VI Тарау. КВАДРАТ ПІШІНДЕР

§ 6.1. Қос сызықты және квадрат пішіндер

Біз бұл тарауда n-өлшемді нақты сызқты евклид R кеңістігін қарастырамыз.

Анықтама. Екі x, y — вектор-аргументті $\varphi(x, y)$ функция R кеңістіктегі **қос сызықты пішін** деп аталады, егер кез келген $x, y \in R$ үшін

1) $\varphi(x, y)$ функциясы x-ке тәуелді сызықты функция болса:

$$\varphi(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha \varphi(x_1, y) + \alpha \varphi(x_2, y),$$

2) $\varphi(x, y)$ функциясы y-ке тәуелді сызықты функция болса:

$$\varphi(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha \varphi(x, y_1) + \alpha \varphi(x, y_2),$$

мұндағы α, β — тұрақты сандар.

6.1-теорема. Кез келген $\varphi(x, y)$ қос сызықты пішін R кеңістігіндегі $l_1, l_2, \ldots, l_n$ базисте мына төмендегі формуламен тек біреу ғана болып өрнектеледі:

$$\varphi(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \ , \tag{6.1}$$

мұндағы

$$a_{ij} = \varphi(l_i, l_j), \qquad i, j = \overline{1, n}, \tag{6.2}$$

ал $x_1, x_2, \ldots, x_n$ және $y_1, y_2, \ldots y_n$ берілген базістегі $x \in R$ пен $y \in R$ векторларының координаттары:

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \ y = (y_1, \ldots, y_n).$$

Дәлелдеуі. x пен y векторларының $l_1, \ldots, l_n$ базистегі жіктеулерін қарастырайық:

$$x = x_1 l_1 + \ldots + x_n l_n, \ y = y_1 l_1 + \ldots + l_n y_n. \tag{6.3}$$

(6.3) жіктеулерін $\varphi(x, y)$ қос сызықты пішінге апарып қойсақ, онда:

$$\varphi(x, y) = \varphi(x_1 l_1 + \ldots + x_n l_n, y_1 l_1 + \ldots + l_n y_n) =$$
$$= x_1 \cdot \varphi(l_1, y_1 l_1 + \ldots l_n y_n) + \ldots + x_n \cdot \varphi(l_n, y_1 l_1 + \ldots + y_n l_n) =$$
$$= x_1 \cdot [y_1 \cdot \varphi(l_1, l_1) + \ldots + y_n \cdot \varphi(l_1, l_n)] + \ldots +$$
$$+ x_n [y_1 \cdot \varphi(l_n, l_1) + \ldots + y_n \cdot \varphi(l_n, l_n)].$$

Енді (6.2) формуланы ескеріп, соңғы теңдіктен (6.1) формуланы аламыз.

Егерде $\varphi(x, y)$ берілген $l_1, l_2, \ldots, l_n$ базисте коэффициенттері b_{ij}-ге тең (6.1) формуламен өрнектелсе, онда $b_{ij} = \varphi(l_i, l_j) = a_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$ болды. Олай болса $\varphi(x, y)$ қос сызықты пішіннің (6.1) формуламен өрнектелуі тек біреу ғана болады. Теорема дәлелденді.

Элементтері (6.2) формуладан анықталған

$$A = (a_{ij})_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

матрицаны $\varphi(x, y)$ — қос сызықты пішіннің *берілген базистегі матрицасы* деп, ал A матрицаның рангісі оның *рангісі* деп аталады.

Анықтама. $\varphi(x, y)$ *қос сызықты пішін симметриялы* деп аталады, егер кез келген $x, y \in R$ векторлары үшін $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ теңдігі орындалса.

6.2-теорема. $\varphi(x, y)$ қос сызықты пішін симметриялы $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ болу үшін, оның берілген $l_1, l_2, \ldots, l_n$ базистегі A матрицасы симметриялы $A = A'$ болуы қажетті әрі жеткілікті.

Қажеттілігі. $\varphi(x,y)$ қос сызықты пішін симметриялы деп ұйғаралық: $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$. (6.1) формуладан:

$$\varphi(y, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji} x_i y_j \ , \ a_{ji} = \varphi(l_j, l_i) \tag{6.4}$$

(6.1), (6.4) формулаларды салыстырсақ, онда $a_{ij} = a_{ji}$, яғни A матрицасы симметриялы: $A = A'$.

Жеткіліктілігі. $\varphi(x,y)$ қос сызықты пішіннің берлiген $l_1, l_2, \ldots, l_n$ базистегі A матрицасы симметриялы деп ұйғаралық: $A = A'$, яғни $a_{ij} = a_{ji}$. Олай болса, (6.1), (6.4) формулалардан $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$, яғни $\varphi(x,y)$ — симметриялы қос сызықты пішін. Теорема дәлелденді.

Енді R кеңістігіндегі $l_1, l_2, \ldots, l_n$ және $l_1', l_2', \ldots, l_n'$ базистерін қарастырайық.

6.3-теорема. Егер $A = (a_{ij})$ мен $b = (b_{ij})$ қос сызықты $\varphi(x,y)$ пішіннің $l_1, l_2, \ldots, l_n$ және $l_1', l_2', \ldots, l_n'$ базистеріндегі матрицалары болса: $a_{ij} = \varphi(l_i, l_j)$, $b_{ij} = \varphi(l_i', l_j')$, онда A мен B арасындағы байланыс мына төмендегі формуламен өрнектеледі:

$$B = C' A C, \ |C| \neq \underline{0}, \tag{6.5}$$

мұндағы $C = (c_{ij})$ – $l_1, l_2, ..., l_n$ базистен $l'_1, l'_2, ..., l'_n$ базиске көшу матрицасы, ал $C' = (c'_{ij})$, $c'_{ij} = c_{ji}$ оның транспонирленген матрицасы.

