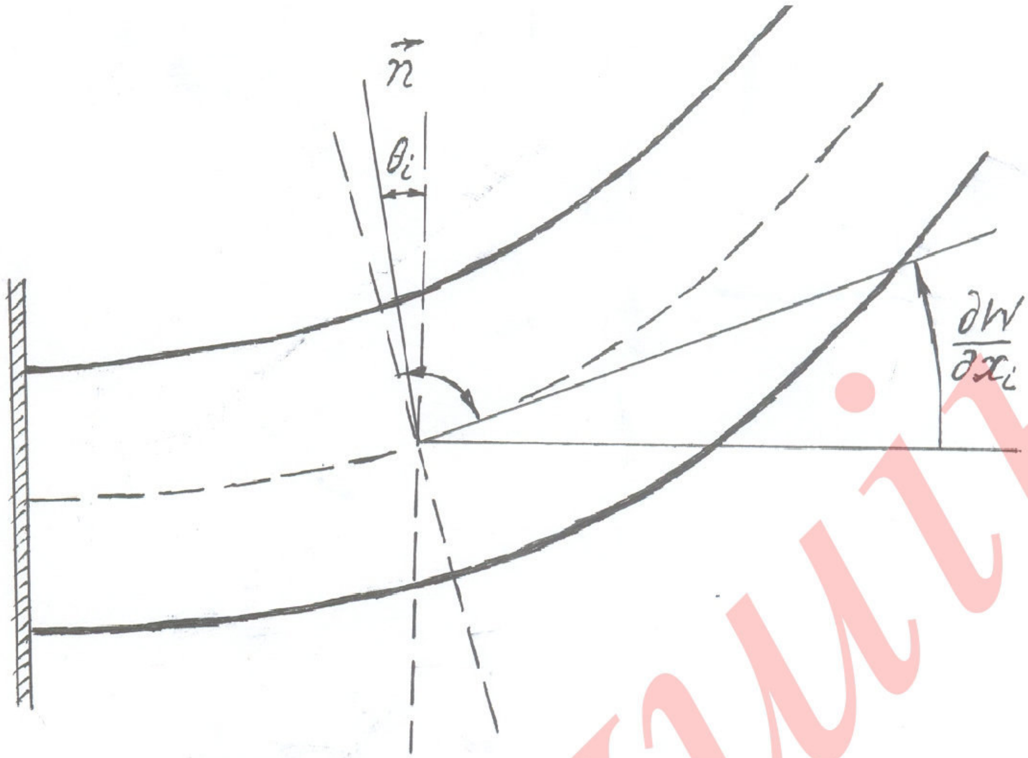
$$y_i = z_i(x_1) e^{i(\hat{e}\tilde{o}_2 - \omega t)} \tag{1.13}$$

(1.13) шешімін (1.12) дербес туындысындағы дифференциалдық теңдеулер жүйесіне қою арқылы келесідей туындыларға қатысты бірінші ретті қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} z_1' = z_2; \\ z_2' = -\dfrac{6(1-\nu)}{h^3} z_3 + \nu\kappa^2 z_1; \\ z_3' = z_4 - \dfrac{h^3 \Gamma_k}{3} \kappa^2 z_2; \\ z_4' = \nu\kappa^2 z_3 + \dfrac{(1+\nu)h}{6} \kappa^4 z_1 - h\left(\dfrac{\omega}{C_s}\right)^2 \Gamma_k z_1; \end{cases} \qquad (1.14)$$



Сурет 1.1 а. Есептеу схемасы



Сурет 1.1, б. Қалыпты айналу бұрышы бейнеленген

Бұл жүйе үшін шектік шарттарды келесідей түрде жазуға болады:

а) пластинаның еркін сол шегі:

$$z_3(0) = z_4(0) = 0 \tag{1.15}$$

б) пластинаның еркін оң шегі:

$$z_3(l_1) = z_4(l_1) = 0 \tag{1.16а}$$

в) пластинаның қысыңқы оң шегі:

$$z_1(l_1) = z_2(l_1) = 0 \tag{1.16б}$$

Осылайша, Кирхгоф-Лявпластинасындағы иілмелі еркін жазық толқындардың таралуын сипаттайтын ωпараметрі бойынша спектральді шектік мәні құрылды (1.14-1.16).

1.2Қалыңдығы айнымалы С.П Тимошенкопластинасы үшін негізгі қатынастар. Толқындық мақсаттың қойылуы

Кирхгоф-Ляв (1.4) гипотезаларын С.П Тимошенко гипотезасына ауыстыру арқылы мүмкін болатын ауыстырулар ретін қабылдаймыз (1.1-1.3):

$$\sigma_{33} = 0;\ \sigma_{3i} = \frac{\chi \overline{E}}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial W}{\partial x_i} - \theta_i\right);(1.17)$$

$$u_i^{(x_3)} = x_3\theta_i; W^{(x_3)} = W; \quad i = 1,2,$$

мұндағы θ_i– қалыпты айналу бұрышы (сурет 1.1б) χ–, қалыңдығы бойынша жанама кернеудің орналасуын ескеретін түзету коэффициенті.

Осы жағдайда деформация және кернеу тензорының компоненттері мына түрді қабылдайды:

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{1}{2}x_3\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\theta_j}{\partial x_i}\right);$$

$$\varepsilon_{3i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x_i} - \theta_i\right);$$

$$\sigma_{11} = -\frac{E\Gamma_k}{1-\nu^2}x_3\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial x_1} + \nu\frac{\partial\theta_2}{\partial x_2}\right); \qquad (1.18)$$

$$\sigma_{22} = -\frac{E\Gamma_k}{1-\nu^2}x_3\left(\frac{\partial\theta_2}{\partial x_2} + \nu\frac{\partial\theta_1}{\partial x_1}\right);$$

$$\sigma_{12} = -\frac{E\Gamma_k}{2(1+\nu)}x_3\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial x_2} + \nu\frac{\partial\theta_2}{\partial x_1}\right);$$

$$\sigma_{3i} = \frac{\chi E\Gamma_k}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial W}{\partial x_i} - \theta_i\right), \qquad i, j=1,\ 2$$

Виртуальді ауыстыру кезіндегі жұмыс үшін өрнекті қою арқылы келесіні аламыз:

$$\delta A = \int_{-h/s}^{h/2}\int_s\left[-\sigma_{ij}\frac{x^3}{2}\left(\frac{\partial\delta\theta_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\delta\theta_j}{\partial x_i}\right) + \sigma_{3i}\left(\frac{\partial\delta W}{\partial x_i} - \delta\theta_i\right) + \quad + \rho\ddot{W}\delta W + \rho x_3^2\ddot{\theta}_i\delta\theta_i\right]dSdx_3 = 0\,(1.19)$$

немесе, сәйкес келетін жағдайлар үшін мәнін енгізе отырып:

$$\overline{M}_{11} = D_1\Gamma_k\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial x_1} + \nu\frac{\partial\theta_2}{\partial x_2}\right) = \Gamma_k M_{11};$$

$$\overline{M}_{22} = D_1\Gamma_k\left(\frac{\partial\theta_2}{\partial x_2} + \nu\frac{\partial\theta_1}{\partial x_1}\right) = \Gamma_k M_{22}; \qquad (1.20)$$

$$\overline{M}_{12} = D_2 \Gamma_k \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x_1} \right) = \Gamma_k M_{12}$$

мұндағы $\quad D_2 = \frac{1}{2} D_1$

$$M_{22} = -D_1 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} \right)$$

$$M_{11} = -D_1 \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} \right)$$

$$M_{12} = D_2 \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x_1} \right)$$

және x_3 арқылы интегралғанда мынаны аламыз

$$\delta A = -\int_s \left[-\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{M}_{ij} \delta\theta_i \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(h \delta_{3j} \delta W \right) \right] dS +$$

$$+ \int_s \left(-\frac{\partial \overline{M}_{ij}}{\partial x_j} \delta\theta_i + \frac{\partial \left(h \overline{\sigma}_{3j} \right)}{\partial x_j} \delta W + h \overline{\sigma}_{3i} \delta\theta_i - \right.$$

$$\left. - \rho h \ddot{W} \delta W - \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\theta}_i \delta\theta_i \right) dS = 0 \qquad (1.21)$$

Бөліктерге бөліп интегралдау (1.21) арқылы арқылы және дененің ішкі және шектеріндегі δW және $\delta\theta_i$ вариация кезіндегі коэффициенттерді нөлге теңестіру арқылы келесі дифференциалды теңдеуді аламыз:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial M_{12}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + h\sigma_{31} - \dfrac{\rho h^3}{12 \Gamma_k} \ddot{\theta}_1 = 0; \\ -\dfrac{\partial M_{22}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + h\sigma_{32} - \dfrac{\rho h^3}{12 \Gamma_k} \ddot{\theta}_2 = 0; \\ \dfrac{\partial \left(h\sigma_{32} \right)}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \left(h\sigma_{31} \right)}{\partial x_1} - \dfrac{\rho h \ddot{W}}{\Gamma_k} = 0 \end{cases} \qquad (1.22)$$

Нақты шектік шарттармен:

$$\begin{cases} M_{12} = 0; \\ M_{11} = 0; \\ h\sigma_{31} = 0, \; x_1 = 0, \; l_1 \end{cases}$$

Келесідей болатын басты альтернативамен:

$$\theta_1 = 0; \;\; \theta_2 = 0; \;\; W = 0, \; x_1 = 0, \; l_1$$

(1.22) теңдігі дифференциалды коэффициент болып табылады, оны келесі түрде жазуға болады:

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{\partial M_{12}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + h\tau_{31} - \dfrac{sh^3}{12\Gamma_{KR}}\theta_1'' \\ \dfrac{-\partial M_{22}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + h\tau_{32} - \dfrac{sh^3}{12\Gamma_{KR}}\theta'' \\ \dfrac{\partial(h\tau_{32})}{\partial x_2} + \dfrac{\partial(h\tau_{31})}{\partial x_1} - \dfrac{sh^3}{\Gamma_{K12}}\ddot{W} \end{pmatrix} + i\Gamma_{KI} \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial M_{12}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + h\tau_{31} \\ \dfrac{-\partial M_{22}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + h\tau_{32} \\ \dfrac{\partial(h\tau_{32})}{\partial x_2} + \dfrac{\partial(h\tau_{31})}{\partial x_1} \end{pmatrix} = 0$$

Бұл жүйеде басты айнымалы ретінде мынаны санаймыз: Теңдіктен M_{22} және Q_2айнымалыларын қоспағанда,W_1, θ_1, θ_2, M_{12}, M_{11}, $Q_1 = h\ \sigma_{31}$.

$$M_{22} = -\frac{Eh^3}{12}\frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} + \nu M_{11};$$

$$Q_2 = h\sigma_{32} = \frac{\chi Eh}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial W}{\partial x_2} - \theta_2\right).$$

Осылайша келесі теңдеулер жүйесіне келеміз:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial x_1} = \theta_1 + \dfrac{2(1+\nu)}{\chi Eh}Q_1; \\ \dfrac{\partial \theta_2}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial \theta_1}{\partial x_2} - \dfrac{24(1+\nu)}{Eh^3}M_{12}; \\ \dfrac{\partial \theta_1}{\partial x_1} = -\nu\dfrac{\partial \theta_2}{\partial x_2} - \dfrac{12(1-\nu^2)}{Eh^2}M_{12}; \\ \dfrac{\partial M_{11}}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial M_{12}}{\partial x_2} + Q_1 - \dfrac{ph^3}{12\Gamma_k}\ddot{\theta}_1; \\ \dfrac{\partial M_{22}}{\partial x_1} = -\dfrac{Eh^3}{12}\dfrac{\partial^2 \theta_2}{\partial x_2^2} - \nu\dfrac{\partial M_{11}}{\partial x_2} + \dfrac{\chi Eh}{2(1+\nu)}\left(\dfrac{\partial W}{\partial x_2} - \theta_2\right) - \dfrac{ph^3}{12\Gamma_k}\ddot{\theta}_2; \\ \dfrac{\partial Q_1}{\partial x_1} = -\dfrac{\chi Eh}{2(1+\nu)}\left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} - \dfrac{\partial \theta_2}{\partial x_2}\right) + \dfrac{\rho h\ddot{W}}{\Gamma_k}. \end{cases} \qquad (1.23)$$

немесе

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = y_2 + \frac{y_4}{\chi h};$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial x_1} = -\nu \frac{\partial y_3}{\partial x_2} - \frac{6(1-\nu)}{h^3} y_5;$$

$$\frac{\partial y_3}{\partial x_1} = -\frac{\partial y_2}{\partial x_2} - \frac{12}{h^3} y_6;$$

$$\frac{\partial y_4}{\partial x_1} = \chi h \frac{\partial}{\partial x_2}\left(y_3 - \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right) + \frac{h}{\Gamma_k}\frac{\partial^2 y_2}{\partial \tilde{t}^2}; \qquad (1.24)$$

$$\frac{\partial y_5}{\partial x_1} = -\frac{\partial y_6}{\partial x_2} + y_4 - \frac{h^3}{12\Gamma_k}\frac{\partial^2 y_2}{\partial \tilde{t}^2};$$

$$\frac{\partial y_6}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{(1+\nu)h^3}{6} \cdot \frac{\partial y_3}{\partial x_2} - \nu y_5 \right) + \chi h \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2} - y_3 \right) - \frac{h^3}{12\Gamma_k}\frac{\partial^2 y_3}{\partial \tilde{t}^2},$$

Мұндағы $y_1 = W; \quad y_2 = \theta_2; \quad y_3 = \theta / \nu; \quad y_4 = \frac{2(1+\nu)}{E} Q_1;$

$$y_5 = \frac{4(1+\nu)}{1-\nu} M_{12}; \quad y_6 = \frac{h(1-\nu^2)}{E\nu} M_{12}$$

$$M_{22} = -D\left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} \right) + \nu M_{11} - \nu M_{11} =$$

$$= -D(1-\nu^2)\frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} + \nu M_{11} = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(1-\nu^2)\frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} + \nu M_{11} = -\frac{Eh^3}{12}\frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} + \nu M_{11}$$

x_1осі бойымен таралатын жазық гармоникалық толқындарды сипаттайтын шешімдерді жоғарыдағыдай іздей отырып, (1.13) түріндегідей болатын (1.24) жүйесінің шешімін іздейміз.

$$y_i = z_i(x_1) e^{i(\kappa x_2 - \omega t)}$$

немесе

$$
\begin{cases}
y_1 = z_1(x_1)\cos(\hat{e}x_2 - \omega t); \\
y_2 = z_2(x_1)\cos(\hat{e}x_2 - \omega t); \\
y_3 = z_3(x_1)\sin(\hat{e}x_2 - \omega t); \\
y_4 = z_4(x_1)\cos(\hat{e}x_2 - \omega t); \\
y_5 = z_5(x_1)\cos(\hat{e}x_2 - \omega t); \\
y_6 = z_6(x_1)\sin(\hat{e}x_2 - \omega t).
\end{cases}
\tag{1.25}
$$

(1.25) шешімін (1.24) дербес туындысындағы дифференциалдық теңдеулер жүйесіне қою арқылы келесідей туындыларға қатысты бірінші ретті қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$
\begin{cases}
z_1' = z_2 + \dfrac{z_n}{\chi h}; \\
z_2' = -\nu\kappa\kappa_3 - \dfrac{6(1-\nu)}{3} z_5; \\
z_3' = \kappa z_2 - \dfrac{12}{h^3} z_6; \\
z_4' = \chi h\kappa\kappa_3 + \kappa^2\left(\chi h - \dfrac{hc^2}{\Gamma_л}\right) z_1; \\
z_5{}' = -\kappa z_6 + z_4 + \dfrac{h^3}{12\Gamma_л}\omega^2 z_2; \\
z_6' = -\chi h\kappa\kappa_1 - \left[\chi h + \dfrac{\kappa^2 h^3}{12\Gamma_л}\left(2(1+\nu) - \dfrac{c^2}{\Gamma_л}\right)\right] z_3 + \nu\kappa\kappa_5.
\end{cases}
\tag{1.26}
$$

Бұл жүйе үшін шектік шарттарды келесідей түрде жазуға болады:
а) пластинаның еркін сол шегі:

$$z_4 = z_5 = z_6 = 0, \qquad x_1 = 0; \tag{1.27}$$

б) пластинаның еркін оң шегі:

$$z_4 = z_5 = z_6 = 0, \qquad x_1 = l_1; \tag{1.28,а}$$

в) пластинаның қысыңқы оң шегі:

$$z_1 = z_2 = z_3 = 0, \qquad x_1 = l_1; \tag{1.28,б}$$

Осылайша, С.П Тимошенко пластинасындағы иілмелі жиілік жазық толқындардың таралуын сипаттайтын ωпараметрі бойынша спектральді шектік мәні құрылды (1.26-1.28)

Бірінші бөлім бойынша қорытынды

С.П Тимошенко және Крихгоф-Лявпластинасындағы иілмелі жиелік жазық толқындардың таралуын сипаттайтын ωпараметрі бойынша спектральді шектік мәні құрылды.

II.ШЕТКІ ТОЛҚЫНДАРЫНЫҢ ДИСПЕРСИЯСЫН САНДЫҚ ТАЛДАУ

Қимасы айнымалы пластинада жеке толқындардың таралуы комплексті арифметикада Мюллер әдісімен бірге ортогональді өткізу әдісімен шешіледі. Сына тәрізді пластина үшін дисперсиялық байланыс алынды.

