V Тарау. СЫЗЫҚТЫ ТҮРЛЕНДІРУЛЕР

§ 5.1. Сызықты түрлендірулердің анықтамасы

Айталық, кез келген (нақты немесе комплексті) R кеңістігі берілсін.

Анықтама. Сызықты R кеңістігінің әрбір x элементіне (векторына) осы кеңістікте анықталған y элементі сәйкес келсе, онда *R кеңістігінде φ түрлендіру (оператор) берілді* дейміз және ол $\varphi(x)$ таңбасымен белгіленеді, яғни $y = \varphi(x) \in R$, $x \in R$.

Демек, R кеңістігінің φ — түрлендіруі осы кеңістіктің x элементіне ($x \in R$) әсер етіп, осы элементке R—кеңістігінің $\varphi(x) \in R$ элементін сәйкес қояды. Бұл жағдайда, R — кеңістігінде *φ түрлендіруі берілді* дейміз және $R \xrightarrow{\varphi} R$ таңбасымен белгіленеді.

Анықтама. Сызықты R кеңістігіндегі *φ түрлендіруі сызықты (сызықты оператор)* деп аталады, егер барлық $x_1, x_2 \in R$ элементтері үшін

$$1)\ \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2),\ x_1, x_2 \in R,$$

$$2)\ \varphi(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot \varphi(x),\ x \in R$$

шарттары орындалса, мұндағы λ — кез келген сан.

Бұл шарттарды төмендегі бір теңдікпен алмастыруға болады:

$$\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \varphi(x) + \lambda_2 \varphi(x).$$

φ — түрлендіруінің $y = \varphi(x)$ элементі *x элементтің бейнесі,* ал x элементі *y элементінің түпбейнесі* дейміз.

Сызықты R кеңістігінің кез келген φ сызықты түрлендіруі: 1) нөлдік элементті нөлдік элементке түрлендіреді (φ түрлендіруі нөлдік элементті өзгертпейді): $\varphi(0) = 0$, 2) қарама-қарсы — $x \in R$ элементті оның қарама-қарсы $-\varphi(x)$ бейнесіне түрлендіреді, яғни $\varphi(-x) = -\varphi(x)$.

Шынында да, $x \in R$ кез келген элемент болсын, онда

$$\varphi(0) = \varphi(0 \cdot x) = 0 \cdot \varphi(x) = 0.$$

Осы сияқты:

$$\varphi(-x) = \varphi((-1) \cdot x) = (-1) \cdot \varphi(x) = -\varphi(x)$$

теңдігі орындалады.

Сызықты R кеңістігінің кез келген элементін нөлдік элементке түрлендіретін түрлендіруді *нөлдік түрлендіру* дейміз және ол $0(x)$ деп белгіленеді, яғни $0(x)=0$, $x \in R$.

Бұл белгілеудегі теңдіктің оң жағындағы 0 — нөл элемент, ал сол жағындағы 0 — нөлдік түрлендіру. Нөлдік түрлендіру сызықты түрлендіру болады.

Сызықты R кеңістігінің кез келген $x \in R$ элементін сол элементтің өзіне-өзін түрлендіретін түрлендіру *бірлік* немесе *тепе-теңдік* түрлендіру деп атайды және ол $\varepsilon(x)$ деп белгіленеді, яғни $\varepsilon(x)=x$, $x \in R$.

R сызықты кеңістігінің кез келген $x \in R$ элементін оның $\lambda \cdot x$ элементіне түрлендіретін φ түрлендіруі сызықты болатынын көрсетейік. Шынында да, қарастырып отырған φ түрлендіруін мына түрде жазамыз:

$$\varphi(x)=\lambda \cdot x, \quad x \in R.$$

Сонда

$$\varphi(x_1+x_2)=\lambda \cdot (x_1+x_2)=\lambda \cdot x_1+\lambda \cdot x_2=\varphi(x_1)+\varphi(x_2),$$

$$\varphi(\alpha \cdot x)=\lambda(\alpha x)=(\lambda \cdot \alpha)x=\alpha(\lambda \cdot x)=\alpha \cdot \varphi(x).$$

Жоғарыда қарастырылған нөлдік пен бірлік түрлендірулер — соңғы қарастырылған түрлендірудің дербес жағдайы. Егер $\lambda=0$ болса, онда $\varphi \equiv 0$ — *нөлдік түрлендіру*, егер $\lambda=1$ болса, онда $\varphi \equiv \varepsilon$ — *бірлік түрлендіру.*

Сызықты түрлендіруге мысалдар қарастырайық.

