

ҚОЖА АХМЕТ ЯСАУИ АТЫНДАҒЫ ХАЛЫҚАРАЛЫҚ ҚАЗАҚ-ТҮРІК  
УНИВЕРСИТЕТІ

ӘОЖ 517.968: 519.612

Қолжазба құқығында

**Әкімжанова Жайна Мұратқызы**

**ТОМОГРАФИЯ ЕСЕПТЕРІНДЕГІ БЕЛГІСІЗ ШЕКАРАНЫ  
АНЫҚТАУ КЕРІ ЕСЕБІН САНДЫҚ ШЕШУ  
АЛГОРИТМДЕРІН ҚҰРУ**

6M070500-Математикалық және компьютерлік модельдеу мамандығы  
бойынша техника ғылымдарының магистрі академиялық дәрежесін алу үшін  
дайындалған диссертация

Түркістан 2018

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫНЫҢ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ  
ҚОЖА АХМЕТ ЯСАУИ АТЫНДАҒЫ ХАЛЫҚАРАЛЫҚ ҚАЗАҚ-ТҮРІК  
УНИВЕРСИТЕТІ

ӘОЖ 517.968: 519.612

Қолжазба құқығында

● **Қорғауға жіберілді:**  
Математика кафедрасының  
меңгерушісі, техн.ғ.к.  
М.Д. Қошанова  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 ж.

**Магистрлік диссертация**

ТОМОГРАФИЯ ЕСЕПТЕРІНДЕГІ БЕЛГІСІЗ ШЕКАРАНЫ АНЫҚТАУ  
КЕРІ ЕСЕБІН САНДЫҚ ШЕШУАЛГОРИТМДЕРІН ҚҰРУ

мамандығы: 6М070500-Математикалық және компьютерлік модельдеу

Магистрант

\_\_\_\_\_  
(қолы)

Ж. М. Әкімжанова  
(аты-жөні, тегі)

Ғылыми жетекшісі,  
физика-математика  
ғылымдарының  
кандидаты,  
профессор міндетін  
атқарушы

\_\_\_\_\_  
(қолы)

М.А. Султанов  
(аты-жөні, тегі)

## МАЗМҰНЫ

	ҚЫСҚАРҒАН ШАРТТЫ БЕЛГІЛЕР, СИМВОЛДАР ЖӘНЕ ТЕРМИНДЕРДІҢ ТІЗІМІ.....	4
	АННОТАЦИЯ.....	5
	КІРІСПЕ.....	7
1	КЕРІ ЖӘНЕ ҚИСЫНСЫЗ ЕСЕПТЕР .....	
1.1	Кері және қисынсыз есептер және оларды шешу әдістері.....	13
1.1.1	А.И. Тихоновтың регуляризация әдісі.....	16
1.1.2	В.К. Ивановтың квазишешім әдісі.....	18
1.1.3	М.М. Лаврентьев әдісі.....	20
1.2	Томография есептері, қойылымдары, шешу әдістері.....	22
2	1-ШІ ТЕКТІ ФРЕДГОЛЬМЫНҢ ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕҢДЕУІ.....	
2.1	Фредгольмнің 1-ші текті интегралдық теңдеуі.....	32
2.2	Фредгольмнің 1-ші текті интегралдық теңдеуін Тихоновтың регуляризация әдісімен сандық шешу.....	40
3	ТОМОГРАФИЯ ЕСЕПТЕРІНДЕГІ БЕЛГІСІЗ ШЕКАРАЛАРДЫ АНЫҚТАУ КЕРІ ЕСЕПТЕРІНІҢ ЖУЫҚ АЛГОРИТМДЕРІН ҚҰРУ.....	
3.1	Бөлікті тұрақты жылуөткізгіштік үшін $R^2$ жағдайда белгісіз шекараны анықтау кері есебінің жуық алгоритмі.....	55
3.2	Бөлікті тұрақты жылуөткізгіштік үшін $R^3$ жағдайда белгісіз шекараны анықтау кері есебінің жуық алгоритмі.....	61
3.3	Потенциалды жалғастыру кері есебін сандық шешу.....	65
	ҚОРЫТЫНДЫ.....	74
	ПАЙДАЛАНҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ.....	75
	ҚОСЫМШАЛАР.....	79

## КІРІСПЕ

**Зерттеудің көкейкестілігі.** Қазіргі таңда белгісіз шекараларды анықтау кері есептері математикалық – физиканың көптеген есептерінде кездеседі. Олар: томография есептерінде, сәуленің кері есептерінде, геофизика саласында және басқа салаларда қолданыс тапқан. Мұндай есептерде өлшенген өріс берілгендері бойынша белгісіз біртекті емес ортаның түрлі сипаттамалары (геометриялық сипаттамалары, белгісіз шекараның формасын, физикалық сипаттамалар: заттың тығыздығын, қысымын және т.б.) табу қажет болады. Шетелдің көптеген елдерінде томографияның есептері аясында жұмыстар жасалып, жаңалықтар ашылып, күннен-күнге дамып келеді. Томографиялық әдістер қазіргі таңда медицина мен техниканың әртүрлі ғылым салаларында қолданылады. Мұның бастауы ретінде 1895 жылғы В.К.Рентгеннің иондалатын сәулелену кейіннен рентгендік деп аталған ғылыми жаңалығын айтуға болады. Бұл жаңалық ғылыми ұйымның қызығушылығын арттырып және 1896 жылдан бері сәулелену бойынша практикалық қолданылуының технологиялары ойластырылып, зерттеулер жүргізіле бастады. Соңғы жиырма жыл көлемінде рентгенологиялық әдістердің дамуы медицинадағы жаңа бағыттың, радиологияның қалыптасуына алып келді [1]. 20-ғасырдың бірінші жартысы рентгенографияның дамуымен қатар ультрадыбыстық толқындарды қолданатын құралдардың пайда болуымен сипатталады. 1940 жылы бірінші рет ультрадыбыстық дефектоскопия үшін коммерциялық аппарат жасалды [2]. 20-ғасырдың бірінші жартысы магниттік-резонанстық томографияның пайда болуына алып келген тағы да бір маңызды жаңалықпен ерекшеленеді: 1938 жылы И.Раби молекулалық сәуледегі ядролық магниттік резонанс құбылысын ашты, 1946 жылы Ф.Блох және Э.М.Парселл сұйықтықтағы және қатты денедегі ядролық магниттік резонансты параллель ашты [3].

Томография әдістеріндегі кейінгі прогресс компьютерлік технологиялардың пайда болуымен тығыз байланысты. 20 ғасырдың 60 жылдары медицинадағы қолданулар үшін алғаш рет ультрадыбыстық сканерлер жасалды [4]. Осы уақыттарда жан-жағынан рентгендік сәуле жіберу арқылы алынған рентген нәтижелерін өңдеуге және зерттелініп отырған объектінің ішкі құрылымы жайлы толығырақ мәлімет алуға мүмкіндік беретін компьютерлік томографияның концепциялары әзірленді. 1972 жылы компьютерлік томографтың алғашқы сынақтары жүргізілді [5]. Бір жылдан соң 1973 жылы П.Лотербур магниттік-резонанстық томография әдісі көмегімен алынған алғашқы кескіндерді жариялады [6]. Сол кезден бері томографиялық әдістердің көптеген жаңа түрлері пайда болды, бұл салада технологияларды жақсарту және олардың тиімділігін арттыру арқылы айтарлықтай ілгерілеу байқалды, томографиялық әдістердің қолданылу аймағы кеңейді. Томографияның қазіргі жағдайымен мысалға, [7, 8] кітаптар көмегімен танысуға болады.

Қазіргі таңдағы қарқынды түрде дамып келе жатқан томография түрлерінің бірі – электроимпеданстық томография болып саналады. Бұл әдіс бір уақыт мезетінде зерттелініп отырған объектінің беткі қабатындағы потенциал мен

электрлік тоғинің мәнін өлшеу арқылы объекттің ішіндегі заттың электрлік сипаттамаларын алуға мүмкіндік береді [9]. Электрлік өткізгіштік пен диэлектрлік өтімділік – электрлік сипаттамалары ретінде жүреді [10]. Бұл сипаттамаларды анықтау үлкен практикалық қызығушылық тудырады, өйткені объект ішіндегі өткізгіштік пен диэлектрлік өтімділіктің таралуын білу оның құрылымы жайлы қорытынды жасауға мүмкіндік береді.

Тау жыныстарының, минералдардың, пайдалы қазбалардың түрлері әртүрлі электрөткізгіштіктермен сипатталады [11] және бұл электроимпеданстық томографияның геофизикалық зерттеулерде қолданылуына мүмкіндік береді. Мысал ретінде, пайдалы қазбалардың орнын анықтау [12], ластану деңгейін зерттеу және топырақтағы ластану көздерін іздеуді алсақ болады [13].

Биологиялық тіннің әртүрлі және бірдей түрлері түрлі физиологиялық жағдайда да әртүрлі өткізгіштік және диэлектрлік өтімділік мәндеріне ие болады. Электрлік сипаттамалардың таралуын білу тіннің орналасуын анықтау және медициналық кескіндерді алуға мүмкіндік береді. Электроимпеданстық томографияның медициналық қолданулары жүректің жеңіл және физиологиялық белсенділік мониторингі, онкологиялық диагностика, ішек қуысындағы сұйықтықты анықтау, қатерлі ісік абляциясын жүргізу барысындағы визуализация [14] және т.б. қолданулар қатарын айтамыз.

Математикалық өңдеу және экспериментальды берілгендерді интерпретациялау – электроимпеданстық томография әдісінде маңызды болып саналады. Электроимпеданстық томографияда пайда болатын түрлі математикалық есептер бар. Белгілі ортаның моделі үшін сыртқы шекарадағы берілгендері бойынша өткізгіштіктің мәнін тіктеу қажет болатын көптеген математикалық есептер сызықтық емес және плохой обусловленностью болып сипатталады [15, 16]. Сондықтан да, оларды шешудің тиімді әдістерін құру үлкен қиындық тудырады және фундаментальды ғылыми зерттеу пәні қызметін атқарады.

Электроимпеданстық томография көмегімен алынған берілгендерді интерпретациялау үшін түрлі математиканың тура және кері есептері қолданылады. Электроимпеданстық томографияда пайда болатын көп зерттелінетін математикалық есептің қойылымын толығырақ қарастырайық.

$\Omega$  аймағындағы барлық нүктелер үшін  $\gamma(x, \omega) = \sigma(x) + i\omega\varepsilon(x)$  комплекстік өткізгіштік мағынасына ие  $\gamma(x, \omega)$  функциясы анықталған  $\Omega \subset R^d, d \geq 2$   $\Gamma$  шекаралы шенелген аймақ делік, мұндағы  $\omega$  – электр өрісінің жиілігі. Комплекстік өткізгіштік немесе адмиттанс –  $\sigma$  электр өткізгіштігі мен  $\varepsilon$  диэлектрлік өтімділіктің қасиеттерін біріктіретін физикалық шама [16].

Изотропты орта жағдайы және фиксирленген жиілік бойынша электрлік өріс үшін белгілі шектеулер арқылы [17] Максвелл теңдеуінен келесі теңдеуді алуға болады

$$\nabla(\gamma(x, \omega)\nabla\phi(x, \omega)) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

мұндағы,  $\phi(x, \omega)$  – скаляр потенциал. Бұл теңдеу үшін Дирихле шарты келесі түрде болады

$$\phi(x, \omega) = V(x, \omega), \quad x \in \Gamma. \quad (2)$$

Нейман шарты төмендегідей болады

$$\gamma(x, \omega) \frac{\partial \phi(x, \omega)}{\partial n} = I(x, \omega), \quad x \in \Gamma. \quad (3)$$

мұнда,  $n$  –  $\Gamma$  шекарасына нормаль, ал  $I(x, \omega)$  – сыртқы шекарадағы электр тоғинің таралуын білдіретін функция. (1)-(3) теңдеулер үшін келесі есеп қойылады. Дирихле-Нейман операторын біле отырып, белгісіз  $\gamma(x, \omega)$  функциясын анықтау керек.

$$\Lambda_{\gamma} V(x, \omega) = \gamma(x, \omega) \frac{\partial \phi(x, \omega)}{\partial n},$$

барлық  $V(x, \omega)$  функциялар үшін. Мұндағы  $\phi(x, \omega)$  – (1), (2) шекаралық есептер шешімі.

Көрсетілген математикалық есеп алғаш рет А.Кальдеронның жұмысында қарастырылған [18]. Соңғы онжылдықта мұндай кері есептер үшін теориялық зерттеулер белсенді түрде жүргізіле бастады, функцияның кең классы үшін екіөлшемді жағдайда [19] және үшөлшемді кеңістікте шешімі жалғыз болатындығы дәлелденді.

Кейбір нәтижелер А.Кальдерон қалыптастырған математикалық есептерді шешудің сандық әдістерін әзірлеу барысында алынды. Алғашқы алгоритмдер кейбір есептерді шешу үшін теңдеуді сызықтандыруға негізделген. Бұл жағдайда статикалық жағдайы қарастырылды ( $\omega = 0$ ) және бастапқы теңдеу сызықтандырылу барысында өткізгіштік тұрақты шамаға жақын болатындығы жайлы болжам жасалды. Бұл принципке негізделген әдістер [20] жұмыстарда баяндалған.

Кальдерон есебін сандық шешудің басқа жолы зерттелініп отырған аймаққа дейінгі өткізгіштікті тіктеу болып табылады. Сыртқы шекарадағы өткізгіштіктің мәні белгілі деп есептелінді, өйткені өткізгіштікті өлшеу көптеген бағдарламаларда қиындық тудырмайды. Өткізгіштікті қабатты тіктеу әдістерінің қолданулары [21, 22] жұмыстарда қарастырылған.

Зерттелініп отырған аймақтағы өткізгіштік тұрақты шамадан тек ішкі аймақтың ақырғы бөлігінде ғана айырмашылығы бар болған есеп үшін сандық шешудің тиімді әдісі қалыптастырылды, мұндағы өткізгіштік – тұрақты шамадан өзгеше болып келетін үзіліссіз функция. Бұл жағдай үшін фиксирленген нүкте аймағы араласқан бөлікке немесе өткізгіштік тұрақты

болған аймаққа тиісті екенін анықтауға мүмкіндік беретін алгоритм әзірленген. Тиістілік критерийі бастапқы ақпарат ретінде қолданылған  $(\Lambda_\sigma)^{-1}$  Нейман-Дирихле операторының қасиеттеріне негізделген. Осы тәсілге негізделген әдістер [23, 24] жұмыстарында қарастырылған.

Сандық шешу әдістерінің кең класын түрлі итерациялық алгоритмдер құрайды. Көп жағдайда бастапқы есеп кіші квадраттар есебіне немесе вариациялық есепке келтіріліп және есеп Ньютон әдісінің көмегімен шешілді.

А.Кальдерон қалыптастырған математикалық есепте Дирихле-Нейман операторын толық білу – бастапқы мәлімет қызметін атқарады. Электроимпеданстық томографияны практикалық қолдану кезінде эксперименттерінің ақырғы санымен жүргізілуі мүмкін.

Мұндай қойылымдағы есептерді тиімді шешу үшін шешімі жайлы априорлық мәлімет қолданылады және  $\gamma(x, \omega)$  бастапқы функция тиесілі болған класқа қосымша шектеулер қойылады. Мысал ретінде,  $\gamma(x, \omega)$  ақырлы санның әр түрлі мәнін қабылдайтын, бөлікті-үзіліссіз функция болатын бөлікті-үзіліссіз өткізгіштікті ортаны қарастыруды келтірсек болады. Жоғары дәрежедегі бөлікті-үзіліссіз өткізгіштікті ортаның моделі электроимпеданстық томографияның көптеген қосымшаларымен сәйкес келеді, мұнда нақты дәлдікпен бөлікті-біртекті болып есептелінетін объекттің ішкі құрылымын идентификациялау қажет. Зерттелініп отырған объекттің ішінде бөлікті-үзіліссіз өткізгіштікті мағынасын қабылдайтын қолданбалы есептің кең класы үшін априорлар белгілі. Мысал ретінде, электроимпеданстық томографияны адамның ішкі мүшелерінің түрлі пішіндерін анықтауда қолдануын айтсақ болады [25].

Бөлікті-үзілісті өткізгіштікті және сыртқы шекарадағы ақырлы санды өлшеуге арналған математикалық есептерге теориялық зерттеулер жүргізудегі маңызды нәтижелер:

- жазықтық жағдайындағы көпбұрыш формасына ие араласу үшін шешімнің жалғыздығының дәлелденуі [26];
- үшөлшемді кеңістіктегі шарлар үшін және белгілі кластағы функцияның екіөлшемді есеп үшін шешімнің жалғыздығы жайлы локальды теореманың дәлелденуі.

Берілген есептің сандық шешу әдісі белгісіз шекараның ақырлы сандар параметріне тәуелді функциялар класына тиесілі жайлы болжамдармен құрылған. Екіөлшемді есепті шешудің итерациялық әдістері [27] жұмыстарында ұсынылған. Сыртқы шекарадағы бір өлшеу жағдайындағы бөлікті-үзілісті өткізгіштікті екіөлшемді және үшөлшемді есептерде араласу өлшемін бағалауға, орналасуын анықтауға [28] мүмкіндік беретін алгоритмдер әзірленді.

Сондықтан да ЭИТ-да сандық әдістері және алгоритмдерін құрудың теориялық, практикалық маңыздылығы жоғары деуге болады.

**Нәтижелердің ғылыми жаңалығы.** Бөлікті тұрақты жылуөткізгіштік үшін  $R^2$  жағдайда және де  $R^3$  жағдайда белгісіз шекараны анықтау кері есебінің жуық алгоритмі құрылған.

**Жұмыстың мақсаты мен міндеті.** Томография есептеріндегі белгісіз шекаралық анықтау кері есебін сандық шешу алгоритмін құру. Жобада қойылған мақсатқа жету үшін келесі негізгі міндеттерді шешу қажет:

1. Кері және қисынсыз есептер және оларды шешу әдістерін зерттеу;
2. Фредгольмнің 1-ші текті интегралдық тендеуін Тихоновтың регуляризация әдісімен сандық шешу;
3. Бөлікті тұрақты жылуөткізгіштік үшін  $R^2$  жағдайда және де  $R^3$  жағдайда белгісіз шекараны анықтау кері есебінің жуық алгоритмі құру.

**Зерттеу әдістері:** Математикалық модельдерді құру принциптері, есептеу математикасының әдістері, математикалық-физиканың тендеулерін шешу әдістері, шекаралық - интегралдар әдісі, комплекс анализ әдістері, эллиптік текті тендеулерді шешудің жалпы әдістері және т.б.

**Магистранттың жеке үлесі.** Есептердің қойылымы магистранттың ғылыми жетекшісіне тиісті. Бөлікті тұрақты жылуөткізгіштік үшін  $R^2$  жағдайда белгісіз шекараны анықтау кері есебінің жуық алгоритмін құру негізгі ғылыми тұжырымдарды қорытындылау магистранттың өз бетінше жан-жақты ізденістері мен зерттеулері нәтижесінде алынған. Фредгольмнің 1-ші текті интегралдық тендеуін Тихоновтың регуляризация әдісімен сандық шешу алгоритмдердің дұрыстығын есептеу тәжірибелерінде тексеру жұмыстарын, нәтижелерді талдау және визуальдау, алынған нәтижелерді баспада жариялау мен шығару, конференцияларда баяндамалар жасау жұмыстарын магистрант өзі орындаған.

**Жұмыстың жарияланымдары.** Жүргізілген ғылыми зерттеу жұмыстары бойынша «Условная устойчивость решения трехслойной разностной схемы для некорректной задачи Коши» атты тақырыптағы мақала 2017 жылдың 20-29 қыркүйек айының айында өтілген «Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий» атты халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференция материалдарында және алынған зерттеу нәтижелері бойынша «Численный алгоритм приближенного решения для обратной задачи восстановления границы неоднородности» тақырыбында мақала дайындалып, Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті «Физика-математика ғылымдары», Хабаршысы журналының №3 санында, «Численный алгоритм решения краевой задачи для эллиптического уравнения» атты тақырыбындағы мақала М.Әуезов атындағы ОҚМУ «Ғылыми еңбектері» журналының № 4 (44) санында жарық көрді.

**Диссертацияның құрылымы.** Диссертация анықтамалар мен белгілеулерден, кіріспеден, үш бөлімнен, қорытындыдан, пайдаланылған әдебиеттер тізімінен және қосымшадан тұрады.

**Диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері:**

Магистрлік диссертациялық жұмыста төмендегідей зерттеу жұмыстары қарастырылған және негізінен мынадай нәтижелер алынған.



Кіріспе бөлімде томография есептерінің сипаты, қойылымдары мен түрлеріне шолу жұмыстары жүргізілген.

Бірінші тарауда томографияда басты мәселе есептелетін томографиялық берілгендерді, яғни проекциялық берілгендерді алу тәсілдері мен олар арасындағы ерекшеліктер, Радон түрлендіруі қарастырылған. Томография есептерінің кері және қисынсыз есеп болатындығы белгілі. Сондықтан, кері және қисынсыз есептер және оларды шешудің сандық әдістері қарастырылған.

Екінші тарауда Фредгольмнің бірінші текті интегралдық теңдеуін сандық шешу қарастырылады. Жалпы айтқанда, қисынсыз есепке мысал ретінде Фредгольмнің бірінші текті интегралдық теңдеуін айтып өтсек болады. Осы тарауда Фредгольмнің I-ші текті интегралдық теңдеуін белгілі Тихоновтың регуляризация әдісінің көмегімен сандық шешу мәселесін қарастыратын боламыз. Сандық шешу жолдары Matlab компьютерлік математикалық ортасында жүргізілетін болады.

Үшінші тарауда сыртқы шекарадағы бір өлшегендегі жазықтық жағдайындағы электроимпеданстық томография есептерін шешудің үш түрлі сандық шешу әдістері және математикалық қойылымы келтірілген. Алғашқы екі әдіс итерациялық болып келеді және қойылған есеп үшін теңдеулер жүйесінің түрлі интерпретациясына негізделген. Үшінші әдіс берілген кері есепті екі ішкі есепке бөлу және оны кезектеп шешуге негізделген. Бұл тарауда электроимпеданстық томография есептерінің шешімі үшін ұсынылған сандық шешу әдістері бойынша есептеу эксперименттерінің нәтижелері көрсетілген. Кері есепті шешуде қолданылатын негізгі математикалық аппараттың бірі бұл - Дирихле-Нейман және Нейман-Дирихле шекаралық операторлары. Кері есепті шешу үшін Дирихле-Нейман және Нейман - Дирихле операторларына қатысты теориялық зерттеулерді қарастырған [29].

## 1 КЕРІ ЖӘНЕ ҚИСЫНСЫЗ ЕСЕПТЕР

### 1.1 Қисынсыз және кері есептер

Қисынсыз есептер теориясы - соңғы уақыттағы екі онжылдықта математика бағытындағы ең интенсивті дамуының қолданбалы шешімі қиын болған әр түрлі салалардағы физикалық құрылғылардың интерпретациялық, геологиялық, астрономиялық бақылаулар, сонымен қатар, оқу үрдісін жоспарлау, басшылық жасау және де автоматты жүйе синтезі арқылы байланыстыруы болып табылады. Қисынсыз есептер теориясының дамуы заманауи есептеу техникалары көмегімен жүзеге асырылуда.

Қисынсыз есептер теориясы түрлі бөлімдерде, нақтырақ айтсақ, дәстүрлі математикадағы функция теориясы, функционалды анализ, сонымен қатар, дифференциалды теңдеу және сызықты алгебра бөлімдерінде де қарастырылуы мүмкін.

Қисынды есеп қойылым түсінігінің мағынасы француздың атақты математигі Адамардың математикалық физика теңдеулері үшін қойылған шеттік есептердің қойылымдарымен байланысты. Адамар пікірі бойынша шеттік есептердің шешімдері үзіліссіздік шартын қанағаттандырмағандықтан физикалық мағынасы жоқ, сондықтан осы есептерге мысалдар келтіріп, қарастырған.

Адамардың бұл пікірі уақыт өте қате пікір деп танылды. Адамардың айтуы бойынша қисынсыз есептер жеке дара қарастырылған, Адамар айтып өткен математикалық физика есептерінің шын мәнінде физикалық тұрғыдан мағынасы бар болып шықты. Математиканың басқа тарауларында да қисынсыз есептерді тәжірибе барысында қолданылуында біршама қиындықтардың кездесетіні белгілі болды. Математикалық анализдегі классикалық есептер ретінде дифференциалды есептерді (тәжірибелік мәліметтермен өңделген жағдайда ғана) қарастыруға болады.

Қисынсыз есептердің де физикалық мағынасы болатындығын және осындай есептерге келтірілетін үдерістер мен құбылыстар әртүрлі салаларда, көп жағдайда, физика, механика, геофизика және басқа да көптеген ғылым салаларында кездесетіндігін алғаш болып негіздеген атақты математик, академик, ғалым А.Н.Тихонов болды [30, 31]. Қазіргі таңда кері және қисынсыз есептер теориясының әдістері ғылым, техниканың көптеген салаларында тиімді қолданыс табуда.

Біз қарастыратын томография есептері – кері қисынсыз қойылған есептер болатындықтан, мұндай есептердің қойылымдарына және оларды шешу әдістеріне толығырақ тоқталып өтетін боламыз.

XX ғасырдың басында атақты математик Адамардың ықпалымен математикалық физиканың қисынды есептерінің қойылымы енгізілді.

Математикалық физиканың қисынды қойылған есептері келесідей шарттарды қанағаттандырса, егер:

- 1) берілген есеп шешімі бар болса;

2) берілген есеп шешімі жалғыз болса;

3) берілген есеп шешімі бастапқы берілгендерден үзіліссіз тәуелсіз болса.

Тұжырымдалып өтілген шарттар нақтылықты талап етеді. Есептің берілгені және шешімі функционалды кеңістіктің бір элементі түрінде қарастырылады, ал қисынды есептер:

А. Есеп шешімі бар және де барлық берілгендер тұйық кеңістік,

сызықты нормалды кеңістік, сонымен қатар  $C^k, L_p, H_p^l, W_p^l$  түрдегі кеңістік типіне жатады.

Б. Қандай да бір кеңістікте есеп шешімі жалғыз болады.

В. Бастапқы берілгендердің кіші өзгерулеріне сәйкес шешімнің де кіші өзгерулері тура келеді.

Қисынды есептің түсінігін тұжырамдай отырып, Адамар қисынды болмайтын есепке Лаплас теңдеуіне қойылған Коши есебін мысал ретінде келтіріп өтті.

Лаплас теңдеуіне қойылған Коши есебінің шешімі жалғыз, өйткені, бұл теңдеу қисынды есеп шарттарының екінші шартын қанағаттандырады. Бірақ, Лаплас теңдеуіне қойылған Коши есебінде қисынды есеп шарттарының үшіншісі, яғни орнықтылық шарты орындалмайды.

Есептің қарапайым берілуімен шектелмейк:

$$u = u(x, y), \quad \Delta u = 0, \quad x > 0, y > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} u(x, 0) = \alpha \sin nx, \quad x \in [0, \pi]$$

Коши есебі келесідей шешімге ие болады:

$$u(x, y) = \frac{\alpha}{n} \operatorname{sh} ny \cdot \sin nx$$

Жоғарыда аталып өтілген функционалды кеңістіктер жұбы және кез-келген  $\varepsilon > 0, c > 0, y > 0$  үшін төмендегі теңсіздік орындалады және де сондай  $\alpha, n$  табу мүмкін болады:

$$\|\alpha \sin nx\| < \varepsilon, \quad \left\| \frac{\alpha}{n} \operatorname{sh} ny \cdot \sin nx \right\| > c.$$

Осы бағалаулардан көріп тұрғанымыздай, бастапқы берілгендер нормасының кіші болуына қарамастан, шешімнің ауытқуы үлкен (шенелмеген). Ал бұл есептің қисынсыз есеп болатындығын көрсетеді.

Келесі ұқсастық жағдайы тәуелсіз үзіліссіз шешім кері уақытпен жылуөткізгіштік теңдеу Коши есептерінде кездеседі:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x).$$

Лаплас теңдеуіне қойылған Коши есебі – қисынсыз, өйткені Коши есебі уақыт талабына сәйкес үдерістерді сипаттауға тура келсе, ал эллиптикалық теңдеулер стационар үдерістерді және физикалық өрістерді сипаттауға сәйкес келеді. Уақытты керілейтін жылуөткізгіштік теңдеуіне қойылған Коши есебі қисынсыз және де термодинамиканың екінші бастамасымен тығыз байланысты.