2.1 Сына тәрізді пластинадағы шеткі толқын дисперсиясының сандық талдануы

Жоғарыда құрастырылған спектральді шектік есептер (1.14), (1.15), (1.16) және (1.26), (1.27) , (1.28) Годунованың [14] ортогональді өткізу әдісімен орындалды. Бұл әдістің сандық орындалуы ЭЕМ-де ФОРТРАН -77 (және MAPLE-9.5) тілінде жазылған программа арқылы іске асты.

Әдіс пен бағдарламаны тексеру үшін тригонометриялық функциялардың негізінде аналитикалық шешім қабылдауға мүмкіндік беретін шектік шарттары бар пластинаның нұсқасы есептелді. Кирхгофа-Ляв пластинасының теңдеулер (1.14) жүйесін шешу үшін бұл шектік шарттар мынадай түрге ие:

$$X_1=0,1; \qquad z_2=z_4=0 \qquad (2.1)$$

Бұл жерде және әрі қарай жолақтың ені l, жылжу модулі G болатын өлшемсіз жүйе қолданылады және көлемдік тығыздық бірге тең.

Бұндай жағдайда W тербелісінің формасы мына түрмен анықталады

$$z_1 = z_o \cos 2\pi n\, x_1 \qquad (2.2)$$

$$z = -(2\pi n)^2 z_1 = A_2 z_1$$

$$z_3 = \frac{\left(\nu K^2 + (2\pi n)^2\right)h^3}{6(1-\nu)} z = A_3 z_1$$

$$z_4 = \left[\nu k^2 \frac{\left(\nu k^2 + (2\pi n)^2\right)h^3}{6(1-\nu)} + \frac{(1+\nu)}{6}k^4 - h\left(\frac{\omega}{g^*}\right)^2\right] z_1 = A_4 z_1 \text{ , } z_2^1 = (2\pi n) z_2$$

$$z_3^1 = -\frac{\left(\nu k^2 + (2\pi n)^2\right)h^3}{6(1-\nu)}(2\pi n) z_1 \; z_4^1 = -A_4 (2\pi n) z_1 = -(2\pi n) z_4$$

Мұндағы z_o– кез-келген тұрақты; c_n-комплексті жиіліктің нақты бөлігі; Қатарынан (2.2) өрнегін (1.26) теңдеуіне алмастыру арқылы дисперсиялық теңдеу аламыз

$$\begin{vmatrix} 2\pi n & 1 & 0 & 0 \\ \nu k^2 & -(2\pi n) & -\dfrac{6(1-\nu)}{n^3} & 0 \\ 0 & -\dfrac{n^3}{3}k^2 & -(2\pi n) & 1 \\ B_1 & 0 & \nu k^2 & 2\pi n \end{vmatrix} = 0\ , \qquad (2.3)$$

мұндағы $B_1 = \dfrac{(1+\nu)h}{6}k^4 - n\left(\dfrac{\omega}{C_K + iC_I}\right)^2$

Сол сияқты С.П Тимошенко пластинасының теңдеулер жүйесін (1.22) шешу үшін шекаралық шарттарды таңдау арқылы мына түрде

$$x=0,1; \qquad z_4=z_5=z_6=0 \qquad (2.4)$$

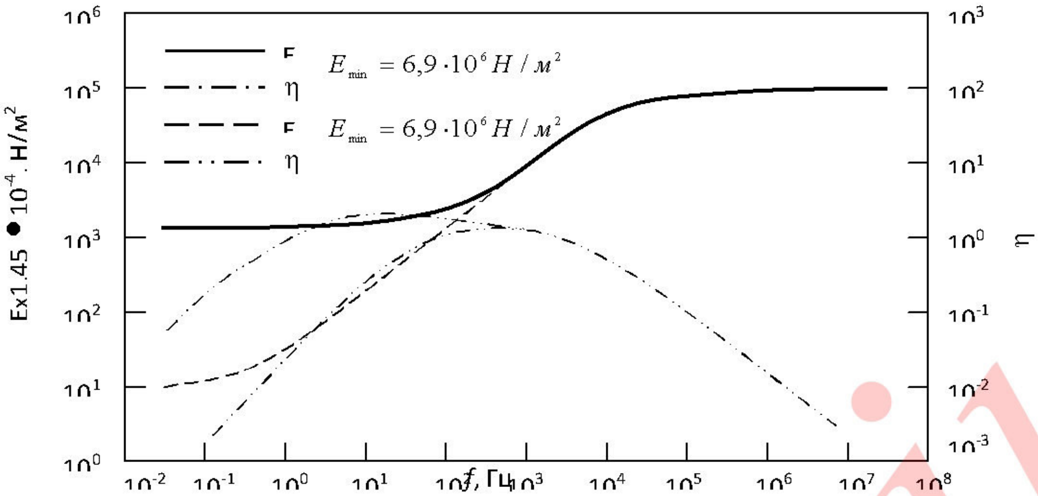
тербеліс формасы үшін өрнек табамыз

$$\begin{aligned} &z_1 = A_1 \cos 2\pi n x_2; && z_4 = A_4 \sin 2\pi n x_2; \\ &z_2 = A_2 \cos 2\pi n x_2; && z_5 = A_5 \sin 2\pi n x_2; \qquad (2.5) \\ &z_3 = A_3 \sin 2\pi n x_2; && z_6 = A_6 \cos 2\pi n x_2; \end{aligned}$$

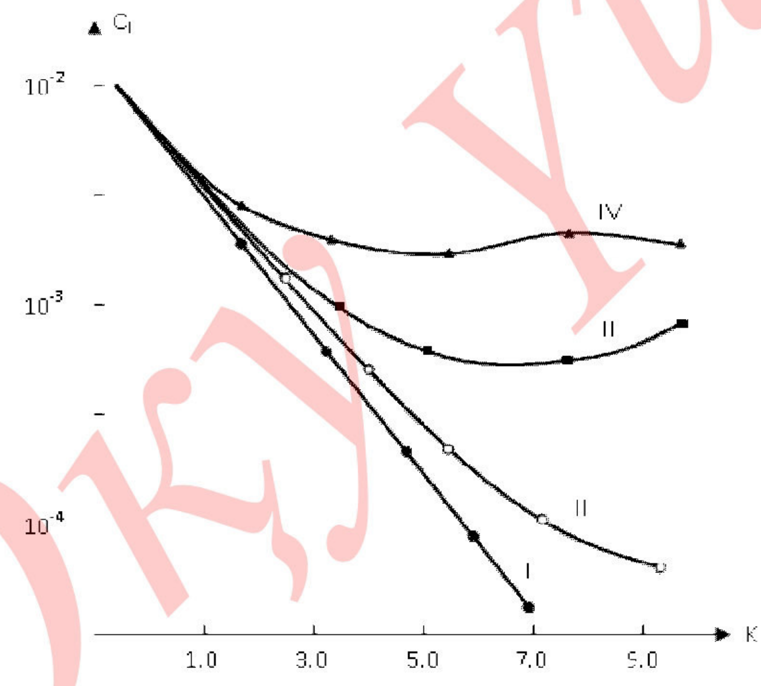
(2.5) арақатынасында A_i $(i=1,6)$ тұрақтылары шешімнің сызықты алгебралық теңдеулерінің келесі жүйесімен анықталады,

$$\begin{cases} A_3 + \dfrac{A_4}{\chi h} = 0; \\ \kappa A_3 - \dfrac{12}{h^3} A_5 = 0; \\ -\nu\kappa A_2 - \dfrac{6(1-\nu)}{h^3} A_6 = 0; \\ \chi h\kappa A_2 + \kappa^2 (\chi h - hc^2) A_1 = 0; \\ -\chi h\kappa A_1 - \left[\dfrac{(1-\nu)h^3}{6}\kappa^2 + \chi h - \dfrac{h^3}{12}\omega^2\right] A_2 + \nu\kappa A_6 = 0; \\ -\kappa A_5 + A_4 + \dfrac{h^3}{12}\omega^2 A_3 = 0. \end{cases} \qquad (2.6)$$

(2.6) теңдеулер жүйесі (2.5) өрнегін (1.22) дифференциалдық теңдеулердің шешу жүйесіне алмастыру кезіндегі қорытындыда алынады. (2.6) жүйенің матрицасының детерминанты нөлге тең болған шарт-шекаралық мәннің (1.22), (2.5) дисперсиялық теңдеуі.



Сурет 2.1. Юнг модулінің E и η жиілігіне тәуелділігі



Сурет 2.2, б. Демпферлік жылдамдықтың к (толқындық санға) тәуелділігі

Жоғарыда көрсетілген табылған дисперсиялық теңдеулердің және шектік мәндердің (1.14), (2.1), (2.4) сәйкес келетін тесттік шешімдерінің фазалық жылдамдығының мәні 0,1 ден 15 ке дейін толқындық сандар ауқымында төртінші ондық таңбаға дейін бір-бірімен сәйкес келеді,алғашқы екі режим үшін ($n = 0{,}1$).

Қалыңдығы айнымалы Кирхгоф-Лявпластинасы үшін күрделі фазалық тарату жылдамдығының ең төменгі бес режимі зерттелді. Мұндағы $C = C_R + iC_I$, C_R-толқынның таралуының фазалық жылдамдығы; C_I-демпферлеу жылдамдығы.

2.2 Сандық қорытындылар

2.2,а суретінде сызықтық заңы бойынша өзгеретін қалыңдығына тәуелді бірінші режимді дисперсиялық қисықтар көрсетілген. Бұл жерде пластинаның екі шеті де еркін деп болжамданады. I түзу сызығы $h_1=h_2=0{,}1$ тұрақты қалыңдығына сәйкес келеді. Бұл жағдайда пластина өзек секілді тербеледі. $h_1=h_2/2=0{,}05$ түріне - қисық II; $h_1=h_2/100=0{,}001$ түріне-қисық III, қисық IV $h_1 = h_2 / 1000 = 0{,}0001$ $R(t) = Ae^{-\beta t} / t^{1-\alpha}$, $A = 0{,}048$; $\beta = 0{,}05$; $\alpha = 0{,}1$. 3.3 б суретінде демпферлеу жылдамдығының толқындық санға тәуелділігі көрсетілген. $\kappa > 9$ к функциясының жоғарылауының демпферлік жылдамдығы. $10^{-4} < C < 70$ қимасы $C_Г$ тұрақты қалыңдығының пластинасы үшін түзу сызық бойымен азаяды. Демпферлік коэффициенттің толқын санына тәуелділігі 3-6 толқын санынан басталады. Коэффициенттің толқын санының өсуімен демпферлеу азаю жағына қарай ұмтылады. Тұрақты қалыңдықтың пластинасы үшін фазалық жылдамдықтың шексіздікке қарай ұмтылатыны суретте көрініп тұр, ал үшкір сына тәрізді пластина үшін $\kappa \to \infty$ кезінде ақырлы шек бар, яғни ең аз ұзындықтағы иілмелі жиектік толқын дисперсиясыз таралады. Бұл факт физикалық тұрғыдан айқын, өйткені өткір сынаның сызықты өлшемі жоқ. Толқындардың дисперсиялық қозғалыссыз сегменті 3-9 толқын санынан басталады, бұл ұзындығы 1-ден кем толқындарға сәйкес келеді. Мұнда бір негізгі ескертуді атап өту керек. Қатаң айтқанда, бұл жұмыста теориялық оқиға $h_1=0$ немесе $\kappa \to \infty$ жағдайын қарастырмайды.Барлық сандық қорытындылар шексіз кіші және шексіз үлкен сандармен жұмыс істей алмайтын толқындық процесстерді компьютерде модельдеу нәтижелері кезінде алынды. Дегенмен, h_1немесе κ параметрлерінің өзгеруінің жетілдірілген ауқымда алынған нәтиженің сандық тұрақтылығын тексеруге болады. Теориялық негіздеме болмағанына қарамастан, мұндай сынақ белгілі контроллерлік дәлдікпен айтуға мүмкіндік беретін кез-келген мәннің шектік мәні $h_1 \to 0$ немесе $\kappa \to \infty$кезінде анықталады. h_1және κ параметрлері толқын ұзындығы h_1 жиегінің енінен үлкенірек болатындай етіп қиылысуы физикалық түрде айқын.

Бірінші режимнің шамасы $K \to \infty$шамасына қатысты шектік өлшемсіз фазалық жылдамдық h_2 өлшемсіз қалыңдығымен сәйкес келетінің сандық зерттеулер көрсетті. Өлшемді тұрғысынан бұл келесі заңға сәйкестікті φ_o қысқыш фазасынан жылдамдықтың C_{Ro} жылдамдығының өзгеруіне сәйкес келеді.

$$C_{Ro} = 2C_s tg\frac{\varphi_o}{2} \tag{2.7}$$

$\left(C_{Ro} = C_o\right)$ [12] жұмысының қорытындыларымен сәйкес келеді.

Сынаның шыңында түрлі бұрыштары бар дисперсиялық қисықтардың жиынтығы белгілі бір ұқсастық меншікке ие екендігін сандық зерттеулер де көрсетті, ал дәлірек айтсақ: фазалық жылдамдықтың C_o(2.6) жылдамдығына қатынасы φ_o бұрышына байланысты емес.

2.2 суретінде 2.2, а және 2.2,б суретіне сәйкес келетін тербеліс формасының эволюциясы көрсетілген.

Тұрақты қалыңдық үшін пішін әлсіз өзгереді, ал *К* ұзындықты сына тәрізді пластинада өткір бұрыштың жанында өз нысанын оқшаулау байқалады.

2.3,а суретінде пластинаның қалыңдығының түрлі мәндері үшін толқын ұзындығына байланысты тербелістердің екінші режимінің дисперсиялық қисықтары көрсетілген. $\kappa = 0$кезіндегі фазалық жылдамдық соңғы. κ кезіндегі фазалық жылдамдықтың тербелістер формасының оқшаулануы және шектеулер шегі осы режим үшін де жарамды.

2.3,б суретінде қалыңдықтың әртүрлі бөліктеріндегі толқынды кедір-бұдыр функциясы ретінде күрделі жылдамдықтар көрсетілген. $\kappa > 5$ кезіндегі екінші режимнің 3-4 жорамал жылдамдығы дисперсияға ұшырамайтыны көрініп тұр.

2.3, б суретінде сынаның бұрышына және h_2 қалыңдығына байланысты дисперсиялық қисық эволюциясы көрсетілген. Аз κ формасы тік бұрышқа жақын, бұл айналу тербелістерге сәйкес келеді, үлкен κ кезінде орналасу байқалады. Бірінші режимге қарағанда бұл жерде түйіндік нүкте бар.

2.4 а, б, в және 2.5.а, б,в суретінде дисперсиялық қисықтар және III және IV режим үшін тербеліс формасы көрсетілген. Күрделі толқындық сандар үшін фазалық жылдамдық шексіздікке ұмтылады, ал үлкендер үшін- соңғы шектеуге ұмтылады. Сондай-ақ, оқшаулау нысандары байқалады. Түйіндік нүкте сандары екі және үш режимдерге сәйкес. (3.5а және 3.6а суреті.).

2.6 суретінде Пуассонның түрлі коэффициенттерінде алғашқы төрт тербеліс режимінің фазалық жылдамдықтарының нақты бөлігінің өткір сына тәрізді пластинаға тәуелділігі көрсетілген.

Суретте көрініп тұрғандай бірінші режимнің шектеулі фазалық жылдамдығы C_o Пуассон коэффициентіне байланысты емес. Кейінгі режимдерде C_o фазалық жылдамдық артып келеді v, Пуассон коэффициентінің әсері жоғары режимдерде айқын көрінеді. 2.7. суретінде пластинаның заңды жақ шетін өңдеуде екі вариант үшін тербелістің төрт режимінің фазалық жылдамдығының дисперсиялық қисықтары келтірілген: еркін шектерінің және қатаң бекітудің.Көрсетілген варианттардың өзгешелігі аз толқындық сандар кезінде қымбат және үлкен кезінде болмайды, яғни күткеніміздей шекті фазалық жылдамдық сынаның шетінен алыстатылған пластинаны бекіту жағдайына байланысты емес.

Жұмыста [18] серпімділіктің сызықтық теориясының шеңберінде сына тәрізді толқын арнасындағы иілмелі шеткі толқындардың таралуы зерттелді. Осымен қатар сынаның кесу бұрышының φфункциясы ретінде тербелістердің қалыпты режимдерінің фазалық жылдамдықтары үшін эмпирикалық қатынас негізінде алынған ақырлы элементтер әдісі пайдаланылды:

$$C_o = C_r \sin (m\varphi); \;\; m = 1,2,..., \;\; m\varphi < 90^o, \qquad (2.8)$$

мұндағы: C_r – жарты кеңістік үшін Рэлея толқынының жылдамдығы; m – режим номері.