1-мысал. Дәрежесі n-нен үлкен емес көпмүшеліктер жиынын қарастырайық, яғни

$$R=\{p(t): p(t)=a_0+a_1 \cdot t+a_2 \cdot t^2+\ldots+a_n \cdot t^n\}$$

және $\varphi(p)=p'(t)$, $p \in R$, мұндағы $p'(t)$ — көпмүшелігі $p(t)$ көпмүшелігінің бірінші туындысы. Бұл жағдайда $\varphi(P)$ сызықты түрлендіру

$$\varphi(p_1(t)+p_2(t))=(p_1(t)+p_2(t))'=p'_1(t)+p'_2(t)=\varphi(p_1)+\varphi(p_2),$$

$$\varphi(\lambda \cdot p)=(\lambda \cdot p(t))'=\lambda \cdot p'(t)=\lambda \cdot \varphi(p),$$

мұндағы $p \in R$, $p_1 \in R$, $p_2 \in R$.

$\varphi(p)=p'(t)$ — түрлендіруі *дифференциалды түрлендіру* деп аталады.

2-мысал. $R=C\,[0;1]$ — кеңістігіндегі

$$\varphi(f)=\int_0^1 f(t)\,dt, \quad f(t) \in R, \quad t \in [0;1]$$

түрлендіруін қарастырайық. Онда $\varphi(f)$ түрлендіруі сызықты болады. Шынында да, анықталған интегралдың қасиеттерін қолданып, $\varphi(f)$ сызықты түрлендіру болатынын оңай дәлелдейміз:

$$\varphi(f_1+f_2)=\int_0^1 [f_1(t)+f_2(t)]\,dt=\int_0^1 f_1(t)\,dt+\int_0^1 f_2(t)\,dt=\varphi(f_1)+\varphi(f_2),$$

$$\varphi(\lambda \cdot f)=\int_0^1 \lambda \cdot f(t)\,dt=\lambda \cdot \int_0^1 f(t)\,dt=\lambda \cdot \varphi(f),$$

мұндағы $f_1, f_2 \in R$.

3-мысал. R сызықты кеңістігіндегі $\varphi(x)=\lambda \cdot x^2$ түрлендіруі сызықты бола ма, мұндағы λ — тұрақты сан, $x \in R$.

Бұл түрлендіру сызықты болмайды, себебі (5.1) мен (5.2) — шарттары орындалмайды:

$$\varphi(\lambda_1 \cdot x_1+\lambda_2 \cdot x_2)=\lambda(\lambda_1 \cdot x_1+\lambda_2 \cdot x_2)^2=\lambda(\lambda_1 \cdot x_1)^2+2\lambda \cdot$$

$$\cdot(\lambda_1 \cdot x_1)\cdot(\lambda_2 \cdot x_2)+\lambda_1(\lambda_2 \cdot x_2)^2 \neq \lambda(\lambda_1 \cdot x_1)^2+\lambda \cdot$$

$$\cdot(\lambda_2 \cdot x_2)^2=\lambda \cdot \varphi(x_1)+\lambda \cdot \varphi(x_2)$$

мұндағы $x_1, x_2 \in R$.

4-мысал. R сызықты кеңістігіндегі $\varphi(x)=ax+b$ түрлендіруі сызықты бола ма, мұндағы a, b — тұрақты сандар, $b \neq 0$, $x \in R$.