Лаплас теңдеуіне қойылған Коши есебі, сонымен қатар басқа да осы түрдегі есептер арқылы Адамардың пікірі бұрыс деп танылды. Қисынсыз есептердің классикалық маңыздылығы математикалық физикалық сипаттауларда кездескен. Қисынсыз есептер теориясына математикалық анализдің классикалық нәтижелері ретінде жиырмамыншы ғасырдың екінші жартысындағы дифференциалдық теңдеулерді айтып өтуге болады. Қисынсыз есептердің көптеген сұрақтарын жүйелі түрде зерттеу жақында ғана қолданысқа енді.

Жиырмамыншы ғасырдың 30-40 жылдары геофизиктер Лаплас теңдеуіне қойылған Коши есебіне әл келетін және интерпретациялы гравитациялық, магниттік ауытқу есептерінің арасында байланыс бар екендігін көрсетті. Соңғы кездері, математиканың қисынсыз есептерге байланысты сипаттаулары, физиканың көптеген құбылыстары классикалық тұрғыдан алғанда қисынды деп танылды.

Шеттік есептерді зерттеу барысында математикалық физика теңдеулері – интегралды теңдеулер жүйесі болды. Классикалық тұрғыда қисынды есептер түсінігі екінші ретгі Фредгольмның интегралды теңдеулеріне ұқсас болып немесе сингулярлы интегралды теңдеулерге сәйкес болып келеді. Бірінші текті интегралдық теңдеулер қисынсыз есептер болып табылады. Лаплас теңдеулеріне және жылуөткізгіштік теңдеулеріне қойылған Коши есебі уақытты керілеу арқылы төмендегідей түрде сипатталады:

$$\frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)}{y^2 + (x - \xi)^2} d\xi = f(x), \quad \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2}{4t}\right] \varphi(\xi) d\xi = f(x)$$

1-ретті интегралды теңдеулерді операторлық теңдеулер түрінде қарастыруға болады. Ал 1-ретті операторлық теңдеу деп төмендегідей түрдегі теңдеуді айтамыз:

$$Ax = f,$$

Егер үлгі физикалық құбылыстағы математикалық үлгілеу байланысында болса, онда теңдеудің оң жағы физикалық приборлар негізінде айқындалады. Физикалық приборлардың кемшілік тұсы бар болғандықтан, теңдеудің оң жағын абсолютті нақты бола алмайды. Бізге төмендегі теңсіздікті қанағаттандыратын  $f_\varepsilon$  элементі берілді деп қарастыруға болады:

$$\|f - f_\varepsilon\| \leq \varepsilon,$$

Математикалық анализдің дифференциалдық есептерінің классикалық есептерін қарастырайық. Егер функция параметрге тәуелді формула түрінде, интегралды немесе суперпозициялы элементарлы функция ретінде берілсе, онда дифференциалдың классикалық ережесі де формула түрінде беріледі. Егер функция эксперименталды мәліметтер негізінде, кесте немесе сызба күйінде берілген болса, онда туындыны табу қиындық тудырады. Осындай жағдайларда дифференциалды есептер классикалық түсінік бойынша қисынсыз есептер болып табылады.

1943 ж. А.Н. Тихонов қисынсыз есептердің қойылымы жайында біршама түсініктер беріп өтті. Бұл өз кезегінде, көбінесе, геофизиктерді және геофизикалық өлшеулермен жұмыс жасап жүрген мамандарды қызықтырды. Геофизика саласын зерттеуге арналған көптеген ғылыми еңбектерде осы жұмыстарға тікелей сілтеме беріліп отырды. 1950 ж. қисынсыз есептердің түпкілікті дәрежеде дамуы қолға алына бастады. Қисынсыз есептердің дамуы ЭЕМ дамуымен тікелей байланыстырылды. Қисынсыз есептер теориясының дамуында А.Н. Тихоновтың 1960 жылында енгізген регуляризация түсінігі маңызды роль атқарды.

### 1.1.1 А.И. Тихоновтың регуляризация әдісі

Қисынсыз есептерді жуықтап шешудің әдістерінің бірі ретінде - бастапқы берілген есепті қандай да бір жол арқылы қоздырып, осыған жақын болған басқа есеппен, қисынды болған есеппенен, алмастыру болып табылады. Осы секілді әдістердің көмегі арқылы әр түрлі регуляризацияның алгоритмдері алынады. Жалпы теңдеу мысалында орнықты болмаған есептерді шешу әдістері төменде қысқаша қарастырылып өтілген. Біз бастапқы есепті қоздырып, содан кейін вариациялық есепке өту арқылы қисынды есепке өте аламыз.

Келесі кезекте, Тихонов ұсынып өткен қисынсыз есептерді жуықтап шешудің әдісін қарастыратын боламыз. Бұл әдістің негізгі идеясы бастапқы берілген есептегі функционалды минимумдауға негізделіп және қосымша стабилизациялаушы мүше пайда болады.

Келесі берілген бірінші текті теңдеуді қарастырайық:

$$Au = f \quad (1.1.1.1)$$

Берілген теңдеудегі оң жақ мүше және шешімнің өзі қандай да бір нормаланған кеңістікке тиісті болып табылады. Теңдеудегі операторды сызықтық оператор ретінде қарастырамыз.  $H$  гильберт кеңістігі болсын делік және де  $u \in H, f \in H, A: H \rightarrow H$ .

Мұндағы,  $(u, v)$ -  $u, v \in H$  - берілген элементтердің скаляр көбейтіндісі, ал  $\|u\|$  -  $u, v \in H$  элементтердің нормасы.  $A$  операторы – өз-өзіне түйіндес оператор, оң, шексіз және де оның  $D(A)$  анықталу облысы  $H$  кеңістігінде жататын болсын. Түсінікті болу үшін  $A$  операторының спектрі – дискретті және  $k \rightarrow \infty$  ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq \dots > 0$ ) нөлге ұмтылатын меншікті мәндерден тұрады деп есептейік. Ал, оның тиісті меншікті функциялары  $\{\omega_k\}$ ,  $\omega_k \in D(A), k = 1, 2, \dots$ , ортонормаланған және  $H$  - кеңістігінде толық анықталған. Сондықтан да, әрбір  $v \in H$  үшін

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} v_k \omega_k, \quad v_k = (v, \omega_k)$$

жоғарыдағы орынды болады.

Қолданбалы зерттеулердегі ауытқулары бар кіріс мәліметтері берілген жағдайлар жиі кездесіп жатады. Осындай, жалпы жағдайды келесі түрде үлгілейміз. (1.1.1.1) теңдеуінің оң жағы дауытқуымен берілген деп есептейміз.  $f$  орнына бізге

$$\|f_\delta - f\| = \delta \quad (1.1.1.2)$$

шарты орындалатындай  $f_\delta$  белгілі болсын делік.

Жалпы жағдайда, біз (1.1.1.1) есебіне негізделетін едік, оларда жуық берілген тек оң жағы емес, сонымен қатар,  $A$  операторы да түгел берілген.

(1.1.1.2) теңдеуінің оң жағы  $f_\delta$  жуық берілген теңдеудің жуық шешімін анықтау есебі қойылады. Осы жуық шешімді  $u_\alpha$  арқылы белгілеп алып және  $\alpha$  параметрін теңдеудің оң жағының ауытқу деңгейімен байланыстырған дұрыс, яғни,  $\alpha = \alpha(\delta)$ .

### 1.1.2 В.К. Ивановтың квазишешім әдісі

$A$  – жеткілікті дәрежеде үзіліссіз оператор болсын. Төмендегі формула бойынша  $f$  – тің кішкене өзгерісі жуық шешімінің орнықтылығын құру

$$q = A^{-1}f$$

мүмкін, егер  $q$  келесідей компактте ізделінетін болса  $M \subset Q, f \in A(M) \subset F$ .  $q = A^{-1}f$  түрінде жуық шешімді іздеу үшін  $f \in A(M)$  болуы басты шарт екеніне назар аударайық, басқа жағдайда  $A^{-1}f$  өрнегінің мағынасы болмайтын еді. Алайда, біріншіден  $f \in A(M)$  тәуелді болуы қиын болып келеді, екіншіден  $f \in A(M)$  болсада, қате өлшеу нәтижесінде  $f$  мәні  $A(M)$  жиынында жатпауы да мүмкін.  $Aq = f$  теңдеу шешімінің жоқ болу қиындығын жою үшін,  $Aq = f$  теңдеуінің шешімін жалпылайтын квазишешім ұғымын енгіземіз.

Анықтама 1.  $M \subset Q$  жиынындағы  $Aq = f$  теңдеуінің  $q_k$  квазишешімі деп алшақтықтың төменгі шегіне жететін  $q_k \in M$  элементті атаймыз

$$\rho_F(Aq_k, f) = \inf_{q \in M} \rho_F(Aq, f)$$

Егер  $M$  – компакт болса, онда барлық  $f \in F$  үшін шешім бар болады, ал егер сонымен қатар  $f \in A(M)$  болса, онда  $q_k$  квазишешімі дәл шешімге сәйкес келуі мүмкін. Квазишешім жалғыз және үзіліссіз  $f$  оң жағына тәуелді болатын жеткілікті шартын көрсетуге болады.

Анықтама 2.  $h$  элементі және  $G$  жиыны  $F$  кеңістігіне тиісті болсын делік.  $g \in G$  элементі  $G$  – дағы  $h$  элементінің проэкциясы деп аталады, егер

$$\rho_F(h, g) = \rho_F(h, G) := \inf_{p \in G} \rho_F(h, p)$$

$G$  – дағы  $h$  элементінің  $g$  проэкциясы –  $g = P_G h$  теңдеуі арқылы белгіленеді.

Теорема 1.  $Aq = f$  теңдеуінің квазишешімі  $B(0, r)$  жиынында төмендегі формуламен өрнектеледі.

$$q_k = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n} \varphi_n, & \text{егер } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2}{\lambda_n^2} < r^2, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n + \beta} \varphi_n, & \text{егер } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2}{\lambda_n^2} \geq r^2. \end{cases}$$

мұндағы,  $\beta$  – теңдеудің түбірі

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2}{(\lambda_n + \beta)^2} = r^2$$

Дәлелденуі.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2}{\lambda_n^2} < r^2$  жағдайында  $B(0, r)$ -ға  $\rho_F^2(Aq, f) := J(q) = \langle Aq - f, Aq - f \rangle$  функционалына минимизациялаушы квазишешімін Эйлер-Лагранж теңдеуін шешу арқылы алуға болады

$$A^* Aq = A^* f \quad (1.1.2.1)$$

Теңдеудің шешімін келесі қатар түрінде іздейтін боламыз

$$q_k = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \varphi_n$$

Осы қатарды (1.1.2.1) теңдеуіне қою арқылы  $A^* f$  үшін

$$A^* Aq_k = \sum_{n=1}^{\infty} q_n A^* A \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \lambda_n \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n$$

Яғни  $q_n = f_n / \lambda_n$  болады, өйткені  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2}{\lambda_n^2} < r^2$  онда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n} \varphi_n \in B(0, r)$   $B(0, r)$ -да  $J(q)$  функционалын минимумдайды.

Егерде  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2}{\lambda_n^2} \geq r^2$  болса, онда  $q_k$  квазишешімі  $B(0, r)$  тиісті екенін ескере отырып  $\|q\|^2 = r^2$  сферасында  $J(q) = \langle Aq - f, Aq - f \rangle$  функционалын минимумдау керек. Лагранждың белгісіз көпмүшелер әдісіменен бұл есеп функционалдың экстремумын табуға алып келеді

$$J_{\alpha}(q) = \langle Aq - f, Aq - f \rangle + \alpha \langle q, q \rangle$$

$J_{\alpha}$  функционалының минимумын табу үшін Эйлердің сәйкес теңдеуін шешу керек

$$\alpha q + A^* Aq = A^* f$$

мұнда  $q_k = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \varphi_n$  және  $A^* f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n$  қою арқылы  $q_n = f_n / (\alpha + \lambda_n)$  табамыз  $\alpha$  параметрін  $\omega(\alpha) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2}{(\alpha + \lambda_n)^2} = r^2$  шартына эквивалентті болып келетін  $\|q\|^2 = r^2$



шарты арқылы анықтаймыз. Теңдеудің  $\beta$  түбірі ретінде  $\omega(\alpha) = r^2$  алу арқылы біз теореманы дәлелдеуді аяқтаймыз.

### 1.1.3 М.М. Лаврентьев әдісі

Егер  $Aq = f$  теңдеуіндегі жуық берілген  $f_\delta$  оң жағы  $A(M)$  жиынына тиісті болмаса, онда  $Aq = f$  теңдеуін осы теңдеуге жуық теңдеуге алмастыруға болады

$$\alpha q + Aq = f_\delta, \quad \alpha > 0, \quad (1.1.3.1)$$

$q_{\alpha\delta}$  бұл есеп қисынды болады. Бұл теңдеудің шешімі көп жағдай үшін бар және  $Aq = f$  теңдеуінің  $q_T$  дәл шешіміне ұмтылады, мұнда  $\alpha \rightarrow 0$  және сәйкес  $\delta$  қателігі мен  $f$  нөлге ұмтылады.

$Q$  және  $F$  - сепарабельді гильберттік кеңістік болсын делік.  $Q = F$ ,

$A$  - сызықты, жеткілікті дәрежеде үзіліссіз, оң және өз-өзіне түйіндес оператор.  $Aq_T = f$  болатындай  $f \in F$  үшін  $q_T$  шешімі бар болсын делік. Онда  $\alpha q + Aq = f$  теңдеуінің  $q_\alpha = (\alpha E + A)^{-1} f$  шешімін  $Aq = f$  теңдеуінің жуық шешімі деп есептейміз.  $\|f - f_\delta\| \leq \delta$  шартын қанағаттандыратындай  $f$  қателікпенен берілгені белгілі болса, яғни  $f$  орнына  $f_\delta$  элементі белгілі болса, онда төмендегідей болжам жасаймыз

$$q_{\alpha\delta} = (\alpha E + A)^{-1} f_\delta$$

(1.1.3.1) теңдеуі  $R_\alpha = (\alpha E + A)^{-1}$ ,  $\alpha > 0$  регуляризацияланушы операторлар үйірін анықтайды. Бұл сұрақты толығырақ қарастырайық.  $\{\varphi_k\}$  - толығымен ортонормироваланған өздік функцияларының тізбегі,  $\{\lambda_k\}$  ( $0 < \dots \leq \lambda_{k+1} \leq \lambda_k \leq \dots \leq \lambda_1$ ) -  $A$  операторының өздік мәніне сәйкес тізбек.

$$Aq = f \quad (1.1.3.2)$$

теңдеуінің  $q_T$  шешімі бар болсын делік.

Төмендегі

$$q_T = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \varphi_k, \quad q_k = \langle q_T, \varphi_k \rangle \quad (1.1.3.3)$$

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k, \quad f_k = \langle f, \varphi_k \rangle$$

қатарын (1.1.3.2) қою арқылы  $q_k = f_k / \lambda_k$  болатынын және төмендегі орындалатынын көре отырып қорытындылаймыз.

$$q_T = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k} \varphi_k$$

$q_T \in Q$  болғандықтан

$$q_T = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{f_k}{\lambda_k} \right)^2 \quad (1.1.3.4)$$

қатары жинақталады. Қосымша теңдеуді қарастырайық

$$\alpha q + Aq = f \quad (1.1.3.5)$$

Алдыңғы аналогтар бойынша (1.1.3.5) теңдеуінің  $q_\alpha$  шешімі төмендегідей түрде болатынын байқаймыз

$$q_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\alpha + \lambda_k} \varphi_k \quad (1.1.3.6)$$

$f_k = q_k \lambda_k$  екендігін ескере отырып, келесі айырманы бағалаймыз

$$q_T - q_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \varphi_k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k \lambda_k}{\alpha + \lambda_k} \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left( q_k - \frac{q_k \lambda_k}{\alpha + \lambda_k} \right) \varphi_k = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k}{\alpha + \lambda_k} \varphi_k$$

Бұдан,

$$\|q_T - q_\alpha\|^2 = \alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k^2}{(\alpha + \lambda_k)^2} \quad (1.1.3.7)$$

келіп шығады.

Енді  $\lim_{\alpha \rightarrow +0} \|q_T - q_\alpha\| = 0$  болатындығын көрсету қиын емес. Шыныменде,  $\varepsilon$  – оң сан, (1.1.3.7) қатарды бағалаймыз

$$\alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k^2}{(\alpha + \lambda_k)^2} = \alpha^2 \sum_{k=1}^n \frac{q_k^2}{(\alpha + \lambda_k)^2} + \alpha^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{q_k^2}{(\alpha + \lambda_k)^2} \leq \frac{\alpha^2}{\lambda_n^2} \|q\|^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} q_k^2 \quad (1.1.3.8)$$

$\sum_{k=1}^{\infty} q_k^2$  қатары жинақталатын болғандықтан (1.1.3.8) оң жағындағы екінші қосылғышы  $\varepsilon/2$  болатындай  $\varepsilon/2$  үшін  $n$  нөмерін табуға болады. Осыдан кейін

Бірінші қосылғышта  $\varepsilon/2$  болатындай  $\alpha > 0$  таңдауға болады. Бұдан  $\lim_{\alpha \rightarrow +0} \|q_T - q_\alpha\| = 0$ .

Келесі кезекте жуық берілгендері бойынша

$$Aq = f_\delta \quad (1.1.3.9)$$

мұндағы  $\|f - f_\delta\| \leq \delta$  болатындай есепті және (1.1.3.1) регуляризацияланған есепті қарастырамыз:

$$\alpha q + Aq = f_\delta$$

$f_{\delta,k} = \langle f_\delta, \varphi_k \rangle$  болсын. Онда (1.1.3.1) теңдеуінің  $q_{\alpha\delta}$  шешімі келесі қатар түрінде бола алады:

$$q_{\alpha\delta} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_{\delta,k}}{\alpha + \lambda_k} \varphi_k$$

Енді төмендегі айырымды бағалаймыз

$$\|q_T - q_{\alpha\delta}\| \leq \|q_T - q_\alpha\| + \|q_\alpha - q_{\alpha\delta}\| \quad (1.1.3.10)$$

Жоғарыдағы теңдеудің оң жағындағы бірінші қосылғыш  $\alpha \rightarrow 0$  жағдайда нөлге ұмтылады. Енді екінші қосылғышты бағалаймыз:

$$\begin{aligned} \|q_\alpha - q_{\alpha\delta}\|^2 &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{f_k}{\alpha + \lambda_k} - \frac{f_{\delta,k}}{\alpha + \lambda_k} \right) \varphi_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f_k - f_{\delta,k})^2}{(\alpha + \lambda_k)^2} \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k=1}^{\infty} (f_k - f_{\delta,k})^2 = \frac{1}{\alpha^2} \|f - f_\delta\|^2 \leq \frac{\delta^2}{\alpha^2} \end{aligned} \quad (1.1.3.11)$$

$\alpha$  және  $\delta$  сәйкестене отырып нөлге ұмтылғанда  $q_{\alpha\delta} \rightarrow q_T$  ұмтылатынын дәлелдейміз.

$\varepsilon$  – оң сан болсын.  $\|q_T - q_\alpha\| < \varepsilon/2$  орындалатындай  $\varepsilon/2$  үшін  $\alpha$  – ны табамыз. Содан кейін  $\delta/\alpha < \varepsilon/2$  теңсіздігі орындалу үшін  $\delta > 0$  табамыз. Онда (1.1.3.10) және (1.1.3.11) арқылы  $\|q_T - q_{\alpha\delta}\| \leq \|q_T - q_\alpha\| + \|q_\alpha - q_{\alpha\delta}\| = \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$  аламыз.

## 1.2 Томография есептері, қойылымдары, шешу әдістері

«Томография» сөзін грек тілінен аударғанда екі мағынасы бар – «қабат», «жазу», толығырақ айтсақ, «қабатты жазу», өзге мағынада «объектің ішкі

құрылымын қабат па қабат зерттеу» дегенді білдіреді. Томографияда зерттеліп отырған объектке түзу сызық бойымен тарқалатын түрлі сәулелер бағытталады, сонымен қатар сәулелер объекіден өтуде физикалық өлшеу құралдары көмегімен тіркеледі. Осы тіркелген сәулелер, бұрмаланған параметрлер түрінде болатын қандайда бір физикалық өрістің ішкі құрылымы туралы мәлімет береді.

Қазіргі таңда томографияның басты мәселесі - объектілердің ішкі құрылымын анықтау барысында – объектіге әсер етудің келесідей түрлері қолдануға болады:

Рентгендік сәуле (рентгендік  $\gamma$ -кванттар); бұл жердегі басты өлшенуі тиіс параметр - объектіге кірісте, шығыста болатын  $\gamma$ -кванттардың шоғыры ағын интенсивтілігі – көлем бойынша тығыздық үлестірімі;

ЯМР (ядролы магниттік резонанстық); бұл жердегі қандайда бір тәсілмен оқшауландырылған, жоғары жиілікті бағытталған электромагнитті өрістер қолданылады, ол оқшауланған атомдардың магниттік момент күйіне әсерін тигізеді. Бұл әсер тоқтағаннан кейін сөнүші электромагнит сәулелену түрінде болатын реакция пайда болады, айтылып отырған сөнүші сәулеленудің амплитудасын, жылдамдығын өлшеу бойынша объектінің ішкі құрылымын анықтауға болады. Осы әдістегі объект құрылымы басты параметрі дене көлемі бойындағы белгілі бір элементтер атомдар үлестірімі болады.

Ультрадыбысты сәулелену; бұл әдіс – объектіге дыбыстың локаль жылдамдық үлестірімін анықтауға мүмкіндік береді.

Электримпеданстық; бұл әдіс – электрлік өлшеулер нәтижесі арқылы объект ішіндегі электр өткізгіштігінің кеңістік үлестірімін визуалдауға жағдай туғызады.

Компьютерлік томографияда, атап айтсақ, медицина және биологияда электримпеданстық томография (ЭИТ) көптеп қолданылады[32].

ЭИТ –объектінің ішінде (мысалға, адам денесі ішінде) электр өткізгіштіктің кеңістік үлестірімін объектінің бетіндегі электрлік өлшеулер нәтижелері арқылы визуалдауға мүмкіндік туады. Электр өткізгіштігінің кеңістік үлестірімінің бейнесін тіктеу мақсатында ток өткізу барысында пайда болатын объектінің бетінде өлшенген электрлік потенциал мәндері пайдаланылады .

ЭИТ әдісін амалдар жүзеге асыру тиімді тіктеу әдістерін құру, сонымен қатар электрлік өлшеулер дәлдігі жоғары болатын өлшеу аппараттарын құруды керек етеді. ЭИТ өлшеулерді жылдам түрде жүзеге асыруға болады және де мәліметті өңдеу жылдамдығы жоғары болуы көптеген үдерістерді, әсіресе, медицина және биология саласында: жүрек соғуының азаюы, визуальдауға мүмкіндік береді. ЭИТ-ны қолдануда құрал жабдықтарға кететін шығын мөлшері көп болмауы, объектіге сигналдардың әсер етуі, инвазивті еместігі (адам денсаулығына зиянын тигізбейтін электр тогының қолдануы) оның томографияда кең қолданылуына алып келді, сонымен қатар, осы бағыттағы зерттеулер көптеген жұмыстарда қарастырылып өтілген.

ЭИТ қолдану барысында пайда болатын математикалық есептер қисынсыз сызықты емес кері есептер болады. Ал, бұл есептерді сандық шешу барысында

үлкен қиындықтар туады: есептің қисынсыздығы, кері есеп болуы, сызықты болмауы, бұл есептерді аналитикалық, сандық шешу әдістерінің қиындығы және т.б.

Томография есептерінде проекциялық берілгендерді алу

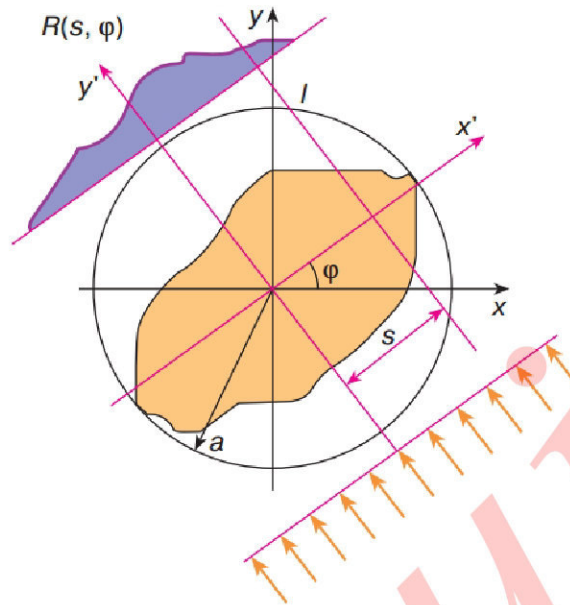
Компьютерлік томографияның математикалық негізі қазіргі таңдағы томографтардың пайда болуынан көп уақыт бұрын қаланған. Австриялық математик, Йогаан Радон 1917 жылы интегралдық геометрияның кері есебін шешудің, нақтырақ айтсақ, жазықтықта берілген функцияларды, олардың интегралдық сипаттамалары арқылы тіктеу есебін шешу әдістерін ұсынды. Алайда, бұл әдіс рентген сәулелерімен жұмыс жасайтын қондырғылар және жылдамдығы жоғары болатын электронды есептеуіш жүйелері пайда болғанға дейін көп жылдар бойы қолданыста болмады. Ең алғаш рентгендік компьютерлік томографияны 1972 жылы Г.Хаунсфилд, А.Кормак жасап шыққан.

Компьютерлік томография әдістерін түрлі салаларға енгізу, соның ішінде медицинаға енгізу ауруларды диагностикалау барысында сенімділікті арттырып, емдеудің жаңа әдістерін құруға мүмкіндік берді. Қазіргі таңда компьютерлік томография әдістері рентгендік, электрондық микроскопияда – кристаллдар және макромолекулалардың құрылымын анықтау барысында, геофизика саласында – жер асты қазба байлықтарды іздеу мен барлауда, астрофизика саласында – планеталар өрістерін зерттеу барысында және ғылым мен техниканың басқа да салаларында кеңінен қолданылады.

Компьютерлік томографияның негізі ретінде объектінің ішкі құрылымын бірқатар параллель болған көлденең қималарды алып, сол арқылы тіктеу мүмкін деген ой жатады. Сондықтан да, компьютерлік томографияның негізгі мәселелері зерттелініп отырған объектінің көлденең қимасының екі өлшемді болған бейнесін алу болады.

Екі өлшемді томографиялық кескінді алу әдісі екі негізгі кезеңнен тұрады. 1-ші кезеңде алдымен проекциялық берілгендер қалыптастырылады, ал, 2-ші кезеңде проекциялық берілгендер арқылы объектінің көлденең қимасының бейнесі тіктеледі.

Объектінің ішкі құрылымын анықтау мақсатында ол туралы ақпарат алу керек. Ол үшін объектінің денесінен өтілетін сәуле қолданылады.  $f(x, y)$  – заттың, объектінің көлденең қимасында болатын үлестірім тығыздығын анықтау керек болсын (сурет 1).



Сурет 1. Проекцияларды алу схемасы

Зерттеліну керек болған объект жұқа, көлденең қима шегінде параллель рентгендік сәулелермен жарықтанады. 1-суретте сәулелер бағыты  $x$  осімен болған белгілі бір  $\varphi$  бұрыш жасайды. Сәулелер объектінің ішінде болатын зат есебінен оның тығыздығына қатысты әлсірейді.

Объектіге қарсы бетте орналасқан құрылғы объектіден өтетін әрбір сәуленің интенсивтілігін тіркейді. Бұл жерде объект ішіндегі сәулелер

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - s = 0 \quad (1.2.1)$$

теңдеумен анықталатын  $l$  түзу сызық бойлап таралады деп есептелінеді, мұнда  $s$  – координата басынан сәулеге дейінгі арақашықтық. Осыдан объектіден шығатын сәуленің интенсивтілігі ізделінетін  $f(x, y)$  үлестірім сәуленің  $l$  траекториясы арқылы интегралына тең болады:

$$R(s, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \varphi - y' \sin \varphi, s \sin \varphi + y' \cos \varphi) dy' , \quad (1.2.2)$$

мұндағы бастапқы координаталар жүйесі  $\{x, y\}$ ,  $\varphi$  бұрышқа бұрылған  $\{x', y'\}$  координаталардың арасындағы байланыс

$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi,$$

$$y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi,$$

қатынасымен анықталады, ал (1.2.1) түзу сызық теңдеуі  $\{x', y'\}$  координаталардың жүйесінде төмендегідей болады:

$$x' - s = 0.$$

Тіркелетін  $R(s, \varphi)$  сәуле радондық образ өзге жағдайда проекциялар деп, (1.2.2) – Радон түрлендіруі деп аталады.