(2.7) және (2.8) қатынастары φшағын бұрыштарда бір-бірімен келіспейтінін көру қиын емес. Сондықтан Тимошенко пластинасының неғұрлым жалпы теориясының шеңберінде алынған шекті фазалық жылдамдықтардың мәндері қандай екенін анықтау қызығырақ түседі. С.П Тимошенко пластинасының жиекті толқындарының таралуын сипаттайтын спектральді шектік (1.26-1.28) мән Годунованың ортогональді қуу әдісінің сандық мәнімен шешілді. Әдіс сандық конвергенциясын бақылау үшін ортогонализация нүктелерінің саны 10-нан 100-ге дейін қабылданады. Параллельді қайталанатын есептеулер екі еселенген дәлдікпен орындалды. Нәтиже қанағаттанарлық болып саналды, егер ортогональді нүктелер санының екі еселенуі фазалық жылдамдықтың төрт маңызды мәнін өзгертпеген болса. 2.8 суретінде Пуассон коэффициентінің үш мәніне айналмалы шеттері бар Тимошенконың сына тәрізді пластинадағы тербелістердің алғашқы төрт режимінің күрделі фазалық жылдамдықтарының нақты бөлігінің дисперсиялық қисықтары келтірілген. Бірінші режимнің шекті фазалық жылдамдығы h2 = 0.2 қалыңдығына 0,1945 құрайды және Пуассон қатынасына тәуелді емес. Кирхгова-Ляв теориясы бойынша алынған ұқсас нәтижеге қарағанда, бұл жағдайда айырмашылық 3% -дан аз. 2.9 суретінде алғашқы үш режимде Кирхгов-Лявпластинасының (а) 0.25 қатынасындағы Пуассон коэффициентіне сәйкес Тимошенко пластинасының (b) күрделі фазалық жылдамдықтарының нақты бөлігі көрсетіледі. Кирхгова-Лявпластинасы жағдайында шектеу фазасы II және III режимдерде жоғары болады және айырмашылық реттік санының өсуімен артады. 2.9.,б суретінде әр түрлі деңгейдегі оқшауланған екі мән үшін бірінші режимнің ауытқу формалары көрсетілген.Бұл пластина теорияларының негізінде шеткі толқындардың таралуын салыстырмалы талдау тербелістердің бірінші режиміне қанағаттанарлық келісім көрсетеді. [16] нәтижелерімен алынған келіспеушіліктер серпімділік жалпы теориясының шеңберінде егжей-тегжейлі зерттеулер жүргізу қажеттілігін көрсетеді.

Дегенмен, жалпы айтқанда, Кирхгофа-Ляв және Тимошенконың пластинасындағы жиектер толқындарының сандық талдауы, сына тәрізді пластинадағы толқындық процестерді, оның ішінде пластинаның қалыңдығының толқын ұзындығын ескере отырып, толқынды процестерді есептеу кезінде толығымен ақталып жатыр деген қорытынды жасауға мүмкіндік береді. Бұл Кирхгова-Лявның тұрақты қалыңдығының теориясы классикалық нәтижелерімен сәйкес келмейтіндіктен, ауыспалы қалыңдықтағы пластиналарда ғана пайда болатын жоғары жиіліктегі жоғары тербелістердің локализация феномені түсіндіріледі.

Сонымен қатар Кирхгова-Ляв пластинасының теориясының математикалық аппаратын салыстырмалы қарапайымдылығы үшөлшемді теория шеңберінде өте қиын күрделі көлденең қима конфигурациясымен толқын арнасының дисперсиялық сипаттамаларын зерттеуге мүмкіндік береді.

Қалыңдығы мына заңға байланысты өзгеретін пластинаны қарастырайық

$h(x_1) = h_o /x_1/, \qquad -b \le x_1 \le b.$

Мұндай пластинаның тербелістері мынандай симметрия жағдайына сәйкес келетін x1 = 0 кезінде шекаралас шарттармен сынған пішінді пластинаның тербелісіне дейін төмендетілгендігі анық.

$$\varphi = 0, \qquad Q = 0 \qquad (2.9)$$

және антисимметрияның

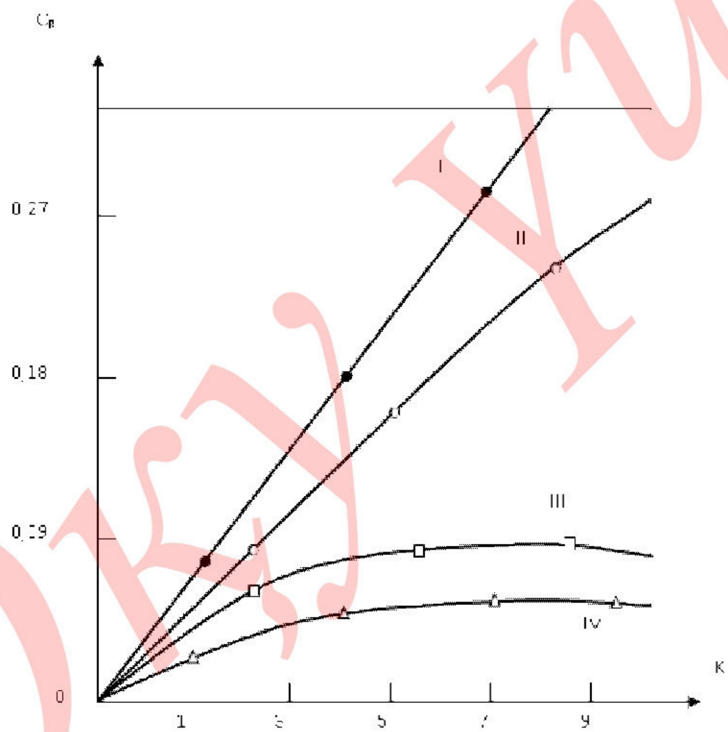
$$W = 0, \qquad M = 0$$
(2.10)

Симметриялы жағдайда - 2.10,а -суретте көрсетілгендей (сызылған сызықтар), өйткені өткір шеттегі икемділік қаттылығы нөлге тең болғандықтан, толқындық қозғалысы $M_{11}=0$, $Q_1=0$еркін шекарасының шекаралас шартымен бірдей.2.10 а суреттегі қатты қисықтар антисимметрия жағдайында дисперсия қисықтарын көрсетеді. Шектеулі фазалық жылдамдықтар мұнда бұрғылауға қосымша қосылудың арқасында бірнеше жоғары.Тербеліс формасының локализациясы сондай-ақ орынға ие және бірінші режим үшін 2.10,б суретінде суреттелген. 2.13 суретінде (қатты сызықтар) қалыңдығының сызықты заңымен Кирхгова-Лявпластинасындағы тербелістердің алғашқы үш режимінің фазалық жылдамдықтарының дисперсиялық қисықтарын көрсетеді.

$h(x_1) = h_0 x_1^p, \qquad o < x_1 \le b,$

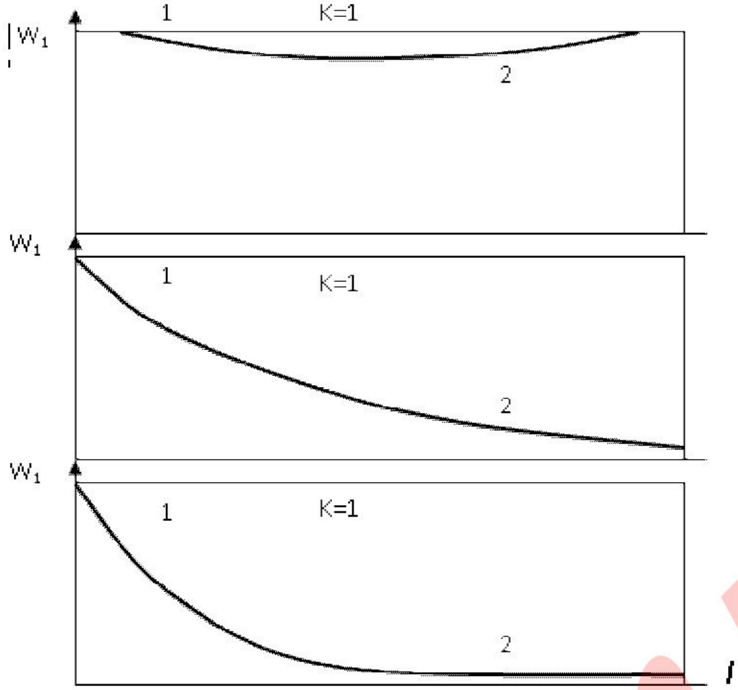
2; 2,5; 3, 1, 2, 3, 4 қисығының белгілеріне сәйкес мұнда р параметрі 1,5 тең қабылданды;.Мұнда, салыстыру үшін, нүктелі сызықтар жоғарыда қарастырылған сына тәрізді пластинаға қатысты ұқсас қисық сызықтарды көрсетеді $h(1)=h_o=0,2$.

Қатты және пунктирлі сызықтардың мінез-құлқындағы (поведении) сапалық айырмашылықты атап көрсетеміз. Жоғарыда айтылғандай, $p=1$ фазалық жылдамдықтар нөлдік емес шектік мәндерге асимптоталық жақындауда, бірінші режимнің қисығы монотонды түрде артады. $p>1$ үшін бірінші режимнің қисығы біртұтас емес және орташа толқындық диапазонда тән максималды сипатқа ие. Белгілі бір толқындар санынан бастап, барлық режимдердің фазалық жылдамдықтары монотондылықпен нөлден басқа асимптотаға жетпестен төмендейді.Р ұлғайған кезде, бірінші режимнің қисық сызығы ең төменгі жиіліктегі аймаққа ауысады, ал қысқа толқынды диапазонда фаза жылдамдығы жылдамырақ төмендейді.Толқындардың графиктеріне сәйкес, 2.14-2.19-суреттегі өткір жиек жанындағы қозғалыс локализациясы да жылдамырақ болады.

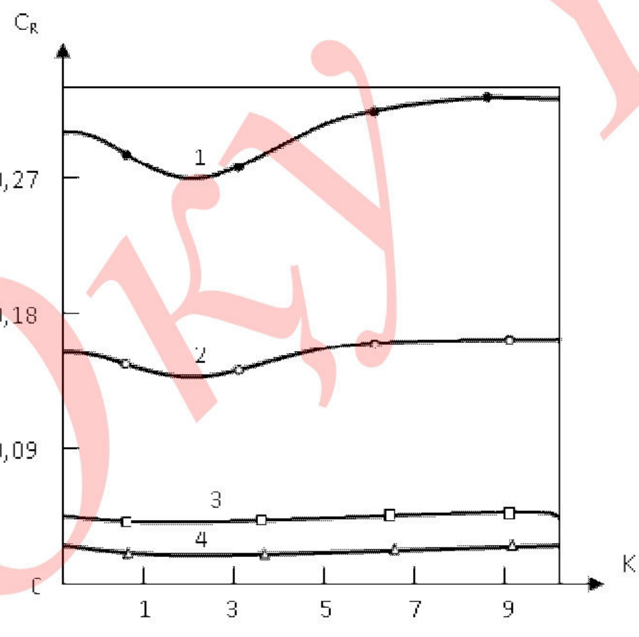


Сурет 2.2,а. Бірінші режимнің дисперсиялық қисықтары

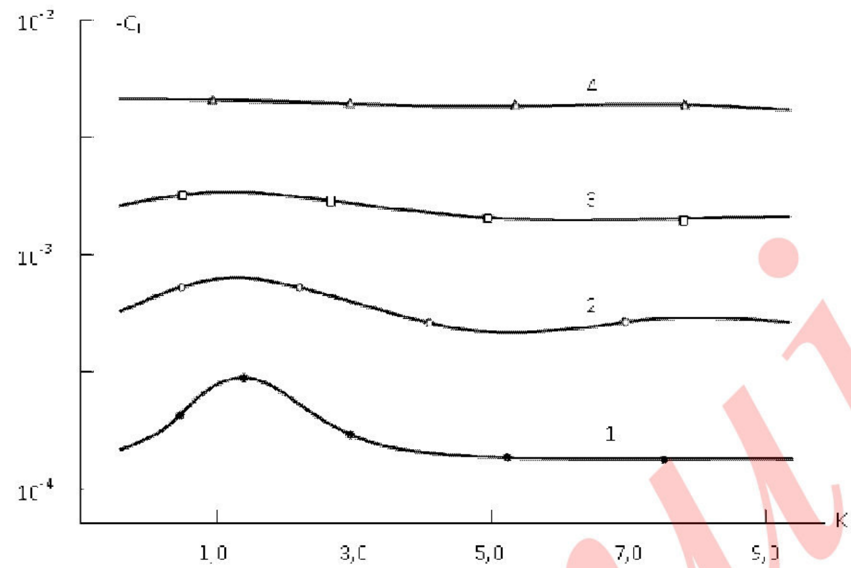
$h_1=h_2=0,1$; II. $h_1=h_{2/2}=0,05$; III. $h_{2/100}=0,001$; IV. $h_1=h_{2/1000}=0,001$



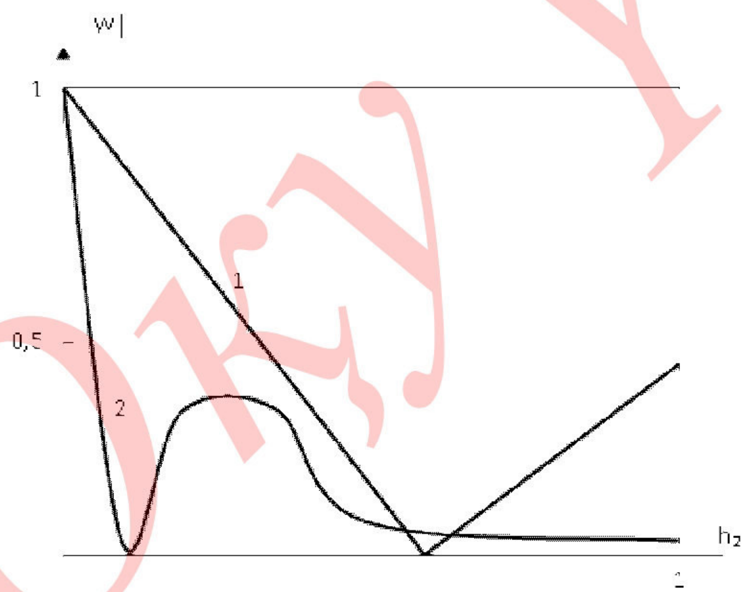
Сурет 2.2,б. Бірінші режимдегі сәйкес дисперсиялық қисықтардың тербелісінің пішіні *1.К=1; 2.К=10*



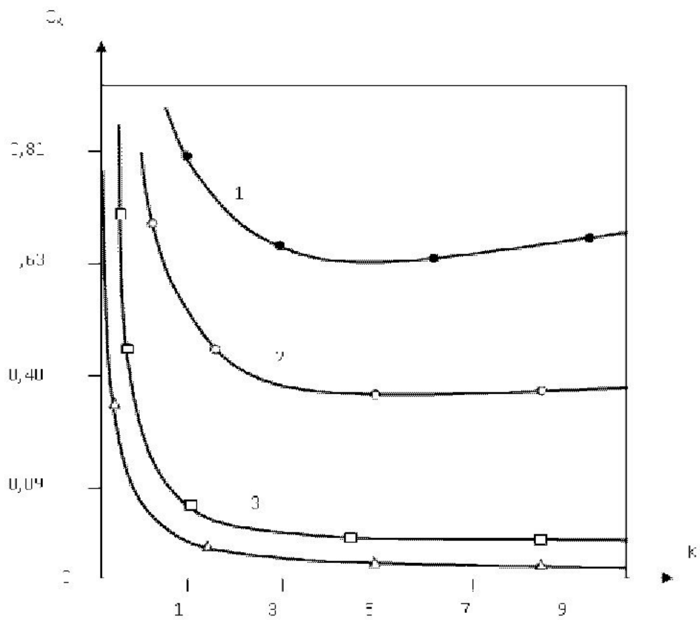
Сурет 2.3,а. Екінші режимнің дисперсиялық қисықтары *.1.* $h_2=0,002$, $h_2=0,2$; *2.* $h_1=0,001$, $h_2=0,1$; *3.* $h_1=0,0002$, $h_2=0,02$



Сурет 2.3,б. Демпфирлеу жылдамдығына *к* тәуелділігі

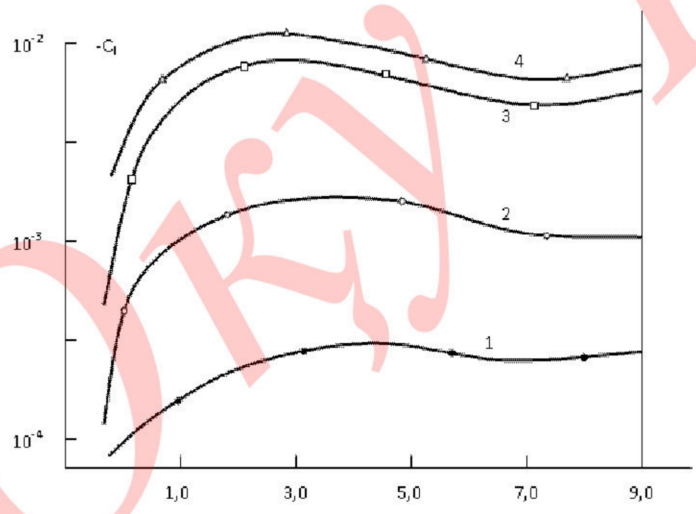


Сурет 2.3,в. Екінші режимнің сәйкес дисперсиялық қисықтардың тербеліс нысаны *1.К=1; 2.К=10*

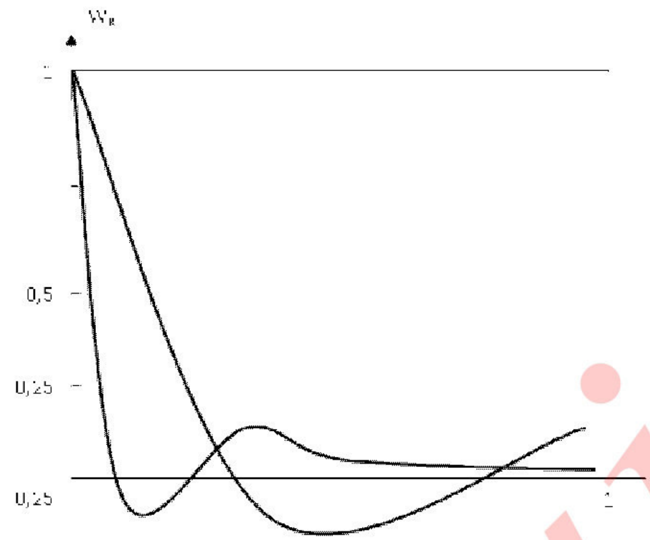


Сурет 2.4,а. Үшінші режимнің дисперсиялық қисықтары.