Қарастырып отырған түрлендіруіміз сызықты емес:

$$\varphi(\lambda_1 \cdot x_1+\lambda_2 \cdot x_2)=a(\lambda_1 \cdot x_1+\lambda_2 \cdot x_2)+b=$$

$$=a\lambda_1 \cdot x_1+a\lambda_2 \cdot x_2+b \neq$$

$$\neq \lambda_1(a x_1+b)+\lambda_2(a x_2+b)=\lambda_1\varphi(x_1)+\lambda_2\varphi(x_2).$$

5-мысал. Егер $x=\{x_1; x_2; \ldots; x_n\} \in R$, $\varphi \equiv A=(a_{ij})$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$, матрица болсын және ол элементке $y \in R$ элементі сәйкес болсын, яғни:

$$y=A \cdot x \text{ немесе } A \cdot x=A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}=$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \\ \dots\dots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j \end{pmatrix}.$$

Бұдан $y = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i + \overline{1, n}$. Осыдан $\varphi \equiv A$ түрлендіруінің сызықты болатынын оңай дәлелдейміз.

§ 5.2. Матрица мен түрлендіру арасындағы байланыс

Біз кез келген сызықты R кеңістігінің $l_1, l_2, \dots, l_n$ базисі мен кез келген φ сызықты түрлендіруін қарастырайық.

5.1-теорема. Сызықты R кеңістігінде берілген $l_1, l_2, \dots, l_n$ базисте әрбір φ сызықты түрлендіруге тек бір ғана A квадратты матрица сәйкес келеді және, керісінше, әрбір A квадратты матрицаға тек бір ғана φ сызықты түрлендіру сәйкес келеді.

Дәлелдеуі. Кез келген $x \in R$ элементін $l_1, l_2, \dots, l_n$ базис бойынша жіктейік (2.4-теорема):

$$x = x_1 \cdot l_1 + x_2 \cdot l_2 + \dots + x_n \cdot l_n,$$

мұндағы $x_1, x_2, \dots, x_n$ берілген x элементтерінің координаттары: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Осыдан және φ түрлендіруі сызықты болғандықтан, төмендегі теңдік орындалады:

$$\varphi(x) = \varphi(x_1 \cdot l_1 + x_2 \cdot l_2 + \dots + x_n \cdot l_n) =$$
$$= x_1 \cdot \varphi(l_1) + x_2 \cdot \varphi(l_2) + \dots + x_n \cdot \varphi(l_n). \quad (5.1)$$

$\varphi(l_i)$, $i = \overline{1, n}$ — векторлары R кеңістігінің элементтері екенін ескеріп: $\varphi(l_i) \in R$, $i = \overline{1, n}$, оларды $l_1, l_2, \dots, l_n$ базис бойынша жіктейік:

$$\varphi(l_i) = a_{1i} l_1 + a_{2i} l_2 + \dots + a_{ni} l_n, \quad i = \overline{1, n}, \quad (5.2)$$

мұндағы $a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni}$ сандары $\varphi(l_i)$ элементінің координаттары:

$\varphi(l_i) = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni})$, $i = \overline{1, n}$. Онда (5.1) теңдік (5.2) жіктеуге сәйкес былай өрнектеледі:

$$\varphi(x) = x_1 (a_{11} \cdot l_1 + a_{21} \cdot l_2 + \dots + a_{n1} \cdot l_n) +$$
$$+ x_2 (a_{12} \cdot l_1 + a_{22} \cdot l_2 + \dots + a_{n2} \cdot l_n) +$$
$$+ \dots + x_n (a_{1n} \cdot l_1 + a_{2n} \cdot l_2 + \dots + a_{nn} \cdot l_n) =$$
$$+ (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n) \cdot l_1 + \dots +$$
$$+ (a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n) \cdot l_n. \quad (5.3)$$

Егер $\varphi(x) \in R$ элементінің координаттары $y_1, y_2, \dots, y_n$ болса, яғни $\varphi(x) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \equiv y$ және оны $l_1, l_2, \dots, l_n$ базис бойынша жіктесек:

$$\varphi(x) = y_1 \cdot l_1 + y_2 \cdot l_2 + \dots + y_n \cdot l_n, \quad (5.4)$$