Дәлелдеуі. Берілген l'_k векторларды $l_1, l_2, \dots, l_n$ базис арқылы жіктейік:

$$l'_k = c_{1k} \cdot l_1 + c_{2k} \cdot l_2 + ... + c_{nk} \cdot l_n, \quad k = \overline{1, n}. \qquad (6.6)$$

Енді (6.6) формуланы ескеріп, B матрицаның b_{ij} элементтерін төмендегі түрде анықтаймыз:

$$b_{ij} = \varphi(l_i', l_j') = c_{1i} \cdot \varphi(l_1, c_{1j} l_1 + ... + c_{nj} \cdot l_n) + ... +$$

$$+ c_{ni} \cdot \varphi(l_n, c_{1j} l_1 + ... + c_{nj} l_n) = c_{1i} \cdot (c_{1j} \cdot \varphi(l_1, l_1) + ... +$$

$$+ c_{nj} \cdot \varphi(l_1, l_n)) + ... + c_{ni} \cdot (c_{1j} \cdot \varphi(l_n, l_1) + ... + c_{nj} \cdot \varphi(l_n, l_n)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_{ki} \left(\sum_{m=1}^{n} c_{mj} \cdot a_{km} \right) = \sum_{k,m=1}^{n} a_{km} c_{ki} c_{mj} .$$

Егерде $c_{ki} = c_{ik}'$ ескерсек, онда

$$b_{ij} = \sum_{k,m=1}^{n} c_{ik}' a_{km} c_{mj} = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}' \left(\sum_{m=1}^{n} a_{km} \cdot c_{mj} \right),$$

мұндағы

$$\sum_{m=1}^{n} a_{km} \cdot c_{mj} = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}) \cdot (c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{nj})' .$$

Соңғы теңдік (6.5) формуланың координат m түрінде жазылуы. Теорема дәлелденді.

Анықтама. Егер (6.1) қоссызықты пішіндегі x пен y векторлары тең: $x = y$ және оның берілген $l_1, l_2, ..., l_n$ базистегі A матрицасы симметриялы: $A = A'$ болса, онда оны қос сызықты пішінді *квадрат пішін* деп атаймыз және ол мына формуламен өрнектеледі:

$$\varphi(x,x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i x_j , \quad a_{ij} = a_{ji} . \qquad (6.7)$$

Егер x жатық жолды вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ болса, онда (6.7) квадрат пішін мына түрде өрнектеледі:

$$\varphi(x,x) = x A x' = (x_1, x_2, ..., x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad (6.8)$$

ал егер x тік жолды вектор $x = (x_1, ..., x_n)'$ болса, онда (6.7) квадрат пішін мына түде өрнектеледі:

$$\varphi(x, x) = x' A X. \qquad (6.8')$$

Анықтама. Сызықты түрлендіру

$$x = yB \ (x = B'y), \quad x \in R, \ y \in R \qquad (6.9)$$

ерекше емес түрлендіру деп аталады, егер $B = (b_{ij})$, $ij = \overline{1, n}$ матрицаның анықтауышы нөлге тең болмаса $|B| \neq 0$, мұндағы x,y жатық (тік) жолды векторлар.

6.4-теорема. Кез келген $\varphi(x,x)$ квадрат пішінді ерекше емес (6.9) түрлендіру көмегімен матрицасы

$$C = BAB' \quad (C = B'AB)$$

формуламен өрнектелген квадрат пішін аламыз.

Дәлелдеуі. (6.9) түрлендіруін (6.8) квадрат пішінге қойып,

$$\varphi(x,x) = yBA(yB)' = yBAB'y' = yCy' \equiv \psi(y,y)$$

квадрат пішінді аламыз, мұндағы $C = BAB'$ симметриялы матрица:

$$C' = (BAB')' = (AB')' \cdot B' = BA'B' = BAB' = C.$$

Теорема дәлелденді.

§ 6.2. Лагранж әдісі

Анықтама. $\varphi(x,x)$ квадрат пішін *канонды пішін* деп аталады, егер ол мына түрде өрнектелсе:

$$\varphi(x,x) = \lambda_1 \cdot y_1^2 + \lambda_2 \cdot y_2^2 + ... + \lambda_n \cdot y_n^2, \qquad (6.10)$$

мұндағы $y_1, y_2, ..., y_n$ элементтер x векторының $l_1, l_2, ..., l_n$ базистегі координаттары: $x = y_1 \cdot l_1 + ... + y_n \cdot l_n$ және x_k сандарының кейбіреулері нөлге тең болуы мүмкін.

Егер $\lambda_i = \pm 1$, $i = \overline{1, n}$ болса, онда (6.10) канонды пішін *квадрат пішіннің нормал түрі* деп аталады.

6.5-Теорема. Ерекше емес түрлендіру кез келген $\varphi(x,x)$ квадрат пішінді (6.10) канонды пішінге түрлендіреді.

Д ә л е л д е у і . Теореманы дәлелдеу үшін *Лагранж әдісін* қолданайық. Ол үшін мына квадрат пішінді қарастырайық:

$$\varphi(x,x) = x A x' = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \cdot x_i^2 + 2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \ , \ i < j, \ a_{ij} = a_{ji}. \tag{6.11}$$

Мұнда екі жағдай болуы мүмкін: 1) a_{ii} — коэффициенттерінің кем дегенде біреуі нөлге тең емес, 2) барлық $a_{ii} = 0$, $i = \overline{1, n}$.

1 - ж а ғ д а й . Анықтық үшін $a_{11} \neq 0$ болсын. Онда (6.11) формуладан

$$\varphi(x,x) = a_{11} \left(x_1^2 + 2 \cdot \frac{a_{12}}{a_{11}} x c_1, x_2 + ... + 2 \cdot \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_1 x_n\right) +$$

$$+ \left(a_{22} \cdot x_2^2 + 2a_{23} \cdot x_2 x_2 + 2a_{24} \cdot x_2 x_4 + ... + a_{nn} \cdot x_n^2\right).$$

Бірінші жақшаны толық квадратқа толықтырайық:

$$\varphi(x,x) = a_{11} \cdot \left((x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{A_{11}} \cdot x_n)^2 \right) -$$

$$- \left((\frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}} \cdot x_n)^2 \right) +$$

$$+ (a_{22} \cdot x_2^2 + 2a_{23} \cdot x_2 x_3 + ... + a_{nn} \cdot x_n^2).$$

Енді жаңа $y_1, y_2, ..., y_n$ — айнымалыларды төмендегі формула арқылы енгізейік:

$$y_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}} \cdot x_n, \ y_i = x_i, \ i = \overline{2, n}. \tag{6.12}$$

(6.12) сызықты түрлендіру ерекше болмайды, себебі оның анықтауышы нөлге тең емес:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n-1}}{a_{11}} & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Онда $\varphi(x,x)$ квадрат пішін мына төмендегі формуламен өрнектеледі:

$$\varphi = a_{11} \cdot y_1^2 + (a_{22} \cdot y_2^2 + 2a_{23} \cdot y_2 y_3 + ... + a_{nn} \cdot y_n^2) -$$

$$- a_{11} \cdot \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot y_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}} \cdot y_n\right)^2$$

немесе

$$\varphi = a_{11} \cdot y_1^2 + \varphi_1(y_2, ... y_n) \ , \ a_{11} \neq 0,$$

мұндағы

$$\varphi_1 = \sum_{i=2}^{n} b_{ii} \cdot y_i^2 + 2 \cdot \sum_{i,j=2}^{n} b_{ij} \cdot y_i y_j \ , \ i < j$$

квадрат пішін $y_2, y_3, ..., y_n$ айнымалылары арқылы өрнектелінеді.