Проекциялар барлық дерлік  $\varphi$  бұрыштар үшін, сонымен қатар екі өлшемді  $f(x, y)$  функция нөлге тең болмаған  $s$  – мәндері үшін есептелінеді. Практикада  $s$  – мәні зерттелетін объектің физикалық өлшемдерімен шенелген болады, ал  $\varphi$  бұрыш  $0^\circ$  – тан  $180^\circ$  аралығында өзгеріп отырады, өйткені бұрыштың  $180^\circ$  өзгеруінде объекті сәулелену қатаң болған кері бағытта жүргізіліп отырады, сол себепті  $R(s, \varphi) = R(-s, \varphi + \pi)$ . Зерттелініп отырған қимамен шектелетін радиусы  $a$  дөңгелекті енгізген біз үшін ыңғайлы. Осы жағдайда (1.2.2) интеграл төмендегідей болады:

$$R(s, \varphi) = \int_{-\sqrt{a^2-s^2}}^{\sqrt{a^2-s^2}} f(s \cos \varphi - y' \sin \varphi, s \sin \varphi + y' \cos \varphi) dy'. \quad (1.2.3)$$

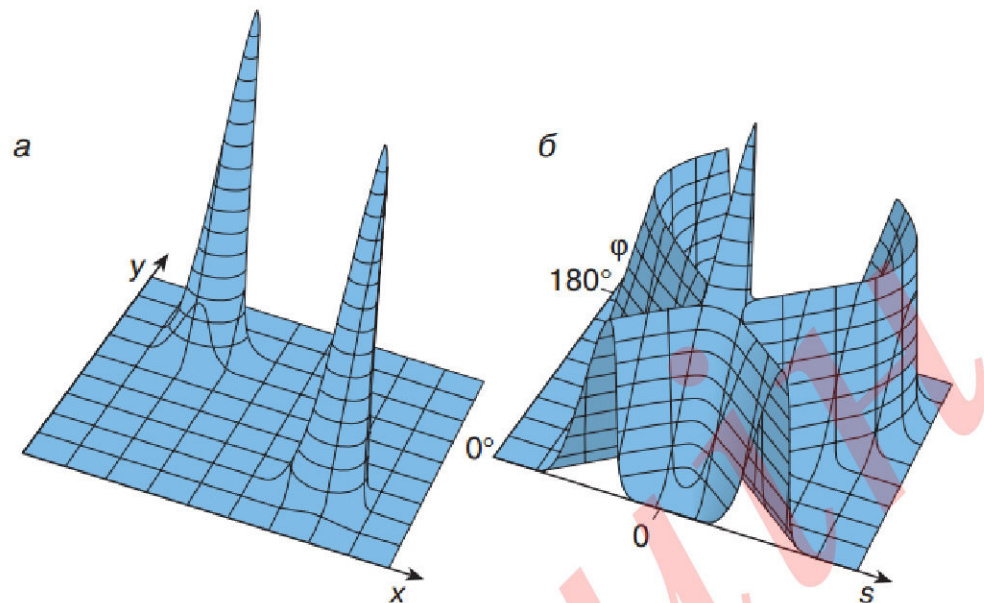
Мысалға,

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^2 \exp \left\{ -\frac{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}{2b^2} \right\} \quad (1.2.4)$$

қатынасы арқылы сипатталатын Гаусстық импульстар, Радон образын есептеуін қарастырайық. (4) – ті (3) – ке қою арқылы анықтаймыз

$$R(s, \varphi) = \sum_{i=1}^2 b\sqrt{2\pi} \exp \left\{ -\frac{(x_i \cos \varphi + y_i \sin \varphi - s)^2}{2b^2} \right\}.$$

(1.2.4) функция, оған сәйкес келіп тұрған радондық образ 2 суретте көрсетілген.



Сурет 2. Функция (а), оның радондық образы (б)

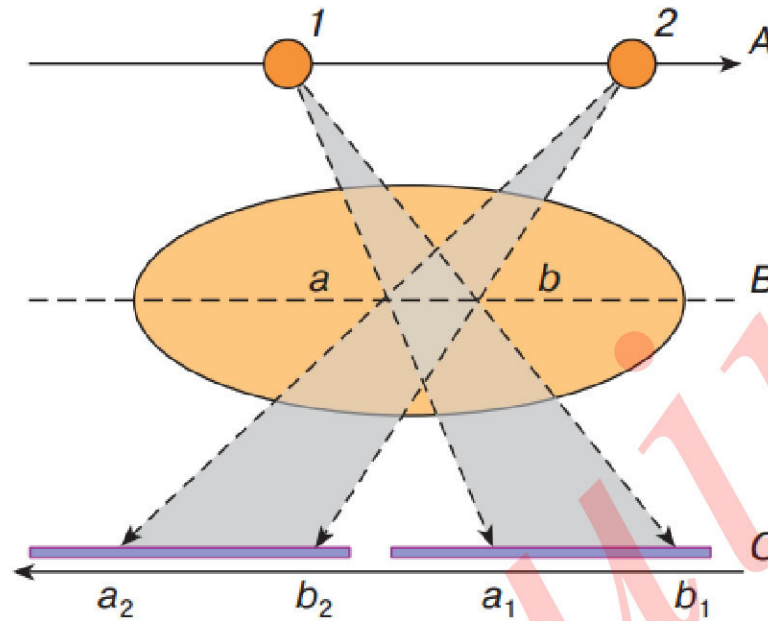
2-суреттен көріп тұрғанымыздай функция, оның радондық образдары ұқсамайды. Бірақ, радондық образ, оны келтіріп шығаратын функциялар араларында мәнді сәйкестік бар, ол томографиялық кескіндерді тіктеудің барлық мүмкін болған алгоритмдердің негізі ретінде жатады.

Классикалық томографияда берілгендері алу тәсілі

ЭЕМ пайда болғанға дейін медицина саласында классикалық томография қолданылды. Мұның мағынасы келесідей  $B$  жазықтығында объекттің кескінін алу керек болсын. Бұл үшін фотопенка  $C$  жазықтығында, ал, рентгендік сәуле шығару көздері  $A$  – жазықтығында орналасады.  $A$ ,  $C$  жазықтықтары параллель болады  $B$  жазықтығына. Рентгендік сәуле шығару көзі, фотопенка тең жылдамдықпен қарсы бағытта қозғалады. Осы жағдайда рентгендік сәуле шығару көзі осьтерінің қиылысу нүктесі  $B$  жазықтығында болады. Сол себепті,  $B$  жазықтығының, дербес жағдайында  $a$ ,  $b$  нүктелердің (сурет 3),  $C$  жазықтығында орналасқан фотопенкадағы кескіні қозғалмайтын болып табылады. Сол себепті, фотопенкада  $B$  жазықтығы кескіні анық, объекттің қалған қималары бейнесі қозғалу салдарларынан анық болмай және томографиялық кескіннің бұрмалануына алып келеді.

Осы келтіріліп өтілген әдістің салыстырмалы түрдегі қарапайы болуына қарамай қиманың томографиялық кескінін алу есебін жартылай шешеді, өйткені, классикалық әдіспен алыну мүмкін болатын  $B$  қиманың кескіні зерттелініп отырған объекттің өзге де қабаттарымен елеулі жағдайда саяланады (сурет 3).





Сурет 3. Классикалық томография схемасы

Кері проекциялау алгоритмі. Компьютерлік томографияда кескіндерді тіктеуінің қарапайым алгоритмдердің бірі – кері проекциялау алгоритмі болып табылады.

$f(x, y)$  тығыздықты бағалау келесідей есептелінеді. Екі айнымалысы бар  $f(x, y)$  функциясының проекциясы  $R(s, \varphi)$  –  $\varphi$  бұрышының әрбір мәні үшін бірөлшемді функция болып табылады.  $\varphi$  бұрышты фиксирлеп,  $(x, y)$  барлық жазықтық бойынша

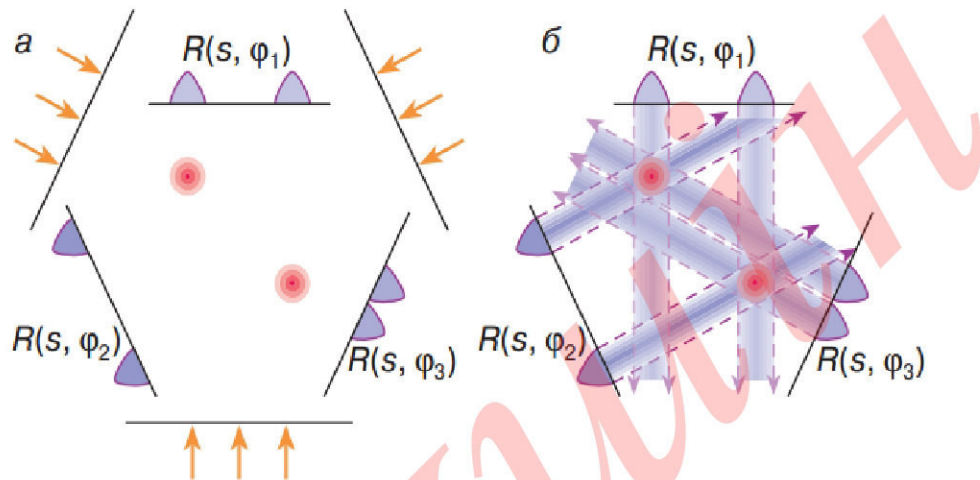
$$R_\varphi(x, y) = R(x \cos \varphi + y \sin \varphi, \varphi) \quad (1.2.5)$$

өрнек мәніне сәйкес керіп екіөлшемді функцияға түрлендіру мүмкін болады. Айтылып өтілген, екі өлшемді  $R_\varphi(x, y)$  функциясының қимасы  $R(s, \varphi)$  -ке тең, егер де  $(x, y)$  перпендикуляр жазықтықпен қимасы, оның  $(x, y)$  жазықтықта болатын проекциясы  $x$  осіменен  $\varphi$  бұрыш жасайтын болады. Бұдан кейін,  $0 \leq \varphi \leq \pi$  үшін барлық дерлік  $R_\varphi(x, y)$  кері проекцияларды қосу жүзеге асырылады. Нәтижесінде,  $\hat{f}(x, y)$  қосынды бейнесін аламыз, бұл  $f(x, y)$  тығыздық функциясын бағалау барысында қолданылады. Қосынды бейнесі

$$\hat{f}(x, y) = \int_0^\pi R(x \cos \varphi + y \sin \varphi, \varphi) d\varphi \quad (1.2.6)$$

қатынасыменен анықталады.

Кері проекциялау операциясының қарапайым болған геометриялық түрдегі интерпретациясы бар.



Сурет 4. Томограмманы кері проекциялау алгоритмі бойынша тіктеу схемасы: а- проекцияларын алу, б- кері проекцияларын қосу

4 а суретінде (1.2.4) функциясымен сипатталынатын екі өлшемді  $f(x, y)$  кескін арқылы  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  бұрышпен үш проекцияны алу схемасы келтірілген. 4-суреттегі  $f(x, y)$  кескін 2 а суретте көрсетілген кескіннің төбесінен қарағандағы кескінін білдіреді, бұл жерде  $f(x, y)$  функциясының үлкен мәндеріне жарықтандырудың кіші дәрежесі сәйкес келеді керісінше де жүзеге асырылуы мүмкін. Нәтижесінде алынған  $R(s, \varphi_i), i=1, 2, 3$ , проекцияларын (1.2.5) бойынша созу және қосу амалдары жүреді.  $f(x, y)$  функциясын үш проекция арқылы тіктеу нәтижесі 4 б суретте көрсетілген. Бұл суреттен көріп тұрғанымыздай, жолақ түрінде болған бұрмалануға қарамастан, үш проекция арқылы тіктелген кескіннің  $f(x, y)$  функциясымен ұқсастығы көп. Жолақтар проекцияларды созу барысында пайда болған.

Кері проекциялау барысында кескіндегі әрбір нүкте көп сәулелі жұлдызға ауысады, бұл жердегі сәулелер саны проекциялар санынан екі есе кем болады. Проекциялар санының артуы барысында бұл сәулелер қосылады, сонымен қатар, тіктелетін кескін  $f(x, y)$  функцияға ұқсай бастайды, бірақ, оныменен ешқашанда дәл түспейді. 5 в суретте  $f(x, y)$  функцияны бұрышы арқылы тең қашықтықтағы 180 проекциясы арқылы кері проекциялау алгоритмдерін пайдаланып, тіктеу нәтижелері көрсетілген. Мұндай жағдайда жолақ

байқалмайды, 5 а суреттің барлық бөліктерін тіктелген кескіннен көруге болады. Алайда, кескіннің дәлдігі әлі де қанағаттанарлықсыз дәрежеде.

Соныменен, кері проекциялау алгоритмінің мағынасы  $f(x, y)$  тығыздық бағалауларын – координатасы  $(x, y)$  болатын кез-келген нүктеде осы нүктеден өтетін сәулелерді қосу арқылы табады.

Үйірткілі алгоритм. Кері проекциялау алгоритмінің тиімділік дәрежесінің төмен болуын эвристикалық болуымен түсіндіп өтуге болады.  $f(x, y)$  функциясын  $R(s, \varphi)$  проекциялары арқылы дәл тіктеу үшін Радон түрлендіруге кері болатын түрлендіруді анықтау керек болады. Белгісіз  $f(x, y)$  функцияны анықтау үшін (1.2.2), (1.2.3) интегралдық теңдеуін шешу қажет болады. Ең алғаш рет осы шешімді Радон анықтаған. Бұл шешімді жүзеге асырудың бірі үйірткілі алгоритм, ол қарапайымдылық, жоғары дәлдік қасиеттерімен компьютерлік томографияда кең қолданыс тапты.

Үйірткілі алгоритм

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \tilde{R}(x \cos \varphi + y \sin \varphi, \varphi) d\varphi \quad (1.2.7)$$

қатынасымен анықталады, бұл жердегі

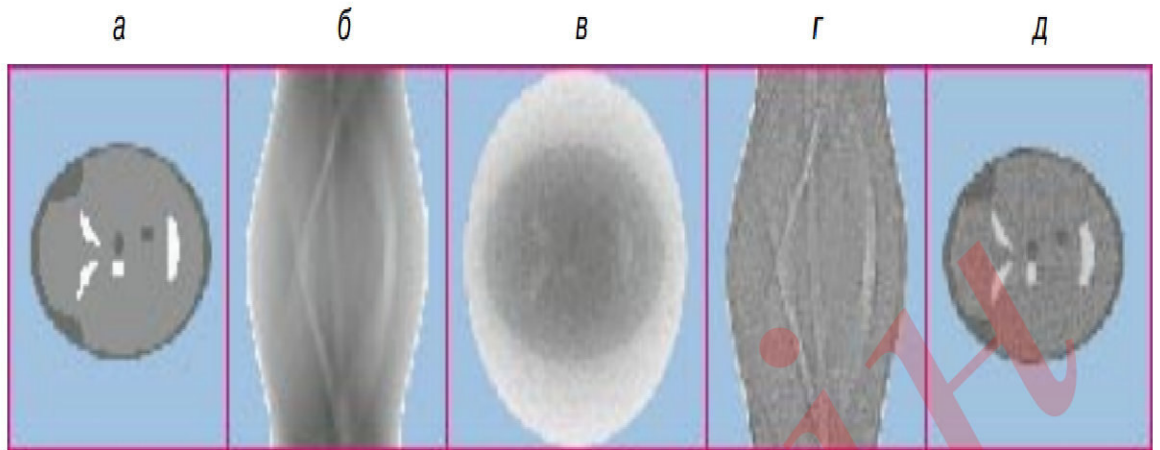
$$\tilde{R}(x \cos \varphi + y \sin \varphi, \varphi) = \tilde{R}(s, \varphi) = \int_{-a}^a h(s_1) R(s - s_1, \varphi) ds_1. \quad (1.2.8)$$

(1.2.8) қатынасы,  $R(s, \varphi)$  проекциясының (фиксирленген  $\varphi$  бұрышында)

$$h(s_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| \cos(\omega s_1) d\omega$$

функциясымен үйірткісін көрсетеді.

(1.2.7) қатынасымен берілетін амалы кері проекциялау амалдарына кері болып келеді. (1.2.7), (1.2.8) келіп шығатындай Радон түрлендіруіне кері болған үйірткілі алгоритм арқылы екі кезең бойынша жүзеге асырылады. 1-ші кезеңде проекцияның 1-ші айнымалысы арқылы үйірткі орындалады, нәтижесінде модификацияланған  $\tilde{R}(s, \varphi)$  проекциялар болып табылады. 2-ші кезеңде оларды кері проекциялау жүзеге асырылады.



Сурет 5. Томографиялық бейнені кері проекциялау мен үйірткі алгоритм бойынша тіктеу мысалы: а – берілген  $f(x, y)$  бейне; б –  $R(s, \varphi)$  проекциялар; в- кері проекциялау алгоритмімен тіктеу нәтижесі; г – модификацияланған  $\tilde{R}(s, \varphi)$  проекциялар д – үйірткі алгоритмімен тіктеудің нәтижесі

5 д суретте  $f(x, y)$  функциясын үйірткілі алгоритм арқылы модификацияланған проекциялары бойынша тіктеудің нәтижесі келтірілген. Тіктеудің дәл болмауы түрлі сәулелеу бұрыштарымен алынған проекциялардың саны, сәулелер сандарының ақырлы болуы. Көрсетілген мысалда сәулелер саны бір жүз жиырма сегіз, ал проекциялардың саны – 180. Осы аталған шектеулер принципіал сипатта болады, өйткені амалда қолданысқа ие болатын компьютерлік томографияларда шексіз санды проекцияларды техникалық тұрғыдан алу мүмкін емес және сәулелену интенсивтігін  $S$  – мүмкін болатын барлық мәндері үшін өлшеу мүмкін бола бермейді.

## 2 1-ШІ ТЕКТІ ФРЕДГОЛЬМНИҢ ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕНДЕУІ

### 2.1 Фредгольмнің 1-ші текті интегралдық тендеуі

Қисынды қойылған есеп түсінігі. Әрбір сандық математикалық есепті шешу негізінен,  $f$  - «бастапқы берілген» бойынша  $y$  шешімді табуға негізделген. Мұны мына формада  $y = R(f)$  жазамыз. Мұндағы  $R$  – кез келген оператор. Элементтерінің ара қашықтығы  $\rho_Y(y_1, y_2)$  және  $\rho_F(f_1, f_2)$  болатын  $y, f$  элементтері  $Y, F$  - метрикалық кеңістіктерінің элементтері деп есептейміз.

Анықтама.  $y$  шешімі орнықты деп аталады, егер  $\varepsilon > 0$  үшін  $\delta(\varepsilon) > 0$  орындалатындай табылады,  $(f_1, f_2) \leq \delta(\varepsilon)$  теңсіздігінен  $\rho_Y(y_1, y_2) \leq \varepsilon$  теңсіздігі келіп шығады, мұндағы  $f_1, f_2 \in F$  -тің кез келген элементтері,  $y_1 = R(f_1) \in Y$ ,  $y_2 = R(f_2) \in Y$ .

Анықтама.  $y = R(f)$  есебі  $(Y, F)$  метрикалық кеңістік парында қисынды қойылған деп аталады, егер мына шарттар орындалатын болса

- Әрбір  $f \in F$  элементі үшін  $y \in Y$  шешімі бар болады;
- Шешім бірмәнді анықталады;
- Шешім қисынды болады.

Осы аталған шарттарды қанағаттандырмайтын есептер қисынды емес қойылған есеп деп аталды.

Ескерту.  $Y, F$  кеңістіктеріндегі метрика  $y, f$  аз өзгеруі ретінде қай мағынада түсіндірілетіндігімен сипатталады. Метрика қалай таңдалады, яғни  $f$  өзгерісінде  $y$  шешімі бола ма, жоқ па, олай болса,  $y = R(f)$  есебі қисынды бола ма, міне осыған байланысты таңдалады.

Мысал ретінде  $[a, b]$  -де берілген  $f(x); y = \frac{df}{dx}$  функциясының  $y(x)$  туындысының анықтамасын қарастырамыз. Элементтердің арасын  $Y$ , кеңістігінде де,  $F$ , кеңістігінде де бірқалыпты жуықтау метрикасында өлшейміз, яғни

$$\begin{aligned} \rho_Y(y_1, y_2) &= \sup_{[a,b]} |y_1(x) - y_2(x)|, \\ \rho_F(f_1, f_2) &= \sup_{[a,b]} |f_1(x) - f_2(x)|. \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

Сонда қойылған есептің шешімі орнықты болмайтыны, анық  $f$  -тің аздаған өзгеруінен  $y$  үшін әлдеқайда үлкен өзгеру сәйкес келуі мүмкін.

Енді  $Y$  кеңістігінде ескі, бұрынғы метриканың сақтап, ал  $f$  үшін метрикуны басқаша енгіземіз.  $f(x)$  функциясын  $[a, b]$  кесіндісінде үзіліссіз дифференциалданатын, төменде көрсетілгендей метрикасы бар  $F_1$  кеңістігінің элементі ретінде қарастырамыз [37, 38]

$$\rho_{F_1}(f_1, f_2) = \max \left\{ \sup_{[a,b]} |f_1(x) - f_2(x)|, \sup_{[a,b]} |f_1'(x) - f_2'(x)| \right\}.$$

$y_1 = \frac{df_1}{dx}, y_2 = \frac{df_2}{dx}$ . болсын. Сонда  $\rho_Y(y_1, y_2) \leq \rho_{F_1}(f_1, f_2)$  болады. Ендеше,  $F_1$  метрикасындағы  $f$  аздаған өзгеруіне  $Y$  метрикасындағы  $y$  өзгеруі сәйкес келеді, сосын қойылған есептің шешімі қисынды болады.

Осылайша, математикалық есептің қисындылығы мен қисынды еместігі туралы айтқанда, біз барлық уақытта енгізілген берілгендер және шешім қай метрикада өлшенеді, соны көрсетуіміз керек. Сонымен бірге нақты физикалық есептерде метриkanı қалағанымызша таңдай алмаймыз, оны қойылған есеп анықтайды.

Тағы да жоғарыда қарастырылған  $f(x)$  функциясы бойынша  $y(x)$  туындысын есептеу есебіне назар аударайық.  $f(x)$  функциясы эксперимент арқылы анықталған делік. Сонда бақылау қателіктерінің нәтижесінде  $f(x)$  «дәл» функциясы емес, оның орнына қайсыбір жуықталған  $\bar{f}(x)$  функциясы табылған болады. Бақылаудың белгілі дәлдіктері бойынша  $f$  -ті білмей,

негізінен (2.1.1) метрикасында немесе 
$$\rho(f_1, f_2) = \sqrt{\int_a^b (f_1(x) - f_2(x))^2 dx},$$

метрикасында  $f$  -тен  $\bar{f}$  -тің ауытқуын бағалауға болады, бірақ  $F$ , метрикасында  $f$  -тен  $\bar{f}$  -тің аздаған ауытқуын ұйғарым жасау немесе бағалау мүмкін болмайды [39, 40]. Осылайша, таңдау әдісі есептің мазмұнымен анықталады.

Екінші текті Фредгольмның интегралдық теңдеуіне назар аударайық

$$y(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x). \quad (2.1.2)$$

$K(x, s)$  ядросы үзіліссіз болсын, ал  $\lambda$  меншікті мән болмасын. Ара қашықтықтар (2.1.1) болатын,  $[a, b]$  -да үзіліссіз функциялардың  $Y$  және  $F$  метрикалық кеңістіктерін қарастырайық. Бұған дейін біз (2.1.2) теңдеуден  $y \in Y$  шешімінің  $f \in F$  функциясы бойынша бірмәнді анықталатынын көрсеткенбіз. (2.1.1) теңдікке сәйкес,

$$y(x) = \lambda \int_a^b R(x, s, \lambda) f(s) ds = f(x),$$

мұндағы  $R(x, s, \lambda)$  - үзіліссіз функция. Бұдан, қойылған есептің шешімі қисынды – аздаған  $f(x)$  өзгерісіне (2.1.1) мағынадағы аздаған  $y(x)$  өзгерісі сәйкес келеді.

Ендеше, (2.1.2) есебі қисынды қойылған есеп болады.

Фредгольмның интегралдық теңдеуіне есептің қисындылық көзқарасынан талдау үшін келесі теңдеуге назар аударайық

$$\int_a^b K(x, s)y(s)ds = f(x) \quad (2.1.3)$$

$K(x, s)$  ядросы үзіліссіз болсын. Бұрынғыдай  $y$  және  $f$  - метрикасы (2.1.1) болатын,  $[a, b]$ -да үзіліссіз функциялар кеңістігінің элементтері деп есептейміз.

Егер  $K(x, s)$  ядросы тұйық болса, онда (2.1.3) шешім жалғыз болады. Қойылған есептің шешімінің бар болуына байланысты, кейбір тұжырымдар келтіреміз[41, 42].

$f(x)$ , функциясының үзіліссіздігі, жалпы алғанда, үзіліссіз шешімнің болатынына кепілдік бермейтінін, көру оңай. Шынында да,  $f(x)$  функциясы үзіліссіз болсын, бірақ туындысының кейбір  $x \in (a, b)$ , мәндерінде үзілістері болады, ал  $K(x, s)$  ядросы  $x$  бойынша үзіліссіз дифференциалданады. Сонда кез келген үзіліссіз  $y(x)$  үшін (2.1.3) теңдеуінің сол жақ бөлігінің барлық  $(a, b)$ -да үзіліссіз туындысы бар болады, сонымен бірге теңдеудің оң жақ бөлігінде де кейбір  $x$  үшін ғана үзіліссіз туындысы бар болады. Олай болса, (2.1.3) қатынас ешбір  $y(x)$ , функциясы үшін орындалмайды, яғни (2.1.3) теңдеуінің үзіліссіз шешімі болмайды[43, 44].

Енді  $K(x, s)$  ядросының талаптарын қанағаттандырған жағдайындағы (2.1.3) теңдеудің үзіліссіз шешімінің бар болуы үшін қандай шарттар қажет болатындығы туралы сұрақты қарастырамыз. (2.1.3) –нен  $f(x)$  функциясы ядро арқылы бейнеленетін функция болады.  $f_n$  және  $y_n$  Фурье коэффициенттері  $K(x, s)$  ядросының меншікті функциялар жүйесі бойынша  $\lambda_n f_n = y_n$  формуласы бойынша байланысқан.  $y(x)$  функциясы үшін Бессель теңсіздігіне сүйенсек,  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2$  қатары жинақталады, ал олай болса  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 f_n^2$ , қатары да жинақталады, яғни  $f_n$  коэффициенттері жеткілікті тез кемуі керек.  $f(x)$  функциясының үзіліссіздігін  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2$ , қатарының жинақтылығы жауап береді,  $f(x)$  функциясы үшін Бессель теңсіздігінен келесісі шығады, бірақ жалпы айтқанда,  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 f_n^2$ , қатарының жинақтылығы дауап бермейді (қамтамасыз етпейді). Ендеше, (8.3) теңдеуінің шешімі кейбір үзіліссіз  $f(x)$  функциялар үшін бар болуы мүмкін, ал тек  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 f_n^2$ , қатарының жинақталатындай функциялар үшін ғана бар болады ( $n \rightarrow \infty, |\lambda_n| \rightarrow \infty$ ).

Орнықтылық туралы мәселеге тоқталамыз.  $y(x)$  функциясы (2.1.3) теңдеудің шешімі болсын. Белгілеу енгіземіз  $z(x) = y(x) + \cos \omega x$ , мұндағы  $\omega$  – қандай да бір параметр.  $z(x)$  функциясы ұйғарымымызды орындайтындай, яғни  $K(x, s)$  ядросы  $s$  бойынша алынған туындымен бірге үзіліссіз деген ұйғарымды қанағаттандыратын теңдеу аламыз[45, 46]

$$\int_a^b K(x, s)[z(s) - \cos \omega x] ds = f(x),$$

бұдан

$$\begin{aligned} \int_a^b K(x, s)z(s) ds &= g(x) = f(x) + \int_a^b K(x, s) \cos \omega s ds = \\ &= f(x) + K(x, s) \frac{\sin \omega s}{\omega} \Big|_a^b - \int_a^b K'_s(x, s) \frac{\sin \omega s}{\omega} ds. \end{aligned}$$

$\sup_{[a,b]} |f(x) - g(x)| \leq \frac{C}{\omega}$ , мұндағы  $C$  –  $\omega$  -дан тәуелсіз тұрақты, болатыны, анық. Сондықтан жеткілікті  $\omega$  үлкен мәндерінде  $\rho_F(f, g) = \sup_{[a,b]} |f(x) - g(x)|$  барынша аз болады. Сонымен қатар  $\rho_V(y, z) = \sup_{[a,b]} |\cos \omega x| = 1$ , яғни бұл шама аз шама болмайды. Бұдан маңызды қорытынды шығады: бірінші текті Фредгольмның интегралдық теңдеуінің шешімі  $f(x)$  функциясының ауытқуына қатысты орнықты емес. Сондықтан (2.1.3) теңдеуі қисынсыз қойылған есептер класына жатады, немесе өзіміз үйренгендей, қисынсыз есеп болады [47, 48].