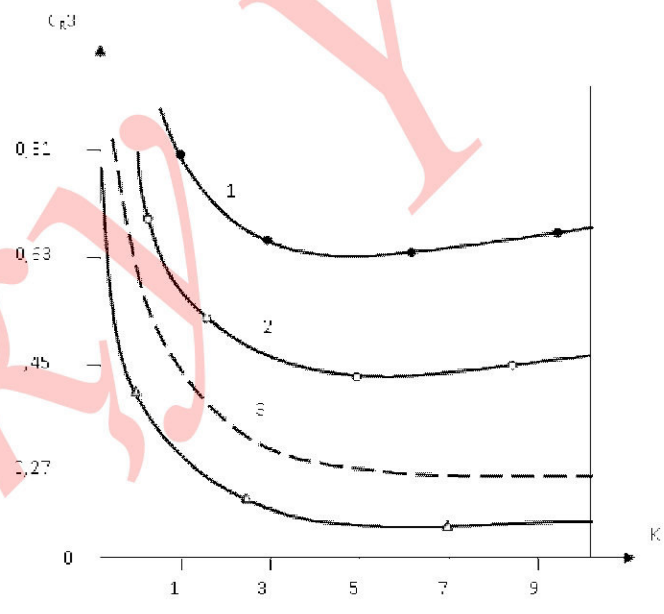
1. h_2=0,002, h_2=0,2; 2. h_1=0,001, h_2=0,1; 3. h_1=0,0002, h_2=0,02



Сурет 2.4, б. Демпифрлеу жылдамдығының κ тәуелділігі.

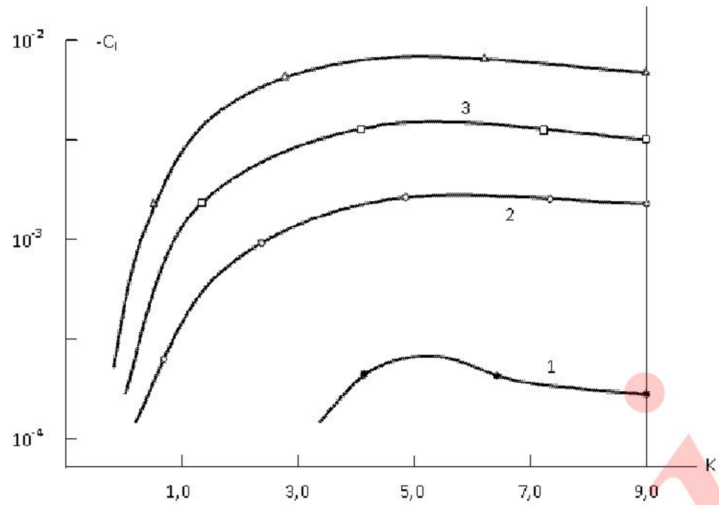


Сурет 2.4,в. Үшінші режимнің тиісті дисперсиялық қисықтардың ауытқуының нақты нысаны *1.К=1; 2.К=10*

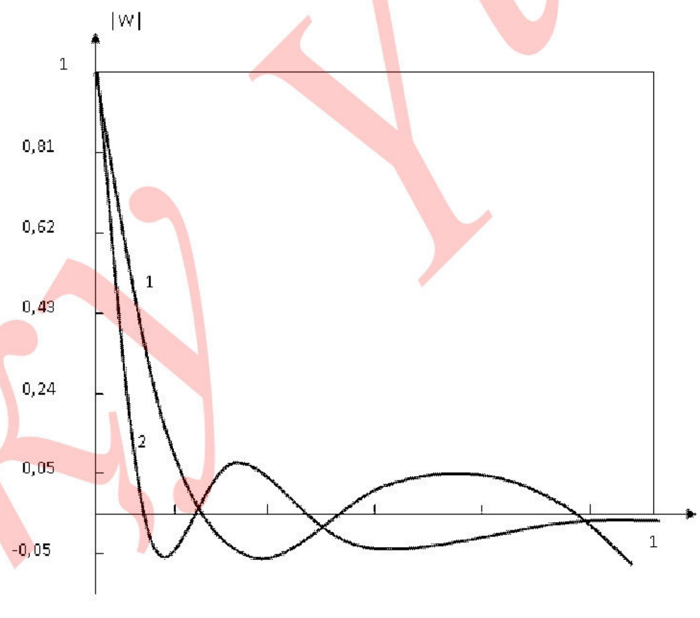


Сурет 2.5,а. Төртінші режимнің дисперсиялық қисықтары.

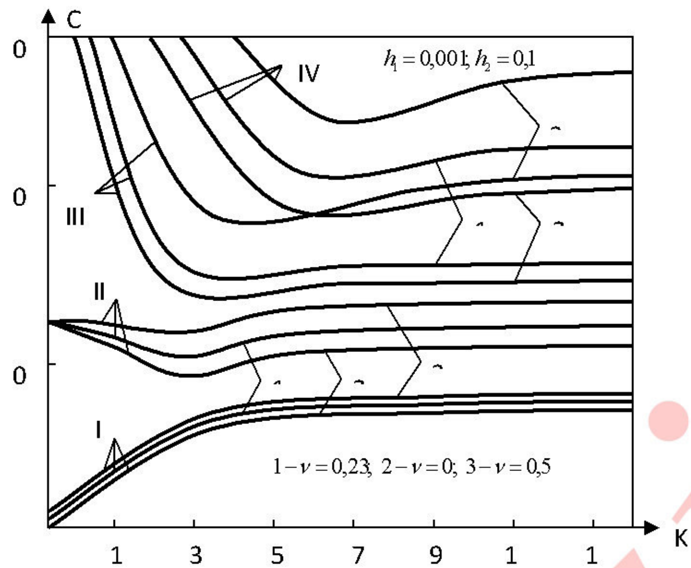
1. $h_2=0{,}002$, $h_2=0{,}2$; *2.* $h_1=0{,}001$, $h_2=0{,}1$; *3.* $h_1=0{,}0002$, $h_2=0{,}02$



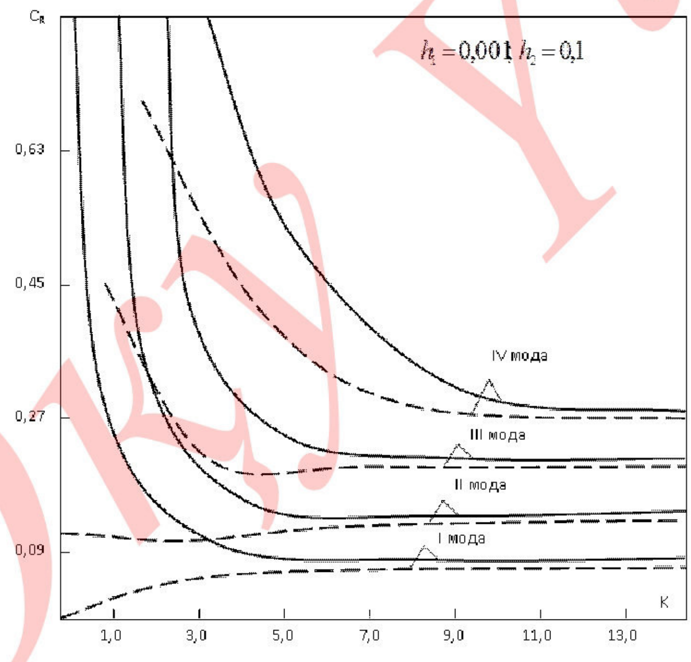
Сурет 2.5, б. Үшінші режимнің тиісті дисперсиялық қисықтардың ауытқуының нақты нысаны κ.



Сурет 2.5,в. Төртінші режимнің тиісті дисперсиялық қисықтардың тербеліс нысаны *1.К=1; 2.К=10*

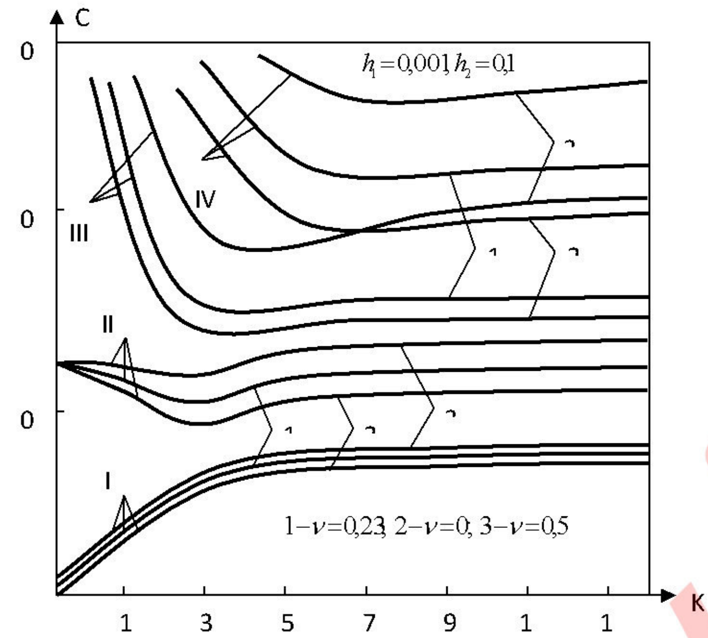


Сурет 2.6. Әр түрлі Пуассон коэффициенттері үшін сына тәрізді пластинаның тербелістерінің алғашқы төрт режимінің фазалық жылдамдығына тәуелділігі

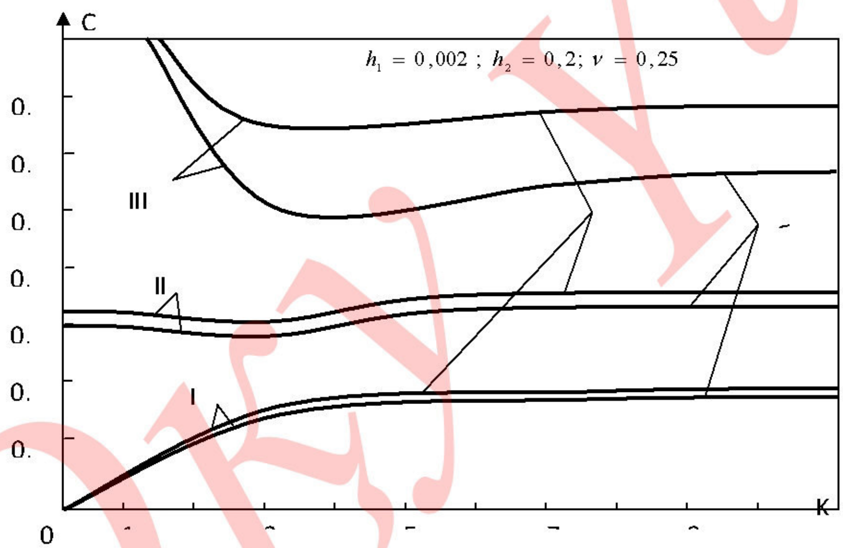


Сурет 2.7. Пластинаның заңды жиегін тығыздаудың екі нұсқасы үшін төрт режимнің фазалық жылдамдықтарының дисперсиялық қисықтары

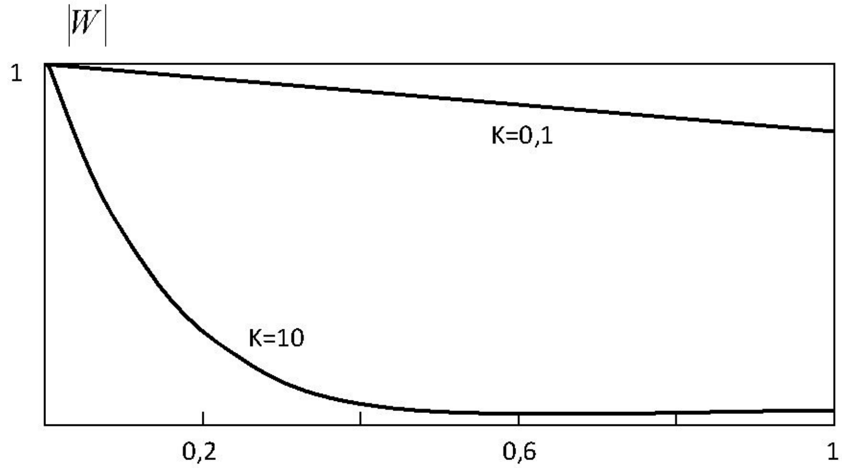
——— Еркін шек, -------- Қатайту



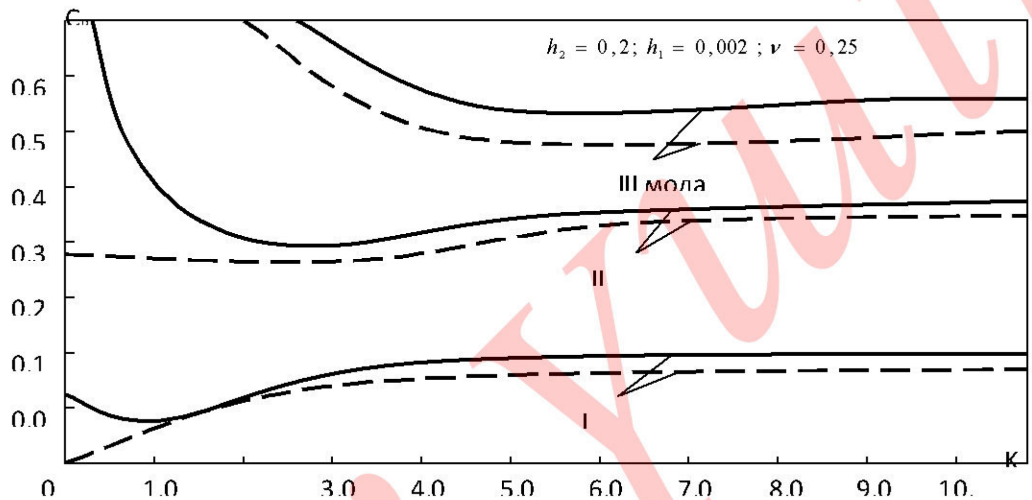
Сурет 2.8. Пуассонның түрлі коэффиценттері үшін дисперсиялық қисықтар



Сурет 2.9,а. Фазалық жылдамдықтың дисперсиялық қисықтары,а- Кирхгоф - Ляв; б- Тимошенко

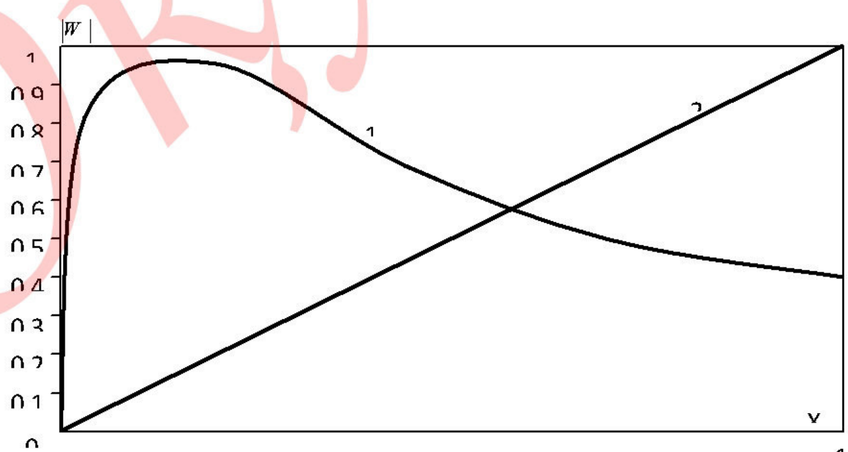


Сурет 2.9,б. Дисперсиялық қисыққа сәйкес келетін тербеліс формасы



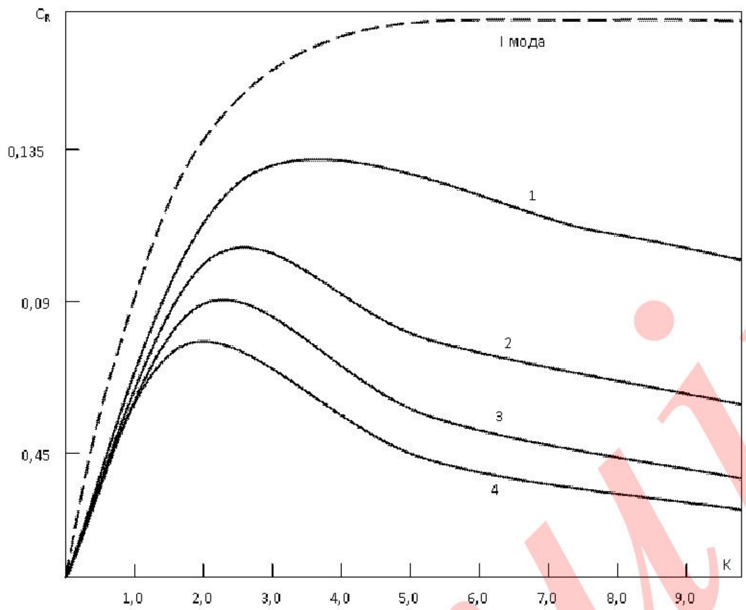
Сурет 2.10,а. Үш режимнің дисперсиялық қисықтары.