Осы сияқты φ_1 квадрат пішінді де жоғарыдағы түрлендіруді пайдаланып, мына түрге келтіреміз ($b_{22} \neq 0$):

$$\varphi_1 = b_{22} \cdot z_2^2 + \varphi_2(z_3, z_4, ..., z_n), \ b_{22} \neq 0,$$

мұндағы

$$z_2 = y_2 + b_{23}/b_{22} \cdot y_3 + ... + b_{2n}/b_{22} \cdot y_n, \ z_i = y_i \ , \ i = \overline{3, n}.$$

Бұл сызықты түрлендіруде ерекше емес. Осы процесті жалғастырып, квадрат пішінді канонды түрге келтіреміз.

2-жағдай. Барлық $a_{ii} = 0$, $i = \overline{1, n}$ болсын. Онда a_{ij} элементтерінен ($i \neq j$) нөлге тең емес элемент табылады, анықтық үшін $a_{12} \neq 0$ болсын. Бұл жағдай 1-жағдайға келеді. Сонымен, бұл жағдайда $\varphi(x,x)$ квадрат пішін мына түрде өрнектеледі:

$$\varphi(x,x) = 2a_{12} \cdot x_1 x_2 + 2a_{13} \cdot x_1 x_3 + \dots + 2a_{1n} \cdot x_1 x_n +$$

$$+ 2a_{23} \cdot x_2 x_3 + \dots + 2a_{2n} \cdot x_2 x_n + \dots + 2a_{n-1,n} \cdot x_{n-1} x_n.$$

Мұндағы $a_{12} \neq 0$ болғандықтан, жаңа $y_1, y_2, \dots, y_n$ — айнымалыларды мына формула арқылы енгіземіз:

$$x_1 = y_1 + y_2, \ x_2 = y_1 - y_2, \ x_3 = y_3, \dots, x_n = y_n. \qquad (6.13)$$

Онда φ квадрат пішін ерекше емес (6.13) түрлендірудің көмегімен мына түрде өрнектелінеді:

$$\varphi = 2a_{12}(y_1^2 - y_2^2) + 2(y_1 + y_2) \cdot (a_{13} \cdot y_3 + a_{14} \cdot y_4 + \dots + a_{1n} \cdot y_n) +$$

$$+ 2(y_1 - y_2) \cdot (a_{23} \cdot y_3 + a_{24} \cdot y_4 + \dots + a_{2n} \cdot y_n) + 2y_3 \cdot$$

$$\cdot (a_{34} \cdot y_4 + \dots + a_{3n} \cdot y_n) + \dots + 2a_{n-1,n} \cdot y_{n-1} y_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} b_{ij} \cdot y_i^2 + 2 \cdot \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \cdot y_i y_j, \quad i < j.$$

Сонымен, 2-жағдай 1-жағдайға келтірілді. Теорема дәлелденді.

6.6-теорема. Кез келген (6.10) канонды пішінді ерекше емес түрлендіру көмегімен нормал пішінмен өрнектеуге болады.

Дәлелдеді. Егер $\lambda_i > 0, \quad i = \overline{1, n_1}, \quad \lambda_{n_1+j} < 0$, $j = \overline{1, n_2}$ $n_1 + n_2 = n$ болса, онда ерекше емес мына төмендегі түрлендіруді қарастырамыз:

$$y_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \cdot z_i, \ i = \overline{1, n_1}; \ y_{n_1+j} = \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{n_1+j}}} \cdot z_{n_1+j}, \ j = \overline{1, n_2} \qquad (6.14)$$

Енді (6.14) түрлендіруді (6.10) канонды пішінге апарып қойсақ, онда $\varphi = z_1^2 + \dots + z_{n_1}^2 - z_{n_1+1}^2 - \dots - z_n^2$ нормал пішінді аламыз. Теорема дәлелденді.

Мысал. Төмендегі квадрат пішінді:

$$\varphi(x,x) = x_1^2 + 2x_1 x_2 + 3x_2^2 + 4x_1 x_3 + 6x_2 x_3 + 3x_3^2 \qquad (6.15)$$

нормал пішінге түрлендірейік.

$$\varphi = (x_1^2 + 2x_1 x_2 + 4x_1 x_3) + (3x_2^2 + 6x_2 x_3 + 3x_3^2) =$$

$$[(x_1 + x_2 + 2x_3) - x_2^2 - 4x_3^2 - 4x_2 x_3] + (3x_2^2 + 6x_2 x_3 + 3x_3^2) =$$

$$= (x_1 + x_2 + 2x_3^2) + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_2 x_3 = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 +$$

$$+ 2(x_2^2 + x_2 x_3) - x_3^2 = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 +$$

$$+ 2 \cdot [(x_2 + \tfrac{1}{2} \cdot x_3)^2 - \tfrac{1}{4} \cdot x_3^2] - x_3^2 = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 +$$

$$+ 2(x_2 + \tfrac{1}{2} \cdot x_3)^2 - \tfrac{3}{2} \cdot x_3^2 = y_1^2 + 2y_2^2 - \tfrac{3}{2} \cdot y_3^2,$$

мұндағы

$$y_1 = x_1 + x_2 + 2x_3, \ y_2 = x_2 + \tfrac{1}{2} \cdot x_3, \ y_3 = x_3.$$

Сонымен, $\varphi = y_1^2 + 2y_2^2 - \frac{3}{2} \cdot y_3^2$ — берілген (6.15) квадрат пішіннің канонды түрі. $y_1 = z_1$, $\sqrt{2 \cdot y_2} = z_2$, $\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot y_3 = z_3$ болғанда оның нормал түрі

$$\varphi = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2.$$

§ 6.3. Квадрат пішіннің инерция заңы

Бізге

$$\varphi(x,x) = x A x' = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i x_j \qquad (6.16)$$

квадрат пішін берілсін, мұндағы $A = A'$: $a_{ij} = \varphi(l_i, l_j) = \varphi(l_j, l_i) = a_{ji}$, x — жатық вектор, x_i элементтері x вектордың $l_1, l_2, \dots, l_n$ базистегі координаттары:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

6.7.-теорема. Егер ерекше емес екі түрлендіру (6.16) квадрат пішінді нормал түрлерге келтірілсе:

$$\varphi = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_{p+q}^2, \ p + q = n, \qquad (6.17)$$

$$\varphi = z_1^2 + \dots + z_k^2 - z_{k+1}^2 - \dots - z_{k+m}^2, \ k + m = n, \qquad (6.18)$$

онда (6.17), (6.18) формуладағы оң және теріс коэффициенттерінің сандары тең: $p = k$, $q = m$, мұндағы y_i

элементтері y векторының — $f_1, f_2, ..., f_n$ базистегі, ал z_i, $i = \overline{1, n}$ — элементтері z векторының — $g_1, g_2, ..., g_n$ базистегі координаттары: $y = (y_1, ..., y_n)$, $z = (z_1, ..., z_n)$.