онда бұл жіктеуді (5.3) жіктеумен салыстырып, мына теңдеулерді аламыз:

$$y_i = a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \dots + a_{in} \cdot x_n, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.5)$$

Сонымен, кез келген φ сызықты түрлендіруге $l_1, l_2, \dots, l_n$ базисі бойынша

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

матрицасы сәйкес келеді және оның i тік жолын (5.2) жіктелудің коэффициенттерінен, ал i жатық жолын (5.5) жіктелудің коэффициенттерінен құрастырамыз.

Кез келген квадратты A матрица берілсін $A = (a_{ij})_{n \times n}$. Кез келген $x \in R$ элементін: $x = x_1 \cdot l_1 + x_2 \cdot l_2 + \dots + x_n \cdot l_n$ басқа бір $y = \varphi(x) \in R$ элементіне өрнектейтін сызықты түрлендіруді (5.4) жіктеу бойынша φ деп белгілейік:

$$\varphi(x) = y_1 \cdot l_1 + y_2 \cdot l_2 + \dots + y_n \cdot l_n,$$

мұндағы y_i, $i = \overline{1, n}$ — коэффиценттері (5.5) формулалармен өрнектеледі:

$$y_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n, \quad i = \overline{1, n}.$$

Осы белгіленген түрлендірудің сызықты болатынын дәлелдейік. Шынында да, бұл φ түрлендіру кез келген

$z \in R$ элементін: $z = z_1 \cdot l_1 + ... + z_n \cdot l_n$ басқа $\varphi(z) \in R$ элементке өрнектейді:

$$\varphi(z) = v_1 \cdot l_1 + ... + v_n \cdot l_n,$$

мұндағы

$$v_i = a_{i1} \cdot z_1 + a_{i2} \cdot z_2 + ... + a_{in} \cdot z_n, \ i = \overline{1, n},$$

ал ол $x + z \in R$ элементін:

$$x + z = (x_1 + z_1) \cdot l_1 + ... + (x_n + z_n) \cdot l_n$$

$\varphi(x + z) \in R$ элементіне өрнектейді:

$$\varphi(x + z) = u_1 \cdot l_1 + u_2 \cdot l_2 + ... + u_n \cdot l_n,$$

мұндағы:

$$u_i = a_{i1}(x_1 + z_1) + ... + a_{in} \cdot (x_n + z_n) = y_i + v_i, \ i = \overline{1, n}.$$

Олай болса,

$$\varphi(x + z) = (y_1 + v_1) \cdot l_1 + ... + (y_n + v_n) \cdot l_n =$$
$$= (y_1 \cdot l_1 + ... + y_n \cdot l_1 + ... + v_n \cdot l_n) = \varphi(x) + \varphi(z).$$

Сол сияқты:

$$\lambda \cdot x = \lambda(x_1 l_1 + ... + x_n l_n) = \lambda \cdot x_1 \cdot l_1 + ... + \lambda \cdot x_n \cdot l_n$$

және

$$\varphi(\lambda \cdot x) = w_1 \cdot l_1 + ... + w_n \cdot l_n,$$

мұндағы:

$$w_i = a_{i1}(\lambda \cdot x_1) + ... + a_{in}(\lambda \cdot x_n) = \lambda \cdot y_i, \ i = \overline{1, n}.$$

Ендеше,

$$\varphi(\lambda \cdot x) = \lambda y_1 l_1 + ... + \lambda \cdot y_n \cdot l_n =$$
$$= \lambda(y_1 \cdot l_1 + ... + y_n \cdot l_n) = \lambda \varphi(x),$$

Сонымен, белгіленген φ — сызықты түрлендіру. Теорема дәлелденді.