Бірінші текті теңдеудің бұл қасиеті мұндай теңдеулерді практикалық қолданылу кезінде қиындықтар туғызады, ал соның өзінде физикалық процестердің бірқатары осы теңдеумен сипатталады. Бастапқы берілгендерді бергендегі азғантай қателіктер шешімді біршама өзгертіп жібереді, теңдеумен сипатталатын физикалық процестердің ортақ шешімі болмауы да мүмкін, тіпті шешім болмауы да мүмкін болаытын жағдайлар кездеседі.

Көп уақыт бойы осы себеппен бірінші текті Фредгольм теңдеуі физикалық процестерді сипаттау үшін қолдану ақылға қонымсыз болды. Бірақ соңғы онжылдықта бұл көзқарас түбегейлі өзгерді, және де қисынсыз қойылған есептер ғылыми зерттеулердің интенсивті нысаны болды.

Қисынсыз қойылған есептердің теориясынан кітабы бойынша жақсылап танысуға болады, ал біз бірінші текті Фредгольмның интегралдық теңдеулерді зерттеуді жалғастырамыз, сосын олар үшін Тихоновтың регуляризацияланған алгоритмін құрамыз, яғни (2.1.3) теңдеуінің дәл шешіміне мейлінше жақын болатындай функцияны табу алгоритмін құрамыз.

Тегістелетін функционал және оның қасиеттері. 1. Экстремал теңдеуін қорытып шығару. (2.1.3) теңдеуіне тоқталайық. Осы теңдеуге енетін үзіліссіз  $f(x)$  функциялары  $x \in [c, d]$ , интервалында, ал  $y(x)$  – функциялары  $x \in [a, b]$ , интервалында анықталған болсын, ал  $K(x, s)$  – ядросы  $x \in [c, d], s \in [a, b]$  тіктөртбұрышында анықталған болсын. (2.1.3) теңдеуді мына түрде жазайық

$$Ay = f, \tag{2.1.4}$$



мұндағы  $A$  – Фредгольм операторы. Функционал қарастырайық

$$M^\alpha[y, f] = N[y, f] + \alpha\Omega[y] \quad (2.1.5)$$

мұндағы

$$N[y, f] = \int_c^d (Ay - f)^2 dx \quad (2.1.6)$$

$$\Omega[y] = \int_a^b [p(x)(y')^2 + q(x)y^2] dx, \quad p(x) > 0, q(x) > 0. \quad (2.1.7)$$

Мұнда  $\alpha > 0$  – регуляризация параметрі деп аталатын қайсы бір параметр. (2.1.7) функционал регуляризацияланатын деп, ал  $M^\alpha[y, f]$  – функционал тегістелетін функционал деп аталады.

Ары қарай (2.1.3) теңдеуінің оң жақ бөлігі қателікпен берілгенде (2.1.3) теңдеудің жуықталған шешімі мақсатты түрде  $M^\alpha[y, f]$ , мұндағы  $f$  – (2.1.3) теңдеудің оң жақ бөлігінің жуық мәні, функционалының минимал мәнін беретін жағдайында көрсетеміз. Сондықтан да  $M^\alpha[y, f]$  функционалының қасиеттерін зерттеумен айналысамыз.

$M^\alpha[y, f]$  функционалының экстремумына вариациялық есепті қоямыз. Экстремумды  $y(x)$  функцияларының екі рет үзіліссіз дифференциалданатын және келесі шарттарды қанағат тандыратын  $Y$  класында іздейтін боламыз

$$y'(a) = y'(b) = 0 \quad (2.1.8)$$

$y(x)$  және  $y(x) + \delta y(x)$  –  $Y$  жататын екі функция болсын.  $\delta y$  өсімшесіне жауап беретін  $M^\alpha$  функционалының өсімшесін есептейміз, яғни  $M^\alpha[y + \delta y, f] - M^\alpha[y, f]$  шамасын есептейміз. Сонда

$$\begin{aligned} M^\alpha[y + \delta y, f] &= \\ &= \int_c^d [A(y + \delta y) - f]^2 dx + \alpha \int_a^b [p(y' + \delta y')^2 + q(y + \delta y)^2] dx = \\ &= \int_c^d [Ay + A\delta y - f]^2 dx + \alpha \int_a^b [p(y' + \delta y')^2 + q(y + \delta y)^2] dx = \\ &= \int_c^d (Ay - f)^2 dx + 2 \int_c^d (Ay - f)A\delta y dx + \int_c^d (A\delta y)^2 dx + \\ &+ \alpha \int_a^b [py'^2 + qy^2] dx + 2\alpha \int_a^b (py'\delta y' + qy\delta y) dx + \\ &+ \int_a^b [p(\delta y')^2 + q\delta y^2] dx \end{aligned}$$

Бұл өрнекте бірінші және төртінші қосылғыштардың қосындысы  $M^\alpha[y, f]$  береді. Оларды сол жаққа өткіземіз сосын мынаны аламыз:  $M^\alpha[y + \delta y, f] - M^\alpha[y, f]$  функционалының өсімшесінің  $\delta y$ -ке сызықты қатысты бөлігі түсіп қалады (бұл екінші және бесінші қосылғыштардың қосындысы), ол бөлік функционалдың вариациясы деп аталады және  $\delta M^\alpha$  арқылы белгіленеді, және де  $\delta y$ -ге сызықты емес тәуелді үшінші мен алтыншы қосылғыштарының қосындысын  $R[\delta y]$  арқылы белгілейміз, сосын оның кез келген  $\delta y(x)$  үшін теріс емес болатынын, көру қиын емес:

$$M^\alpha[y + \delta y, f] - M^\alpha[y, f] = \delta M^\alpha + R[\delta y] \quad (2.1.9)$$

Вариациялық есептеулерден, егер  $y(x)$  функциясы  $M^\alpha$  функционалының экстремумын жүзеге асырса, онда  $\delta M^\alpha = 0$ , яғни

$$\int_c^d (Ay - f) \delta y dx + \alpha \int_a^b (py' \delta y' + qy \delta y) dx = 0 \quad (2.1.10)$$

Бұл теңдік экстремумның қажетті шарттарын береді. Интегралдау ретін ауыстырып, бірінші қосындыны түрлендіреміз:

$$\begin{aligned} & \int_c^d \left\{ \int_a^b K(x, s) y(s) ds - f(x) \right\} \int_a^b K(x, t) \delta y(t) dt dx = \\ & = \int_a^b \delta y(t) dt \int_c^d \left[ \int_a^b K(x, s) K(x, t) y(s) ds \right] dx - \\ & - \int_a^b \delta y(t) \int_c^d K(x, t) f(x) dx = \\ & = \int_a^b \delta y(t) \left[ \int_a^b \bar{K}(s, t) y(s) ds - \bar{f}(t) \right] dt \end{aligned}$$

мұндағы

$$\bar{K}(s, t) = \int_c^d K(x, s) K(x, t) dx$$

$$\bar{f}(t) = \int_c^d K(x, t) f(x) dx.$$

(2.1.10) теңдеудің екінші қосындысына бөліктеп интегралдауды қолданамыз. Сонда мынаны аламыз

$$\begin{aligned} \int_a^b (py' \delta y' + qy \delta y) dx &= py' \delta y \Big|_a^b + \int_a^b (qy - (py')') \delta y dx = \\ &= \int_a^b (qy - (py')') \delta y dx \end{aligned}$$

интегралдың сыртындағы мүше (2.1.8) шарттарына сәйкес нольге тең болады. (2.1.10) қатынасы сонда мына түрде болады

$$\int_a^b \delta y(t) \left\{ \int_a^b K(s,t) y(s) ds - f'(t) + \alpha \left( qy - \frac{d}{dt}(py') \right) \right\} dt = 0 \quad (2.1.11)$$

$\delta y(t)$  – кез келген вариация болғандықтан, вариациялық есептеудің негізгі леммасына сәйкес, фигуралық жақшадағы өрнек нольге тең болады.  $M^\alpha$  функционалының экстремалын анықтайтын теңдеуді аламыз:

$$\frac{d}{dt}(p(t)y'(t)) - q(t)y(t) = \frac{1}{\alpha} \int_a^b K(s,t) y(s) ds - \frac{1}{\alpha} f'(t) \quad (2.1.12)$$

Осылайша, егер  $y(x) \in Y$  (8.8) шарттарында  $M^\alpha$  функционалының экстремумын жүзеге асырса, онда  $y$  (2.1.12) теңдеуін қанағаттандырады.

Экстремалдар теңдеулерін зерттеу. Тегістелетін функционалдың минимал мәндері туралы теорема. (2.1.8) шарттары орындалғанда, (2.1.12) теңдеуінің жалғыз шешімі болатынын, дәлелдейміз. (2.1.12) теңдеу – интегро-дифференциалдық теңдеу болып табылады [49, 50]. Оны екінші текті Фредгольмның интегралдық теңдеуіне келтіреміз.

(2.1.8) шарттарын қанағаттандыратын мына теңдеуді қарастырамыз

$$\frac{d}{dt}(py') - qy = 0 \quad (2.1.13)$$

Бұл есептің тек тривиальды шешімі болатынына көз жеткіземіз. Шынында да,  $y(t)$  функциясының қандай да бір  $t_0 \in [a, b]$  нүктеде максимал оң мән қабылдайтын болсын. Сонда  $y(t_0) > 0, y'(t_0) = 0, y''(t_0) \leq 0$ .  $p(t_0) > 0$ ,  $q(t_0) > 0$  болатынын ескеріп,  $t = t_0$  болғанда  $\frac{d}{dt}(py') - qy = py'' - qy < 0$  аламыз, бұл (2.1.13) теңдікке қарама-қайшы болады. Ендеше,  $\sup_{[a,b]} y(t) \geq 0$ . Осы сияқты  $\inf_{[a,b]} y(t) \geq 0$  болатынын дәлелдейміз. Бұдан мына теңдік келіп шығады  $y(t) \equiv 0$ .

Дәлелдегеннен  $G(t, \xi)$  Грин функциясы бар болатыны шығады, және де (2.1.12) теңдеуі (2.1.8) шарттарында мына интегралдық теңдеуге эквивалентті

$$y(x) = \frac{1}{\alpha} \int_a^b G(t, \xi) \left[ \int_a^b \hat{K}(s, \xi) y(s) ds - \hat{f}(\xi) \right] d\xi,$$

немесе

$$y(t) = \int_a^b T(t, s) y(s) ds - F(t), \quad (2.1.14)$$

мұндағы

$$T(t, s) = \frac{1}{\alpha} \int_a^b G(t, \xi) \hat{K}(s, \xi) d\xi$$

қандай да бір ядро, ал

$$F(t) = \frac{1}{\alpha} \int_a^b G(t, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi.$$

(2.1.14) теңдеуі – екінші текті Фредгольмның интегралдық теңдеуінің береді. Оның жалғыз шешімі болатынын дәлелдейміз. Теоремаға сәйкес, сәйкес біртекті теңдеуінің тек тривиальды шешімі болатынын дәлелдесек, жеткілікті. Ал бұл (2.1.8) шарттарын қанағаттандыратын біртекті (2.1.12) теңдеуімен эквивалентті болады, және ол теңдеудің тек тривиальды шешімдері ғана бар болады. Кері жорық, яғни мына теңдеу

$$\alpha \left( \frac{d}{dt} (py') - qy \right) = \int_a^b \hat{K}(s, t) y(s) ds \quad (2.1.15)$$

$y(t)$  тривиальды емес шешімі болады. (2.1.15) теңдеуін  $y(t)$ -ке көбейтіп сосын интегралдасақ, мынаны аламыз

$$\alpha \int_a^b \left( y \frac{d}{dt} (py') - qy^2 \right) dt = \int_a^b y(t) dt \int_a^b \hat{K}(s, t) y(s) ds \quad (2.1.16)$$

Бөліктеп интегралдағаннан кейін теңдіктің сол жақ бөлігін мына түрге түрлендіреміз  $-\alpha \int_a^b \left[ p(y')^2 + qy^2 \right] dt$ .  $\hat{K}(s, t)$  үшін (2.1.11) өрнекті қолданып, теңдіктің оң жақ бөлігін түрлендіреміз сосын интегралдау ретін өзгертіп, мынаны аламыз:

$$\begin{aligned} & \int_a^b y(t) dt \int_a^b y(s) ds \int_c^d K(x, s) K(x, t) dx = \\ & = \int_c^d dx \int_a^b K(x, s) y(s) ds \int_a^b K(x, t) y(t) dt = \int_c^d dx \left[ \int_a^b K(x, t) y(t) dt \right]^2 \end{aligned}$$

Осындай түрлендірулерден кейін (2.1.16) теңдік мына түрге келтіріледі

$$-\alpha \int_a^b \left[ p(y')^2 + qy^2 \right] dt = \int_c^d dx \left[ \int_a^b K(x, t) y(t) dt \right]^2.$$

$y \neq 0$  болғандықтан, теңдіктің сол жақ бөлігі теріс, ал оң жақ бөлігі теріс емес, біз сосын қарама-қайшылыққа кездесеміз, дәлелдегелі отырған (2.1.8), (2.1.15) есебінің тек тривиальды шешімі болады, олай болса, (2.1.14) (немесе (2.1.8), (2.1.12) есебінің) есебінің жалғыз шешімі бар болады.

Бұл шешім  $M^\alpha[y, f]$  функционалының минимал мәндерін жүзеге асыратынын көру қиын емес. Бұл негізінен (2.1.9) теңдігінен тікелей келіп шығады, себебі  $y = y(x)$  болғанда  $\delta M^\alpha = 0$ , ал кез келген  $\delta y(x)$  үшін  $R[\delta y] \geq 0$ . Алынған нәтижелерді теорема түрінде тұжырымдаймыз.

**Теорема** Кез келген үзіліссіз  $f(x)$  функциялары үшін  $M^\alpha[y, f]$  функционалының минимал мәнін жүзеге асыра алатындай  $Y$  класынан жалғыз  $y(x)$  функция бар болады.

## 2.2 Фредгольмнің 1-ші текті интегралдық теңдеуін тихоновтың регуляризация әдісімен сандық шешу

Қисынсыз есептерді жуықтап шешудің әдістерінің бірі ретінде - бастапқы берілген есепті қандай да бір жол арқылы қоздырып, осыған жақын болған басқа есеппен, қисынды болған есеппенен, алмастыру болып табылады. Осы секілді әдістердің көмегі арқылы әр түрлі регуляризацияның алгоритмдері алынады. Жалпы теңдеу мысалында орнықты болмаған есептерді шешу әдістері төменде қысқаша қарастырылып өтілген. Біз бастапқы есепті қоздырып, содан кейін вариациялық есепке өту арқылы қисынды есепке өте аламыз.

Келесі кезекте, Тихонов ұсынып өткен қисынсыз есептерді жуықтап шешудің әдісін қарастыратын боламыз. Бұл әдістің негізгі идеясы бастапқы берілген есептегі функционалды минимумдауға негізделіп және қосымша стабилизациялаушы мүше пайда болады.

Келесі берілген бірінші текті теңдеуді қарастырайық:

$$Au = f \tag{2.2.1}$$

Берілген теңдеудегі оң жақ мүше және шешімнің өзі қандай да бір нормаланған кеңістікке тиісті болып табылады. Теңдеудегі операторды сызықтық оператор ретінде қарастырамыз.  $H$  гильберт кеңістігі болсын делік және де  $u \in H, f \in H, A: H \rightarrow H$ .

Мұндағы,  $(u, v)$ -  $u, v \in H$  - берілген элементтердің скаляр көбейтіндісі, ал  $\|u\|$  -  $u \in H$  элементтердің нормасы.  $A$  операторы – өз-өзіне түйіндес оператор, оң, шексіз және де оның  $D(A)$  анықталу облысы  $H$  кеңістігінде жататын болсын. Түсінікті болу үшін  $A$  операторының спектрі – дискретті және  $k \rightarrow \infty$  ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq \dots > 0$ ) нөлге ұмтылатын меншікті мәндерден тұрады деп есептейік. Ал, оның тиісті меншікті функциялары  $\{\omega_k\}$ ,  $\omega_k \in D(A), k=1, 2, \dots$ , ортонормаланған және  $H$ - кеңістігінде толық анықталған. Сондықтан да, әрбір  $v \in H$  үшін

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} v_k \omega_k, \quad v_k = (v, \omega_k)$$

жоғарыдағы орынды болады.

Қолданбалы зерттеулердегі ауытқулары бар кіріс мәліметтері берілген жағдайлар жиі кездесіп жатады. Осындай, жалпы жағдайды келесі түрде үлгілейміз. (2.2.1) теңдеуінің оң жағы дауытқуымен берілген деп есептейміз.  $f$  орнына бізге

$$\|f_\delta - f\| = \delta \tag{2.2.2}$$

шарты орындалатындай  $f_\delta$  белгілі болсын делік.

Жалпы жағдайда, біз (2.2.1) есебіне негізделетін едік, оларда жуық берілген тек оң жағы емес, сонымен қатар,  $A$  операторы да түгел берілген.

(2.2.2) теңдеуінің оң жағы  $f_\delta$  жуық берілген теңдеудің жуық шешімін анықтау есебі қойылады. Осы жуық шешімді  $u_\alpha$  арқылы белгілеп алып және  $\alpha$  параметрін теңдеудің оң жағының ауытқу деңгейімен байланыстырған дұрыс, яғни,  $\alpha = \alpha(\delta)$ .

Вариациялық әдіс. Қисынсыз есептердің орнықты шешімдерін табу негізінде кіріс мәліметтері жуық берілген априорлы мәліметтерді пайдалануға негізделеді. Егер де теңдеудің оң жағы жуық берілсе, онда оның дәл шешімін табу қажет болмайды:

$$Au_\alpha = f_\delta \tag{2.2.3}$$

Оң жағындағы белгісізді басқа есепке, нақтырақ айтқанда, қисынды есепке өту арқылы жүзеге аыруға болады:

$$A_\alpha u_\alpha = f_\delta$$

мұндағы  $A_\alpha$  операторы  $A$  операторымен салыстырғанда жақсырақ қасиеттерге ие болады.

Вариациялық әдістерденегізінен (2.2.3) теңдеуінің шешімдері орнына байланыссыз алшақтық  $r = Av - f_\delta$  нормасы минимизациялану арқылы жүзеге асырылады, яғни, төмендегі функционал минимизацияланады:

$$J_0(v) = \|Av - f_\delta\|^2$$

Осы секілді вариациялық есептердің шешімі көп, олар  $\delta$  дәлдігі бойынша (2.2.3) теңдеуін қанағаттандырады. Теңдеудің оңтайлы шешімін алу үшін теңдіктің оң жағындағы ауытқу жайындағы мәліметті тиімді пайдалану керек.

А.Н.Тихоновтың регуляризациялау әдісі бойынша келесі тегістеу функционалы енгізіледі:

$$J_\alpha(v) = \|Av - f_\delta\|^2 - \alpha \|v\|^2 \quad (2.2.4)$$

(2.2.3), (2.2.4) есептерінің  $U_\alpha$  жуық шешімі осы көрсетілген функционалдың экстремалі болады:

$$J_\alpha(u_\alpha) = \min_{v \in H} J_\alpha(v) \quad (2.2.5)$$

(2.2.4) шарты бойынша  $\alpha \rightarrow 0$  - регуляризация параметрі болып есептелінеді, сонымен қатар, оның шамасы берілген оң жақтың  $\delta$  ауытқумен байланысты болады. Шектелген шешімді бөліп алу мақсатында байланыссыз функционалға орнықтырушы  $\|v\|^2$  функционалы енгізілген.

Жуық алгоритмдерді теориялық тұрғыда зерттеудегі басты мәселе жуық шешімнің дәл шешімге жинақтылығын дәлелдеумен тығыз байланысты. Қандай жағдай болғанда (2.2.4), (2.2.5) өрнектерінен алынған  $u_\alpha$  жуық шешім қандай жағдайдағы (2.2.3) дәл шешіміне ұмтылатындығын көрсету қажет. Расымен де, жинақталу фактысын орнатумен бірге, жинақталу жылдамдығын да көрсету керек.

Жуық шешімді келесідей операторлық түрінде сипаттаймыз:

$$u_\alpha = R(\alpha)f_\delta$$

Егер көрсетілген жуық шешім дәл шешімге ұмтылатын болса (оң жағы ауықтуы 0-ге ұмтылғанда), онда  $R(\alpha)$  операторы регуляризацияланушы оператор деп аталады.  $R(\alpha)$  операторының таңдалған конструкциясы үшін  $\delta$ -ға қатысты  $\alpha$  регуляризациялаушы параметрін де көрсету қажет болады.

Тегістеу (сглаживающий) функционалы үшін Эйлер теңдеуі. (2.2.4)-(2.2.5) экстремалді есептерді шешудің орнына сәйкес Эйлер теңдеуін шешуге болады. Бұл жағдайда екінші ретті теңдеудің шешімі көмегімен жуық шешім анықталады:

$$A^* A u_\alpha + \alpha u_\alpha = A^* f_\beta \quad (2.2.6)$$

(2.2.3) қисынсыз (2.2.6) есепке өту өз-өзіне байланған (сопряженный)  $A^* A$  операторлары бар болған есепке өту арқылы жүзеге асырылады. Ол үшін (2.2.3) теңдеуінің сол жағын  $A^*$ -ға көбейтеміз және де оны  $\alpha E$  операторы көмегімен қоздырамыз.

Көрсетілген (2.2.4), (2.2.4) минимизациялау есептерінің және (2.2.6) теңдеуінің эквиваленттілігі есептеуде еркіндік береді. Вариациялық жол жалпылыққа ие, ол бірыңғай методологиялық позициялар көмегімен есептердің түрлі кластарын қарастыруға зор мүмкіндік береді. Қажетті сандық шешімдерді табу үшін Эйлердің теңдеуіне жүтінген тиімді болмақ.

$A = A^* \geq 0$  үшін берілген оператордың өзін қоздыруды жүзеге асыру жеткілікті:

$$A u_\alpha + \alpha u_\alpha = A^* f_\beta \quad (2.2.7)$$

(2.2.7) есеп жеңілдетілген және регуляризация алгоритмін қолдануға сай келеді. Расымен де, қисынсыз есептерді шешуде вариациялық әдістерден де басқа, жуық әдістердің 2- класын бөліп қарастыруға болады. Олар (мысалға, (2.2.3), (2.2.7)) кірістік немесе өңделген есептің операторын қоздыру арқылы сипатталады.

Шешімді априорлы шектеу кластары. Біз А.Н.Тихоновтың регуляризациялау әдісін негізінде (2.2.3), (2.2.4) қисынсыз есептерінің дәл шешімі бар деген

$$\|z\| \leq \|z_1\| + \|z_2\| \leq \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}} + s(\alpha) \quad (2.2.8)$$

болжамменен қарастырдық. Шешімдердің қателік баға көрсеткіші (2.2.8) тең, мұндағы  $s(\alpha) \rightarrow 0$  ұмтылады, егер регуляризациялаушы параметрі  $\alpha \rightarrow 0$ . Жинақтылық шешімнің априорлық шектеулері қойылған нормада орнатылады.  $\alpha(\beta) \rightarrow 0$ ,  $\beta \rightarrow 0$  үшін алынатын жуық шешімнің жинақталу жылдамдығын анықтайтын баға дәрежесін алған абзал.

Жағдайды нақтылап алу үшін туындыны жуық шешуге арналған есепті қарастырайық. Төмендегі айырымдық қатынасты қолданайық:



$$u_x = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} \quad (2.2.9)$$

Мұндағы  $u(x)$  функциясы барлық  $x$  мәндері үшін дифференциалданады. Бізді тек (2.2.9)  $du/dx$  айырымдық туындысы  $x$  нүктесіне қалай ұмтылатындығы ғана қызықтырады.

Жинақтылықты дәлелдеу мақсатында орталық айырымдық (2.2.9) туындының  $du/dx$  жинақталу жылдамдығының бағасын алу үшін  $u(x)$  функциясына қатаң болған шарттарды қоямыз. Егер де, мысалы,  $u(x)$  функциясы 2 ретті дифференциалданатын болса, онда (2.2.9)–дан  $u_x = \frac{du}{dx} + O(h)$  ала аламыз.

Ал, 3 ретті дифференциалданатын функция үшін төмендегіні аламыз:

$$u_x = \frac{du}{dx} + O(h^2)$$

Содан соң, дифференциалданатын функциялардың жинақтылығы азайған сайын, аппроксимация қателігі де сәйкесінше төмендейді. Осыған ұқсас жағдай регуляризациялау әдісінің нақты жинақталу жылдамдығын зерттеуде де орын алып жатады.  $\|u\|_{A^{-1}} \leq M$  орнына (2.2.3) есебінің дәл шешімі үшін қатаң болған шектеулерді қоямыз. Дәл шешімінің аса жатықтығы жайындағы талаптарын  $A$  операторына байланыстыру тиімдірек болады. Дәл шешім

$$\|A^{-1}u\| \leq M \quad (2.2.10)$$

класында деп есептейміз.

Қарастырылып отырған өз-өзіне байланған оң  $A$  операторы жағдайындағы аралық ((2.2.11) мен (2.2.10)) арасында да) орынды

$$\|u\|_{A^{-1}} \leq M \quad (2.2.11)$$

типтегі шешімдер үшін априоры шектеулер класын алады.

(2.2.10), (2.2.11) жағдайында  $s(\alpha)$  тәуелділігін регуляризациялау әдісі үшін (2.2.11) түрдегі қателіктер бағасын анықтауға болады.

Фредгольмнің 1-текті интегралдық теңдеуін Тихоновтың әдісімен сандық шешу. Төмендегідей Фредгольмнің 1-текті интегралдық теңдеуін қарастырайық:

$$Au = \int_a^b K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad a \leq t \leq b \quad (2.2.12)$$

мұндағы,  $K(t,s)$  – интегралдық теңдеудің ядросы, ал  $f(t)$  оң жақ мүше және  $u(s)$  ізделінетін белгісіз функция.  $K(t,s) \in C([a,b] \times [a,b])$ ,  $f(t) \in C([a,b])$ .

Өткен тарауда (2.2.12) теңдеудің қисынсыз есеп болатындығы толығырақ көрсетіледі. Сондықтан да, (2.2.12) теңдеуді шешу үшін қисынды болмаған есептерді шешу әдістерін қолдану керек болады. Біз осы (2.2.12) теңдеуді Тихоновтың регуляризация әдісінің көмегімен сандық шешу мәселесін қарастырамыз. Ол үшін Тихоновтың вариациялық есебіне сәйкес келетін Эйлер теңдеуін жуықтап шешеміз.

Жоғарыда қарастырылған

$$J(v) = \min_v \|Av - f\| + \alpha \|v\| \quad (2.2.13)$$

Тихонов функционалын шешудің орнына, төмендегі

$$A^*Au + \alpha u = A^*f \quad (2.2.14)$$

Эйлер теңдеуін жуықтап шешу қажетті. Мұнда  $A^*$  оператор  $A$  операторына түйіндес болған оператор. Біз қарастырып жатқан жағдайда  $A$  операторы төмендегідей болады:

$$Au = \int_a^b K(t,s)u(s)ds.$$

$A$  операторы үшін  $A^*$  түйіндес операторы келесідей теңдік көмегімен анықталады.

$$(Au, v) = (u, A^*v),$$

мұндағы,  $(\cdot, \cdot) - L_2(a,b)$  – дағы скаляр көбейтінді.

$A^*$  - түйіндес операторын табамыз:

$$(Au, v) = \int_c^d Au \cdot v(t)dt = \int_c^d \left\{ \int_a^b K(t,s)u(s)ds \right\} v(t)dt = \int_a^b \left\{ \int_c^d K(t,s)v(t)dt \right\} u(s)ds = (u, K^*v),$$

яғни,

$$K^*v = \int_c^d K(t,s)v(t)dt$$

Сонымен, біздің жағдайда

$$A^*v = \int_a^b K(s,t)v(s)ds$$

(2.2.12) интегралдық теңдеуін тікелей шешу жолын қарастырамыз. Ол үшін  $\int_a^b K(t,s)u(s)ds$  - интегралын қандай да бір квадратуралық формула көмегімен, айталық, трапеция формуласы арқылы жуықтаймыз:

$$\int_a^b K(t,s)u(s)ds \approx \sum_{i=1}^N K(t_j, s_i)u_i \cdot h = \sum_{i=1}^N K_{ji}u_i \cdot h,$$

мұндағы

$$K_{ji} = \begin{cases} \frac{1}{2}K_{ji}, \text{ егер } i = 1, N, h = 1/N \\ K_{ji}, \text{ егер } i = \overline{2, N-1} \end{cases}$$

Төмендегідей сызықтық теңдеулер жүйесін аламыз.