Дәлелдеуі. Алдымен, $p = k$ теңдігін дәлелдейік. Ол үшін кері жориық, яғни $p > k$ болсын. n өлшемді сызықты R кеңістігінің R_1 мен R_2 — ішкі кеңістіктерін қарастырайық, мұндағы R_1 кеңістігі $f_1, f_2, ..., f_p$ векторларынан, ал R_2 кеңістігі $g_{k+1}, g_{k+2}, ..., g_n$ векторларынан анықталған кеңістіктер $(n = k + m)$. Онда 2.13 теорема бойынша $\lim (R_1 \cap R_2) = = p - k > 0$, яғни R_1 мен R_2 кеңістіктерінің қиылысуы бос жиын емес $R_1 \cap R_2 \neq \varnothing$. Демек, $R_1 \cap R_2$ жиынында нөлге тең емес u векторы бар және бұл вектор R_1 мен R_2 кеңістіктеріне де тиісті: $u \in R_1$, $u \in R_2$. Сондықтан.

$$u = \alpha_1 \cdot f_1 + ... + \alpha_p \cdot f_p, \; u = \beta_{k+1} \cdot q_{k+1} + ... + \beta_n \cdot g_n.$$

Онда, (6.17) формуладан U векторы үшін мына теңсіздік орындалады:

$$\varphi (u, u) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_p^2 > 0 \;,$$

ал (6.18) формуладан

$$\varphi (u,u) = -\beta_{k+1}^2 - \beta_{k+2}^2 ... \beta_n^2 < 0.$$

Сонымен, бір вектор үшін $\varphi > 0$ және $\varphi < 0$ болды. Демек, $p > k$ — деп ұйғаруымыз дұрыс емес. Осы сияқты, $p < k$ теңсіздігі де орындалмайды. Олай болса, $p = k$. Онда $p + q = k + m$, $q = m$. Теорема дәлелденді.

Инерция заңдылығындағы p саны *инерцияның оң индексі, ал q саны инерцияның теріс индексі* деп аталады.

§ 6.4. Якоби әдісі

Бізге квадрат $\varphi (x, x)$ пішін берілсін және оның симметриялы A матрицасының бұрыштық минорлары нөлге тең болмасын:

$$\Delta_1 = a_{11} \neq 0, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \; . \; . \; .,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \; a_{ij} = a_{ji} = \varphi (l_i, l_j).$$

Сызықты R кеңістікте (6.16) квадрат пішінді $f_1, f_2, ..., f_n$ базисті мына түрде жазуға болады:

$$\varphi (x, x) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} y_i y_j \;, \tag{6.19}$$

мұндағы

$$c_{ij} = \varphi (f_i, f_j) = \varphi (f_j, f_i) = c_{ji}.$$

Енді алдымызға мынадай мақсат қоялық:

$$c_{ij} = \varphi (f_i, f_j) = 0, \; i \neq j$$

теңдігі орындалатын $f_1, f_2, ..., f_n$ базисті анықтайық. Онда (6.19) — квадрат пішінді канонды түрге келтірген болар едік, яғни:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} \cdot y_i^2 \;.$$

Жоғарыдағы мақсатпен $f_1, f_2, ..., f_n$ базисті белгілі $l_1, l_2, ..., l_n$ базис арқылы төмендегідей анықтайық:

$$\begin{aligned} f_1 &= b_{11} \cdot l_1, \\ f_2 &= b_{21} \cdot l_1 + b_{22} \cdot l_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n &= b_{n1} \cdot l_1 + b_{n2} \cdot l_2 + ... + b_{nn} \cdot l_n, \end{aligned} \tag{6.20}$$

мұндағы b_{ij} — белгісіз коэффициенттер. Белгісіз коэффициенттерді анықтау үшін мына шарттар орындалсын:

$$\varphi (f_i, l_j) = \begin{cases} 1 \;, i = j \;, \\ 0 \;, i \neq j \;. \end{cases} \tag{6.21}$$

(6.20) мен (6.21)-дің бірінші теңдеулерінен b_{11} коэффициентті анықтайтын теңдеуді аламыз:

$$1 = \varphi (f_1, l_1) = b_{11} \cdot \varphi (l_1, l_1) = b_{11} \cdot a_{11}, \tag{6.22$_1$}$$

$$b_{11} = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}, \; \Delta_0 \equiv 1, \; \Delta_1 = a_{11} \neq 0.$$

(6.20) мен (6.21)-дің екінші теңдеуінен b_{21} мен b_{22} — коэффициенттерді анықтайтын сызықты теңдеулер жүйе аламыз:

$$0 = \varphi (f_2, l_1) = b_{21} \cdot \varphi (l_1, l_1) + b_{22} \cdot \varphi (l_1, l_2) = b_{21} \cdot a_{11} + b_{22} \cdot a_{12},$$

$$1 = \varphi (f_2, l_2) = b_{21} \cdot a_{12} + b_{22} \cdot a_{22},$$

яғни

$$\begin{cases} b_{21} \cdot a_{11} + b_{22} \cdot a_{12} = 0, \\ b_{21} \cdot a_{12} + b_{22} \cdot a_{22} = 1. \end{cases}$$

Осыдан

$$b_{21} = \frac{-1}{\Delta_2} a_{12}, \quad b_{22} = \frac{a_{11}}{\Delta_2} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \qquad (6.22_2)$$

мұндағы

$$\Delta_2 \neq 0.$$

Осы сияқты (6.20) мен (6.21)-дің n теңдеуінен:

$$\begin{cases} 0 = \varphi (f_n, l_1) = b_{n1} \cdot a_{11} + \ldots + b_{nn} \cdot a_{1n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = \varphi (f_{n1}, l_{n-1}) = b_{n1} \cdot a_{n-1,1} + \ldots + b_{nn} \cdot a_{n-1,n}, \\ 1 = \varphi (f_n, l_n) = b_{n1} \cdot a_{n1} + \ldots + b_{nn} \cdot a_{nn}. \end{cases}$$

Осыдан

$$b_{n1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n} \\ 1 & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$b_{n,n}-1 = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots 0 & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & \ldots 0 & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \ldots 1 & a_{n,n} \end{vmatrix}, b_{nn} = \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}, \ \Delta_n \neq 0. \qquad (6.22_n)$$

Сонымен, барлық белгісіз b_{ij} коэффициенттерді (6.22) формулалардан анықтаймыз. Енді (6.19) — квадрат пішіннің c_{ij} коэффициенттерін анықтайық. Барлық c_{ij} коэффициенттеріне ($i \neq j$):

$$c_{ij} = \varphi (f_i, f_j) = 0, \ i \neq j, \ i, j = \overline{1, n}.$$

теңдігі орындалатынын көрсетейік. Ол үшін $c_{ij} = c_{ji}$ теңдігін ескеріп, $c_{ij} = 0$, $j = \overline{1, i-1}$, $i = \overline{1, n}$ теңдігін дәлелдесек жеткілікті.