——— симметриялы жағдайда -------- антисимметриялы жағдайда

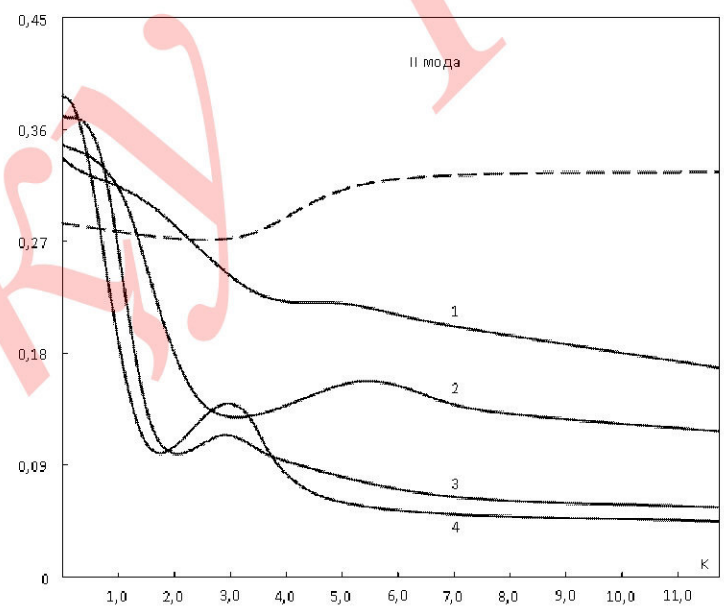


Сурет 2.10,б. Дисперсиялық қисыққа сәйкес келетін тербеліс формасы

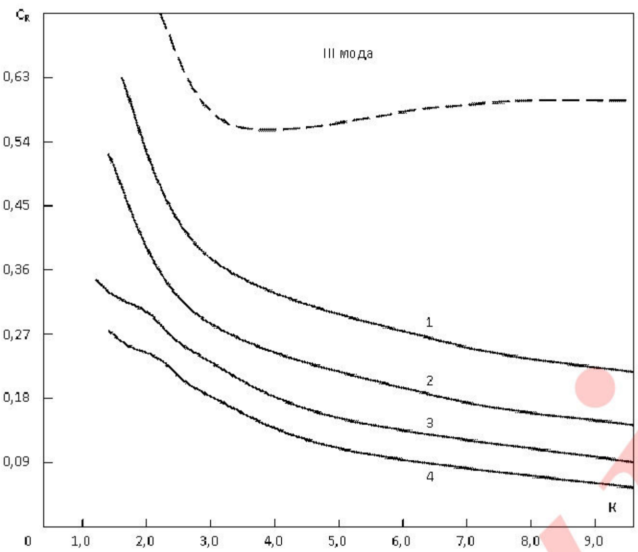
1. К=3; 2. К=0,1



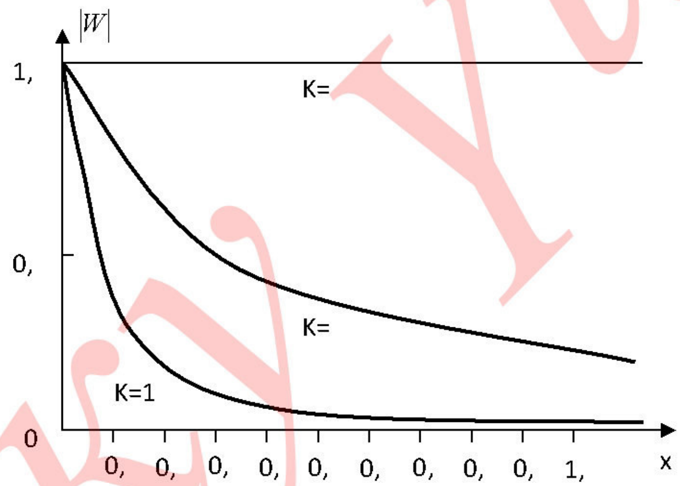
Сурет 2.11. Әртүрлі мәндегі фазалық жылдамдықтың дисперсиялық қисықтары Р. 1. Р=1,5; 2. Р=2; 3. Р=2,5; Р=3



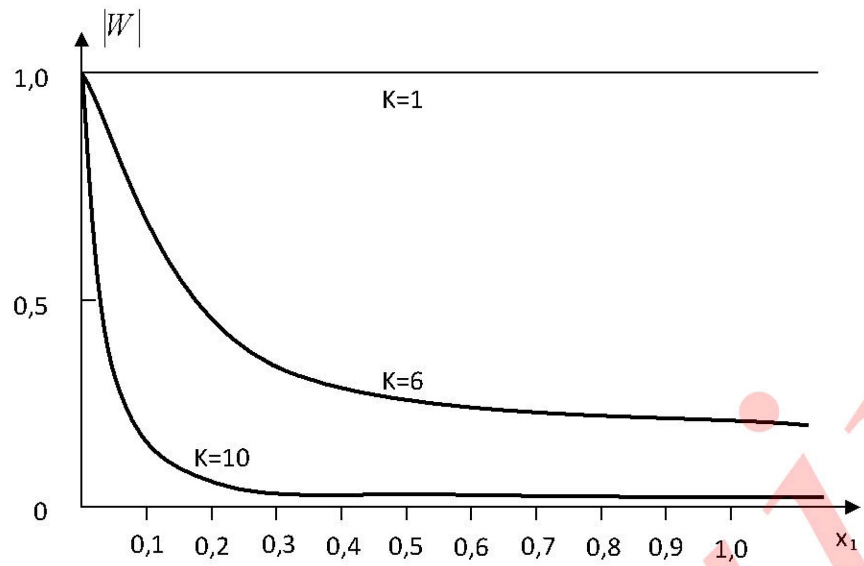
Сурет 2.12 Әртүрлі мәндегі фазалық жылдамдықтың екінші режимінің дисперсиялық қисықтары Р. 1. Р=1,5; 2. Р=2; 3. Р=2,5; Р=3



Сурет 2.13. Әртүрлі мәндегі фазалық жылдамдықтың үшінші режимінің дисперсиялық қисықтары Р. 1. Р=1,5; 2. Р=2; 3. Р=2,5; Р=3

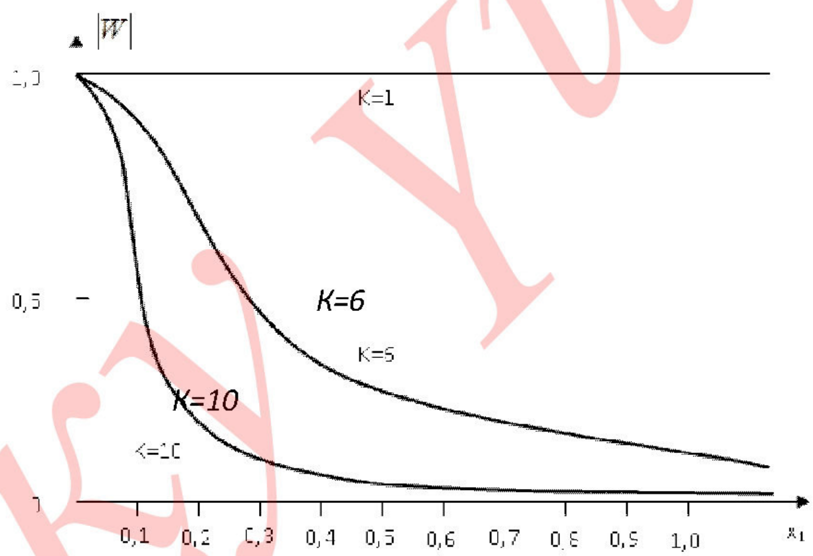


а

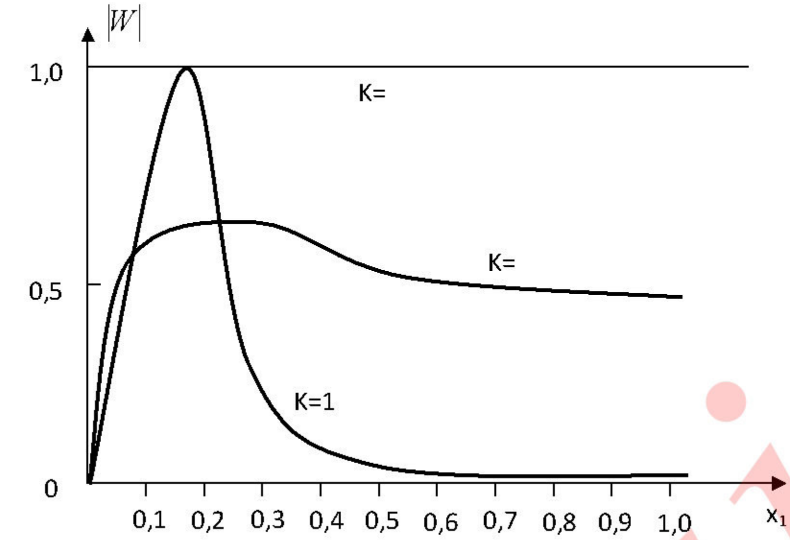


б

Сурет 2.14. Дисперсиялық қисыққа сәйкес келетін тербеліс формасы

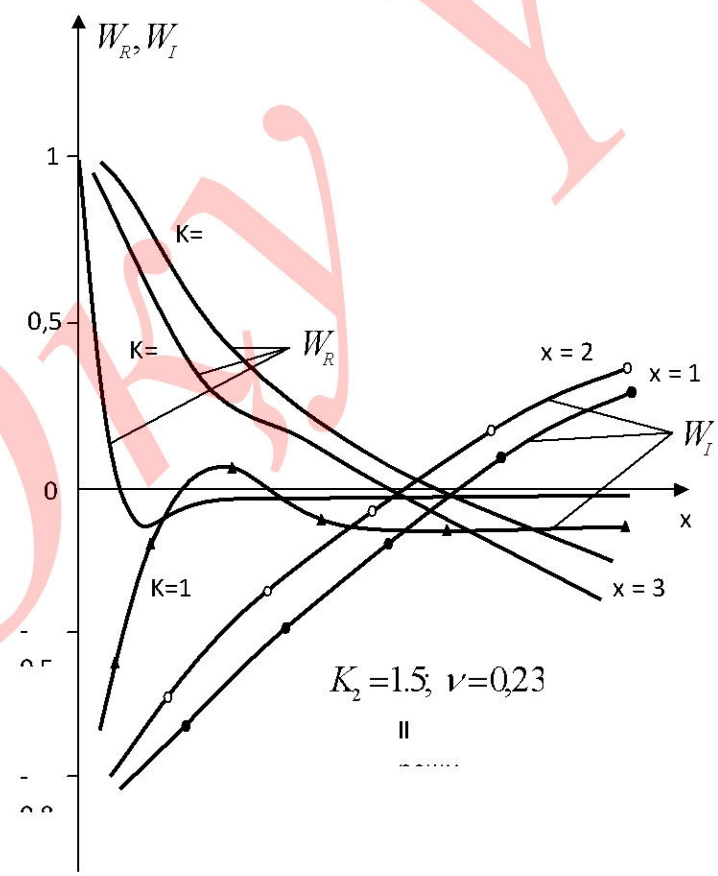


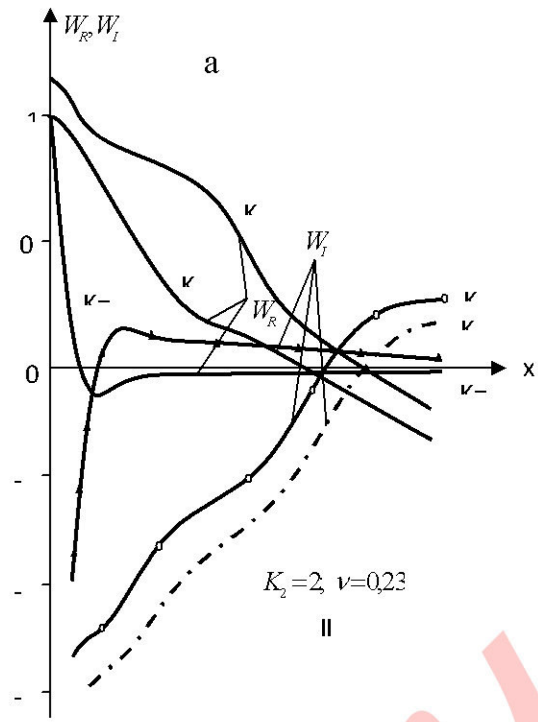
а



б

Сурет 2.15. Дисперсиялық қисыққа сәйкес келетін тербеліс формасы.

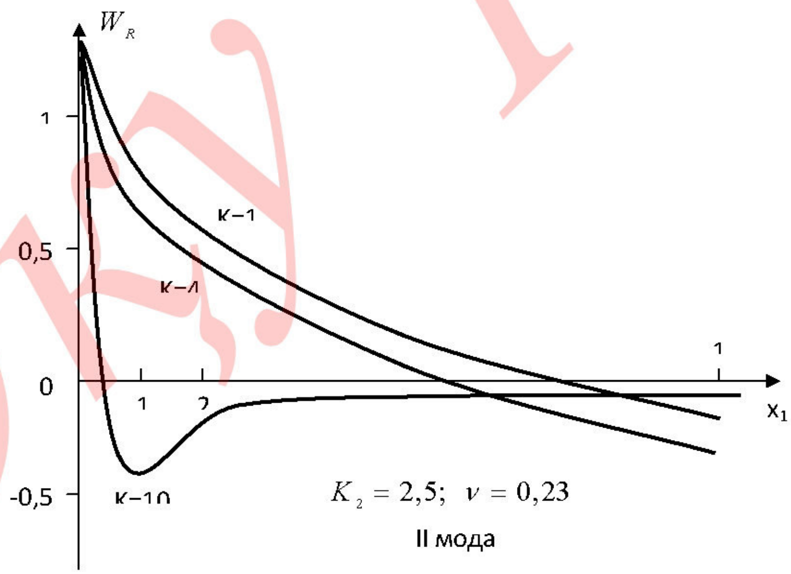




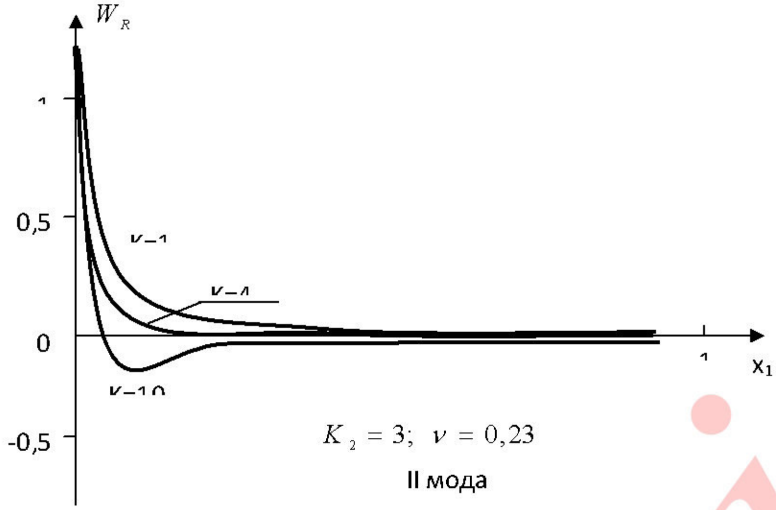
б

К=1 К=2 К=10

Сурет.2.16. Дисперсиялық қисыққа сәйкес келетін тербеліс формасы



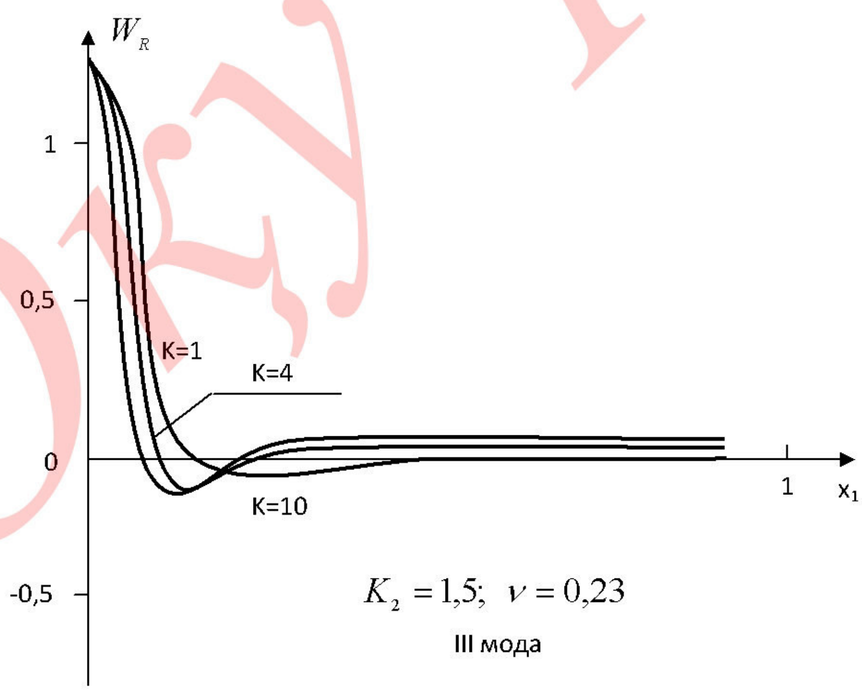
а



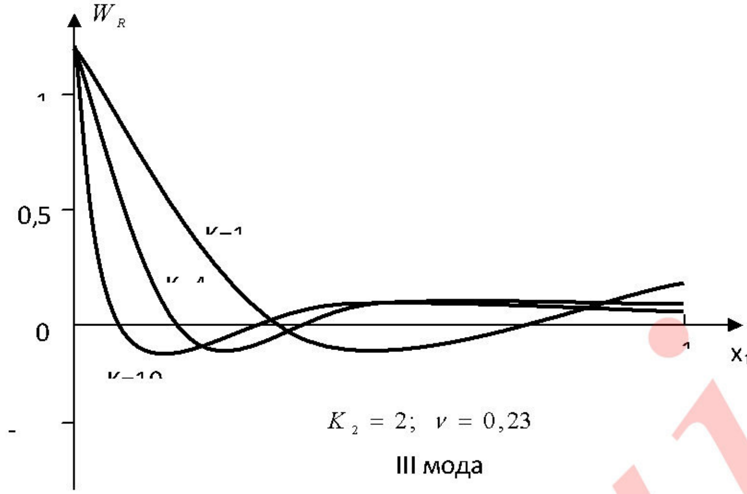
K=1

б *K=10*

Сурет 2.17. Дисперсиялық қисыққа сәйкес келетін тербеліс формасы.