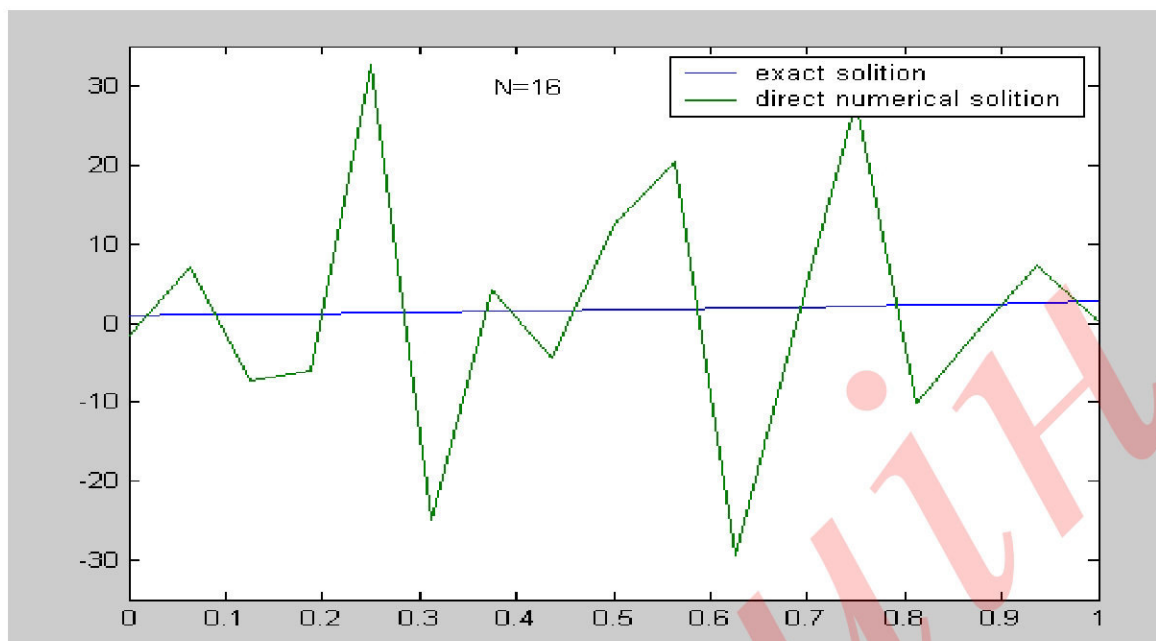
$$h \sum_{i=1}^N K_{ji}U_i = f_j, \quad j = \overline{1, N}$$

(2.2.12) интегралдық теңдеуін шешу барысында біз төмендегідей мысалды қарастырамыз:

$$\int_0^1 e^{ts}u(s)ds = f(t) \quad 0 \leq t \leq 1$$

Мұнда  $f(t) = \frac{e^{t+1}-1}{t+1}$  - интегралдық теңдеуінің оң жағы,  $u(s) = e^s$  - интегралдық теңдеуінің дәл шешімі болып табылады.

Осы теңдеуді тікелей сандық шешу жолын қарастырамыз. Осы сызықтық теңдеулер жүйесі  $N=10, N=16$  болған жағдайы MATHLab ортасында сандық шешілді, нәтижелері кестелерде көрсетілген. Есептеулер нәтижелері төменде келтірілді.



Сурет 6. Теңдеуді сандық шешудегі жуық шешімнің графигі

6-суреттен көрініп тұрғандай жуық шешімнің ауытқуы айтарлықтай сезіледі.

Төмендегі 1-кестеде дәл шешім және тікелей шешу жолымен алынған сандық шешім және олардың арасындағы ауытқу келтірілген.

Кесте 1.

Дәл шешімі		Тікелей шешімі		Ауытқу
	УТ =		УТ =	raznoct =
	1.0000		1.0000	2.5002
	1.0645		1.0645	-6.0305
	1.1331		1.1331	8.4038
	1.2062		1.2062	7.2977
	1.2840		1.2840	-31.3328
	1.3668		1.3668	26.1527
	1.4550		1.4550	-2.6726
	1.5488		1.5488	6.0516
	1.6487		1.6487	-10.9999
	1.7551		1.7551	-18.5404
	1.8682		1.8682	31.3403
	1.9887		1.9887	2.3447
	2.1170		2.1170	-25.8134
	2.2535		2.2535	12.3722
	2.3989		2.3989	3.5374
	2.5536		2.5536	-4.6392
	2.7183		2.7183	2.5745

Жоғарыда көрсетілген 1-кестедегі графиктен және кестеден дәл шешім мен тікелей интегралды трапеция формуласыменен жуықтау көмегімен алынған жуық

шешім арасындағы айырмашылықтың үлкен екендігін байқауға болады. Сондықтан да, Фредгольмнің 1-текті интегралдық теңдеуін жуықтап шешу үшін, регуляризация әдістерін қолдану керек болады. Ал, енді біз Фредгольмнің 1-текті текті интегралдық теңдеуін сандық шешу үшін Тихоновтың регуляризация әдісі арқылы шешуді қарастырамыз. Жоғарыда айтылып өтілгендей, Тихоновтың вариациялық есебі Эйлердің теңдеуін шешуге эквивалент болып табылады. Сондықтан (2.2.14) Эйлер теңдеуін құрамыз. Біздің жағдайда  $A^* = A$  деп санаймыз, яғни,  $A$  - өз-өзіне түйіндес болған оператор деп қарастырамыз.

Біздің жағдайда  $A^* = A$ . Сондықтан Эйлер теңдеуі келесідей болады:

$$\int_a^b \int_a^b K(s,t)K(s,\tau)u(\tau)d\tau ds + \alpha \cdot u(t) = \int_a^b K(t,s)f(s)ds \quad (2.2.15)$$

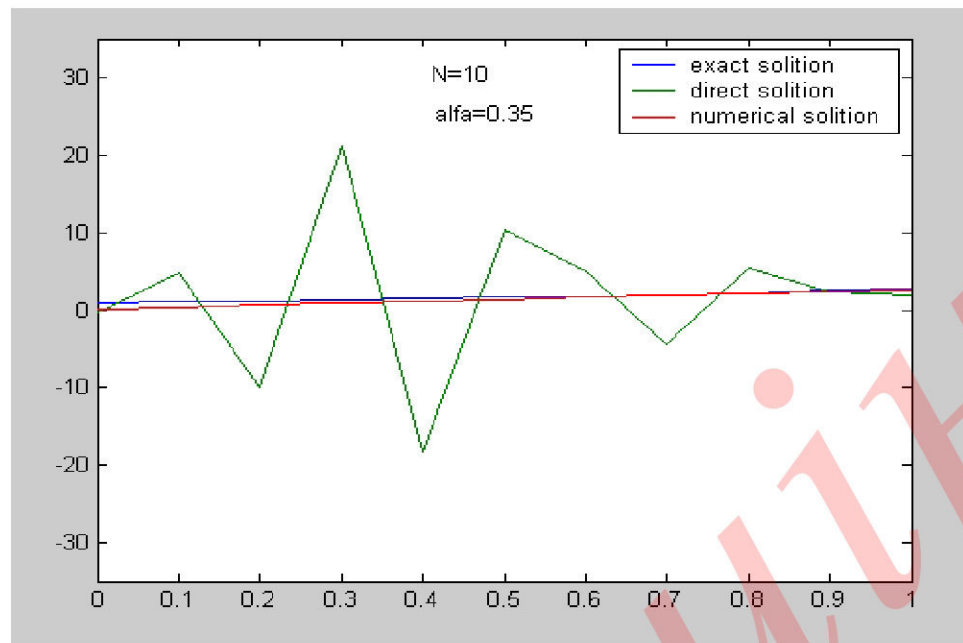
Осы (2.2.15) Эйлер теңдеуін жуықтап шешу үшін берілген интегралдарды трапеция формуласы көмегімен жуықтаймыз. Нәтижесінде келесідей теңдеулер жүйесін аламыз

$$\sum_{j=1}^{N+1} K_{jk} \cdot h_\tau \cdot h_s \cdot \sum_{i=1}^{N+1} K_{ji} u_i + \alpha u_k = \sum_{j=1}^{N+1} K_{jk} \cdot f_j, \quad j = \overline{1, N+1} \quad (2.2.16)$$

мұнда

$$K_{jk} = \begin{cases} \frac{1}{2} K_{jk}, & \text{егер } j = 1, N+1 \text{ болса} \\ K_{jk}, & \text{егер } j = \overline{2, N} \text{ болса} \end{cases}$$

Төменде (2.2.16) теңдеудің  $N=1, N=16, \alpha=0.35$  және де  $N=16, \alpha=0.01$  болғандағы жағдайлары MathLab ортасы арқылы алынған сандық шешімдер (Кесте 2) және графиктер келтірілген (Сурет 7).

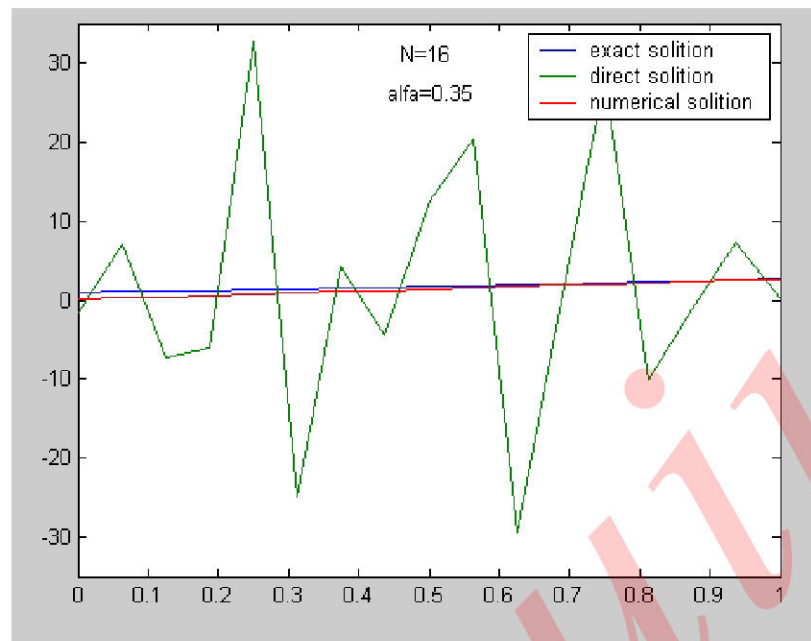


Сурет 7. Теңдеуді сандық шешудегі жуық шешімнің графигі

Кесте 2.

Дәл шешімі	Тікелей шешімі	Тихонов әдісімен алынған жуық шешімі	Дәл шешімі мен жуық шешімнің айырмасы
UT =	U =	UP =	absraznostt =
1.0000	-0.2084	0.0642	0.9358
1.1052	4.7858	0.3804	0.7248
1.2214	-9.9872	0.6332	0.5882
1.3499	21.1104	0.8871	0.4628
1.4918	-18.3158	1.1421	0.3498
1.6487	10.3008	1.3983	0.2504
1.8221	5.1034	1.6559	0.1662
2.0138	-4.3751	1.9150	0.0988
2.2255	5.3258	2.1758	0.0497
2.4596	2.3737	2.4384	0.0212
2.7183	1.9303	2.5673	

Төменде (Сурет 8, Кесте 3) қарастырылып жатқан Фредгольмнің бірінші текті интегралдық теңдеуін Тихоновтың регуляризация әдісімен Эйлер теңдеуін сандық шешуде алынған сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесінің коэффициенттері матрицасы және оң жақ мүшесі келтірілген.



Сурет 8. Теңдеуді сандық шешудегі жуық шешімнің графигі

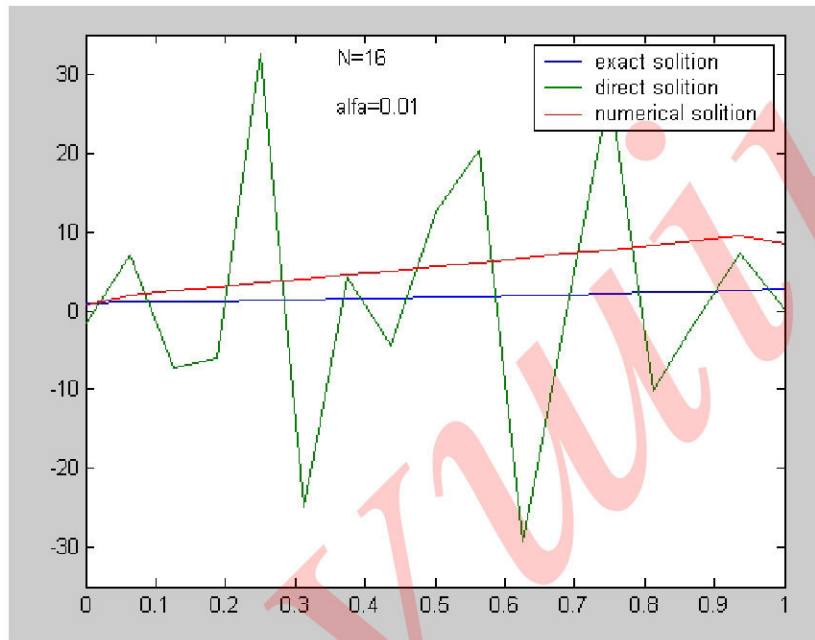
Кесте 3.

Дәл шешімі	Тікелей шешімі	Жуық шешім	Дәл шешімі мен жуық шешімнің айырмасы
U1 =	U =	UP =	absraznostt =
1.0000	-1.5002	0.0260	0.9740
1.0645	7.0949	0.2161	0.8484
1.1331	-7.2707	0.3803	0.7529
1.2062	-6.0914	0.5447	0.6616
1.2840	32.6169	0.7092	0.5748
1.3668	-24.7858	0.8739	0.4929
1.4550	4.1276	1.0388	0.4162
1.5488	-4.5028	1.2039	0.3449
1.6487	12.6487	1.3692	0.2796
1.7551	20.2954	1.5347	0.2204
1.8682	-29.4721	1.7004	0.1678
1.9887	-0.3560	1.8664	0.1224
2.1170	27.9304	2.0326	0.0844
2.2535	-10.1187	2.1991	0.0544
2.3989	-1.1385	2.3660	0.0329
2.5536	7.1928	2.5331	0.0205
2.7183	0.1438	2.6456	

Жоғарыдағыдай 3-кестеде төменде қарастырылып жатқан Фредгольмнің бірінші текті интегралдық теңдеуін Тихоновтың регуляризация әдісімен Эйлер теңдеуін сандық шешуде алынған сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесінің коэффициенттері матрицасы және оң жақ мүшесі келтірілген.

Жоғарыда келтірілген графиктерден және дәл шешім, Тихонов әдісімен алынған сандық шешім және олардың айырмасы (ауытқуы) есептеу шешу жолы дұрыс екендігін көрсетеді.

Төменде регуляризация параметрі  $\alpha = 0,01$  болғандағы есептеу нәтижелері келтірілген (Сурет 9), (Кесте 4).



Сурет 9. Теңдеуді сандық шешудегі жуық шешімнің графигі,  $\alpha = 0,01$

Кесте 4.

Дәл шешімі	Тікелей шешімі	Жуық шешім	Дәл шешімі мен жуық шешімнің айырмасы
UT =	U =	UP =	absraznostt =
1.0000	-1.5002	0.7599	0.2401
1.0645	7.0949	2.0117	0.9472
1.1331	-7.2707	2.5078	1.3747
1.2062	-6.0914	3.0083	1.8021
1.2840	32.6169	3.5134	2.2294
1.3668	-24.7858	4.0235	2.6566
1.4550	4.1276	4.5388	3.0838
1.5488	-4.5028	5.0597	3.5108
1.6487	12.6487	5.5865	3.9378
1.7551	20.2954	6.1197	4.3647
1.8682	-29.4721	6.6597	4.7914
1.9887	-0.3560	7.2068	5.2181
2.1170	27.9304	7.7617	5.6447
2.2535	-10.1187	8.3246	6.0711
2.3989	-1.1385	8.8962	6.4973
2.5536	7.1928	9.4771	6.9235
2.7183	0.1438	8.4618	

Осы кестеден көрініп тұрғандай регуляризация параметрінің  $\alpha = 0,01$  мәнінде сандық шешім дәл шешімнен айтарлықтай ауытқиды. Регуляризация



параметрінің оптимал мәні ретінде  $[0,35; 0,37]$  аралықтағы кез келген мәнді алсақ болады.

Негізінде регуляризация параметрінің оптимал мәні  $\|Au - f\| = \delta$  алшақтық теңдеуін шешу арқылы табылады. Мұнда  $\delta$  - теңдеудің оң жағының қателік шамасы болады. Біз бұл жағдайды қарастырған жоқпыз. Жұмыста біз регуляризация параметрін оған түрлі мәндер бере отырып есептеу нәтижелері бойынша таңдап алдық.

Сондықтан коррект болмаған есептерді шешуде регуляризация әдісін қолдану қажет болады.

Ал енді Фредгольмнің бірінші текті интегралдық теңдеуін санлық шешуде интегралды квадратуралық формуламен жуықтау нәтижесінде алынған сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесінің коэффициенттері матрицасы үшін  $\text{cond}A = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$  санының сипаттамаларын келтіреміз. Егер осы сан үлкен сан болатын болса, онда теңдеулер жүйесін шешу есебі қиынсыз есеп болады, ал егер осы сан кіші болса онда есеп коррект (дұрыс) есеп болады. Осы айтылғандардың дұрыстығы біз жоғарыда қарастырған бірінші текті интегралдық теңдеуді сандық шешу мысалында төменде келтіреміз. Алдымен  $N=10$  болған жағдайдағы есептеу нәтижелерін келтіреміз (Кесте 5, Кесте 6)

Кесте 5.

Дәл шешімі	Тікелей шешімі	Дәл шешімі мен тікелей шешімнің айырмасы
UТ =	U =	raznoct =
1.0000	-0.2084	1.2084
1.1052	4.7858	-3.6806
1.2214	-9.9872	11.2086
1.3499	21.1104	-19.7606
1.4918	-18.3158	19.8077
1.6487	10.3008	-8.6521
1.8221	5.1034	-3.2813
2.0138	-4.3751	6.3888
2.2255	5.3258	-3.1003
2.4596	2.3737	0.0859
2.7183	1.9303	0.7880

Кесте 6.

Дәл шешімі	Жуық шешімі	Дәл шешімі мен жуық шешімнің айырмасы
UT =	UP =	absraznostt =
1.0000	0.0642	0.9358
1.1052	0.3804	0.7248
1.2214	0.6332	0.5882
1.3499	0.8871	0.4628
1.4918	1.1421	0.3498
1.6487	1.3983	0.2504
1.8221	1.6559	0.1662
2.0138	1.9150	0.0988
2.2255	2.1758	0.0497
2.4596	2.4384	0.0212
2.7183	2.5673	

Енді N=16 боған жағдайдағы есептеу нәтижелерін келтіреміз (Кесте 7, Кесте 8)

$$\text{cond\_A\_No\_Regul} = 1.1440e+018$$

Кесте 7.

Дәл шешімі	Тікелей шешімі	Дәл шешімі мен тікелей шешімнің айырмасы
UT =	U =	raznost =
1.0000	-1.5002	2.5002
1.0645	7.0949	-6.0305
1.1331	-7.2707	8.4038
1.2062	-6.0914	7.2977
1.2840	32.6169	-31.3328
1.3668	-24.7858	26.1527
1.4550	4.1276	-2.6726
1.5488	-4.5028	6.0516
1.6487	12.6487	-10.9999
1.7551	20.2954	-18.5404
1.8682	-29.4721	31.3403
1.9887	-0.3560	2.3447
2.1170	27.9304	-25.8134
2.2535	-10.1187	12.3722
2.3989	-1.1385	3.5374
2.5536	7.1928	-4.6392
2.7183	0.1438	2.5745

$$\text{cond\_ACoef\_Regul} = 1.3183$$

Кесте 8.

Дәл шешімі	Жуық шешімі	Дәл шешімі мен жуық шешімнің айырмасы
UT =	UP =	absraznostt =
1.0000	0.0260	0.9740
1.0645	0.2161	0.8484
1.1331	0.3803	0.7529
1.2062	0.5447	0.6616
1.2840	0.7092	0.5748
1.3668	0.8739	0.4929
1.4550	1.0388	0.4162
1.5488	1.2039	0.3449
1.6487	1.3692	0.2796
1.7551	1.5347	0.2204
1.8682	1.7004	0.1678
1.9887	1.8664	0.1224
2.1170	2.0326	0.0844
2.2535	2.1991	0.0544
2.3989	2.3660	0.0329
2.5536	2.5331	0.0205
2.7183	2.6456	

Осы жоғарыда келтірілген есептеу нәтижелерінен көрініп тұрғандай Фредгольмнің бірінші текті интегралдық теңдеуін тікелей шешу коррект болмаған есеп болады. Осы айтылған тұжырымның дұрыстығын Фредгольмнің бірінші текті интегралдық теңдеуін тікелей шешуде алынған сызықты алгебралық теңдеулер жүйесінің коэффициенттер матрицасының  $\text{cond}A = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$  саны үлкен сан болатындығы есептеу нәтижелерінен көрініп тұр.

Осы жоғарыда көрсетіліп кеткен есептеу нәтижелерінен байқап тұрғандай Фредгольмнің 1- текті интегралдық теңдеуін тікелей шешу қисынсыз есеп болады. Осы айтылған тұжырымдардың дұрыстығын Фредгольмнің 1-текті интегралдық теңдеуін тікелей шешу барысында алынған сызықты алгебралық теңдеулер жүйесі коэффициенттері матрицасының  $\text{cond}A = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$  саны үлкен сан болатындығы есептеу нәтижелерінен көрініп тұр.

### 3 ТОМОГРАФИЯ ЕСЕПТЕРІНДЕГІ БЕЛГІСІЗ ШЕКАРАЛАРДЫ АНЫҚТАУ КЕРІ ЕСЕПТЕРІНІҢ ЖУЫҚ АЛГОРИТМДЕРІН ҚҰРУ

#### 3.1 Бөлікті тұрақты жылуөткізгіштік үшін $R^2$ жағдайда белгісіз шекараны анықтау кері есебінің жуық алгоритмі

Сыртқы шекарадағы бір өлшегендегі жазықтық жағдайындағы электроимпеданстық томография есептерін шешудің үш түрлі сандық шешу әдістері және математикалық қойылымы келтірілген. Алғашқы екі әдіс итерациялық болып келеді және қойылған есеп үшін тендеулер жүйесінің түрлі интерпретациясына негізделген. Үшінші әдіс берілген кері есепті екі ішкі есепке бөлу және оны кезектеп шешуге негізделген. Бұл тарауда электроимпеданстық томография есептерінің шешімі үшін ұсынылған сандық шешу әдістері бойынша есептеу эксперименттерінің нәтижелері көрсетілген.

Есептің қойылымы

Жазықтықтағы  $\Gamma_0$  шекарасы бар бір байланысты шенелген  $\Omega$  аймағын қарастырайық.  $\overline{\Omega}_1 \in \Omega$  болатындай  $\Gamma_1$  шекарасы бар бір байланысты шенелген  $\Omega_1$  аймақ болсын делік.  $\Gamma_0$  және  $\Gamma_1$  жеткілікті дәрежеде тегіс.  $\Omega_0 = \Omega \setminus \overline{\Omega}_1$  аймағын  $\Omega_0$  өрнектейік.

Келесі есепті қарастырайық.  $\Gamma_0$  шекарасы белгілі және осы шекарада  $f(x, y), g(x, y), (x, y) \in \Gamma_0$  функциясы берілген болсын.  $\sigma_0, \sigma_1$  – оң тұрақты берілгендер.  $u \in C(\overline{\Omega}), u(x, y) = u_1(x, y), (x, y) \in \Omega_i (i = 0, 1)$  мұндағы  $u_0 \in C^2(\Omega_0) \cap C^1(\overline{\Omega}_0), u_1 \in C^2(\Omega_1) \cap C^1(\overline{\Omega}_1)$  болатындай  $u(x, y)$  функциясы мен  $\Gamma_1$  белгісіз шекараны анықтау қажет.

$$\Delta u_i(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega_i, \quad i = 0, 1; \quad (3.1.1)$$

$$u_0(x, y) = u_1(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_1, \quad (3.1.2)$$

$$\sigma_0 \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial n} = \sigma_1 \frac{\partial u_1(x, y)}{\partial n}, \quad (x, y) \in \Gamma_1, \quad (3.1.3)$$

$$u_0(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_0, \quad (3.1.4)$$

$$\frac{\partial u_0(x, y)}{\partial n} = g(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_0, \quad (3.1.5)$$

Дирихле-Нейман кері есебінің шешу әдістері

(3.1.1)-(3.1.5) есебін (3.1.1)-(3.1.4) Дирихле есебіне кері есеп ретінде қарастыруға болады, мұндағы (3.1.5) қосымша шарттары бойынша  $u(x, y)$  және  $\Gamma_1$  белгісіздерін анықтау қажет. Бұл кері есепті Дирихле-Нейман кері есебі деп атаймыз.

Екінші жағынан (3.1.1)-(3.1.5) есебін (3.1.1)-(3.1.3), (3.1.5) Нейман есебіне кері есеп ретінде қарастыруға болады, мұндағы (3.1.4) қосымша шарттары

бойынша  $u(x, y)$  және  $\Gamma_1$  белгісіздерін анықтау қажет. Бұл кері есепті Нейман-Дирихле кері есебі деп атаймыз.

(3.1.1)-(3.1.5) есептің мұндай дуализмі екі шешу әдісін ұсына алады. Бұл тарауда Дирихле-Нейман кері есеп шешімінің итерациялық әдісі сипатталған.

Дирихле-Нейман кері есеп жағдайындағы белгісіз шекара үшін операторлық теңдеуі

$\Gamma_1$  белгісіз шекарасын анықтайтын функция үшін операторлық теңдеуді енгіземіз.  $\Gamma_1$  белгісіз қисықтарының класы осы класқа тиісті  $\Gamma_1$  қисықтарына жұлдызшалықтың жалпы центрі болып келетін  $M_0$  нүктесі белгілі, сонымен қатар центрі  $M_0$  нүктесі болып келетін  $\Gamma_1$  қисықтары полярлық координаталар жүйесі арқылы және  $r(\psi): r(\psi) \in C^2[0, 2\pi]$ ,  $\|r\|_{C^2[0, 2\pi]} \leq c_0$  функциялары арқылы беріледі деп болжам жасаймыз, мұндағы  $c_0$  – фиксерленген сан. Және де белгілі  $\Gamma_0$  шекарасы да сол полярлық координаталар жүйесі арқылы және  $R(\varphi): R(\varphi) \in C^2[0, 2\pi]$  функциясы арқылы беріледі деп, ал (3.1.1)-(3.1.5) есебі жазылған декарттық координаталар жүйесі  $M_0$  нүктесінен басталады.

(3.1.1)-(3.1.4) Дирихле есебінің шешімін екі қарапайым потенциалдар қабатының қосындысы түрінде іздейміз

$$u(M) = \int_{\Gamma_0} \mu(P) \ln\left(\frac{1}{\rho MP}\right) dl_p + (\sigma_0 + \sigma_1) \int_{\Gamma_1} v(P) \ln\left(\frac{1}{\rho MP}\right) dl_p, \quad (3.1.6)$$

мұндағы,  $(x, y)$  координаталы  $M$  нүкте  $\Omega$  аймағына тиісті.

(3.1.4), (3.1.3), (3.1.6) арқылы  $\mu(P)$  және  $v(P)$  тығыздықтары үшін интегральдық теңдеулер жүйесін аламыз

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_0} \mu(P) \ln\left(\frac{1}{\rho MP}\right) dl_p + (\sigma_0 + \sigma_1) \int_{\Gamma_1} v(P) \ln\left(\frac{1}{\rho MP}\right) dl_p = f(M), \quad M \in \Gamma_0, \quad (3.1.7) \\ \pi v(M) + \frac{1}{(\sigma_0 + \sigma_1)} \int_{\Gamma_0} \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_m} \ln\left(\frac{1}{\rho MP}\right) dl_p + \\ + \frac{(\sigma_0 - \sigma_1)}{(\sigma_0 + \sigma_1)} \int_{\Gamma_1} v(P) \frac{\partial}{\partial n_m} \ln\left(\frac{1}{\rho MP}\right) dl_p = 0, \quad M \in \Gamma_1 \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

$n_m$  –  $M$  нүктесіндегі  $\Gamma_1$  қисығына ішкі нормаль.

(3.1.7), (3.1.8) теңдеулерін поляр координаталар жүйесінде жазамыз.