Шынында да, (6.20) формуланың j теңдеуі мен (6.21)-дің i — теңдеуінен ($j = 1, 2, \ldots, i-1$):

$$c_{ij} = \varphi (f_i, f_j) = \varphi (f_i, b_{j1} \cdot l_1 + b_{j2} \cdot l_2 + \ldots + b_{jj} \cdot l_j) =$$

$$= b_{j1} \cdot \varphi (f_i, l_1) + b_{j2}, \varphi (f_i, l_2) + \ldots + b_{jj} \cdot \varphi (f_i, l_j) = 0, \ i = \overline{1, n}.$$

Енді (6.20) мен (6.21)-дің K теңдеулерінен:

$$c_{kk} = \varphi (f_k, f_k) = \varphi (f_k, b_{k1} \cdot l_1 + b_{k2} \cdot l_2 + \ldots + b_{kk} \cdot l_k) =$$

$$= b_{k1} \cdot \varphi (f_k, l_1) + \ldots + b_{k,k-1} \cdot \varphi (f_k, l_{k-1}) + b_{kk} \cdot \varphi (f_{k1} l_k) =$$

$$= b_{kk} = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_{jk}}, \ \Delta_k \neq 0.$$

Демек, (6.16) квадрат пішін мына канонды түрде өрнектеледі:

$$\varphi (y, y) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \cdot y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \cdot y_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \cdot y_n^2, \qquad (6.23)$$

мұндағы $y_1, y_2, \ldots, y_n$ сандары — n өлшемді сызықты k кеңістігіндегі y вектордың $f_1, f_2, \ldots, f_n$ базистегі координаттары.

Сонымен, жоғарыдағы *Якоби әдісі* деп аталатын әдіспен мына теореманы дәлелдедік.

6.8-теорема. Егер (6.16) квадрат пішіннің A матрицасының барлық бұрыштық минорлары нөлге тең болмаса, онда осы квадрат пішінді (6.23) канонды түрге өрнектейтін (6.20) — базис әрқашанда бар.

Мысал. Бізге $l_1 = (1, 0, 0)$, $l_2 = (0, 1, 0)$, $l_3 = (0, 0, 1)$ базисте $\varphi (x_1 x) = 2x_2^2 + 3x_1 x_2 + 4x_1 x_3 + x_2^2 + x_3^2$ квадрат пішін берілсін. Якоби әдісімен оны канонды түрге келтірейік.

Ол үшін $\varphi (x, x)$ квадрат пішінді төмендегі түрде жазамыз:

$$\varphi (x_1 x) = 2x_1^2 + \frac{3}{2} \cdot x_1 x_2 + 2x_1 x_3 +$$

$$+ \frac{3}{2} x_2 x_1 + x_2^2 + 0 \cdot x_2 x_3 +$$

$$+ 2x_3 x_1 + 0 \cdot x_2 x_3 + x_3^2 = x A x', \ x = (x_1, x_2, x_3).$$

Онда $\Delta_0 \equiv 1$, $\Delta_1 = 2$, $\frac{\Delta}{2} = \frac{-1}{4}$, $\Delta_3 = \frac{-17}{4}$. Демек, якоби әдісін қолдануға болады, яғни

$$f_1 = b_{11} \cdot l_1,\ f_2 = b_{21} \cdot l_1 + b_{22} \cdot l_2,\ f_3 = b_{31} \cdot l_1 + b_{32} \cdot l_2 + b_{33} \cdot l_3$$

(6.22) формулалардан: $b_{11} = \frac{1}{2}$, $b_{21} = 6$, $b_{22} = -8$, $b_{31} = \frac{8}{17}$, $b_{32} = -\frac{12}{17}$, $b_{33} = \frac{1}{17}$.

Сонымен іздестіріп отырған базис

$$f_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), \quad f_2 = (6, -8, 0), \quad f_3 = \left(\frac{8}{17}, -\frac{12}{17}, \frac{1}{17}\right)$$

болады. Онда:

$$c_{11} = b_{11} = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} = \frac{1}{2},\ c_{22} = b_{22} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = -8,\ c_{33} = b_{33} = \frac{\Delta_2}{\Delta_3} = \frac{1}{17},$$

іздестіріп отырған канонды пішін

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot y_1^2 - 8 \cdot y_2^2 + \frac{1}{17} \cdot y_3^2.$$

§ 6.5. Оң анықталған квадрат пішін

Анықтама. Квадрат $\varphi(x,x)$ пішін *оң (теріс)* анықталған деп аталады, егер кез келген $x \in R$ вектор үшін $\varphi(x,x) > 0$ ($\varphi(x, x) < 0$) теңсіздігі орындалса.

6.9-теорема (Сильвестр). Квадрат $\varphi(x,x)$ пішін оң анықталған болу үшін барлық бұрышты минорлар оң болуы қажетті әрі жеткілікті, яғни

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \ldots,\ \Delta_n > 0.$$

Қажеттілігі. Квадрат $\varphi(x,x)$ пішін оң анықталсын:

$$\varphi(x, x) > 0, \quad 0 \neq x \in R.$$

$\Delta_i > 0$, $i = \overline{1, n}$ теңсіздіктері орындалатынын дәлелдейік. Ол үшін математикалық индукция әдісін қолданамыз. Егер $n = 1$ болса, онда $\varphi(x,x) = a_{11} x_1^2 > 0$ болады. Сондықтан $a_{11} = \Delta_1 > 0$. Енді $\Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_{n-1} > 0$ теңсіздіктері орындалсын деп ұйғарып, $\Delta_n > 0$ теңсіздігін дәлелдейік, мұндағы

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi(l_1,l_1) & \ldots & \varphi(l_1,l_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi(l_n,l_1) & \ldots & \varphi(l_n,l_n) \end{vmatrix}.$$