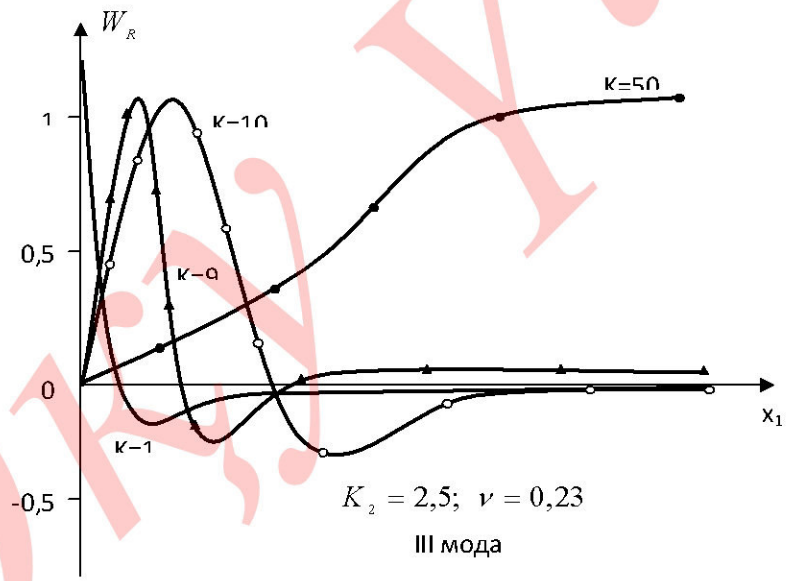


а

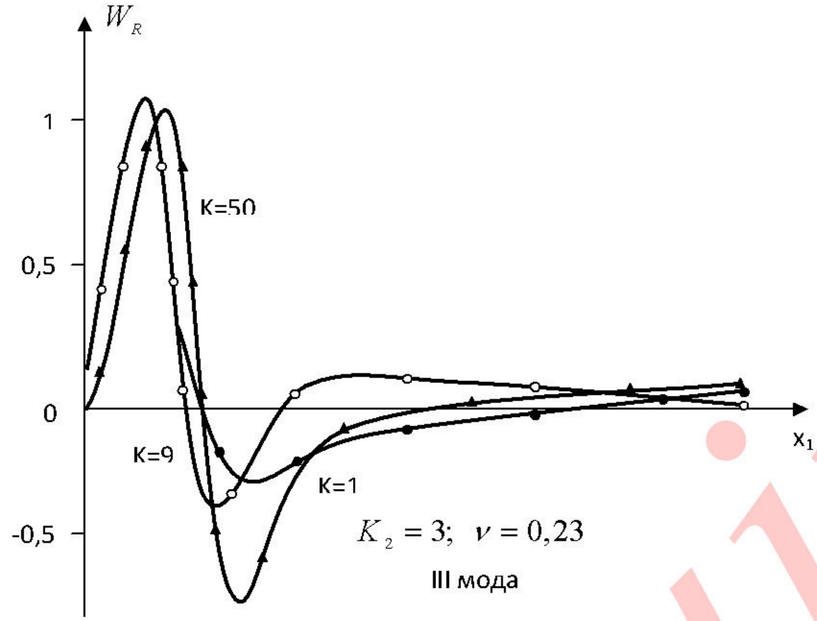


б

Сурет 2.18. Дисперсиялық қисыққа сәйкес келетін тербеліс формасы



а



б

Сурет 2.19. Дисперсиялық қисыққа сәйкес келетін тербеліс формасы

Осылайша, пластина қалыңдығының вариациясының бейсызық заңына қатысты жоғарыда алынған нәтижелерді жинақтай отырып, жоғары жиіліктегі сына тәрізді пластинадағы бірінші режимнің фазалық жылдамдығын өткір жиектің маңында қалыңдығының өзгеру жылдамдығымен анықтайды.

Екінші бөлім бойынша қорытынды

1. Кирхгоф-Ляв және С.П Тимошенконың сына тәрізді жолағындағы қалыпты режимнің нақты және жанама бөлігінің жылдамдығының таралуы толқындық санның өсуімен тұрақты мәнге ұмтылады. Толқын арнасының өткір жиегіне жақын қозғалыстың локализациясы байқалады.

2. Сынаның аз мәнді бұрыштарында Кирхгоф-Ляв мен С.П Тимошенконың теорияларының нәтижелерін салыстыру қанағаттанарлық сәйкестік болып табылады.

3. Кесілген пластинадағы бірінші режимнің кешенді фазалық тарату жылдамдығының шынайы және мнималды бөлігі Пуассонның қатынасына тәуелді емес (ішінде өзгерту 0,5 %).

4. Қысқатолқынды диапазонда сына тәрізді толқындағы бірінші режимнің фазалық жылдамдығының нақты және жанама бөлігінің шекті мәні өткір жиекке жақын қалыңдықтың өзгеру жылдамдығымен анықталады.

5. Дисперсиясыз шындағы аз бұрышты сына тәрізді серпімді пластинада жолақтың енінен аспайтын ұзындықты толқындар таралады.

III. ҚАЛЫҢДЫҒЫ АЙНЫМАЛЫ ПЛАСТИНАДАҒЫ БОЙЛЫҚ ТОЛҚЫННЫҢ ТАРАЛУЫ

Бұл тарауда қалыңдығы айнымалы кеңейтілген пластиналарында таралу үшін біріктірілген спектральды мәселе және биортогоналдылық шарттары жасалды.Қалыңдығы айнымалы шексіз ұзартылған пластиналарда толқындардың таралуына қатысты мәселелерді және сандық нәтижелерді шешу әдістемесі сипатталған.Материалдың тұтқырлық қасиеттері Вольтердің интегралды операторлары арқылы қарастырылады.Зерттеу тұтқырсерпімділіктің кеңістік теориясында қарастырылады. Әдіс, кеңістіктің айнымалы ажырату және Годуновтың ортогональды қуу әдісі бойынша шешілетін өзіндік мәндердің шектік есептерін құруға негізделген. Толқын санына тәуелді фазалық жылдамдықтың накты және жорамал бөлігінің сандық мәндері алынды. Бұл жағдайда алынған сандық нәтижелердің алдынан белгілі болған нәтижелермен сәйкестігі анықталды.

3.1Есептің математикалық қойылымы.

[8,19]-дан белгілі болғандықтан деформацияланған қабаттағы нормаль толқындар (Лэмба толқындары) қабаттың қалыңдығы бойынша ортогоналды емес, яғни бетке перпендикуляр болатын координата функциялары ретінде қарастырылатын екі түрлі толқындарда орын ауыстыру векторларына скаляр көбейтіндісі нөлге тең емес.Олар түйіндес есепті қарастырудан алынған түйінде толқындарға да ортогональ емес,сондай-ақ біріктірілген мәселені қарастырып, алынған біріктірілген толқындарға ортогоналды емес.

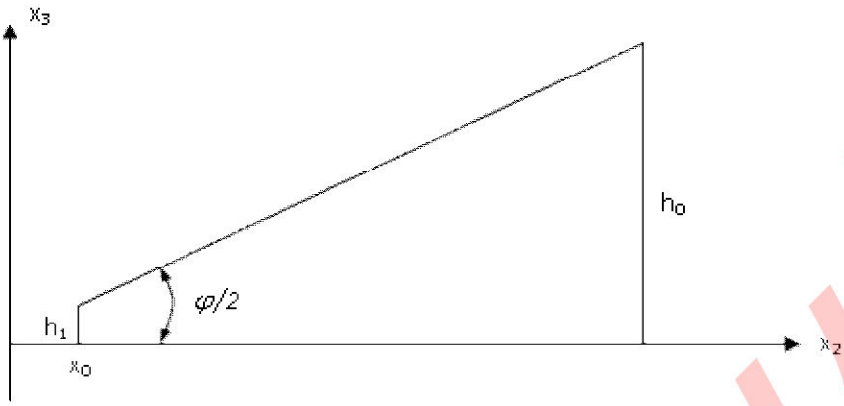
Бұл жағдай практикалық проблемаларды шешуде қосымша қиындықтарды тудырады [36,42,43].

Бұл жұмыста қарастырылған есеп үшін түйіндес спектральді есеп және биортогональ шарттары құрылды.X_1 осі бойынша шексіз созыңқы қалыңдығы тұтқырсерпімді толқынды қарастырамыз. (сурет 3.1).

Қалыңдығы айнымалы пластинаның классикалық теориясының негізгі қатынастарын орын ауыстырудың мүмкін болған принциптері негізінде алуға болады. Үш өлшемді формулада тұтқырсерпімділік теориясының есебінің вариациялық теңдеуінің үшөлшемді қойылуының көрінісі.

$$\iiint_V (\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} + \rho u_i \delta u_i \ )dx_3 dx_2 dx_1 = 0 \qquad (i = 1,2,3; \ \ j = 1,2,3) \qquad (3.1)$$

мұндағы ρ- материалдың тығыздығы; u_i–ығысу компоненті; σ_{ij} және ε_{ij} – кернеу және деформация тензорының компоненттері; V – дене көлемі.Кирхгоф - Ляв гипотезаларымен сәйкестікте $\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0, \quad u_i = -x_3 \frac{\partial W}{\partial x_i}$. (3.2)



Сурет 3.1. Есептеу схемасы: қалыңдығы айнымалы пластинасы

Нормалдік медиана жазықтығына айналудың инерциясын ескеретін терминдерде (3.1) ескермей, келесі вариациондық теңдікке ие болады:

$$\int_S ds \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{11}\delta\varepsilon_{11} + 2\sigma_{12}\delta\varepsilon_{12} + \sigma_{22}\delta\varepsilon_{22}) dx_3 + \int_S ds \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \delta W dx_3 = 0 \qquad (3.2)$$

Геометриялық қатынастардан және кинематикалық гипотезаларды (3.2) қарастыратын жалпыланған Гук заңының қатынастарына байланысты деформация компоненттері мен кернеулердің тензорлары үшін өрнектер

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - x_3 \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j}, \qquad i, j = 1,2;$$

(3.4)

$$\sigma_{11} = \frac{\widetilde{E}}{1-\nu}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}); \quad \sigma_{22} = \frac{\widetilde{E}}{1-\nu}(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}); \sigma_{12} = \frac{\widetilde{E}}{1+\nu}\varepsilon_{12},$$

мұндағы $\widetilde{E}$ – [20] мына түрге ие болатын серпімділіктің операторлық модулі:

$$\widetilde{E}\varphi(t) = E_{01}\left[\varphi(t) - \int_{-\infty}^{t} R_E(t-\tau)\varphi(t)d\tau\right] \quad (3.5)$$

$\varphi(t)$ – уақыттың кез-келген функциясы; $R_E(t-\tau)$ – релаксация ядросы; E_{01} – лездік серпімділік модулі; ν – Пуассон коэффициенті,тұрақты шама ретінде қабылданады делінеді; (3.5) ішіндегі интегралдық терминдерді кіші деп қабылдаймыз, онда функция $\varphi(t) = \psi(t)e^{-i\omega_R t}$, мұндағы $\psi(t)$-уақыттың баяу өзгеретін функциясы, ω_R-нақты константа. Әрі қарай мұздату процедурасын қолдану арқылы [7] мына түрге жақын қатынасты байқаймыз (3.2).

$$\bar{E}\varphi = \lambda_m\left[1-\Gamma^C(\omega_R)-i\Gamma^S(\omega_R)\right]\varphi .$$

Мұнда $\Gamma_E{}^C(\omega_R)=\int_x^{\infty}R(\tau)\cos\omega_R\tau\,d\tau$, $\Gamma_E{}^S(\omega_R)=\int_0^{\infty}R_\lambda(\tau)\sin\omega_R\tau\,d\tau$ - тиісінше, материалдың релаксациялық ядросының косинус және синус Фурье бейнелері.

Жағдай үшін белгілерді енгізе отырып

$$M_{11}=D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2}+v\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2}\right);M_{22}=D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2}+v\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2}\right);\ M_{12}=D(1-v)\frac{\partial^2 W}{\partial x_1\,\partial x_2};D=\frac{\bar{E}h^3}{12(1-\nu^2)}$$

және жолақ қалыңдығына ықпалдаса, оның (3.3) теңдігі мынадай формаға әкеледі

$$\text{p}\int_s\left(M_{11}\frac{\partial^2\delta W}{\partial x_1^2}+2M_{12}\frac{\partial^2\delta W}{\partial x_1\partial x_2}+M_{22}\frac{\partial^2\delta W}{\partial x_2^2}\right)ds-\int_s\rho h\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\delta W ds=0 \qquad (3.6)$$

Бөлшектер бойынша екі рет интегралдау және дене ішіндегі және оның шекараларында δ W вариациялары үшін нөлдік коэффициенттерге теңестіру арқылы келесі дифференциалдық теңдеулерді аламыз

$$\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 M_{22}}{\partial x_2^2}+\rho h\ddot{W}=0,\ \left(\ddot{w}=\partial^2 w/\partial t^2\right) \quad , \qquad (3.7)$$

Нақты шекаралық шарттармен

$$\begin{cases}\dfrac{\partial W}{\partial x_2}=0\\ W=0;\ x_2=0:l_2\end{cases} \qquad (3.8)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial W}{\partial x_1}=0 & x_1=0;l_1\\ W=0:\end{cases} \qquad (3.9)$$

және олар үшін негізгі балама

$$\begin{cases}M_{22}=0\\ \dfrac{\partial M_{22}}{\partial x_2}+2\dfrac{\partial M_{12}}{\partial x_1}=0;\ x_2=0;\quad l_2\end{cases} \qquad (3.10)$$

$$\begin{cases} M_{11} = 0 \\ \dfrac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + 2\dfrac{\partial M_{12}}{\partial x_2} = 0\ ;\ x_1 = 0 : l_1 \end{cases} \qquad (3.11)$$

Спектрлік мәселені құру үшін келесі айнымалы өзгерістерді енгіземіз

$$\mathrm{W{=}W}; \quad \varphi = \frac{\partial W}{\partial x_2}; \quad M = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2}\right); \quad Q = \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} \qquad (3.12)$$

(3.12) (3.7) қою арқылы бірінші x_2 туындысына қатысты, ішінара дифференциалдық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\frac{\partial Q}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 M}{\partial {x_1}^2} + D'(1-\nu)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial {x_1}^2} + \rho h\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0\ ;$$

$$\frac{\partial M}{\partial x_2} - Q - D''(1-\nu)\frac{\partial^2 W}{\partial {x_1}^2} = 0;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{1}{D}M + \frac{\partial^2 W}{\partial {x_1}^2} = 0; \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x_2} - \varphi = 0:$$

және балама шекаралық шарттар $x_2{=}0$: $x_2{=}l_2$:

$$\varphi = 0 \text{ немесе } M - D(1-\nu)\frac{\partial^2 M}{\partial x_1^2} = 0; \qquad (3.14)$$

$$W = 0 \text{ немесе } Q + D(1-\nu)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = 0 \text{ және } \quad x_1{=}0, \quad x_1{=}l_1,$$

$$\varphi = 0 \text{ немесе } \mathrm{M{-}D(1{-}v)}\frac{\partial^2 M}{\partial x_1^2} = 0\ W = 0 \text{ немесе } Q + D(1-\nu)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = 0 \qquad (3.15)$$

Енді $h{=}h(x_2)$қалыңдығының еркін өзгеру заңы бар x_1осі бойынша шексіз жолақшаны қарастырайық. (3.13)-(3.15) мәселесінің шешімін мына түрде іздейміз

$$(Q, M, \varphi, W)^T = \left(\overline{Q}, \overline{M}, \overline{\varphi}, \overline{W}\right)^T e^{i(\alpha x_1 - \omega t)} \qquad (3.16)$$

Олар x_1 осі бойынша таратылатын гармоникалық жазықтық толқындарын сипаттайды. (3.16) (3.13) қою арқылы , туынды құралдарға қатысты шешілетін бірінші ретті дифференциалдық теңдеулерді аламыз

$$\begin{cases} \overline{Q}' - \alpha^2\overline{M} - \alpha^2 D(1-\nu)\overline{\varphi} - \rho h\omega^2\overline{W} = 0; \\ \overline{M}' - \overline{Q} + \alpha^2 D'(1-\nu)\overline{W} = 0; \\ \overline{\varphi}' - \frac{1}{D}\overline{M} - \alpha^2\overline{W} = 0; \\ \overline{W}' - \overline{\varphi} = 0 \end{cases} \qquad (3.17)$$

жолақтардың шекарасында $x_2=0,\ l_2$, төрт түрдің біреуі

а. біріктірілген қолдау: $\overline{W} = \overline{M} = 0;$ (3.18)

б. жылжымалы қысқыш: $\overline{Q} = \overline{\varphi} = 0$ (3.19)

в. қатты тығыздау: $\overline{W} = \overline{\varphi} = 0$ (3.20)

г. еркін жиек: $\begin{cases} \overline{M} + \alpha^2 D(1-\nu)\overline{W} = 0 \\ \overline{Q} - \alpha^2(1-\nu)D\overline{\varphi} = 0 \end{cases}$ (3.21)

Осылайша, толқын арнасындағы иілмелі жазық толқындардың таралуын сипаттайтын x_2 координаты бойынша қалыңдығының өзгеру заңы бар жолақ түрінде жасалған, α^2 параметрі бойынша спектралдік мәселе (3.17- 3.21) құрылды.α^2спектрлік параметрі нақты мәндерді ғана қабылдайтынын көрсетті(R_E =0 кезінде).