$\Gamma_0$  контурында  $M(x_m, y_m)$  және  $P(x_p, y_p)$  нүктелері поляр координаталар жүйесінде келесідей түрде болсын делік:  $x_m = R(\psi) \cos \psi$ ,  $y_m = R(\psi) \sin \psi$ ,  $x_p = R(\varphi) \cos \varphi$ ,  $y_p = R(\varphi) \sin \varphi$ .  $\Gamma_1$  контурында  $M(x_m, y_m)$  және  $P(x_p, y_p)$  нүктелері келесідей түрге ие болады:  $x_m = r(\psi) \cos \psi$ ,  $y_m = r(\psi) \sin \psi$ ,  $x_p = r(\zeta) \cos \zeta$ ,  $y_p = r(\zeta) \sin \zeta$ . Келесідей мәндерді енгіземіз:  $\mu(\varphi) = \mu(R(\varphi) \cos \varphi, R(\varphi) \sin \varphi)$ ,

$v(\zeta) = v(r(\zeta)\cos \zeta, r(\zeta)\sin \zeta)$ ,  $f(\psi) = f(R(\psi)\cos \psi, R(\psi)\sin \psi)$ . Кейбір функцияларды белгілеу барысында оның басқаларға тәуелділігі көрсетіледі. Мысалға,  $D(\zeta, \psi)$  функциясының  $r$  функциясына тәуелділігін көрсету үшін  $D(\zeta, \psi)$  орнына  $D(\zeta, \psi; r)$  қолданылады. (3.1.7), (3.1.8) теңдеулерінен поляр координаталар жүйесіне көшкеннен соң төмендегідей теңдеулерді аламыз:

$$\int_0^{2\pi} N(\varphi, \psi) \mu(\varphi) d\varphi + (\sigma_0 - \sigma_1) \int_0^{2\pi} D(\zeta, \psi; r) v(\zeta) d\zeta = f(\psi), \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi, \quad (3.1.9)$$

$$\pi v(\psi) + \frac{1}{(\sigma_0 + \sigma_1)} \int_0^{2\pi} W(\varphi, \psi; r) \mu(\varphi) d\varphi + \frac{(\sigma_0 - \sigma_1)}{(\sigma_0 + \sigma_1)} \int_0^{2\pi} Q(\zeta, \psi; r) v(\zeta) d\zeta = 0, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi. \quad (3.1.10)$$

мұндағы

$$N(\varphi, \psi) = -\frac{1}{2} \sqrt{R^2(\varphi) + (R'(\varphi))^2} \ln(R^2(\varphi) + R^2(\psi) - 2R(\varphi)R(\psi)\cos(\varphi - \psi)), \quad (3.1.11)$$

$$D(\zeta, \psi; r) = -\frac{1}{2} \sqrt{r^2(\zeta) + (r'(\zeta))^2} \ln(r^2(\zeta) + R^2(\psi) - 2r(\zeta)R(\psi)\cos(\zeta - \psi)), \quad (3.1.12)$$

$$W(\varphi, \psi; r) = \frac{[r(\psi) - R(\varphi)\cos(\psi - \varphi)]r(\psi) - R(\varphi)r'(\psi)\sin(\psi - \varphi)}{R^2(\varphi) + r^2(\psi) - 2R(\varphi)r(\psi)\cos(\psi - \varphi)} * \frac{\sqrt{R^2(\varphi) + R'^2(\varphi)}}{\sqrt{r^2(\psi) + r'^2(\psi)}}, \quad (3.1.13)$$

$$Q(\zeta, \psi; r) = \frac{[r(\psi) - r(\zeta)\cos(\psi - \zeta)]r(\psi) - r(\zeta)r'(\psi)\sin(\psi - \zeta)}{r^2(\zeta) + r^2(\psi) - 2r(\zeta)r(\psi)\cos(\psi - \zeta)} * \frac{\sqrt{r^2(\zeta) + r'^2(\zeta)}}{\sqrt{r^2(\psi) + r'^2(\psi)}}. \quad (3.1.14)$$

Келесі кезекте (3.1.5) қосымша шартын қарастырайық. Осы шартты, (3.1.6) өрнегін және қарапайым қабат потенциал қасиетін қолдана отырып, төмендегі теңдеуді аламыз:

$$-\pi \mu(M) + \int_{\Gamma_0} \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_m} \ln \left( \frac{1}{\rho_{MP}} \right) dl_P + (\sigma_0 - \sigma_1) \int_{\Gamma_1} v(P) \frac{\partial}{\partial n_m} \ln \left( \frac{1}{\rho_{MP}} \right) dl_P = g(M), \quad M \in \Gamma_0 \quad (3.1.15)$$

мұндағы  $n_m$  –  $M$  нүктесіндегі  $\Gamma_0$  қисығына ішкі нормаль. (3.1.15) шартынан поляр координаталар жүйесіне өткеннен соң төмендегі теңдеуді аламыз:

$$-\pi\mu(\psi) + \int_0^{2\pi} S(\varphi, \psi)\mu(\varphi)d\varphi + (\sigma_0 - \sigma_1) \int_0^{2\pi} T(\zeta, \psi; r)\nu(\zeta)d\zeta = g(\psi), \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi, \quad (3.1.16)$$

мұндағы

$$S(\varphi, \psi) = \frac{[R(\psi) - R(\varphi)\cos(\psi - \varphi)]R(\psi) - R(\varphi)R'(\psi)\sin(\psi - \varphi)}{R^2(\varphi) + R^2(\psi) - 2R(\varphi)R(\psi)\cos(\psi - \varphi)} * \frac{\sqrt{R^2(\varphi) + R'^2(\varphi)}}{\sqrt{R^2(\psi) + R'^2(\psi)}}, \quad (3.1.17)$$

$$T(\zeta, \psi; r) = \frac{[R(\psi) - r(\zeta)\cos(\psi - \zeta)]R(\psi) - r(\zeta)R'(\psi)\sin(\psi - \zeta)}{r^2(\zeta) + R^2(\psi) - 2r(\zeta)R(\psi)\cos(\psi - \zeta)} * \frac{\sqrt{r^2(\zeta) + r'^2(\zeta)}}{\sqrt{R^2(\psi) + R'^2(\psi)}}. \quad (3.1.18)$$

ал,

$$g(\psi) = g(R(\psi)\cos \psi, R(\psi)\sin \psi)$$

(3.1.9), (3.1.10), (3.1.16) теңдеулері  $r(\psi)$  белгісіз функциясына қатысты сызықты емес операторлық теңдеуін анықтайды

$$Ar = g \quad (3.1.19)$$

$r(\psi)$  берілгені бойынша  $(Ar)(\psi)$  функциясын есептеу үшін (3.1.9), (3.1.10) интегральдық теңдеулер жүйесін шешіп және  $\mu(\psi)$ ,  $\nu(\psi)$  анықтап, содан соң (3.1.16) теңдеуінің сол жағындағы оператор мағынасын анықтау қажет.

Дирихле-Нейман кері есебін шешудің итерациялық әдісі

Қарастырылып отырған кері есепті сандық шешудің бірінші кезеңінде қажетті шекара үшін бастапқы жуықтау анықталады. Бастапқы жуықтаудың ең қарапайым тәсілі ретінде  $a$  радиуспен берілген шеңбер болып келеді. Бұл радиусты іздеу есебі шешімі стандартты әдіспен қиындықсыз алынатын бір айнымалы функцияны минимизациялауға алып келеді.

(3.1.19) теңдеу шешімінің итерациялық процесін қарастырайық. Белгісіз контурдың  $r_0(\psi)$  бастапқы жуықтау ретінде алдыңғы табылған шеңбер алынады.  $r_n(\psi)$  итерациялық процестің  $n$ -қадамында алынған функция делік.  $r_n(\psi)$  функция маңайында (3.1.19) теңдеуін сызықтандыру арқылы  $\rho_n(\psi)$  функциясы үшін сызықты операторлық теңдеуін аламыз:

$$B[r_n]\rho_n = g_n. \quad (3.1.20)$$

Жоғарыдағы теңдеуді шешіп және  $\rho_n(\psi)$  функциясын анықтап, төмендегі теңдеуді аламыз

$$r_{n+1}(\psi) = r_n(\psi) + \rho_n(\psi), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.21)$$

(3.1.20) теңдеу құрамындағы  $B[r_n]$  операторын және  $g_n$  функциясын анықтаймыз.

$\rho_n(\psi)$ –ге әсер ететін  $B[r_n]$  операторын келесі түрде анықтаймыз.

(3.1.9), (3.1.10) тығыздықтары үшін  $r_n(\psi)$  функциясымен сызықтық интегральдық теңдеулер жүйесі шешіледі

$$\int_0^{2\pi} N(\varphi, \psi) \mu(\varphi) d\varphi + (\sigma_0 - \sigma_1) \int_0^{2\pi} D(\zeta, \psi; r) \nu(\zeta) d\zeta = f(\psi), \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi, \quad (3.1.22)$$

$$\begin{aligned} \mu(\psi; r_n) + \frac{1}{(\sigma_0 + \sigma_1)} \int_0^{2\pi} J(\varphi, \psi; r_n) \mu(\varphi) d\varphi + \\ + \frac{(\sigma_0 - \sigma_1)}{(\sigma_0 + \sigma_1)} \int_0^{2\pi} Q(\zeta, \psi; r_n) \nu(\zeta) d\zeta = 0, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

және  $\mu(\psi; r_n), \nu(\psi; r_n)$  функциялары табылады.

Келесі функцияларды енгіземіз

$$\begin{aligned} \omega_1(\psi, r) &= \sqrt{r^2(\psi) + (r'(\psi))^2}, \quad \omega_2(\varphi) = \sqrt{R^2(\varphi) + (R'(\varphi))^2}, \\ \omega_3(\varphi, \psi; r) &= [r(\psi) - R(\varphi) \cos(\psi - \varphi)]r(\psi) - R(\varphi)r'(\psi) \sin(\psi - \varphi), \\ \omega_4(\zeta, \psi; r) &= r^2(\zeta) + R^2(\psi) - 2r(\zeta)R(\psi) \cos(\psi - \varphi), \\ \omega_5(\zeta, \psi; r) &= [r(\psi) - r(\zeta) \cos(\psi - \zeta)]r(\psi) - r(\zeta)r'(\psi) \sin(\psi - \zeta), \\ \omega_6(\zeta, \psi; r) &= r^2(\zeta) + r^2(\psi) - 2r(\zeta)r(\psi) \cos(\psi - \zeta) \end{aligned}$$

(3.1.22), (3.1.23) теңдеулер жүйелерінен табылған  $\mu(\psi; r_n)$  және  $\nu(\psi; r_n)$  функциялары арқылы келесі функцияларды есептейміз

$$E(\psi; r_n; \rho_n) = (\sigma_1 - \sigma_0) \int_0^{2\pi} U(\zeta, \psi; r_n, \rho_n) \nu(\zeta; r_n) d\zeta, \quad (3.1.24)$$

мұндағы,

$$\begin{aligned} U(\zeta, \psi; r_n, \rho_n) &= -\frac{1}{2} [r_n(\zeta) \rho_n(\zeta) + r_n'(\zeta) \rho_n'(\zeta)] (\omega_1(\zeta; r_n))^{-1} \ln [\omega_4(\zeta, \psi; r_n)] - \\ &- [r_n(\zeta) \rho_n(\zeta) - \rho_n(\zeta) R(\psi) \cos(\zeta - \psi)] (\omega_4(\zeta, \psi; r_n))^{-1} \omega_1(\zeta; r_n) \end{aligned}$$

Содан кейін, келесі функцияларды есептейміз

$$H(\psi; r_n, \rho_n) = -\frac{(\sigma_0 - \sigma_1)}{(\sigma_0 + \sigma_1)} \int_0^{2\pi} W(\zeta, \psi; r_n, \rho_n) \nu(\zeta; r_n) d\zeta - \frac{1}{(\sigma_0 + \sigma_1)} \int_0^{2\pi} V(\varphi, \psi; r_n, \rho_n) \mu(\varphi; r_n) d\varphi,$$

мұндағы,



$$\begin{aligned}
 J(\zeta, \psi; r_n, \rho_n) = & (\omega_6(\zeta, \psi; r_n))^{-1} \omega_1(\zeta; r_n) (\omega_1(\psi; r_n))^{-1} * \\
 & * (2\rho_n(\psi)r_n(\psi) - [\rho_n(\zeta)r_n(\psi) + \rho_n(\psi)r_n(\zeta)] \cos(\psi - \zeta) - \\
 & - [\rho_n'(\psi)r_n(\zeta) + \rho_n(\zeta)r_n'(\psi)] \sin(\psi - \zeta)) - \\
 & - 2\omega_5(\zeta, \psi; r_n) (\omega_6(\zeta, \psi; r_n))^{-2} \omega_1(\zeta; r_n) (\omega_1(\psi; r_n))^{-1} * \\
 & * (\rho_n(\psi)r_n(\psi) + \rho_n(\zeta)r_n(\zeta) - [\rho_n(\zeta)r_n(\psi) + \rho_n(\psi)r_n(\zeta)] \cos(\psi - \zeta)) - \\
 & - \omega_5(\zeta, \psi; r_n) (\omega_6(\zeta, \psi; r_n))^{-1} (\omega_1(\psi; r_n))^{-3} \omega_1(\zeta; r_n) * \\
 & * (\rho_n(\psi)r_n(\psi) + \rho_n'(\psi)r_n'(\psi)) + \omega_5(\zeta, \psi; r_n) (\omega_6(\zeta, \psi; r_n))^{-1} * \\
 & * (\omega_1(\psi; r_n))^{-1} (\omega_1(\zeta; r_n))^{-1} (r_n(\zeta)\rho_n(\zeta) + r_n'(\zeta)\rho_n'(\zeta)),
 \end{aligned}$$

және

$$\begin{aligned}
 V(\varphi, \psi; r_n, \rho_n) = & (\omega_4(\psi, \varphi; r_n))^{-1} \omega_2(\varphi) (\omega_1(\psi; r_n))^{-1} * \\
 & * [2r_n(\psi)\rho_n(\psi) - \cos(\psi - \varphi)R(\varphi)\rho_n(\psi) - \rho_n'(\psi)R(\varphi)\sin(\psi - \varphi)] - \\
 & - \omega_3(\varphi, \psi; r_n) \omega_2(\varphi) (\omega_1(\psi; r_n))^{-1} * \\
 & * (\omega_4(\psi, \varphi; r_n))^{-2} [2r_n(\psi)\rho_n(\psi) - 2R(\varphi)\rho_n(\psi)\cos(\psi - \varphi)] - \\
 & - \omega_3(\varphi, \psi; r_n) \omega_2(\varphi) (\omega_4(\psi, \varphi; r_n))^{-1} (\omega_1(\psi; r_n))^{-3} [\rho_n(\psi)r_n(\psi) + \rho_n'(\psi)r_n'(\psi)]
 \end{aligned}$$

(3.1.24) және (3.1.25) формулаларымен есептелінген  $E(\psi; r_n; \rho_n)$  және  $H(\psi; r_n; \rho_n)$  функциялары арқылы  $\hat{\mu}(\psi; r_n; \rho_n)$  және  $\hat{\nu}(\psi; r_n; \rho_n)$  функцияларына қатысты сызықты интегральдық теңдеулер жүйесі шешіледі

$$\int_0^{2\pi} N(\varphi, \psi) \hat{\mu}(\varphi; r_n, \rho_n) d\varphi + (\sigma_0 - \sigma_1) \int_0^{2\pi} D(\zeta, \psi; r_n) \hat{\nu}(\zeta; r_n, \rho_n) d\zeta = E(\psi; r_n; \rho_n), \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi, \quad (3.1.26)$$

$$\pi \hat{\nu}(\psi; r_n, \rho_n) + \frac{1}{(\sigma_0 + \sigma_1)} \int_0^{2\pi} W(\varphi, \psi; r_n) \hat{\mu}(\varphi; r_n, \rho_n) d\varphi + \quad (3.1.27)$$

$$\frac{(\sigma_0 - \sigma_1)}{(\sigma_0 + \sigma_1)} \int_0^{2\pi} Q(\zeta, \psi; r_n) \hat{\nu}(\zeta; r_n, \rho_n) d\zeta = H(\psi; r_n; \rho_n), \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi,$$

мұндағы  $N(\varphi, \psi)$ ,  $D(\zeta, \psi; r_n)$ ,  $W(\varphi, \psi; r_n)$  және  $Q(\zeta, \psi; r_n)$  функциялары (3.1.11), (3.1.12), (3.1.13) және (3.1.14) формулаларына сәйкес анықталады.

Содан кейін  $B[r_n] \rho_n$  функциясы сызықтық оператор ретінде есептелінеді

$$\begin{aligned}
 (B(r_n)\rho_n)(\psi) = & -\pi \hat{\mu}(\psi; r_n, \rho_n) + \int_0^{2\pi} S(\varphi, \psi) \hat{\mu}(\varphi; r_n, \rho_n) d\varphi + \\
 & + (\sigma_0 - \sigma_1) \int_0^{2\pi} L(\zeta, \psi; r_n, \rho_n) \hat{\nu}(\zeta; r_n) d\zeta + (\sigma_0 - \sigma_1) \int_0^{2\pi} T(\zeta, \psi; r_n) \hat{\nu}(\zeta; r_n, \rho_n) d\zeta.
 \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

Мұндағы  $S(\varphi, \psi)$  және  $T(\zeta, \psi; r_n)$  функциялары (3.1.17) және (3.1.18) формулаларына сәйкес есептелінеді, ал

$$\begin{aligned} L(\zeta, \psi; r_n, \rho_n) = & -(\omega_4(\zeta, \psi; r_n))^{-1} \omega_1(\zeta; r_n)(\omega_2(\psi))^{-1} * \\ & * [\cos(\psi - \zeta)R(\psi)\rho_n(\zeta) + \rho_n(\zeta)R'(\psi)\sin(\psi - \zeta)] + \\ & + ([R(\psi) - r_n(\zeta)\cos(\psi - \zeta)]R(\psi) - r_n(\zeta)R'(\psi)\sin(\psi - \zeta))(\omega_2(\psi))^{-1} * \\ & * ((\omega_4(\zeta, \psi; r_n))^{-1}(\omega_1(\zeta; r_n))^{-1}[r_n(\zeta)\rho_n(\zeta) + r_n'(\zeta)\rho_n'(\zeta)] - \\ & - \omega_1(\zeta; r_n)(\omega_4(\zeta, \psi; r_n))^{-2}[2r_n(\zeta)\rho_n(\zeta) - 2R(\psi)\rho_n(\zeta)\cos(\psi - \zeta)]) \end{aligned}$$

(3.1.20) теңдігінің оң жағы  $g_n(\psi)$  келесі түрде есептелінеді:

$$g_n(\psi) = g(\psi) + \pi\mu(\psi; r_n) - \int_0^{2\pi} S(\varphi, \psi)\mu(\varphi; r_n)d\varphi - (\sigma_0 - \sigma_1) \int_0^{2\pi} T(\zeta, \psi; r_n)v(\zeta; r_n)d\zeta.$$

Осыменен (3.1.21) итерациялық процесін анықтайтын (3.1.20) сызықты операторлық теңдеуін сипаттау аяқталды.

Итерациялық әдісті сандық жүзеге асыру келесі түрде болады.  $[0, 2\pi]$  кесіндісі аралығында  $\psi_i$  торы және  $r_n(\psi)$  функциясының  $r_n^i$  торлық аналогтары енгізіледі. (3.1.26), (3.1.27) интегральдық теңдеуіндегі интегральдарды және (3.1.28) формуланы квадратуралық формулаға алмастырғаннан кейін (3.1.20) есеп теңдеуінің шешімі сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін шешуге алып келеді. Алынған сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін шешу үшін Тихоновтың регуляризация әдісі қолданылады. Регуляризация параметрінің шамасы бастапқы мәліметпен және  $n$  итерациялық процесс қадамымен дәлме-дәл сәйкес келеді.

### 3.2 Бөлікті тұрақты жылуөткізгіштік үшін $R^3$ жағдайда белгісіз шекараны анықтау кері есебінің жуық алгоритмі

Бұл тараушада бөлікті тұрақты орта және аймақтың сыртқы шекарасында бір рет өлшеу жағдайдағы электроимпеданстық томография есептерін шешудің сандық әдісі баяндалған. Бұл әдіс берілген белгісіз беттегі  $\Gamma_1$  функциясы үшін сызықты емес операторлық теңдеуді шығаруға және алынған операторлық теңдеуді шешудің регуляризацияланған итерациялық әдісін қалыптастыруға негізделген.

Есептің қойылымы

Кеңістіктегі бірбайланысты  $\Gamma_0$  шекаралы  $\Omega$  шенелген аймақты қарастырайық.  $\Omega_1 - \overline{\Omega_1} \in \Omega$  болатындай,  $\Gamma_1$  шекаралы бірбайланысты аймақ болсын делік.  $\Gamma_0$  және  $\Gamma_1$  беттері жеткілікті дәрежеде тегіс.  $\Omega_0$  аймағын  $\Omega_0 = \Omega / \overline{\Omega_1}$  арқылы өрнектейміз.

Келесі шекаралық есепті қарастырайық.  $u \in C(\bar{\Omega})$ ,  $u(M) = u_i(M)$ ,  $M \in \Omega_i$  ( $i = 0, 1$ ), мұндағы  $u_i \in C^2(\Omega_i) \cap C^1(\bar{\Omega}_i)$  ( $i = 0, 1$ ) болатындай функциясын анықтау қажет болсын.

$$\Delta u_i(M) = 0, \quad M \in \Omega_i, \quad i = 0, 1, \quad (3.2.1)$$

$$u_0(M) = u_1(M), \quad M \in \Gamma_1, \quad (3.2.2)$$

$$\sigma_0 \frac{\partial u_0(M)}{\partial n} = \sigma_1 \frac{\partial u_1(M)}{\partial n}, \quad M \in \Gamma_1, \quad (3.2.3)$$

$$u_0(M) = f(M), \quad M \in \Gamma_0. \quad (3.2.4)$$

Мұндағы,  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$  берілген оң тұрақтылар, ал  $f(M)$  белгілі функция,  $\Gamma_0$  шекарасында үзіліссіз және тұрақты емес [51].

Кері есепті қалыптастырамыз. (3.2.1)-(3.2.4) шекаралық есебінде  $\Gamma_0$  беті,  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$  тұрақтылары және  $\Gamma_0$ -де  $f(M)$  берілген функция, ал  $\Gamma_1$  беті белгісіз болсын.  $\Gamma_1$  анықтау қажет, егер (3.2.1)-(3.2.4) есебінің шешімі жайлы қосымша мәліметтер белгілі болса.

$$\frac{\partial u(M)}{\partial n} = g(M), \quad M \in \Gamma_0, \quad (3.2.5)$$

мұндағы  $g(M)$  белгілі функциясы  $\Gamma_0$ -де үзіліссіз, ал  $n$   $\Gamma_0$ -ге ішкі нормаль.

Белгісіз бет үшін операторлық теңдеу.

$\Gamma_1$  белгісіз бетін анықтайтын функциясы үшін операторлық теңдеуді енгіземіз.  $\Gamma_1$  бетінің белгісіз класы келесідей деп болжаймыз,  $\Gamma_1$  беті үшін және осы класқа тиесілі жалпы жұлдызша центрі болып келетін  $M_0$  нүктесі белгілі болсын, сонымен қатар  $M_0$  нүктесі центрі болатын,  $r(\theta, \varphi): r(\theta, \varphi) \in C^2\{[0, \pi] \times [0, 2\pi]\}$  және  $\|r\|_{C^2\{[0, \pi] \times [0, 2\pi]\}} \leq c_0$  функциялары арқылы берілген сфералық координаталар жүйесінде  $\Gamma_1$  беті беріледі, мұндағы  $c_0$  – фиксерленген сан.  $\Gamma_0$  белгілі беті де  $R(\theta, \varphi): R(\theta, \varphi) \in C^2\{[0, \pi] \times [0, 2\pi]\}$  сфералық координаталар жүйесінде беріледі. Теңдеуді енгізу үшін  $M_0$  нүктесінде бастамасы бар декарттық координаталар жүйесі қолданылады [34, 35].

$u(M)$  функциясын екі қарапайым потенциалдардың қосындысы түрінде іздейміз.

$$u(M) = \iint_{\Gamma_0} \mu(P) \frac{1}{\rho_{MP}} dSp + (\sigma_0 - \sigma_1) \iint_{\Gamma_1} v(P) \frac{1}{\rho_{MP}} dSp, \quad M \in \Omega, \quad (3.2.6)$$

мұндағы  $\rho_{MP}$  –  $M$  және  $P$  нүктелер арасындағы қашықтық.

(3.2.3), (3.2.4) және (3.2.6) арқылы  $\mu(P)$ ,  $v(P)$  тығыздықтары үшін интегралдық теңдеулер жүйесін аламыз

$$\iint_{\Gamma_0} \mu(P) \frac{1}{\rho_{MP}} dSp + (\sigma_0 - \sigma_1) \iint_{\Gamma_1} \nu(P) \frac{1}{\rho_{MP}} dSp = f(M), \quad M \in \Gamma_0, \quad (3.2.7)$$

$$2\pi\nu(M) + \frac{1}{(\sigma_0 + \sigma_1)} \iint_{\Gamma_0} \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_m} \left( \frac{1}{\rho_{MP}} \right) dSp +$$

$$+ \frac{(\sigma_0 - \sigma_1)}{(\sigma_0 + \sigma_1)} \iint_{\Gamma_1} \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_m} \left( \frac{1}{\rho_{MP}} \right) dSp = 0, \quad M \in \Gamma_1, \quad (3.2.8)$$

мұндағы  $n_m - \Gamma_1$  бетіне  $M$  нүктесіндегі ішкі нормаль.