Дәлелдеу үшін $\Delta_n = 0$ болсын деп кері жорық. Онда Δ_n анықтауышының жатық жолдарында (кем дегенде екі жатық жолында) сызықты байланыс бар, яғни

$$\alpha_1 \cdot \varphi(l_i, l_1) + \alpha_2 \cdot \varphi(l_i, l_2) + \ldots + \alpha_n \cdot \varphi(l_i, l_n) = 0,$$

мұндағы барлық α_i, $i = \overline{1, n}$ нөлге тең емес. Осыдан

$$\varphi(l_i, \alpha_1 \cdot l_1 + \alpha_2 \cdot l_2 + \ldots + \alpha_n \cdot l_n) = 0,\ i = \overline{1, n}$$

болады. Демек,

$$\varphi(\alpha_1 \cdot l_1 + \alpha_2 \cdot l_2 + \ldots + \alpha_n \cdot l_n, \alpha_1 \cdot l_1 + \alpha_2 \cdot l_2 + \ldots + \alpha_n \cdot l_n) = 0$$

теңдігі орындалады. Бірақта $\varphi(x,x) > 0$ болғандықтан соңғы теңдіктің орындалуы мүмкін емес. Сонымен, $\Delta_n = 0$ деп жоруымыз дұрыс емес. Енді $\Delta_n \neq 0$ болсын. Барлық $\Delta_1 \neq 0, \ldots, \Delta_n \neq 0$ болғандықтан 6.8-теорема бойынша

$$\varphi(x,x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \cdot y_1^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \cdot y_n^2$$

болады. Егер $\varphi(x,x) > 0$ ескерсек, онда:

$$\frac{\Delta_0}{\Delta_1} \cdot y_1^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \cdot y_n^2 > 0.$$

Индукциялық жоруымыз бойынша: $\Delta_0 \equiv 1 > 0$, $\Delta_1 > 0, \ldots, \Delta_{n-1} > 0$. Демек, соңғы теңсіздіктен $\Delta_n > 0$ болады.

Жеткіліктілігі. Енді $\Delta_1 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$ болсын деп ұйғарып, $\varphi(x,x) > 0$ теңсіздігін дәлелдейік. Ұйғаруымыз бойынша $\Delta_1 \neq 0, \ldots, \Delta_n \neq 0$, онда 6.8-теоремадан:

$$\varphi(x,x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \cdot y_1^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \cdot y_n^2.$$

Осыдан және $\Delta_0 = 1 > 0$, $\Delta_1 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$ теңсіздіктерінен $\varphi(x,x) > 0$ теңсіздігін аламыз. Теорема дәлелденді.

§ 6.6. Квадрат пішінді негізге өске өрнектеу

Анықтама. Квадрат $\varphi(x,x)$ пішінді ортогонал түрлендіру көмегімен канонды түрге келтіруді *негізгі өске өрнектеу* деп аталады.

6.10-теорема. Кез келген квадрат $\varphi(x,x)$ пішінді ортогонал түрлендіру көмегімен негізгі өске өрнектеуге болады:

$$\varphi(x,x) = \lambda_1 \cdot y_1^2 + \lambda_2 \cdot y_2^2 + \dots + \lambda_n \cdot y_n^2, \qquad (6.24)$$

мұндағы λ_i сандары симметриялы A матрицаның меншікті мәндері және олардың кейбіреулері өзара тең болуы мүмкін.

Дәлелдеуі. Матрица A симметриялы болғандықтан 5.23-теорема бойынша евклид R кеңістігінің ортанормалданған

$$l_1, l_2, \dots, l_n, \ (l_i, l_j) = 0, \ i \neq j, \ (l_i, l_i) = 1$$

базисте сызықты φ түрлендіруі бар, ал 5.27-теорема бойынша оның матрицасы B диагоналды болатын ортонормалданған $f_1, \dots, f_n$ базисі бар: $B = (\lambda_i)$, мұндағы λ_i, $i = \overline{1, n}$ симметриялы түрлендірудің меншікті мәндері: $\varphi(f_i) = \lambda_i \cdot l_i$, $i = \overline{1, n}$. Олай болса, 5.3-теорема бойынша ерекше емес O матрица табылады және $B = O^{-1} \cdot A \cdot O$ формуласы орындалады, мұндағы O матрица бірінші базистен екінші базиске көшу матрицасы, яғни $O \cdot l = f$ теңдігі орындалады. Ендеше O-ортогонал матрица. Сонымен,

$$O A O' = O A O^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

теңдігі орындалады. Енді төмендегі сызықты ортогонал түрлендіруді қарастырайық:

$$x = y \cdot O \qquad (6.25)$$

мұндағы x пен y жатық векторлар: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. (6.25) түрлендіруді квадрат $\varphi(x,x)$ пішінге апарып қойып, канонды (6.24) пішінді аламыз:

$$\varphi(x,x) = y O A (y O)' = y O A \cdot O' y' = y O A O^{-1} y' =$$

$$= (y_1, y_2, \dots, y_n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$$

$$= (y_1, y_2, \dots, y_n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot y_1 \\ \lambda_2 \cdot y_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \cdot y_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot y_1^2 + \lambda_2 \cdot y_2^2 + \dots + \lambda_n \cdot y_n^2 ,$$

яғни теорема дәлелденді.

Енді квадрат $\varphi(x,x)$ пішінді негізге өске түрлендірудің алгоритмін келтірейік, яғни берілген квадрат пішінді (6.24) канонды түрге өрнектейтін (6.25) — ортогонал түрлендіруді табайық. Ол үшін, біріншіден A матрицаның λ_i — меншікті мәндерін, екіншіден λ_i меншікті мәндерге сәйкес келетін меншікті векторларды табу қажет.

Меншікті мәндер

$$|A - \lambda \cdot E| = 0$$

сипаттамалық көпмүшеліктің түбірлері. Матрица A симметриялы болғандықтан, барлық меншікті мәндер нақты сан. Мұнда екі жағдай болуы мүмкін.

1-жағдай. Барлық меншікті мәндер әртүрлі болсын: $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$. Меншікті мәндерге сәйкес келетін z_i — меншікті векторлар өзара ортогонал:

$$(z_i, z_j) = 0, \ i \neq j$$

және оларды біртекті сызықты теңдеулер жүйелерінен анықтаймыз:

zhassulan
Yrysbek

$$(A - \lambda_i E) z_i = 0, \ i = \overline{1, n},$$

мұндағы $z_i \neq 0$, себебі $|A - \lambda_i E| = 0$. Осыдан кейін z_i векторларын ортонормалдаймыз, яғни:

$$O_i = \frac{z_i}{||z_i||}, \ ||z_i||^2 = (z_i, z_i), \ i = \overline{1, n}.$$

Сонымен, $O_1, O_2, \dots, O_n$ жатық жолды векторлар: $O_i = (O_{i1}, O_{i2}, \dots, O_{in})$, $i = \overline{1, n}$ іздеп отырған ортогонал O матрицаның жатық жолдары.