Бұл үшін (3.17) жүйесін түрлендіреміз, аламыз

$$\overline{Q}' = \overline{M}'' + D''(1-\nu)\alpha^2\overline{W} + D'(1-\nu)\alpha^2\overline{\varphi} \quad ,$$

$$M'' + D''(1-\nu)\alpha^2\overline{W} - \alpha^2\overline{M} - \rho h\omega^2\overline{W} = 0.$$

Одан бөлек

$$\overline{W}'' - \frac{1}{D}\overline{M} - \alpha^2\overline{W} = 0.$$

Осылайша, түрлену жүйесі мына түрге ие

$$\begin{cases} M'' - \alpha^2\overline{M} - \left(\rho h\omega^2 - D''(1-\nu)\alpha^2\right)\ \overline{W} = 0 \\ W'' - \alpha^2\overline{W} - \frac{1}{D}\overline{M} = 0 \end{cases} \qquad (3.22)$$

$\overline{W}, \overline{M}$ айнымалыларында шекаралық шарттар (3.18 -3.21) мына түрге ие:

а. біріктірілген қолдау: $\overline{W} = \overline{M} = 0;$ (3.23)

б. жылжымалы қысқыш: $\overline{W}'' = \overline{M}' - \alpha^2 D'(1-\nu)\overline{W} = 0;$ (3.24)

в. қатты тығыздау: $\overline{W} = \overline{W}' = 0$ (3.25) г. еркін жиек: (3.26)

$$\overline{M}'+\alpha^2 D(1-\nu)(\overline{W})'=0,\ \overline{M}'-\alpha^2\,(1-\nu)(D\overline{W})'=0$$

д. $x_2=0$ кезінде немесе $x_2=+e_2$

Жүйенің кейбір функциялары $\overline{M}$ және $\overline{W}$ (3.22) - (3.26), күрделі мәнге ие болсын. $\overline{M}$ және $\overline{W}$ функцияларына комплексті байланысқан (3.22) теңдейлер жүйесін M және W көбейтеміз.

Бірінші теңдеуді бірдей түрде түрлендіріп, алынған теңдеулерді x_2 бойынша біріктіріп, келесі сызықтық комбинацияларды құрастырамыз

$$\left[\overline{M}'-\alpha^2(1-\nu)(D\overline{W})'\right]W\Big|_0^{l_2}+\left[M+\alpha^2(1-\nu)DW\right]\overline{W}'\Big|_0^{l_2}$$
$$-\int_0^{l_2}(\overline{M}'W'+M\overline{W}')dx_2-\alpha^2\int_0^{l_2}(\overline{W}M+W\overline{M})dx_2- \qquad (3.27)$$
$$-\int_0^{l_2}\frac{\overline{M}M}{D}dx_2-\omega^2\int_0^{l_2}\rho h\overline{W}Wdx_2-2\alpha^2(1-\nu)\int_0^{e_2}D''W\overline{W}dx_2+\alpha^2(1-\nu)\int_0^{e_2}D'(W\overline{W})'dx_2=0$$

Шектеулі шарттардың (3.23) - (3.26) комбинациясы үшін теңдік интегралдарға (3.27) енбеген терминдерді тексеру оңай. Сондай-ақ, барлық интегралдық функциялардың нақты екендігін атап өткен жөн. (3.27) ден α^2 алу арқылы ($R_E=0$) аламыз:

$$\alpha^2=\frac{\int_0^{l_2}(\overline{M}'W'+M'W')\,dx_2+\int_0^{l_2}\frac{\overline{M}M}{D}\,dx_2+\omega^2\int_0^{l_2}\rho h\overline{W}W dx_2}{\int_0^{l_2}(\overline{M}W+M\overline{W})\,dx_2-2(1-\nu)\int_0^{l_2}D''\overline{W}\,W'dx_2-(1-\nu)\int_0^{l_2}D'(\overline{W}W)'dx_2},\ (3.28)$$

α^2 - нақты сан.

Осылайша, айнымалы қалыңдығының шексіз жолағы үшін дұрыс толқын санының квадраты шекаралық шарттардың кез келген комбинациясы үшін жарамды екенін көрсетеді.

3.2 Түйіндес спектральді есеп, биортогоналдық шарты

Алынған спектральді мәселе(3.17-3.21) өзін-өзі біріктіретін болып табылмайды. Лагранж [8,19] формуласын пайдаланып, оған біріктірілетін мәселені құрамыз.

$$\int_0^l L(U)\cdot V^*dx=Z(U,V^*)\Big|_0^l-\int_0^l L^*(V^*)\cdot Udx, \qquad (3.29)$$

мұндағы Lжәне L* - тікелей және біріктірілген сызықты дифференциалдық операторлар;Uжәне V* - Шекаралық есептердің ерікті шешімдері.

Біздің жағдайда

$$L=\begin{bmatrix} \frac{\ddot{a}}{\ddot{a}\tilde{o}_2} & -\alpha^2 & -\alpha^2 D'(1-v) & -\rho h\omega^2 \\ -1 & \frac{\ddot{a}}{\ddot{a}\tilde{o}_2} & 0 & -\alpha^2 D'(1-v) \\ 0 & -\frac{1}{D} & \frac{\ddot{a}}{\ddot{a}\tilde{o}_2} & -\alpha^2 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{\ddot{a}}{\ddot{a}\tilde{o}_2} \end{bmatrix} \qquad (3.30)$$

Сондықтан (3.29) теңдігінің сол бөлігі келесідей түрге ие болады

$$\left[\overline{Q}\,\overline{Q}*+\overline{\grave{I}}\,\overline{\grave{I}}*+\overline{\varphi}\,\overline{\varphi}*+\overline{W}\,\overline{W}*\right]\Big|_0^{l_2}-\int_0^{l_2}\Big[(Q*'+\overline{M}*)\overline{Q}+(\overline{M}*'+\alpha^2\overline{Q}*+$$
$$+\frac{1}{D}\overline{\varphi}*)\overline{M}+(\overline{\varphi}*'+\overline{W}*+\alpha^2 D'(1-\nu)\overline{Q}*)\overline{\varphi}+(\overline{W}*'+\alpha^2\overline{\varphi}*- \qquad (3.31)$$
$$-\alpha^2 D'(1-\nu)\overline{M}*+\rho h\omega^2\overline{Q}*)\overline{W}\Big]dx_2=0$$

Осылайша, (3.17) – (3.21) біріктірілген жүйе мынадай түрге ие

$$\begin{cases} \overline{Q}*'+\overline{M}*=0 \\ \overline{M}*'+\alpha^2\overline{Q}*+\frac{1}{D}\overline{\varphi}*=0 \\ \overline{\varphi}*'+\overline{W}*+\alpha^2 D'(1-\nu)\overline{Q}*=0 \\ \overline{W}*'-\alpha^2 D'(1-\nu)\overline{M}*+\alpha^2\overline{\varphi}*+\rho h w^2\overline{Q}*=0 \end{cases} \qquad (3.32)$$

Одан бөлек, (3.31) өрнегіндегі интегралдық терминдерден тыс жатқан шексіз шарттарды $Z(U,V*)\Big|_0^{l_2}$ аламыз:

а. біріктірілген қолдау: $\overline{\varphi}*=\overline{Q}*=0, \quad x_2=0, \; l_2$ (3.33)

б. жылжымалы қысқыш: $\overline{W}*=\overline{M}*=0, \quad x_2=0, \; l_2$ (3.34)

в. қатты тығыздау: $\overline{M}*=\overline{Q}*=0, \quad x_2=0, \; l_2$ (3.35)

г. еркін жиек: $\begin{cases} \overline{\varphi}*-\alpha^2 D(1-\nu)\overline{Q}*=0, \\ \overline{W}*-\alpha^2 D(1-\nu)\overline{M}*=0, \quad x_2=0, \; l_2 \end{cases}$ (3.36)

Шешімнің биортогоналды жағдайын алу үшін біз Лагранж формуласын (3.29) тағы бір рет қолданамыз

$$\int_0^l [\,L(U)V^* + L^*(V^*)U\,]dx = Z(U,V^*)\Big|_0^{l_2}, \qquad (3.37)$$

Бұл формула келесі интегралды қарастырады

$$\begin{aligned}
&\int_0^{l_2}\Big[\overline{Q}_i'\overline{Q}_j^* - \alpha_i^2\overline{M}_i\overline{Q}_j^* - \alpha_i^2 D'(1-\nu)\overline{\varphi}_i\overline{Q}_j^* - \rho h w^2\overline{W}_i\overline{Q}_j^* + \overline{M}_i\overline{M}_j^* - \\
&-\overline{Q}_i\overline{M}_j^* + \alpha^2{}_i D'(1-\nu)\overline{W}_i\overline{M}^*{}_j + \overline{\varphi}_i'\overline{\varphi}^*{}_j - \frac{1}{D}\overline{M}_i\overline{\varphi}^*{}_j - \alpha^2{}_i\overline{W}_i\overline{\varphi}^*{}_j + \\
&+\overline{W}_i'\overline{W}^*{}_j - \overline{\varphi}_i\overline{W}^*{}_j + \overline{Q}_j^{*\prime}\,\overline{Q}_i + \overline{M}_j^*\overline{Q}_i + \overline{M}_j^{*\prime}\overline{M}_i + \alpha^2{}_j\overline{M}_i Q_j^* + \qquad (3.38)\\
&+\frac{1}{D}\overline{M}_i\overline{\varphi}^*{}_j + \overline{\varphi}_i\overline{\varphi}_j^{*\prime} + \overline{W}_j^*\overline{\varphi}_i + \alpha^2{}_j D'(1-\nu)\overline{Q}_j^*\overline{\varphi}_i + \overline{W}_i\overline{W}_j^{*\prime} + \\
&+\alpha_j^2\overline{W}_i\overline{\varphi}_j^* - \alpha_j^2 D'(1-\upsilon)\overline{W}_i\overline{M}_j^* + \rho h\omega^2\overline{Q}_j^*\overline{W}_i\Big]dx_2 = 0,
\end{aligned}$$

мұндағы $(\overline{Q}_i, \overline{M}_{i,} \overline{\varphi}_i, \overline{W}_i)^T$ - жеке форма, бастапқы спектрлік міндеттің α_i өз мәніне сәйкес келеді; $(\overline{Q}_i^*, \overline{M}_i^*, \overline{\varphi}_i^*, \overline{W}_i^*)^T$ -жеке форма, біріктірілген α_jжеке мәнге сәйкес келеді; (38) бөліктерге интегралдау арқылы аламыз

$$\begin{aligned}
&\left(\alpha_i^2 - \alpha_j^2\right)\left[\int_0^{l_2}\Big[-\overline{M}_i\overline{Q}_j^* - D'(1-\nu)\overline{Q}_j^*\overline{\varphi}_i + D'(1-\nu)\overline{W}_i\overline{M}^*{}_j - \overline{W}_i\varphi^*{}_j\Big]dx_2 + \right.\\
&+\Big[D(1-\nu)\overline{Q}^*{}_j\,\overline{\varphi}_i - D(1-\nu)\overline{W}_i\overline{M}_j^*\ \Big]_0^{l_2} = 0,
\end{aligned}$$

i≠jүшін қай жерде біз нысандардың биортогоналды жағдайына ие бола аламыз:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{l_2}\Big[\big(\overline{M}_i + D'(1-\nu)\overline{\varphi}_i\big)\overline{Q}_j^* + \overline{W}_i\big(\overline{\varphi}^*{}_j - D'(1-\nu)\overline{M}^*{}_j\big)\Big]dx_2 + \qquad (3.39)\\
&+D(1-\nu)\Big[\overline{W}_i\overline{M}^*{}_j - \overline{Q}_j^*\overline{\varphi}_i\Big]\Big|_0^{l2} = \delta_{ij}
\end{aligned}$$

Мұнда өрнек $\overline{W}_i\overline{M}^*{}_j - \overline{Q}_j^*\overline{\varphi}_i$ жоғалады, егер еркін шекаралық жағдайдан басқа кез-келген шарттар (3.18) - (3.21) шекарада берілсе. Соңында (x_1 =0) уақыт гармоникалық әсерлері берілген x_1 осі бойымен айнымалы көлденең қиманың жолағын қарастырамыз:

$$w = f_W(x_2)e^{i\omega t},\ M_{11} = f_W(x_2)e^{i\omega t},\ \ x_1 = 0 \qquad (3.40)$$

(3.40) шекаралық шарттарын оның ішінде тек біз таңдаған айнымалылар w, φ, M және Q ғана болатындай етіп түрлендіреміз

$$W = f_{\omega}(x_2)e^{i\omega t}, M = \left[f_M(x_2) + D(1-\nu)f''_{\omega}(x_2)\right]e^{i\omega t}, \; x_1 = 0 \qquad (3.41)$$

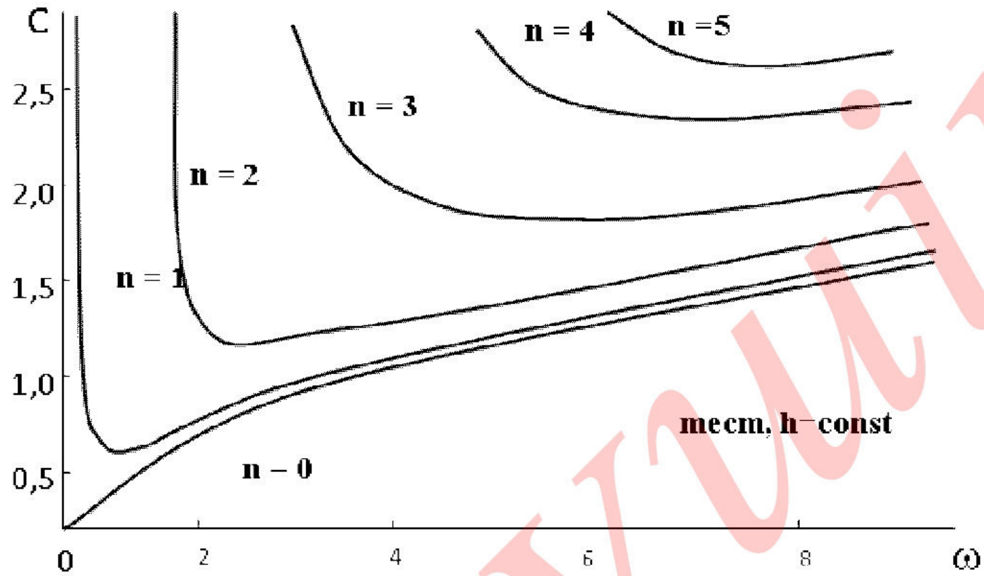
$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = f_{\varphi}(x_2)e^{i\omega t}, \quad \frac{\partial M}{\partial x_1} = f_Q(x_2) - D(1-\nu)f''_{\varphi}(x_2)]e^{i\omega t}, \quad x_1 = 0, \qquad (3.42)$$

Стационарлық міндеттің шешілетін шешімі спектрлік міндеттің шешілуінің өз функцияларының сериясында кеңейтілсін делік. (3.32)-(3.36), (3.40)-(3.42) стационарлы мәселенің шешуін мына түрде іздейміз

$$\begin{pmatrix} W \\ \varphi \\ M \\ Q \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{N} a_k \begin{pmatrix} \overline{W}_k(x_2) \\ \overline{\varphi}_k(x_2) \\ \overline{M}_k(x_2) \\ \overline{Q}_k(x_2) \end{pmatrix} e^{-i(\alpha_k x_1 - \omega t)}$$

мұндағы $\overline{W}_k, \; \overline{\varphi}_k, \; \overline{Q}_k, \overline{M}_k$ - спектрлік міндеттің өздігінен тәуелсіз меншікті формалары (3.32) – (3.36).