(3.2.7), (3.2.8) теңдеулерін сфералық координаталар жүйесі түрінде жазамыз.  $\Gamma_0$  беті  $R(\theta, \varphi)$  функциялары арқылы және бұл бет нүктелерінің декарттық координаталары төмендегіге тең

$$\begin{aligned} x(\theta, \varphi, R) &= R(\theta, \varphi) \sin \theta \cos \varphi, & 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ y(\theta, \varphi, R) &= R(\theta, \varphi) \sin \theta \sin \varphi, & 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ z(\theta, \varphi, R) &= R(\theta, \varphi) \cos \theta, & 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{aligned}$$

$\Gamma_1$  беті  $r(\theta, \varphi)$  функциялары арқылы және бұл бет нүктелерінің декарттық координаталары төмендегіге тең

$$\begin{aligned} x(\theta, \varphi, r) &= r(\theta, \varphi) \sin \theta \cos \varphi, & 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ y(\theta, \varphi, r) &= r(\theta, \varphi) \sin \theta \sin \varphi, & 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ z(\theta, \varphi, r) &= r(\theta, \varphi) \cos \theta, & 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{aligned}$$

(3.2.7), (3.2.8) теңдеулерін сфералық координаталар жүйесінде жазу үшін қажет болатын көмекші функциялар қатарын енгіземіз:

$$\begin{aligned} A(\theta, \varphi; \sigma) &= \sigma(\theta, \varphi) \sigma_\varphi(\theta, \varphi) \sin \varphi - \sigma(\theta, \varphi) \sigma_\theta(\theta, \varphi) \cos \varphi \sin \theta \cos \theta + \sigma^2(\theta, \varphi) \cos \varphi \sin^2 \theta, \\ C(\theta, \varphi; \sigma) &= \sigma(\theta, \varphi) \sigma_\theta(\theta, \varphi) \sin^2 \theta + \sigma^2(\theta, \varphi) \sin \theta \cos \theta, \\ D(\theta, \varphi; \sigma) &= \sqrt{A^2(\theta, \varphi; \sigma) + B^2(\theta, \varphi; \sigma) + C^2(\theta, \varphi; \sigma)}. \end{aligned}$$

Осы және келесі кейбір функцияларды белгілеуде басқа айнымалыларға тәуелділігі көрсетіледі. Мысалға,  $A(\theta, \varphi; \sigma)$  функциясы  $\sigma(\theta, \varphi)$  функциясына тәуелді немесе  $R(\theta, \varphi)$  функциясына тәуелді деп қарастырылады егер  $A(\theta, \varphi; R)$  функциясы  $\Gamma_0$  бетінде қарастырылатын болса және де егер  $\Gamma_1$  бетінде қарастырылатын болса, онда  $r(\theta, \varphi)$  функциясына тәуелді болады [36]. Көмекші өрнектер келесі екі функцияға тәуелді:  $\hat{\sigma}(\theta, \varphi)$  және  $\bar{\sigma}(\xi, \alpha)$

$$\begin{aligned}
 H(\theta, \varphi, \xi, \alpha; \hat{\sigma}(\theta, \varphi), \bar{\sigma}(\xi, \alpha)) &= (\hat{\sigma}^2(\theta, \varphi) + \bar{\sigma}^2(\xi, \alpha) - \\
 &- 2\hat{\sigma}(\theta, \varphi)\bar{\sigma}(\xi, \alpha)\sin\xi\sin\theta\cos(\varphi-\alpha) - 2\hat{\sigma}(\theta, \varphi)\bar{\sigma}(\xi, \alpha)\cos\xi\cos\theta)^{1/2}, \\
 J(\theta, \varphi, \xi, \alpha; \hat{\sigma}(\theta, \varphi), \bar{\sigma}(\xi, \alpha)) &= [H(\theta, \varphi, \xi, \alpha; \hat{\sigma}(\theta, \varphi), \bar{\sigma}(\xi, \alpha))]^3 \times \\
 &\times (A(\theta, \varphi, \hat{\sigma}) [x(\theta, \varphi, \hat{\sigma}) - x(\xi, \alpha; \bar{\sigma})] + B(\theta, \varphi, \hat{\sigma}) [y(\theta, \varphi, \hat{\sigma}) - y(\xi, \alpha; \bar{\sigma})] + \\
 &+ C(\theta, \varphi, \hat{\sigma}) [z(\theta, \varphi, \hat{\sigma}) - z(\xi, \alpha; \bar{\sigma})])
 \end{aligned}$$

Сфералық координаталар жүйесіндегі  $\mu(M)$ ,  $\nu(M)$  потенциал тығыздықтары мен  $f(M)$  функциясын білдіретін функцияны енгіземіз.

$$\begin{aligned}
 \mu(\theta, \varphi) &= \mu [x(\theta, \varphi, R), y(\theta, \varphi, R), z(\theta, \varphi, R)], & 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\
 \nu(\theta, \varphi) &= \nu [x(\theta, \varphi, r), y(\theta, \varphi, r), z(\theta, \varphi, r)], & 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\
 f(\theta, \varphi) &= f [x(\theta, \varphi, R), y(\theta, \varphi, R), z(\theta, \varphi, R)], & 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.
 \end{aligned}$$

(3.2.7), (3.2.8) теңдеулерінен сфералық координаталарға көшу арқылы келесіні аламыз:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi N(\theta, \varphi, \xi, \alpha) \mu(\xi, \alpha) d\xi d\alpha + (\sigma_0 - \sigma_1) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi K(\theta, \varphi, \xi, \alpha; r) \nu(\xi, \alpha) d\xi d\alpha = \\
 = f(\theta, \varphi), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi,
 \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

$$\begin{aligned}
 2\pi\nu(\theta, \varphi) + \frac{1}{(\sigma_0 + \sigma_1)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi W(\theta, \varphi, \xi, \alpha; r) \mu(\xi, \alpha) d\xi d\alpha + \\
 + \frac{(\sigma_0 - \sigma_1)}{(\sigma_0 + \sigma_1)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Q(\theta, \varphi, \xi, \alpha; r) \nu(\xi, \alpha) d\xi d\alpha = 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi,
 \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

мұндағы

$$N(\theta, \varphi, \xi, \alpha) = \frac{D(\xi, \alpha; R)}{H(\theta, \varphi, \xi, \alpha; R(\theta, \varphi), R(\xi, \alpha))}, \tag{3.2.11}$$

$$K(\theta, \varphi, \xi, \alpha; r) = \frac{D(\xi, \alpha; r)}{H(\theta, \varphi, \xi, \alpha; R(\theta, \varphi), r(\xi, \alpha))}, \tag{3.2.12}$$

$$W(\theta, \varphi, \xi, \alpha; r) = \frac{D(\xi, \alpha; R)}{D(\theta, \varphi; r)} J(\theta, \varphi, \xi, \alpha; r(\theta, \varphi), R(\xi, \alpha)), \tag{3.2.13}$$

$$Q(\theta, \varphi, \xi, \alpha; r) = \frac{D(\xi, \alpha; r)}{D(\theta, \varphi; r)} J(\theta, \varphi, \xi, \alpha; r(\theta, \varphi), r(\xi, \alpha)), \tag{3.2.14}$$

(3.2.7) қосымша шартын қарастырайық. Осы шартты, (3.2.8) және қарапайым потенциалдар қасиеттерін пайдалана отырып келесі теңдікті аламыз

$$-2\pi\mu(M) + \iint_{\Gamma_0} \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_m} \left( \frac{1}{\rho MP} \right) ds_P + (\sigma_0 - \sigma_1) \iint_{\Gamma_1} v(P) \frac{\partial}{\partial n_m} \left( \frac{1}{\rho MP} \right) ds_P = g(M), \quad M \in \Gamma_0, \quad (3.2.15)$$

мұндағы  $n_m$  –  $\Gamma_0$  бетіне  $M$  нүктесіндегі ішкі нормаль. (3.2.15) теңдеуіне, сфералық координаталарға көшкеннен кейін келесі теңдеулерді аламыз

$$\begin{aligned} -2\pi\mu(\theta, \varphi) + \int_0^{2\pi} \int_0^\pi S(\theta, \varphi, \xi, \alpha) \mu(\xi, \alpha) d\xi d\alpha + (\sigma_0 - \sigma_1) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi T(\theta, \varphi, \xi, \alpha; r) v(\xi, \alpha) d\xi d\alpha = \\ = g(\theta, \varphi), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

мұндағы,

$$S(\theta, \varphi, \xi, \alpha) = \frac{D(\xi, \alpha; R)}{D(\theta, \varphi; R)} J(\theta, \varphi, \xi, \alpha; R(\theta, \varphi), R(\xi, \alpha)), \quad (3.2.17)$$

$$T(\theta, \varphi, \xi, \alpha; r) = \frac{D(\xi, \alpha; r)}{D(\theta, \varphi; R)} J(\theta, \varphi, \xi, \alpha; R(\theta, \varphi), r(\xi, \alpha)). \quad (3.2.18)$$

(3.2.9), (3.2.10) және (3.2.14) теңдеулері  $r(\theta, \varphi)$  белгісіз функциясына қатысты сызықты емес операторлық теңдеуді анықтайды

$$Ur = g. \quad (3.2.19)$$

$r(\theta, \varphi)$  қатысты  $(Ur)(\theta, \varphi)$  функциясын есептеу үшін (3.2.9), (3.2.10) интегралдық теңдеулер жүйесін шешу және  $\mu(\theta, \varphi), v(\theta, \varphi)$  анықтау қажет, содан кейін (3.2.14) теңдеуінің сол жағындағы оператор мағынасын анықтау керек.

### 3.3 Потенциалды жалғастыру кері есебін сандық шешу

Типтік қисынсыз есеп ретінде көп жағдайда бірінші текті интегралдық теңдеулер жүреді. Біз құбылмалы масса үлесі бойынша жердің төменгі бет қабатында берілген аномальды гравитациялық өріс жалғасуында қолданылатын интегралдық теңдеулерді сандық шешу жолдарын қарастырамыз. бағдарламаны жүзеге асыру деректерді енгізуде кездейсоқ қателікпен берілген есепті шешуде итерациялық әдістерді қолдануға негізделген.

Магниттік барлауда, сонымен қатар, тұрақты токті электрлік барлауда маңызды есеп ретінде жердің беткі қабатындағы потенциал өрістің жалғасуы болып табылады. Мұндай есептердің шешімі негізінде гравитациялық аномалий және электромагниттік өрістің жағдайы идентификацияланады. Біз

гравитациялық өріс жалғасуының екі өлшемді жағдайындағы есеп формулировкасымен шектелеміз.

Жердің бетінде орналасқан гравитациялық аномаль потенциалын  $U$  – арқылы белгілейміз.  $x$  – горизонтальды координата болсын, жердің беткі қабатында  $z = 0$  болғандықтан,  $z$  осін вертикаль жоғары қарай бағыттаймыз. Тереңінде  $H$  бар  $z < 0$  ауытқуларға дейін болатын гравитациялық потенциалды анықтау есебі қарастырылады.

Қобалжу массаларынан болатын гравитациялық потенциалдар жалғасу есебін қарастырамыз.  $U(x, z)$  бұл потенциал ауытқу аймағынан тысқары болғанда Лаплас теңдеуін қанағаттандырады, олай болса

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \quad z > -H. \quad (3.3.1)$$

Жердің беткі қабатында нақты өлшеу берілгендері бойынша келесі шарт қойылады

$$\frac{\partial U}{\partial z}(x, 0) = \varphi(x). \quad (3.3.2)$$

Келесі шекаралық шарт төмендегідей түрде болады

$$U(x, \infty) = 0. \quad (3.3.3)$$

$|x| \rightarrow \infty$  болғанда  $\varphi(x)$  функциясына шешімнің шенелгендігін қамтамасыз ететін табиғи шектеулер енгізіледі.

$z > 0$  болғанда (3.3.1)- (3.3.3) есептерін қарастыру қарапайым шекаралық есеп болып келеді. Бұл қисынды есептің жалғасуында  $-H < z < 0$  аралас аймағына проблема қойылады.

$z < 0$  болғанда (3.3.1)- (3.3.3) жалғасу есебін (3.3.3) шекаралық шарты бойынша зерттеу оңтайлы емес. Оны  $u = \partial U / \partial z$  үшін жалғасу есебі ретінде қайта құрса болады:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad z > -H, \quad (3.3.4)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (3.3.5)$$

$$u(x, \infty) = 0. \quad (3.3.6)$$

(3.3.4)- (3.3.6) жағдайында біз Лаплас теңдеуі үшін Дирихле есебінің жалғасу есебін аламыз.

Ауытқу бойынша гравитациялық өрістің жалғасу есебінің шешіміне қатысты кейбір қарапайым бейнелерді келтірейік. Жүргізілген есептеулерде

$(x^1, z^1) = (0.8, -0.3)$  центрлері бойынша екі аномальдардың шеңберлік қиылысумен берілген модельдік есеп қарастырылған.

$(x^2, z^2) = (1.1, -0.4)$  (3.3.4)- (3.3.6) есептерінің нақты шешімі келесі түрде болады:

$$u(x, z) = c_1 \frac{z - z_1}{(x - x_1)^2 + (z - z_1)^2} + c_2 \frac{z - z_2}{(x - x_2)^2 + (z - z_2)^2}$$

$c_1 = 0.3, c_2 = 1.2$  болсын делік, өйткені, терең ауытқу төрт есе үлкен қуатқа ие.

$H = 0, H = 0.1$  берілгендері бойынша өлшеу барысында гравитациялық потенциал қобалжуының екі көзі төмен дәрежеде идентификацияланады. Үлкен тереңдікте ауытқулардың бөлінуі орын алады. Сондықтанда, осы жағдаймен ауытқулар төңірегінде өріс потенциалының жалғасу қажеттілігі туындайды.

Интегралдық теңдеу

(3.3.4)-(3.3.6) жалғасу есебінің жуық шешімі үшін түрлі есептеу алгоритмдерін қолдануға болады. Ауытқудан шыққан гравитациялық потенциалды  $z = -H$  тереңдікте және  $0 \leq x \leq L$  кесіндісі аралығында орналасқан жеткізушісі бар қарапайым потенциал қабатымен жуықтаймыз.

$$U(x, z) = \int_0^L \ln r \mu(s) ds, \quad r = \sqrt{(x-s)^2 + (z+H)^2}, \quad z > -H.$$

Вертикаль айнымалысы бойынша туынды үшін келесіні аламыз:

$$u(x, z) = \int_0^L \frac{z+H}{(x-s)^2 + (z+H)^2} \mu(s) ds, \quad z > -H. \quad (3.3.7)$$

(3.3.5) және (3.3.7) белгісіз тығыздықтарды анықтау үшін бірінші текті интегралдық теңдеуді аламыз

$$\int_0^L K(x, s) \mu(s) ds = \varphi(x) \quad (3.3.8)$$

симметриялық ядросымен

$$K(x, s) = \frac{H}{(x-s)^2 + H^2}$$

(3.3.7) теңдеуін бірінші текті теңдеу түрінде жазамыз

$$A\mu = \varphi, \quad (3.3.9)$$



мұндағы

$$A\mu = \int_0^L K(x, s)\mu(s) ds$$

болып келеді.

$A: H \rightarrow H$  интегралдық операторы  $(A\mu, \nu) = (\mu, A\nu)$  өз-өзіне түйіндес оператор болып табылады, мұндағы  $H = L_2(0, L)$ . Сонымен қатар, ол шенелген, өйткені

$$\begin{aligned} (A\mu, \mu) &= \int_0^L \int_0^L K(x, s)\mu(s)\mu(x) ds dx \leq \\ &\leq \left( \int_0^L \int_0^L K^2(x, s) ds dx \right)^{1/2} \left( \int_0^L \int_0^L \mu^2(s)\mu^2(x) ds dx \right)^{1/2} \leq \gamma_2 \|\mu\|^2 \end{aligned}$$

мұндағы  $\gamma_2 < L * H$

Қарастырылып отырған интегралдық оператор өз-өзіне түйіндес және шенелген. Алайда, итерациялық әдісті тікелей (3.3.9) теңдеуге қолдану оңтайлы емес, өйткені  $A$  операторы оң емес. Сондықтан (3.3.9) теңдеуінің симметризациясын қолдану қажет:

$$A^* A\mu = A^* \varphi, \quad (3.3.10)$$

осыдан кейін итерациялық әдісті қолданылады.

Есептеуді жүзеге асыру

(3.3.10) интегралдық теңдеуін сандық шешуде бірыңғай тор пайдаланылады

$$\bar{\omega} = \{x | x = (i - 0.5)h, i = 1, 2, \dots, N, Nh = L\}$$

жуық шешімді  $y_i = y(x_i), i = 1, 2, \dots, N$  арқылы өрнектейміз.

$A$  интегралдық операторына сәйкесінше торлық операторды қоямыз

$$(A_h y)(x_i) = \sum_{j=1}^N K(x_i, s_j) y_j h. \quad (3.3.11)$$

Мұндай аппроксимация тіктөртбұрыштың квадрат формуласын қолданумен сәйкес келеді. (3.3.11) теңдеудің торлық аналогы төмендегідей:

$$Ry = f, \quad R = A_h^* A_h, \quad f = A_h^* \varphi. \quad (3.3.12)$$

(3.3.12) жуық шешімі үшін итерациялық әдіс қолданылады

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ry_k = f, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.3.13)$$

Итерациялық параметр таңдау үшін екі тәсіл қарастырылды:

1. Қарапайым итерация әдісі –  $\tau_k = \tau = const$ .
2. Төмендегідей жағдай үшін жылдам түсіру әдісі

$$\tau_{k+1} = \frac{(r_k, r_k)}{(Rr_k, r_k)}, \quad r_k = Ry_k - f.$$

Дәл шешім тор түйіндерінде заңдылық бойынша ауытқығандығына сәйкес кіріс берілгендеріндегі қателіктер үлгіленді:

$$\varphi_\delta(x) = \varphi(x) + 2\xi \left( \sigma(x) - \frac{1}{2} \right), \quad x = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

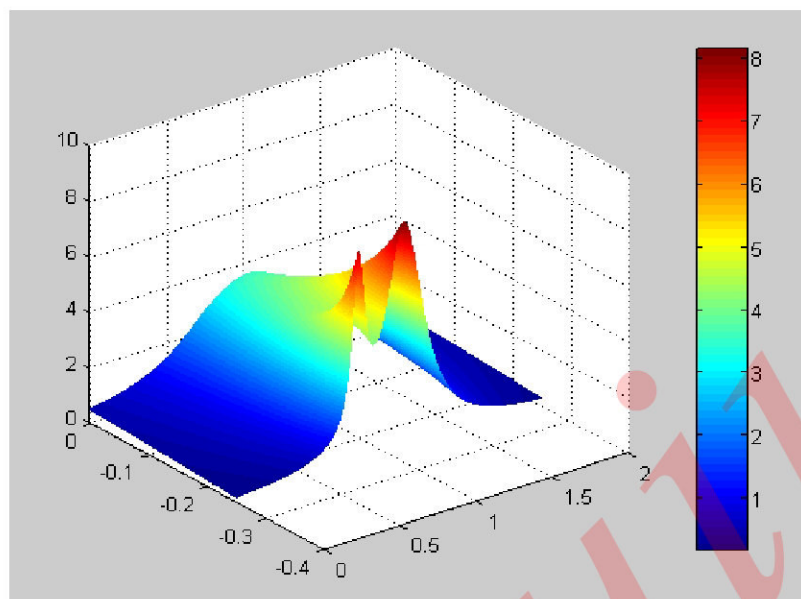
мұндағы  $\sigma(x)$  – 0-ден 1-ге дейінгі орташа дәрежеде бөлінген кездейсоқ шама.  $\xi$  параметрі (3.3.9) теңдеуінің оң жақ берілгенінің қателік дәрежесін анықтайды

$$\|\varphi_\delta(x) - \varphi(x)\| \leq \delta = \xi \sqrt{L}.$$

Итерациялық процестен шығу алшақтық арқылы жүзеге асырылады. Есептеу алгоритмінің кейбір өзге ерекшеліктері төменде көрсетілген.

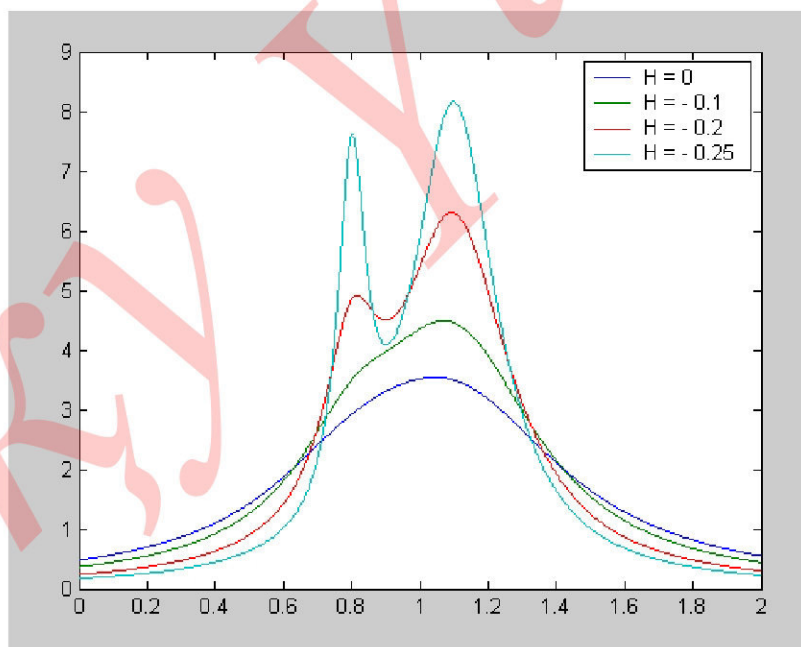
Есептеу нәтижелері

Жалғастыру есеп шешімінің кейбір мысалы ретінде  $H = -0,225$  жағдайын келтірейік.  $N=200$  түйінімен есептеу торы беріледі. Төмендегі 12-суретте дәл шешімнің графигі берілген.



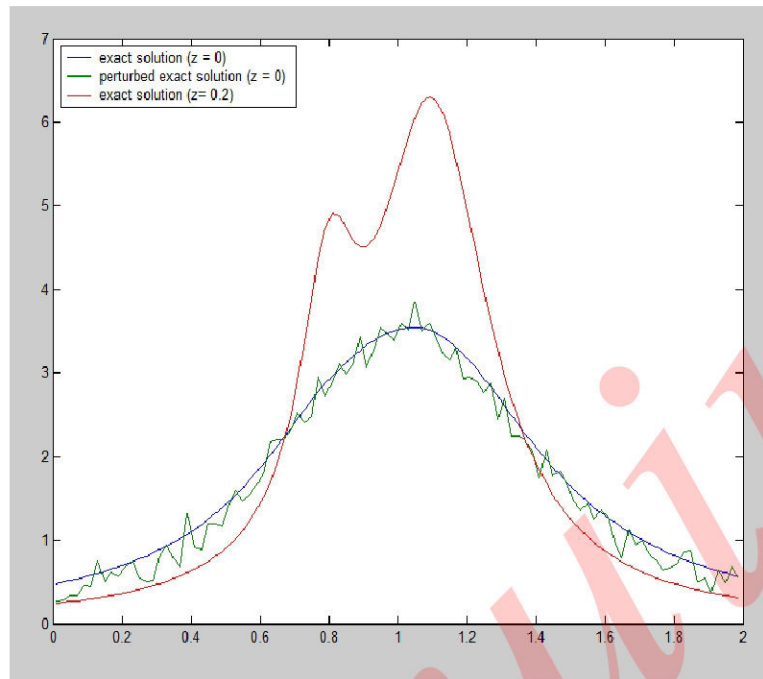
Сурет 12. Дәл шешім графигі

Келесі 13-суретте әртүрлі тереңдіктердегі тура есеп шешімінің графикатері көрсетілген



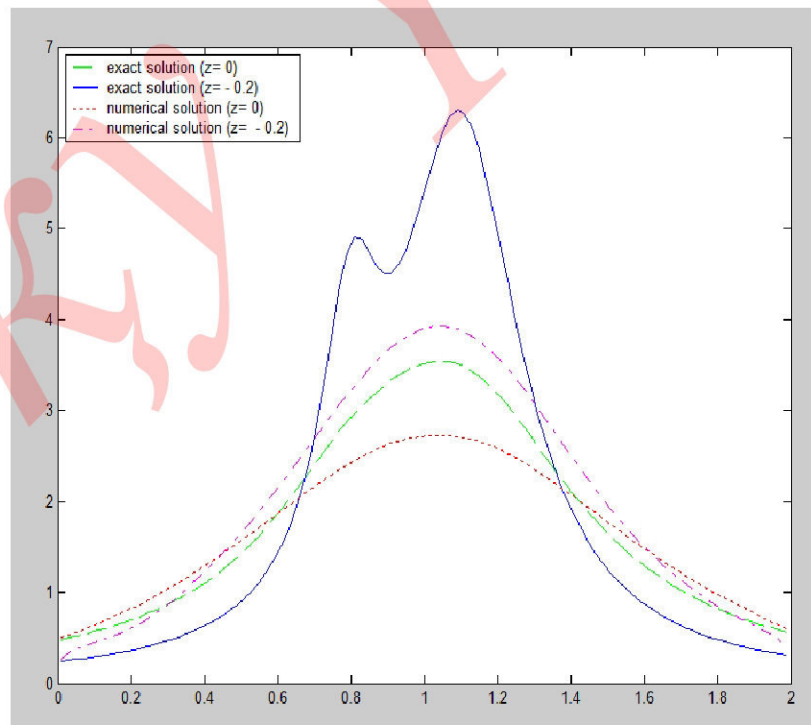
Сурет 13. Әртүрлі тереңдіктердегі тура есеп шешімінің графикатері

14-суретте әртүрлі тереңдіктердегі дәл шешім және  $\delta = 0.1$  болғандағы қобалжытылған дәл шешім графикатері келтіріліп өтілген



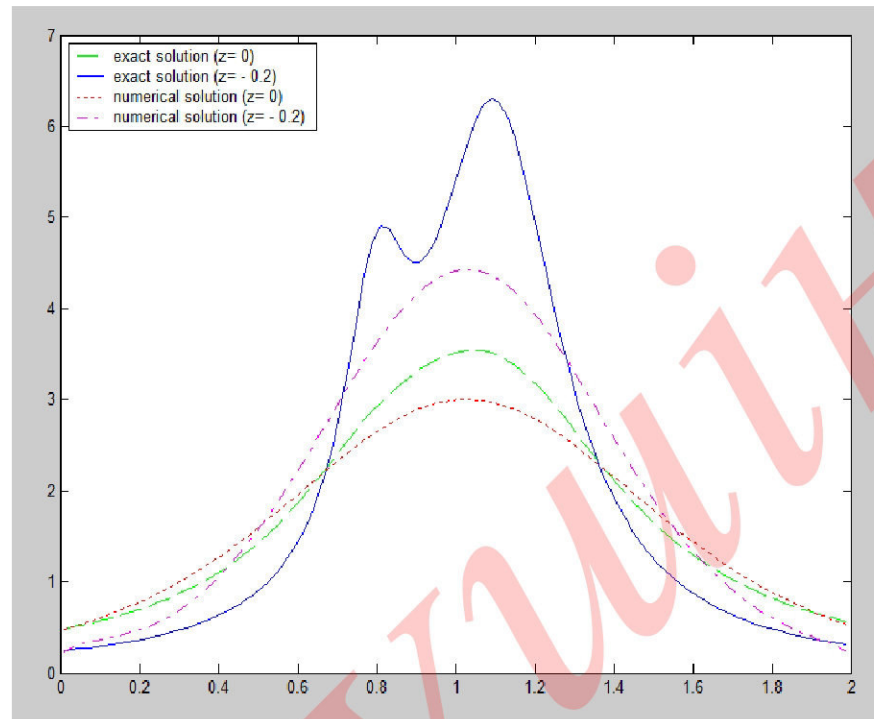
Сурет 14. Әртүрлі тереңдіктердегі дәл шешім және қобалжытылған дәл шешім графикалары ( $\delta = 0.1$ )

Келесі 15-суретте итерация саны төрт және  $\delta = 0.2$  болғандағы гравитациялық өрісті жалғастыру есебінің шешімі келтірілген



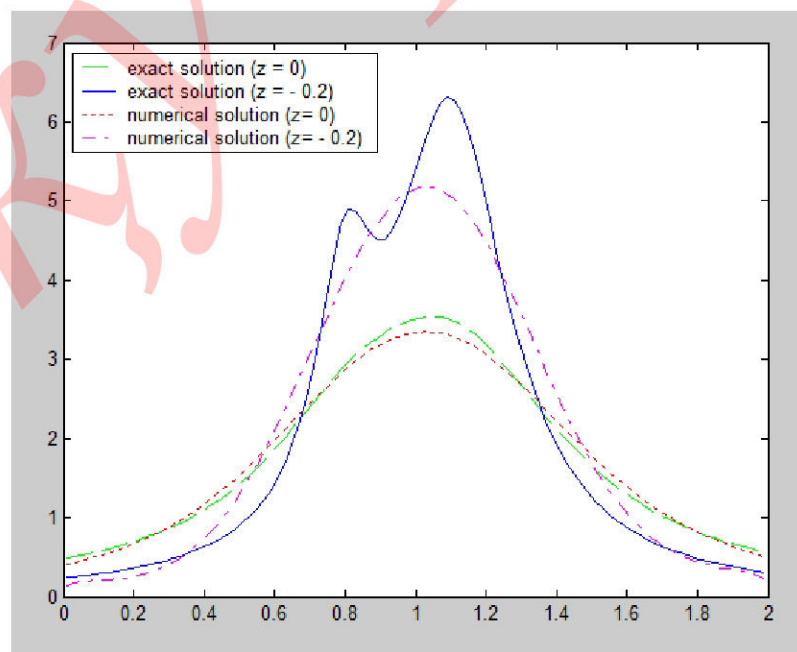
Сурет 15. Гравитациялық өрісті жалғастыру есебінің шешімі ( $\delta = 0.2$ ,  $it = 4$ )

Төмендегі 16-суретте итерация саны 5 және  $\delta = 0.1$  болғандағы гравитациялық өрісті жалғастыру есебінің шешімі көрсетілген



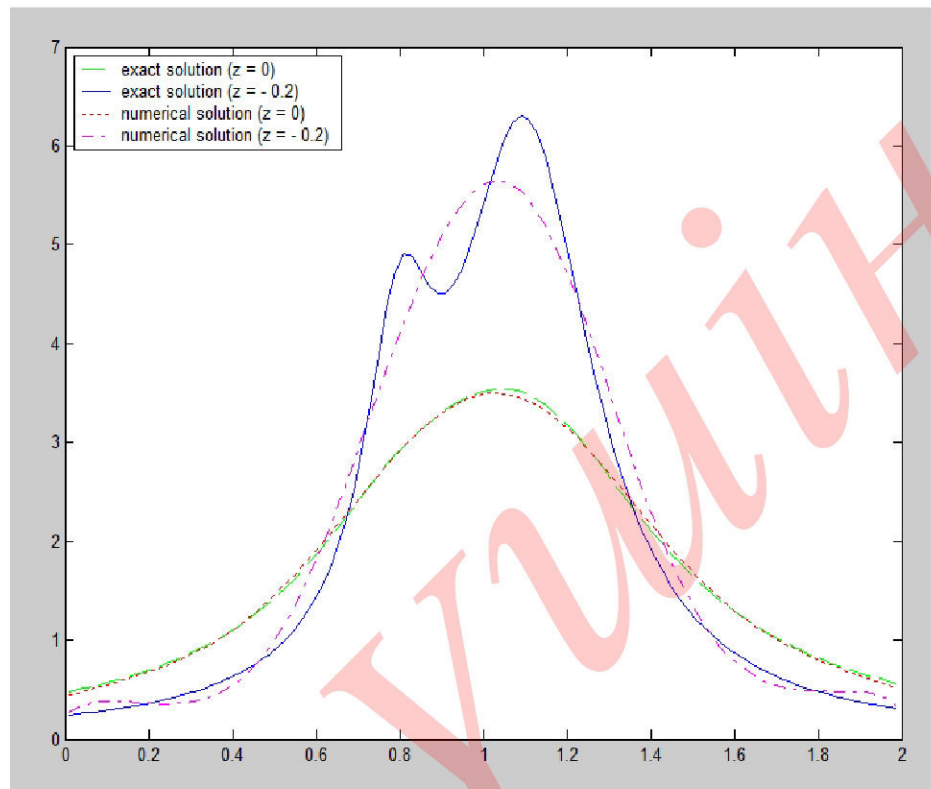
Сурет 16. Гравитациялық өрісті жалғастыру есебінің шешімі ( $\delta = 0.1$ ,  $it = 5$ )

Төмендегі 17-суретте итерация саны 14 және де  $\delta = 0.01$  болғандағы гравитациялық өрісті жалғастыру есебінің шешімі келтіріліп өтілген



Сурет 17. Гравитациялық өрісті жалғастыру есебінің шешімі ( $\delta = 0.01$ ,  $it = 14$ )

Төменде көрсетілген 18-суретте итерация саны 38-ге тең,  $\delta = 0.001$  болғандағы гравитациялық өрісті жалғастыру есебінің шешімі бейнеленген



Сурет 18. Гравитациялық өрісті жалғастыру есебінің шешімі ( $\delta = 0.001$ ,  $it = 38$ )

Есептеу нәтижелерін қорытындылай келе мәні кішірейген сайын итерация саны артатынын байқаймыз, алайда бұл кері және қисынсыз есеп болғандықтан мәнін кішірейту арқылы дәл шешімге жетуге болатынын білдірмейді. Яғни, дәл шешімге жету мүмкін емес. Итерация саны қандайда бір мәнге ие болғаннан кейін тоқтатылуы тиіс.