1-мысал. R-кеңістігіндегі $\mathcal{E}$ бірлік: $\varepsilon(x) = x$, $x \in R$ және 0-нөлдік: $0(x) = 0$, $x \in R$ түрлендірулерінің сәйкес

матрицаларын анықтайық. (5.4) формулалар мен R кеңістігіндегі $l_1, l_2, ..., l_n$ базис бойынша:

$$\mathcal{E}(l_1) \equiv a_{11} \cdot l_1 + a_{21} \cdot l_2 + ... + a_{n1} \cdot l_n = 1 \cdot l_1 + 0 \cdot l_2 + ... + 0 \cdot l_n \equiv l_1,$$

$$\mathcal{E}(l_2) \equiv a_{12} \cdot l_1 + a_{22} \cdot l_2 + ... + a_{n2} \cdot l_n = 0 \cdot l_1 + 1 \cdot l_2 + ... + 0 \cdot l_n \equiv l_2,$$

$$. \ .$$

$$\mathcal{E}(l_n) \equiv a_{1n} \cdot l_1 + a_{2n} \cdot l_2 + ... + a_{nn} \cdot l_n = 0 \cdot l_1 + 0 \cdot l_2 + ... + 1 \cdot l_n \equiv l_n,$$

және осы сияқты:

$$0(l_i) \equiv a_{i1} \cdot l_1 + a_{2i} l_2 + ... + a_{ni} l_n = 0 \cdot l_1 + 0 \cdot l_2 +$$
$$+ ... + 0 \cdot l_n \equiv 0, \ i = \overline{1, n}.$$

Ендеше, ε — бірлік пен 0 нөлдік түрлендірулерге мына төмендегі матрицалар сәйкес келеді:

$$E = \begin{pmatrix} 1 ... 0 \\ .. .. \\ 0 ... 0 \end{pmatrix}, \ 0 = \begin{pmatrix} 0 ... 0 \\ .. .. \\ 0 ... 0 \end{pmatrix}$$

Демек, $\mathcal{E}$ бірлік түрлендіруге E бірлік матрица, ал 0 нөлдік түрлендіруге 0 нөлдік матрица сәйкес келеді.

2-мысал. φ — сызықты түрлендіруінің матрицасы n-ретті квадрат матрица болсын және $\varphi(x) = \lambda \cdot x$, $x \in R$ (5-мысал, 5.1-тақырып):

$$\begin{pmatrix} a_{11} \ a_{12} \ ... \ a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \ ... \ a_{2n} \\ ... \ ... \ ... \ ... \\ a_{n1} \ a_{n2} \ ... \ a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ . \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}.$$

Онда

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ . \ . \ . + a_{1n} \cdot x_n = \lambda \cdot x_1,$$
$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ . \ . \ . + a_{2n} \cdot x_n = \lambda \cdot x_2,$$
$$. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$
$$a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \ . \ . \ . + a_{nn} \cdot x_n = \lambda \cdot x_n.$$

Осыдан кейін $x_1, x_2, ..., x_n$ элементтерінің коэффициенттерін салғастырып, сызықты түрлендірудің матрицасының элементтерін төмендегі формулалардан табамыз:

$$a_{ij} = \begin{cases} \lambda, \text{ егер } i = j, \\ \\ 0, \text{ егер } i \neq j. \end{cases}$$

Сондықтан, берілген φ түрлендіруіне диагоналды

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

матрица сәйкес келеді. Егер $\lambda = 0$ болса, онда $\varphi \equiv 0$ — нөлдік түрлендіру ($a_{ij} = 0$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$), ал егер $\lambda = 1$ болса, онда $\varphi \equiv \varepsilon$ — бірлік түрлендіру ($a_{ij} = 1$, $i = j$, $a_{ij} = 0$, $i \neq j$).