2-жағдай. Енді A матрицаның әртүрлі k меншікті мәндері $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ болсын және олардың сәйкес еселігі $n_1, n_2, \dots, n_k$ болсын, мұндағы $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Онда біртекті

$$(A - \lambda_i \cdot E) z_i = 0, \ i = \overline{1, k}$$

жүйені шешіп, λ_1 үшін: $z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \dots, z_{n_1}^{(1)}$ — n_1 сызықты тәуелсіз меншікті векторларды, . . ., λ_k үшін: $z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \dots, z_{n_k}^{(k)}$ — n_k сызықты тәуелсіз меншікті векторларды табамыз. Осы $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ сызықты тәуелсіз меншікті векторларға ортогонализация әдісін қолданып, $O_1, O_2 \dots, O_n$ ортонормалданған векторлар жүйесін табамыз, ол векторлар іздеп отырған ортогонал матрицаның жатық жолдары.

Мысал. Мына $\varphi(x,x) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1 x_2 - 2x_1 x_3 + 4x_2 x_3$ квадрат пішінді негізгі өске келтіріңдер және оның ортогонал түрлендіруін анықтаңдар.

Алдымен

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

матрицаның меншікті мәндерін табайық:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & -1 \\ -2 & 5-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 7)(\lambda - 1)^2 ,$$

яғни $\lambda = 7$ — бір еселі, $\lambda = 1$ — екі еселі түбір.

Енді $\lambda = 7$ меншікті түбірдің меншікті z_1 — векторын анықтайық, яғни $(A - 7E)\, z_1 = 0$ біртекті жүйені шешейік:

$$\begin{cases} -5b_1 - 2b_2 - b_2 = 0, \\ -2b_2 - 2b_2 + 2b_3 = 0, \\ -b_3 + 2b_2 - 5b_3 = 0, \qquad z_1 = (-1, 2, 1). \end{cases}$$

Енді $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ меншікті түбірдің сәйкес меншікті z_3, z_2 векторларын табайық, яғни $(A - E)\, Z_i = 0$ біртекті жүйені шешейік:

$$\begin{cases} b_1 - 2b_2 - b_3 = 0, \\ -2b_1 + 4b_2 + 2b_3 = 0, \\ -b_1 + 2b_2 + b_3 = 0. \end{cases}$$

Осыдан тәуелсіз z_2, z_3 векторларды анықтаймыз: $z_2 = (1, 0, 1)$, $z_3 = (2, 1, 0)$. Анықталған z_1, z_2, z_3 векторларға ортогонализация әдісін қолданып (7.7б 4.8-теоремалар), мына

$$o_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt6}, \frac{2}{\sqrt6}, \frac{1}{\sqrt6}\right), \quad o_2 = \left(\frac{1}{\sqrt2}, o, \frac{1}{\sqrt2}\right), \quad o_3 = \left(\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}, -\frac{1}{\sqrt3}\right)$$

ортонормалданған векторлар жүйесін аламыз.

Сонымен, іздестіріп отырған ортогонал O матрица мына түрде болады:

$$O = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt6} & \frac{2}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt6} \\ \frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3} & \frac{-1}{\sqrt3} \end{pmatrix}, \quad O A O' = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Демек, берілген квадрат пішін негізгі өске түрленді:

$$\varphi = 7 \cdot y_1^2 + y_2^2 + y_3^3,$$

ал іздестіріп отырған ортогонал түрлендіру

$$x = y \cdot \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt6} & \frac{2}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt6} \\ \frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3} & \frac{-1}{\sqrt3} \end{pmatrix} \quad \text{немесе} \quad \begin{aligned} x_1 &= -\frac{y_1}{\sqrt6} + \frac{y_2}{\sqrt2} + \frac{y_3}{\sqrt3}, \\ x_2 &= \frac{2y_1}{\sqrt6} + \frac{y_3}{\sqrt3}, \\ x_3 &= \frac{y_1}{\sqrt6} + \frac{y_2}{\sqrt2} - \frac{y_3}{\sqrt3} \end{aligned}$$

болады.

§ 6.7. Екінші дәрежелі қисық сызықты канонды түрге келтіру

Екінші дәрежелі қисық сызықтың жалпы теңдеуін қарастырайық:

$$f(x_1, x_2) = a_{11} \cdot x_1^2 + 2a_{12} \cdot x_1 x_2 + a_{22} \cdot x_2^2 + 2a_{13} \cdot x_1 + 2a_{23} \cdot x_2 + a_{33} = 0. \tag{6.26}$$

Бұл теңдеудің құрамында x_1 мен x_2 айнымалы шамаларға тәуелді $a_{11} \cdot x_1^2 + 2a_{12} \cdot x_1 x_2 + a_{22} \cdot x_2^2$ квадрат пішін бар, ал

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

— симметриялы матрица.

Енді *(6.26) теңдеуі эллипстің* $\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1\right)$ *немесе гиперболаның* $\left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1\right)$, *немесе параболаның* $(x_1^2 = 2p \cdot x_2)$ *теңдеуі болатынын дәлелдейік.* Ол үшін квадрат пішінді негізгі өске келтіру алгоритмін пайдаланайық. (6.26) пішінді мына түрде жазайық:

$$f(x_1, x_2) \equiv xAx' + 2xa + a_{33} = 0, \qquad (6.27)$$

мұндағы $x = (x_1, x_2)$, $a = (a_{13}, a_{23})$. Онда 6.10-теорема бойынша

$$x = y \cdot 0 \qquad (6.28)$$

ортогонал түрлендіруі бар, мұндағы 0-ортогонал матрица:

$$0 = \begin{pmatrix} o_{11} & o_{12} \\ o_{21} & o_{22} \end{pmatrix}$$

Ортогонал (6.28) түрлендіру (6.27) квадрат пішінді негізгі өске түрлендіреді $\lambda_1 \cdot y_1^2 + \lambda_2 \cdot y_2^2$, мұндағы λ_1 мен λ_2 симметриялы A матрицаның меншікті мәндері және олар $|A - \lambda E| = 0$:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22}) \cdot \lambda + I = 0, \qquad I \equiv |A| = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 \qquad (6.29)$$