## ҚОРЫТЫНДЫ

Магистрлік диссертациялық жұмыста біртекті емес ортаның шекарасын анықтау кері есебін жуықтап шешудің сандық алгоритмін құру мәселелері қарастырылады. Кері есеп Лаплас теңдеуі үшін Дирихле шеттік есебінің қосымша мәліметі бойынша белгісіз бетті тіктеуден тұрады. Тура есептің шешімін екі жай потенциалдардың қосындысы түрінде өрнектеп, кері есеп белгісіз бет пен екі тығыздықтарға қатысты сызықтық емес операторлық теңдеуге келтірілді. Белгісіз бетті тіктеудің жуық шешімін құрудың итерациялық процесі сызықтық емес операторлық теңдеуді  $r_n$  –ші жуықтау функциясы маңайында сызықтандыру арқылы құрылады. Теңдеулерді келтіріп шығаруда декарт координаталық жүйесінен сфералық координаталар жүйесіне өту пайдаланылады. Белгісіз беттердің жарамды классы сондай деп алынады, осы беттер үшін жалпы жұлдыздық центрі болатын нүкте бар деп қарастырылды.

Диссертациялық жұмыста қарастырылған томография есептерін шешу үшін құрылған сандық алгоритмдерді көп өлшемді сәйкес есептерді шешуде негіз етіп алуға, басқа да әдістермен шешу нәтижелерімен салыстырып, әдістердің тиімділігін анықтауға көмегін тигізетіні сөзсіз.

Бұл диссертациялық жұмысты орындауда математикалық физика теңдеулерін жуықтап шешу әдістері, айырымдық схемалар теориясы, вариациялық қисап элементтері, функционалдық талдау, MatLab жүйесінде программалау элементтері қолданылды.

Диссертациялық жұмыста мынадай нәтижелер алынды:

- Біртекті емес орталардағы жылуөткізгіштік үлестірімдерін бөліп тұратын белгісіз шекараны анықтау кері есебінің математикалық үлгісі болатын екі өлшемді жағдайдағы Лаплас теңдеуі үшін Дирихле-Нейман кері есебінің жуық алгоритмі жылуөткізгіштік бөлекті-үзілісті функция болған жағдайында құрылды;
- Біртекті емес орталардағы жылуөткізгіштік үлестірімдерін бөліп тұратын белгісіз шекараны анықтау кері есебінің математикалық үлгісі болатын үш өлшемді жағдайдағы Лаплас теңдеуі үшін Дирихле-Нейман кері есебінің жуық алгоритмі жылуөткізгіштік бөлекті-үзілісті функция болған жағдайында құрылды;
- 1-ші текті Фредгольмнің интегралдық теңдеуін сандық шешу қисынсыз есебі үшін Тихоновтың регуляризация (тегістеу) әдісі негізінде вариациялық қойылымға пара-пар болған Эйлер теңдеуі құрылып, оның дискрет жуықтауы құрылды және үлгілік берілгендерде MatLab векторлық есептеу жүйесінде есептеулер жүргізілді.
- Жер қыртысындағы массалар келтіріп шығаратын өріс потенциалын осы массаларға қарай жалғастыру кері есебін сандық шешу 2-ші текті шекаралық шартты 1-ші текті шартқа келтіру тәсілімен коррект болмаған есептерді шешу әдістері негізінде жуықтап шешілді.

ОКЗ УЗВИН



## ПАЙДАЛАНЫЛГАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ:

1. Абрагим А. Ядерный магнетизм. // М.: Издательство иностр. лит., 1963.
2. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. // М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989
3. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения // М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.
4. Балдев Радж, В. Раджендран, П. Паланичами Мир физики и техники. Применения ультразвука. // М., Техносфера, 2006.
5. Бессонов Л.А. Теоритические основы электротехники: Элктрические цепи // М.: Высш. школа, 1978.
6. Васин В.В., Агеев А.Л. Некорректные задачи с априорной информацией // Екатеринбург: УИФ Наука, 1993.
7. Гаврилов С.В., Денисов А.М. Численный метод определения границы неоднородности в задаче Дирихле для уравнения Лапласа в кусочно-однородной среде // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. т.50. №8. с.1462-1470.
8. Гаврилов С.В., Денисов А.М. Численный метод определения границы неоднородности в краевой задаче для уравнения Лапласа в кусочно-однородной среде // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. т.51. №8. с.1476-1489.
9. Гаврилов С.В., Денисов А.М. Итерационные методы определения границы неоднородности в краевой задаче для уравнения Лапласа в кусочно-однородной среде // V международная конференция Математические идеи П.Л.Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания Обнинск, 14-18 мая 2011 г. Тезисы докладов. с.71.
10. Гаврилов С.В., Денисов А.М. Итерационный метод решения трехмерной задачи электроимпедансной томографии в случае кусочно-постоянной проводимости и одного измерения на границе // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. т.52. №8. с.1426-36.
11. Гаврилов С.В., Денисов А.М. Итерационный метод решения задачи электроимпедансной томографии в случае кусочно-постоянной проводимости // Международная конференция, посвященная 80-летию со дня рождения академика М.М.Лаврентьева Обратные и некорректные задачи математической физики Новосибирск, 5-12 августа 2012 г. Тезисы докладов. с. 186
12. Гаврилов С.В. Численный метод решения задачи электроимпедансной томографии в случае кусочно-постоянной проводимости и одного измерения на границе // Прикладн. матем. и информ. 2012. т.41. с.38-47.
13. Гаврилов С.В. Итерационный метод решения трехмерной задачи электроимпедансной томографии в случае кусочно-постоянной проводимости и нескольких измерений на границе // Вычисл. методы и программ. 2013. т.14. с.26-30.
14. Гаврилов С.В. Численный метод решения трехмерной задачи электроимпедансной томографии в случае кусочно-постоянной проводимости и

нескольких измерений на границе//4-я Международная конференция «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования.», посвященная 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д.Кудрявцева, Москва, РУДН, 25-29 марта 2013 г. Тезисы докладов. с.403-04.

15. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач//М.: Изд-во МГУ, 1994. 207 с.

16. Денисов А.М., Захаров Е.В., Калинин В.В. Численные методы решения некоторых обратных задач электрофизиологии сердца//Дифференц. уравнения. 2009. т.45. №7. с.1014-1022.

17. Захаров Е.В., Калинин А.В. Численное решение трехмерной задачи Дирихле в кусочно-однородной среде методом граничных интегральных уравнений//Ж. вычисл. матем. физ. 2009. т.49. №7. с.1197-1206.

18. Иванов В.К., Васин В.В., Танава В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения//М. Наука, 1978

19. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи//Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.

20. Козлов В.А., Мазья В.Г., Фомин А.В. Об одном итерационном методе решения задачи Коши для эллиптических уравнений//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. Т.31. №1. С.64-74.

21. Лаврентьев М.М. О задаче Коши для уравнения Лапласа//Известия АН СССР. 1956. Т. 20, №6. С. 819-842.

22. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики//Новосибирск. Из-во СО АН СССР, 1962.

23. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шипатский С.Т. Некорректные задачи математической физики и анализа//М. Наука, 1980.

24. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоритическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. 4е издью, стереот./М.:ФИЗМАТЛИТ, 2005.

25. Линденбратен Л.Д., Королюк И.П. Медицинская радиология (основы лучевой диагностики и лучевой терапии). – 2-е переработанное и дополненное./Москва: Медицина, 2000.

26. Марусина М.Я., Казначеева А.О. Современные виды томографии. Учебное пособие./СПб: СПбГУ ИТМО, 2006.

27. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики//М: ЛКИ, 2009, 480 с.

28. Сликтер Ч. Основы теории магнитного резонанса./М.: Мир, 1981.

29. Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач//Докл. АН СССР. 1943. Т.39 №5. С 195-98.

30. Тихонов А.Н. О нелинейных уравнениях первого рода//Доклады АН СССР. 1965. Т. 161, №5. С. 1023-1026.

31. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач./Москва: Наука. 1974.

32. Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи//М.: Наука. Изд. фирма «Физ.-мат. лит.», 1995, 311 с.
33. Alessandrini G., Isakov V., Powell J. Local uniqueness of the inverse conductivity problem with one measurement//Trans Amer Math Soc. 1995. 347. pp 3031-41.
34. Bailey D.L., Townsend D.W., Valk P.E., Maisey M.N. Positron Emission Tomography: Basic Sciences//Secaucus, NJ: Springer-Verlag. 2005.
35. Barber D., Brown B. Applied potential tomography//J. Phys. E: Sci. Instrum. 1984. №17. pp 723-33.
36. Barber D., Brown B. Recent developments in applied potential tomography//Information Processing in Medical Imaging ed S L Bacharach (Amsterdam: Nijhoff). 1986. pp 106-21.
37. Barceo B., Fabes E., Seo J.K. The inverse conductivity problem with one measurement: uniqueness for convex polyhedra//Proc. Amer. Math. Soc. 1994.V.122-1. p.183-189.
38. Beckmann E.C. CT scanning the early days//The British Journal of Radiology. 2006. № 79.
39. Berenstein C.A., Casadio Tarabusi E. Integral geometry in hyperbolic spaces and electrical impedance tomography//SIAM J. Appl. Math. 1996. № 56. pp 755-64.
40. Berntsson F., Elden L. Numerical solution of a Cauchy problem for the Laplace equation//Inverse Problems. 2001. 17(4). 839-853.
41. Blad B., Baldeyorp B. Impedance spectra of tumour tissue in comparison with normal tissue; a possible clinical application for electrical impedance tomography//Physiological Measurements. 1996. vol. 17 (Suppl A), pp. A105-A115.
42. Borcea L. A nonlinear multigrid for imaging electrical conductivity and permittivity at low frequency//Inverse Problems. 2001. № 17. pp 329-59.
43. Borcea L. Electrical impedance tomography//Inverse Problems. 2002. V.18. p.99-136..
44. Brini R., Brusco A., Massari M., Pallotti C. The electrical resistance and impedance of mammalian muscles during the first days after slaughtering. II: femoral biceps of swine//Boll Soc Ital Biol Sper. 1980. vol. 56, № 15. pp. 1580-4.
45. Bruhl M., Hanke M. Numerical implementation of two noniterative methods for locating inclusions by impedance tomography//Inverse Problems. 2000. № 16. pp 1029-42.
46. Calderon A.P. On an inverse boundary value problem//Seminar on Numerical Analysis and its applications to Continuum Physics (Soc. Brasileira de Matematica, Rio de Janeiro). 1980. pp 65-73.
47. Carleman T. Les fonctions quasi analytiques/Paris, 1926.
48. Cheney M., Isaacson D., Newell J.C. Electrical impedance tomography//SIAM Rev. 1999. № 41. pp 85-101.
49. Choi M.H., Kao T.-J., Isaacson D., Saulnier G.J., Newell J.C. A simplified model of mammography geometry for breast cancer imaging with electrical impedance tomography//Proceedings of the 26th Annual International Conference of the IEEE EMBS, San Francisco, CA, USA, September 2004, pp 960-963.

50. Curtis E.B., Morrow J.A. Determining the resistors in a network//SIAM J. Appl. Math. 1990. № 50. pp 931-41.

51. Daily W., Ramirez A. Electrical resistance tomography during in-situ trichloroethylene remediation at the savannah river site//Applied Geophysics. 1995. vol. 33. pp. 239-249.

ОКРУЖАЮЩИМ

ҚОСЫМША А

ДИССЕРТАЦИЯЛЫҚ ЗЕРТТЕУ ЖҰМЫСТАҒЫМАТНЛАВ  
ОРТАСЫНДА ЖҮРГІЗІЛГЕН ЕСЕПТЕУЛЕР НӘТИЖЕЛЕРІ

ACoef =											FA =
0.3500	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0001	0.0246
0.0001	0.3505	0.0008	0.0011	0.0014	0.0017	0.0020	0.0023	0.0026	0.0029	0.0031	0.1673
0.0001	0.0008	0.3514	0.0020	0.0026	0.0032	0.0037	0.0043	0.0049	0.0055	0.0059	0.2858
0.0001	0.0011	0.0020	0.3528	0.0037	0.0046	0.0055	0.0064	0.0072	0.0081	0.0088	0.4047
0.0001	0.0014	0.0026	0.0037	0.3549	0.0060	0.0072	0.0084	0.0096	0.0107	0.0117	0.5241
0.0001	0.0017	0.0032	0.0046	0.0060	0.3575	0.0090	0.0104	0.0119	0.0133	0.0145	0.6439
0.0001	0.0020	0.0037	0.0055	0.0072	0.0090	0.3607	0.0124	0.0142	0.0159	0.0174	0.7642
0.0002	0.0023	0.0043	0.0064	0.0084	0.0104	0.0124	0.3645	0.0165	0.0186	0.0203	0.8852
0.0002	0.0026	0.0049	0.0072	0.0096	0.0119	0.0142	0.0165	0.3688	0.0212	0.0232	1.0067
0.0002	0.0029	0.0055	0.0081	0.0107	0.0133	0.0159	0.0186	0.0212	0.3738	0.0260	1.1290
0.0001	0.0031	0.0059	0.0088	0.0117	0.0145	0.0174	0.0203	0.0232	0.0260	0.3787	1.2001

ACoef =												FA =	
Columns 1 through 12													
0.3500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000		
0.0000	0.3501	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009		
0.0000	0.0002	0.3503	0.0005	0.0006	0.0008	0.0009	0.0011	0.0011	0.0012	0.0014	0.0015		
0.0000	0.0003	0.0005	0.3507	0.0009	0.0011	0.0014	0.0016	0.0018	0.0020	0.0023	0.0025		
0.0000	0.0003	0.0006	0.0009	0.3512	0.0015	0.0018	0.0021	0.0024	0.0027	0.0030	0.0033		
0.0000	0.0004	0.0008	0.0011	0.0015	0.3519	0.0023	0.0026	0.0030	0.0034	0.0037	0.0041		
0.0000	0.0005	0.0009	0.0014	0.0018	0.0023	0.3527	0.0032	0.0036	0.0040	0.0045	0.0049		
0.0000	0.0006	0.0011	0.0016	0.0021	0.0026	0.0032	0.3537	0.0042	0.0047	0.0052	0.0058		
0.0000	0.0006	0.0012	0.0018	0.0024	0.0030	0.0036	0.0042	0.3548	0.0054	0.0060	0.0066		
0.0000	0.0007	0.0014	0.0020	0.0027	0.0034	0.0040	0.0047	0.0054	0.3560	0.0067	0.0074		
0.0000	0.0008	0.0015	0.0023	0.0030	0.0037	0.0045	0.0052	0.0060	0.0067	0.3575	0.0082		
0.0000	0.0009	0.0017	0.0025	0.0033	0.0041	0.0049	0.0058	0.0066	0.0074	0.0082	0.3590		
0.0000	0.0009	0.0018	0.0027	0.0036	0.0045	0.0054	0.0063	0.0072	0.0081	0.0089	0.0098		
0.0000	0.0010	0.0020	0.0029	0.0039	0.0049	0.0058	0.0068	0.0078	0.0087	0.0097	0.0107		
0.0000	0.0011	0.0021	0.0032	0.0042	0.0052	0.0063	0.0073	0.0084	0.0094	0.0104	0.0115		
0.0000	0.0012	0.0023	0.0034	0.0045	0.0056	0.0067	0.0078	0.0089	0.0101	0.0112	0.0123		
0.0000	0.0012	0.0024	0.0036	0.0048	0.0059	0.0071	0.0083	0.0095	0.0107	0.0119	0.0131		
Columns 13 through 17													
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000			FA =					
0.0009	0.0010	0.0011	0.0012	0.0012					0.0096				
0.0018	0.0020	0.0021	0.0023	0.0024					0.0954				
0.0027	0.0029	0.0032	0.0034	0.0036					0.1716				
0.0036	0.0039	0.0042	0.0045	0.0048					0.2479				
0.0045	0.0049	0.0052	0.0056	0.0059					0.3243				
0.0054	0.0058	0.0063	0.0067	0.0071					0.4007				
0.0063	0.0068	0.0073	0.0078	0.0083					0.4772				
0.0072	0.0078	0.0084	0.0089	0.0095					0.5537				
0.0081	0.0087	0.0094	0.0101	0.0107					0.6304				
0.0089	0.0097	0.0104	0.0112	0.0119					0.7071				
0.0098	0.0107	0.0115	0.0123	0.0131					0.7839				
0.3607	0.0116	0.0125	0.0134	0.0142					0.8607				
0.0116	0.3626	0.0135	0.0145	0.0154					0.9377				
0.0125	0.0135	0.3646	0.0156	0.0166					1.0148				
0.0134	0.0145	0.0156	0.3667	0.0178					1.0920				
0.0142	0.0154	0.0166	0.0178	0.3690					1.1693				
												1.2265	

```
A =
  0.0500  0.1000  0.1000  0.1000  0.1000  0.1000  0.1000  0.1000  0.1000  0.1000  0.0500
  0.0500  0.1010  0.1020  0.1030  0.1041  0.1051  0.1062  0.1073  0.1083  0.1094  0.0553
  0.0500  0.1020  0.1041  0.1062  0.1083  0.1105  0.1127  0.1150  0.1174  0.1197  0.0611
  0.0500  0.1030  0.1062  0.1094  0.1127  0.1162  0.1197  0.1234  0.1271  0.1310  0.0675
  0.0500  0.1041  0.1083  0.1127  0.1174  0.1221  0.1271  0.1323  0.1377  0.1433  0.0746
  0.0500  0.1051  0.1105  0.1162  0.1221  0.1284  0.1350  0.1419  0.1492  0.1568  0.0824
  0.0500  0.1062  0.1127  0.1197  0.1271  0.1350  0.1433  0.1522  0.1616  0.1716  0.0911
  0.0500  0.1073  0.1150  0.1234  0.1323  0.1419  0.1522  0.1632  0.1751  0.1878  0.1007
  0.0500  0.1083  0.1174  0.1271  0.1377  0.1492  0.1616  0.1751  0.1896  0.2054  0.1113
  0.0500  0.1094  0.1197  0.1310  0.1433  0.1568  0.1716  0.1878  0.2054  0.2248  0.1230
  0.0500  0.1105  0.1221  0.1350  0.1492  0.1649  0.1822  0.2014  0.2226  0.2460  0.1359
```

```
cond_A_No_Regul =
```

```
2.7832e+017
```

```
Warning: Matrix is close to singular or badly scaled.
Results may be inaccurate. RCOND = 2.434965e-018.
```

```
> In C:\Documents and Settings\Administrator\Desktop\Прон-Султаномурат\R3_2_Kirch_10.m at line 48
```

```
ACoef =
```

```
  0.3500  0.0001  0.0001  0.0001  0.0001  0.0001  0.0001  0.0002  0.0002  0.0002  0.0001
  0.0001  0.3505  0.0008  0.0011  0.0014  0.0017  0.0020  0.0023  0.0026  0.0029  0.0031
  0.0001  0.0008  0.3514  0.0020  0.0026  0.0032  0.0037  0.0043  0.0049  0.0055  0.0059
  0.0001  0.0011  0.0020  0.3528  0.0037  0.0046  0.0055  0.0064  0.0072  0.0081  0.0088
  0.0001  0.0014  0.0026  0.0037  0.3549  0.0060  0.0072  0.0084  0.0096  0.0107  0.0117
  0.0001  0.0017  0.0032  0.0046  0.0060  0.3575  0.0090  0.0104  0.0119  0.0133  0.0145
  0.0001  0.0020  0.0037  0.0055  0.0072  0.0090  0.3607  0.0124  0.0142  0.0159  0.0174
  0.0002  0.0023  0.0043  0.0064  0.0084  0.0104  0.0124  0.3645  0.0165  0.0186  0.0203
  0.0002  0.0026  0.0049  0.0072  0.0096  0.0119  0.0142  0.0165  0.3688  0.0212  0.0232
  0.0002  0.0029  0.0055  0.0081  0.0107  0.0133  0.0159  0.0186  0.0212  0.3738  0.0260
  0.0001  0.0031  0.0059  0.0088  0.0117  0.0145  0.0174  0.0203  0.0232  0.0260  0.3787
```

```
cond_ACoef_Regul =
```

```
1.3229
```

A =

Columns 1 through 12

0.0313	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625
0.0313	0.0627	0.0630	0.0632	0.0635	0.0637	0.0640	0.0642	0.0645	0.0647	0.0650	0.0652
0.0313	0.0630	0.0635	0.0640	0.0645	0.0650	0.0655	0.0660	0.0665	0.0671	0.0676	0.0681
0.0313	0.0632	0.0640	0.0647	0.0655	0.0663	0.0671	0.0678	0.0686	0.0695	0.0703	0.0711
0.0313	0.0635	0.0645	0.0655	0.0665	0.0676	0.0686	0.0697	0.0708	0.0719	0.0731	0.0742
0.0313	0.0637	0.0650	0.0663	0.0676	0.0689	0.0703	0.0717	0.0731	0.0745	0.0760	0.0775
0.0313	0.0640	0.0655	0.0671	0.0686	0.0703	0.0719	0.0736	0.0754	0.0772	0.0790	0.0809
0.0313	0.0642	0.0660	0.0678	0.0697	0.0717	0.0736	0.0757	0.0778	0.0799	0.0822	0.0844
0.0313	0.0645	0.0665	0.0686	0.0708	0.0731	0.0754	0.0778	0.0803	0.0828	0.0854	0.0881
0.0313	0.0647	0.0671	0.0695	0.0719	0.0745	0.0772	0.0799	0.0828	0.0858	0.0888	0.0920
0.0313	0.0650	0.0676	0.0703	0.0731	0.0760	0.0790	0.0822	0.0854	0.0888	0.0924	0.0960
0.0313	0.0652	0.0681	0.0711	0.0742	0.0775	0.0809	0.0844	0.0881	0.0920	0.0960	0.1003
0.0313	0.0655	0.0686	0.0719	0.0754	0.0790	0.0828	0.0868	0.0909	0.0953	0.0999	0.1047
0.0313	0.0658	0.0692	0.0728	0.0766	0.0806	0.0848	0.0892	0.0938	0.0987	0.1039	0.1093
0.0313	0.0660	0.0697	0.0736	0.0778	0.0822	0.0868	0.0917	0.0968	0.1022	0.1080	0.1141
0.0313	0.0663	0.0703	0.0745	0.0790	0.0838	0.0888	0.0942	0.0999	0.1059	0.1123	0.1191
0.0313	0.0665	0.0708	0.0754	0.0803	0.0854	0.0909	0.0968	0.1030	0.1097	0.1168	0.1243

Columns 13 through 17

0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0313
0.0655	0.0658	0.0660	0.0663	0.0333
0.0686	0.0692	0.0697	0.0703	0.0354
0.0719	0.0728	0.0736	0.0745	0.0377
0.0754	0.0766	0.0778	0.0790	0.0401
0.0790	0.0806	0.0822	0.0838	0.0427
0.0828	0.0848	0.0868	0.0888	0.0455
0.0868	0.0892	0.0917	0.0942	0.0484
0.0909	0.0938	0.0968	0.0999	0.0515
0.0953	0.0987	0.1022	0.1059	0.0548
0.0999	0.1039	0.1080	0.1123	0.0584
0.1047	0.1093	0.1141	0.1191	0.0621
0.1097	0.1150	0.1205	0.1263	0.0662
0.1150	0.1209	0.1272	0.1339	0.0704
0.1205	0.1272	0.1344	0.1420	0.0750
0.1263	0.1339	0.1420	0.1505	0.0798
0.1323	0.1408	0.1499	0.1596	0.0849

cond\_A\_No\_Regul =

1.1440e+018

Warning: Matrix is close to singular or badly scaled.

Results may be inaccurate. RCOND = 6.112912e-019.

> In C:\Documents and Settings\Administrator\Desktop\Прон-Султанхожурат\R3\_2\_Kirch\_16.m at line 49

ACoef =

Columns 1 through 12

0.3500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.3501	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009
0.0000	0.0002	0.3503	0.0005	0.0006	0.0008	0.0009	0.0011	0.0012	0.0014	0.0015	0.0017
0.0000	0.0003	0.0005	0.3507	0.0009	0.0011	0.0014	0.0016	0.0018	0.0020	0.0023	0.0025
0.0000	0.0003	0.0006	0.0009	0.0009	0.3512	0.0015	0.0018	0.0021	0.0024	0.0027	0.0030
0.0000	0.0004	0.0008	0.0011	0.0015	0.3519	0.0023	0.0026	0.0030	0.0034	0.0037	0.0041
0.0000	0.0005	0.0009	0.0014	0.0018	0.0023	0.3527	0.0032	0.0036	0.0040	0.0045	0.0049
0.0000	0.0006	0.0011	0.0016	0.0021	0.0026	0.0032	0.3537	0.0042	0.0047	0.0052	0.0058
0.0000	0.0006	0.0012	0.0018	0.0024	0.0030	0.0036	0.0042	0.3548	0.0054	0.0060	0.0066
0.0000	0.0007	0.0014	0.0020	0.0027	0.0034	0.0040	0.0047	0.0054	0.3560	0.0067	0.0074
0.0000	0.0008	0.0015	0.0023	0.0030	0.0037	0.0045	0.0052	0.0060	0.0067	0.3575	0.0082
0.0000	0.0009	0.0017	0.0025	0.0033	0.0041	0.0049	0.0058	0.0066	0.0074	0.0082	0.3590
0.0000	0.0009	0.0018	0.0027	0.0036	0.0045	0.0054	0.0063	0.0072	0.0081	0.0089	0.0098
0.0000	0.0010	0.0020	0.0029	0.0039	0.0049	0.0058	0.0068	0.0078	0.0087	0.0097	0.0107
0.0000	0.0011	0.0021	0.0032	0.0042	0.0052	0.0063	0.0073	0.0084	0.0094	0.0104	0.0115
0.0000	0.0012	0.0023	0.0034	0.0045	0.0056	0.0067	0.0078	0.0089	0.0101	0.0112	0.0123
0.0000	0.0012	0.0024	0.0036	0.0048	0.0059	0.0071	0.0083	0.0095	0.0107	0.0119	0.0131

Columns 13 through 17

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0009	0.0010	0.0011	0.0012	0.0012
0.0018	0.0020	0.0021	0.0023	0.0024
0.0027	0.0029	0.0032	0.0034	0.0036
0.0036	0.0039	0.0042	0.0045	0.0048
0.0045	0.0049	0.0052	0.0056	0.0059
0.0054	0.0058	0.0063	0.0067	0.0071
0.0063	0.0068	0.0073	0.0078	0.0083
0.0072	0.0078	0.0084	0.0089	0.0095
0.0081	0.0087	0.0094	0.0101	0.0107
0.0089	0.0097	0.0104	0.0112	0.0119
0.0098	0.0107	0.0115	0.0123	0.0131
0.3607	0.0116	0.0125	0.0134	0.0142
0.0116	0.3626	0.0135	0.0145	0.0154
0.0125	0.0135	0.3646	0.0156	0.0166
0.0134	0.0145	0.0156	0.3667	0.0178
0.0142	0.0154	0.0166	0.0178	0.3690