3-мысал. $R = \{p(t) : p(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + \dots + a_n \cdot t^n\}$ кеңістігінде φ — түрлендіру төмендегі дифференциал формуласымен

$$\varphi(p) = p'(t)$$

берілсін, мұндағы φ — сызықты түрлендіру (2-мысал, 5.1-тақырып). Берілген түрлендірудің матрицасын табу үшін

$$l_0 = 1, \; l_1 = \frac{t}{1!}, \; l_2 = \frac{t^2}{2!}, \; \dots, \; l_n = \frac{t^n}{n!}$$

элементтерін базис ретінде қарастырайық. Онда

$$\varphi(l_0) = (1)' = 0, \; \varphi(l_1) = (t/1!)' = 1, \; \varphi(l_2) = t,$$

$$\varphi(l_3) = (t^3/3!)' = t^2/2!, \dots,$$

$$\varphi(l_{n-1}) = \left(\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right)' = \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}, \quad \varphi(l_n) = \left(\frac{t^{n-1}}{n!}\right)' = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

Осыдан және (5.2) формула бойынша:

$$\varphi(l_0) = a_{00} \cdot l_0 + a_{10} \cdot l_1 + a_{20} \cdot l_2 + \dots a_{n0} \cdot l_n = 0,$$

$$\varphi(l_1) = a_{01} \cdot l_0 + a_{11} \cdot l_1 + a_{21} \cdot l_2 + \dots a_{n1} \cdot l_n = l_0 = 1,$$

$$\varphi(l_2) = a_{02} \cdot l_0 + a_{12} \cdot l_1 + a_{22} \cdot l_2 + \dots a_{n2} \cdot l_n = l_1 = t/1!,$$

$$\varphi(l_3) = a_{03} \cdot l_0 + a_{13} \cdot l_1 + a_{23} \cdot l_2 + \dots a_{n3} \cdot l_n = l_2 = t^2/2!,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi(l_n) = a_{0n} \cdot l_0 + a_{1n} \cdot l_1 + a_{2n} \cdot l_2 + \dots a_{nn} \cdot l_n = l_n = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

теңдіктерін аламыз. $l_0, l_1, l_2, \dots l_{n-1}$ элементтерінің коэффициенттерін теңестіріп $l_1, l_2, \dots, l_n$ базистегі φ дифференциал түрлендіруінің матрицасын анықтаймыз:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

4-мысал. R үш өлшемді кеңістік, ал φ осы кеңістіктегі векторлардың XoY жазықтығына проекциялайтын түрлендіру болсын. R кеңістігінің базисі ретінде координат өстерінің бойындағы l_1, l_2, l_3 векторларын алайық. Онда $\varphi(l_1) = l_1$, $\varphi(l_2) = l_2$, $\varphi(l_3) = 0$ немесе (5.4) формула бойынша:

$$\varphi(l_1) = a_{11} \cdot l_1 + a_{21} \cdot l_2 + a_{31} \cdot l_3 = l_1,$$

$$\varphi(l_2) = a_{12} \cdot l_1 + a_{22} \cdot l_2 + a_{32} \cdot l_3 = l_2,$$

$$\varphi(l_3) = a_{13} \cdot l_1 + a_{23} \cdot l_2 + a_{33} \cdot l_3 = 0,$$

Осыдан $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$, $a_{33} = 0$, ал қалған коффициенттері нөлге тең. Сондықтан, l_1, l_2, l_3 базистегі φ түрлендіруінің матрицасы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

§ 5.3. Сызықты түрлендіруге амалдар қолдану

Кез келген сызықты түрлендірулерге қосу, көбейту және санды түрлендіруге көбейту амалдары орындалады. Енді осы амалдарды қарастырайық.

Айталық, R сызықты кеңістігінде φ_1 мен φ_2 сызықты түрлендірулері берілсін: $R \xrightarrow{\varphi_1} R$, $R \xrightarrow{\varphi_2} R$.

Анықтама. φ_1 мен φ_2 сызықты *түрлендірулерінің қосындысы* деп φ түрлендіруін айтамыз, егер Rкеңістігінің әрбір $x \in R$ элементіне $\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ элементі сәйкес келсе, онда ол $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ таңбасымен белгіленеді немесе $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$, $x \in R$.