теңдеуінен анықталады. Ортогонал (6.28) түрлендіруді (6.27) квадрат пішінге апарып қойып,

$$\lambda_1 \cdot y_1^2 + \lambda_2 \cdot y_2^2 + 2y0 \cdot a + a_{33} \equiv$$

$$\equiv \lambda_1 \cdot y_1^2 + \lambda_2 \cdot y_2^2 + 2b_{13} \cdot y_1 + 2b_{23} \cdot y_2 + b_{33} = 0 \qquad (6.30)$$

теңдеуін аламыз, мұндағы $b_{13} = o_{11} \cdot a_{13} + o_{12} \cdot a_{23}$, $b_{23} = o_{21} \cdot a_{13} + o_{22} \cdot a_{23}$, $b_{33} = a_{33}$. (6.29) сипаттамалық теңдеуді шешейік:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4I}}{2},$$

мұндағы $(a_{11} + a_{22})^2 - 4I = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11} a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0$. Сондықтан, λ_1 мен λ_2 — нақты сандар. Виета теоремасы бойынша $I = \lambda_1 \cdot \lambda_2$. Мұнда екі жағдай болуы мүмкін: $I \neq 0$, $I = 0$.

1-жағдай. $I \equiv \lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$ болсын: $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$. Бұл жағдайда (6.30) теңдеуді мына түрде жазамыз:

$$\lambda_1 \cdot \left(y_1^2 + 2\frac{b_{13}}{\lambda_1} y_1\right) + \lambda_2 \cdot \left(y_2^2 + 2\frac{b_{23}}{\lambda_2} \cdot y_2\right) + b_{33} = 0.$$

Квадрат жақшаларды толық квадратқа толықтырайық:

$$\lambda_1 \cdot \left(y_1 + \frac{b_{13}}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \cdot \left(y_2 + \frac{b_{23}}{\lambda_2}\right)^2 + c = 0,$$

мұндағы $c = b_{33} - \frac{b_{13}^2}{\lambda_1} - \frac{b_{23}^2}{\lambda_2}$.

Егер $z_1 = y_1 + \frac{b_{13}}{\lambda_1}$, $z_2 = y_2 + \frac{b_{23}}{\lambda_2}$

болса, онда

$$\lambda_1 \cdot z_1^2 + \lambda_2 \cdot z_2^2 + c = 0. \qquad (6.31)$$

а) $I \equiv \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ болсын: $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ (егер $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ болса, онда (6.31) теңдеуді — 1-ге көбейтіп $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$) болған жағдайға келтіреміз).

Егер $c < 0$ болса, онда (6.31) теңдеуден:

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} = 1 \text{ — эллипс,}$$

мұндағы $a = \sqrt{-\frac{c}{\lambda_1}}$, $b = \sqrt{-\frac{c}{\lambda_2}}$.

Егер $c > 0$ болса, онда (6.31) теңдеуден:

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} = -1 \text{ — жорымал эллипс,}$$

мұндағы $a = \sqrt{\frac{c}{\lambda_1}}$, $b = \sqrt{\frac{c}{\lambda_2}}$.

Егер $c = 0$ болса, онда (6.31) теңдеуден:

$(\sqrt{\lambda_1})^2 \cdot z_1^2 + (\sqrt{\lambda_2})^2 \cdot z_2^2 = 0$ — нүктеге айналу (жалқы) эллипс.

б) $I \equiv \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ болсын: $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$. Егер $c > 0$ болса, онда (6.31) теңдеуден:

$$\frac{z_1^2}{a^2} - \frac{z_2^2}{b^2} = 1 \text{ — гипербола,}$$

мұндағы $a = \sqrt{-\frac{c}{\lambda_1}}$, $b = \sqrt{\frac{c}{\lambda_2}}$.

Егер $c < 0$ болса, онда (6.31) теңдеуден:

$$\frac{z_1^2}{a^2} - \frac{z_2^2}{b^2} = -1 \text{ — жорымал гипербола,}$$

мұндағы $a = \sqrt{\frac{c}{\lambda_1}}$, $b = \sqrt{\frac{-c}{\lambda_2}}$.

Егер $c = 0$ болса, онда (6.31) теңдеуден:

$(\sqrt{-\lambda_1})^2 \cdot z_1^2 - (\sqrt{\lambda_2})^2 \cdot z_2^2 = 0$ — нүктеге айналу (жалқы) гипербола.

2-жағдай. $I \equiv \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ болсын: $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$. Онда (6.30) теңдеу мына түрде жазылады:

$$\lambda_1 \cdot y_1^2 + 2b_{13} \cdot y_1 + 2b_{23} \cdot y_2 + b_{33} = 0. \qquad (6.32)$$

а) Егер $b_{23} \neq 0$ болса, онда (6.32) теңдеуден:

$$\lambda_1 \cdot \left(y_1 + \frac{b_{13}}{\lambda_1}\right)^2 + 2\, b_{23} \cdot \left(y_2 + \frac{b_{33}}{2b_{23}} - \frac{b_{13}^2}{2b_{23}\lambda_1}\right) = 0$$

немесе

$$\lambda_1 \cdot z_1^2 + 2\, b_{23} \cdot z_2 = 0 \text{ — парабола.}$$

мұндағы

$$z_1 = y_1 + \frac{b_{13}}{\lambda_1},\ z_2 = y_2 + \frac{b_{33}}{2b_{23}} - \frac{b_{13}^2}{2b_{23}} \cdot \lambda_1.$$

б). Егер $b_{23} = 0$ болса, онда (6.32) теңдеуден:

$$\lambda_1 \cdot (y_1 + \frac{b_{13}}{\lambda_1})^2 + b_{33} - \frac{b_{13}^2}{\lambda_1} = 0$$

немесе

$$\lambda_1 \cdot z_1^2 + k = 0$$

аламыз, мұндағы $z_1 = y_1 + \frac{b_{13}}{\lambda_1}$, $k = b_{33} - \frac{b_{13}^2}{\lambda_1}$.

Егер $k < 0$ болса, онда $\lambda_1 \cdot z_1^2 + k = 0$:

$\sqrt{\lambda_1} \cdot z_1 + \sqrt{-k} = 0$, $\sqrt{\lambda_1} \cdot z_1 - \sqrt{-k} = 0$ — параллель екі түзудің теңдеуі.

Егер $k = 0$ болса, онда $\lambda_1 \cdot z_1^2 = 0$ — беттесетін екі түзудің теңдеуі.

Егер $k > 0$ болса, онда $\lambda_1 \cdot z_1^2 + k = 0$:

$\sqrt{\lambda_1} \cdot z_1 + i\sqrt{k} = 0$, $\sqrt{\lambda_1} \cdot z_1 - i\sqrt{k} = 0$ — жорымал параллель екі түзудің теңдеуі.