Осы және барлық кейінгі спектрлік есептердің сандық шешімі ЭЕМ-де Мюллер әдісімен байланысты С.К. Годуновтың [14] ортогональды сығу әдісі негізінде бағдарламалық кешені арқылы жүзеге асырылды.Бағдарламалық кешенді тестілеу кезінде алынған нәтижелер 0,01-ден 100-ге дейінгі жиілік диапазонында 4-5 таңбадан тұратын дәлдікпен есептелген нәтижелермен сәйкес келеді.Бұдан әрі, барлық талдау материалдың тығыздығы ρ болатын, толқын енінің жартысы l_2және E_{01} серпімділік модулі бірлікке тең деп есептелетін өлшемсіз айнымалыларда жүзеге асырылады.Тұтқыр серпімді материалдардың мысалы ретінде әлсіз сингулярлыққа ие үш параметрлі ядро релаксациясын аламыз $R_{\lambda}(t) = R_{\mu}(t) = Ae^{-\beta t} / t^{1-\alpha}$. Сонымен қатар $A = 0{,}048; \;\; \beta = 0{,}05; \;\; \alpha = 0{,}1$. 3.2 суретінде Пуассон υ=0,25 коэффициенті үшін сәйкес келетін n=0, 1, 2, 3, 4, 5 төменгі тербеліс режимдерінің спектральды қисықтары тұрақты қалыңдықтағы пластиналар келтірілген. Берілгендердің талдау қорытындысы тұрақты қалыңдық пластинасына Кирхгоффа-Ляв теориясын қолдану төмен жиілік диапазонымен шектелгенін көрсетеді. Мысалы, бірінші режим үшін (n=0), жиіліктің көбеюімен фазалық жылдамдықтың шексіз өсуіне байланысты, үлкен жиіліктер үшін $C_f C_s \sim \sqrt{\omega}$, теорияның қолданылу аясы 0≤ω≤3.Жоғары жиіліктер аймағында, режимнің толқын ұзындығы жолақ қалыңдығымен салыстырылатын немесе аз болған кезде, жолақтың беттеріне жақын локализацияланған Рэлея толқыны жылдамдықпен Cs жылдамдығынан аз болады.

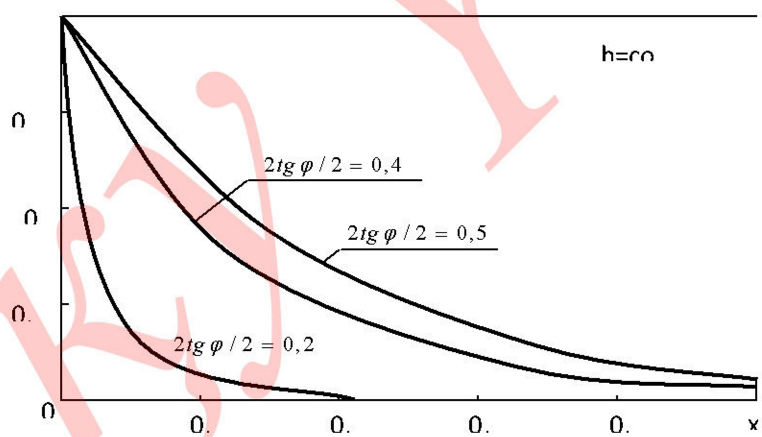


Сурет 3.2. Фазалық жылдамдықтың жиілікке тәуелділігі

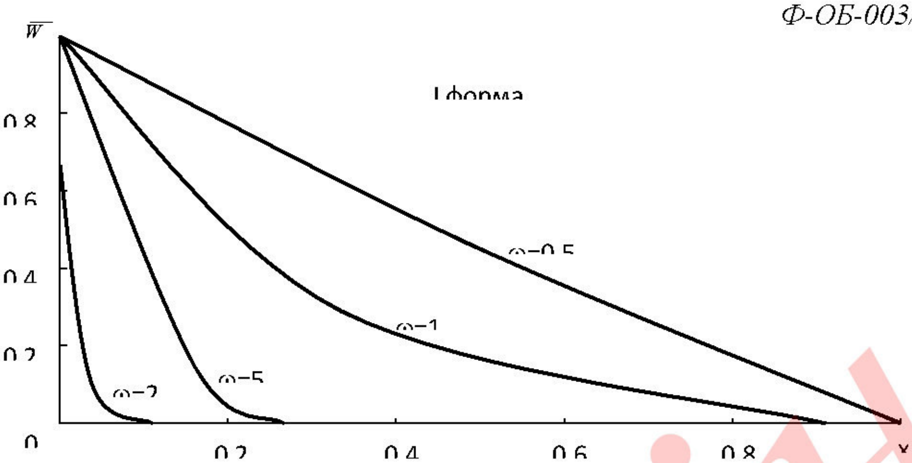
Алайда, Кирхгов-Ляв теориясын тұрақты қалыңдықтың платинкасына қолданған кезде дұрыс тұжырым жасалады, бұл көбейткіш режимдердің саны көбейген жиілікте артып, 3.2 суретінде алынған спектральдық қисықтарда анық көрінеді.Енді айнымалы қалыңдықтың симметриялық Кирхгова-Ляв жолағында иілгіш толқындардың таралуын зерттеуге өтеміз.Алдымен 1-суретте бейнеленген шеттері еркін болатын толқынның қалыңдығының өзгеруін сызықты заңымен қарастырайық.3.3-суретінде *φ/2* шегінің иілу бұрышына тәуелді бірінші режимнің дисперсиялық қисықтары көрсетілген. Сынаның негізіндегі кішкене бұрышпен (қисық 3) сына тәрізді толқын жағдайында тұрақты қима жолағынан айырмашылығы, режимнің таралуының фазалық жылдамдығының соңғы шегі бар, және

$$\lim_{\omega\to\infty} \widetilde{C}_f = 2C_s\ tg\frac{\varphi}{2}$$

мұндағы C_5 - басқа зерттеулердің нәтижелерімен сәйкес келетін жылжымалы толқынның жылдамдығы [13] және т.б. Осылайша, Кирхгова-Ляв теориясы жылдамдығы бар сынаның негізіндегі ең аз бұрышты сына тәрізді толқын арнасында таралатын толқындарды және төмен жылдамдықтағы жылжымалы толқындар мен Рэлея толқынының жылдамдығынан ерекшеленетін толқындарды алуға мүмкіндік береді. Одан бөлек, бұл толқындар бірнеше жиіліктен бастап дисперсиясыз таралады. 3.4-суретінде тұрақты қалыңдықтың жолағы өздігінен стержень тәрізді әрекет ететін, ал сына тәрізді диапазонда толқынның елеулі оқшаулануы байқалатын$\omega=10$ жиілігі үшін тербеліс формасы көрсетілген, үлкен болған сайын φ бұрышы төмендей береді. Жоғарыда келтірілген факт Кирхгова-Ляв теориясының сына тәрізді толқынды нұсқадағы толқындық процестерді зерттеуге қолданылуын түсіндіреді, өйткені жиіліктің көбеюімен режимнің толқын ұзындығы бір жағынан төмендейді, ал екінші толқында толқын ұзындығының қатынасы мен материалдың тиімді қалыңдығы теорияның қолданылу аймағында болғандықтан, сынаның өткір қырынан локализацияланған.Бұл мәлімдеме неғұрлым шынайы болса, сынаның негізіндегі бұрыш соғұрлым аз.Нәтиженің сандық тұрақтылығы туралы тек үлкен жиілік диапазонында ғана айтуға болады, бұл зерттеудің дәлелі.Мысалы, $tg\varphi/2=0,2$ кезінде жылжымалы толқындардың жылдамдығына өлшемсіз келетін фазалық жылдамдықтың мәні $\omega=3$ және $\omega=50$ кезінде сынақ тапсырмасында алынған есептеулердің дәлдігіне сәйкес келетін бесінші таңбадан ерекшеленеді.



Сурет 3.3.Фазалық жылдамдықтардың нақты және жанама бөліктерінің жиілікке тәуелділігі



Сурет 3.4. X_2 координатындағы тербелістердің түрлері

$h_0 = 0,0001$ келтірілген мысалында , бұл, әрине, фазалық жылдамдықты жиіліктің ұлғаюымен ұлғайтады, өйткені толқынның жіңішке жиегіне дейін осындай күшті локализациялаудың сипаттамалық өлшеміне әсер ете бастайды – сынаның кесілген бөлігінің қалыңдығы және Кирхгова-Ляв гипотезасы жұмыс істемей қалады.

Сандық эксперимент көрсеткендей, бірінші режимнің фазалық жылдамдығы Пуассон υ қатынасына байланысты емес, сондай-ақ, сынаның шыңында әртүрлі бұрыштары бар дисперсиялық қисықтардың құрамы ұқсас қасиетке ие екендігін көрсетті. Фазалық жылдамдықтың шектікке қатынасы сынаның φ бұрышына байланысты емес. Екіншіден басталатын режимдерде, Пуассон коэффициентіне шектік жылдамдықтың тәуелділігі байқалады – $0 \leq \upsilon \leq 0,5$ екінші режимі үшін 9% реттілік. Тұтастай алғанда, шектік жылдамдық υ артуы күшейе түскен сайын, режим нөмірі соғұрлым үлкенірек болады.

Үшінші бөлім бойынша қорытынды

Жасалынған спектральды есеп өзіндік біріктірілетін емес. Ол үшін біріктірілген есеп құрылды. Біріктірілген жүйе шекаралық шарттарға сәйкес келетін қарапайым дифференциалдық теңдеуден тұрады. Лагранжа формуласының көмегімен биортогональдік түрінің шарты алынды.

ҚОРЫТЫНДЫЛАР

1. Серпімділік теориясының вариационды теңдеуі негізінде айнымалы қалыңдықтағы кеңейтілген пластиналарда толқындарды тарату мәселесінің математикалық тұжырымдамасы ұсынылды .Шекаралық шарттарға сай дифференциалдық теңдеулер жүйесі алынды.

2. Шекаралық жағдайдың кез-келген комбинациясы үшін шексіз пластинадағы толық толқын санының квадраты, айнымалы қалыңдығы анықталды.

3.Жасалынған спектральды мәселе өзіндік емес.Ол үшін өзіндік мәселе құрылды. Түйіндес жүйе шекаралық шарттарға сәйкес келетін қарапайым дифференциалдық теңдеулерден тұрады.Лагранж формуласын пайдалана отырып, формалардың биортогоналдылығы алынды.Қойылған мәселе сандық түрде С.К.Годунованың ортогональді өткізу әдісіне Мюллер әдісімен қоса шешілді.

4. Алынған есептеулерді талдау барысы Кирхгоффа-Ляв теориясының жалған кезіндегі аймағы тұрақты қалыңдық пластинасына төмен жиілікті диапазонмен шектелетіндігін көрсетті. Жоғары жиіліктер аймағында, режимнің толқын ұзындығы пластинаның қалыңдығына қарағанда салыстырмалы немесе аз болса, Кирхгова-Ляв теориясы сенімді нәтижелер алуға мүмкіндік бермейді.

5. Тұрақты көлденең қима жолағынан өзгеше қалыңдығы айнымалы пластиналарда моданың таралуының фазалық жылдамдығының шекті, шегі бар екендігі анықталды.

ПАЙДАЛАНҒАН ӘДЕБИЕТ

1. Айнола Л.А., Нигул У.К. Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек. – Изв. АН Эст. ССР, 1965, 14, №1, с. 3 – 63.
2. Айнола Л.Я. Уравнения теории типа Тимошенко упругих оболочек в усилиях и моментах. Изв. АН Эст. ССР. физ., матем., 1967, 16, №4, 463- 465 – РЖ Мех., 1968, 7В227.
3. Аки К., Ричард. Количественная сейсмология. Москва: Мир, 1983, том1. - 519с.
4.Аксентян О.К., Селезнева Т.Н. Определения частот собственных колебаний круглых плит. – Прикл.математика и механика, 1976, 40, вып.л., с.112-119.
5. Бабич В.М, Молотов И.А. Математические методы в теории упругих волн. – Механика деформирующего тверодого тела, ВИНИТИ, 1977, 10 с. 5-62.
6. Бердичевский В.Л. К динамической теории тонких упругих пластин. Изв. АН СССР, МТТ, 1973, №6.
7. Бозоров М.Б., Сафаров И.И.,Шокин Ю.И. Численное моделирование колебаний диссипативно однородных и неоднородных механических систем.- Новосибирск: Изд. СО РАН 1996.-189с.
8. Бобровницкий Ю.Н. Соотношение ортогональности для волн Лэмба-Акуст. Журн., 1972, 18, вып. С.513-515
9. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. – М.: Наука, 1973, 531 с.
10. Викторов И.А. Физические основы применения ультрозвуковых волн Рэлея в Лямба в технике. М.: Наука, 1966, -168с.
11.Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979, -384с.
12. Вовк А.Е. Тютекин В.В. Возбуждения нормальных волн в плоском упругом волноводе силами, заданными в его поперечном сечении. Тр. Акуст. Ин-та, 1969, вып.9 с.5-26.
13. Генкин М.Д., Бобровницкий Ю.И. Колебания упругой полосы // - В кн.: Методы виброизоляции машин и присоединенных конструкций. М.: Наука, 1975, с.12-42.
14.Годунов С.К. О численных решениях краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. – Успехи математических наук, 1061, Т.16, вып. 3, 171-174с.
15. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в других делах. – Киев: Наукова Думка, 1981, с. 284.
16. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Свойства гармонических волн, распространяющихся вдоль ребра прямоугольного упругого клина. – Акуст. ж., 1981, 27, №2, с. 206-212.
17.Дейвис Р.М. Волны напряжений в твердых телах. М.: Из-во иностр. Литер., 1961, -104с.
18.Жарий О.Ю., Улитко А.Ф. Распространения и отражения упругих импульсов в конических стержнях// Изд-во АН СССР, МТТ, 1985, №2, с.171-175.

19. Зильберглейт А.С., Нуллен Б.М. Обобщенная ортогональность однородных решений в динамических задачах теории упругости. –Докл. АНСССР, где, №2, с.333-335.
20.Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация . – М.: Высшая школа , 1976.-276с.
21.Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах. М.: Изд-во иностр. Литер., 1955, -192с.
22. Коненков Ю.К. О нормальных волнах при изгибных колебаниях пластинки. – Акуст. ж., 1960, т. 6, №1, с 57-64.
23.Коссович Л.Ю. Распространение сдвиговых и моментных волн в цилиндрической оболочке переменной толщины. – «Мех. деформируем. сред». Саратов, 1983, №8, с. 71-79.
24. Краснушкин П.Е. Вынужденные колебания бесконечной упругой полосы. –Докл. АН СССР, 1979, 244, №2, с.325-329.
25. Работнов Ю.И. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
26. Микер Т., Мейтцлер А. Волноводное распространение в протяженных цилиндрах и пластинах. – Физ. Акустика. Принципы и методы. Пер. с англ., 1966, 1 А, с. 140-203.
27.Митра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974, -327с.
28. Мяченков В.И., Григорьев И.В. Расчёт тонкостенных оболочечных конструкций на ЭВМ. – Справочник. М.: Машиностроение, 1981, 210 с.
29. Мартинчек Г. Динамическая вязкоупругость в техническом применении/ Успехи механики , том 6, выпю3/4, 1-28с.
30.Натиф А., Джонс Д., Хендерсон Дж. Демпфированив колебаний: Персанал-М, 1968, 448 с.
31. Новацкий В. Теория упроугости. – М.: Мир, 1975, 872 с.
32.Олинер. Волноводы для поверхностных акустических волн. –Тр. Ин-та инженеров по электронике и радиоэлектронике, 1976, 64, №с.51-55.
33.Оное, Макнивен, Миндилин. Дисперция осесимметричных волн в упругих стержнях. –Тр. Анер. О-ва инженеров – механиков. Прик. Механика, 1962, 62, №4, с.139-145.
34.Пирс Дж. Почти все о волнах. М.: Мир, 1976. -176с.
35.Работнов Ю.И. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
36. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966, 597 с.
37.Уайт. Поверхностные упругие волны. –То. Ин-та инженеров по электротехнике и радиоэлектронике. 1970, 58, №8, с.68-110.
38.Шемякин Е.И. Динамические задачи теории упругости и пластичности. Новосибирск: Изд-воНГУ, 1968. -337с.
39. Abramson U.N. Flexural waves in elastic beams of circular cross section. J. Acoust. Soc. Amer., 1957, vol. 29, №1.

40. Achenbach J.D., Keshava S/P/ Free waves in a plate supted by a sani-infinite continuum –Trans. ASME. Ser.E J.Mech, 1967, V.34. #2. p.398-404
41. Achenbach J.D., Keshava S.P., Herrmann G. Moving land plate resting on an clastic half spacc. –Trans. ASME. Ser. E, J. Appl. Mech, 1967, V.34.#4, p.910-914
42. Ash. E. A., De la rue R.M., Humphiyes R.F. Mlcrosound surface waveguides. IEEE trans. Microwave Theory Tech, 1969, MTT-17, p. 882-892.
43. Smith P.W. Minimum axial phase velocity in shells. J. aconst. Soc. Amer., 1958, 30, №2, 140-141 – РЖ Мех., 1958, №11, 13051.