Анықтамадағы φ сызықты түрлендіру болатынын көрсетейік. Ол үшін $x = \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2$ болсын. Анықтама бойынша φ_1 мен φ_2 сызықты, сондықтан:

$$\varphi(\lambda_1 \cdot x + \lambda_1 \cdot x_2) = \varphi_1(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) + \varphi_2(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) =$$
$$= \lambda_1 \cdot \varphi_1(x_1) + \lambda_2 \cdot \varphi_1(x_2) + \lambda_1 \cdot \varphi_2(x_1) + \lambda_2 \varphi_2(x_2) =$$
$$= \lambda_1 [\varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_1)] + \lambda_2 [\varphi_1(x_2) + \varphi_2(x_2)] =$$
$$= \lambda_1 \cdot \varphi(x_1) + \lambda_2 \cdot \varphi(x_2).$$

Демек, *сызықты түрлендірулердің қосындысы да сызықты түрлендіру* болады.

φ_1 мен φ_2 сызықты түрлендіруін қосқанда олардың сәйкес матрицаларына қандай амал орындалатынын тексерейік. Ол үшін R сызықты кеңістігінің $l_1, l_2, ..., l_n$ базистегі φ_1 түрлендіруінің матрицасы $A_1 = (a_{ij}^{(1)})_{n \times n}$, ал осы базистегі φ_2 түрлендіруінің матрицасы $A_2 = (a_{ij}^{(2)})_{n \times n}$ болсын. Онда (5.4) формулаларынан

$$\varphi_1(l_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}^{(1)} \cdot l_i, \ \varphi_2(l_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}^{(2)} \cdot l_i, \ k = \overline{1, n},$$

мұндағы $l_1, l_2, ..., l_n$ элементтері R кеңістігінің базисі. Соңғы және $\varphi(l_k) = \varphi_1(l_k) + \varphi_2(l_k)$ теңдіктерінен

$$\varphi(l_k) = \varphi_1(l_k) + \varphi_2(l_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}^{(1)} \cdot l_i + \sum_{i=1}^{n} a_{ik}^{(2)} \cdot l_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (a_{ik}^{(1)} + a_{ik}^{(2)}) \cdot l_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \cdot l_i, \ k = \overline{1, n},$$

мұндағы $a_{ik} = a_{ik}^{(1)} + a_{ik}^{(2)}$. Ал $A = (a_{ik})$ матрица $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ түрлендіруінің сәйкес матрицасы.

Демек, *сызықты түрлендірулерді қосқанда олардың сәйкес матрицалары да қосылады, яғни* $A = A_1 + A_2$.

Анықтама. λ саны мен φ сызықты *түрлендіруінің көбейтіндісі* деп $\lambda \cdot \varphi = \varphi_1$ түрлендіруін айтамыз, егер көбейтіндіге мына ереже орындалса

$$\varphi_1(x) = (\lambda \cdot \varphi)(x) = \lambda \cdot \varphi(x), \ x \in R.$$

Онда φ сызықты түрлендіру болғанда $\varphi_1 = \lambda \varphi$ түрлендірудің де сызықты болатынын дәлелдеңдер.

Енді λ санын φ сызықты түрлендіруіне көбейткенде λ саны мен φ сызықты түрлендіруінің сәйкес матрицасы арасында қандай амал орындалатынын қарастырайық. Ол үшін $l_1, l_2, ... l_n$ элементтері R сызықты кеңістігінің базисі,

ал $A = (a_{ij})_{n \times n}$ берілген φ сызықты түрлендіруінің матрицасы $A_1 = (a_{1j})_{n \times n} - \varphi_1$ сызықты түрлендірудің матрицасы болсын. Онда анықтама бойынша:

$$\varphi(l_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \cdot l_i, \ \varphi_1(l_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}^{(1)} l_i, \ \varphi_1(l_k) = \lambda \varphi(l_k),$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}^{(1)} l_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \cdot a_{ik}) \cdot l_i, \ a_{ik}^{(1)} = \lambda \cdot a_{ik}.$$

Сонымен, λ санын φ сызықты түрлендіруге көбейткенде λ саны осы сызықты түрлендірудің сәйкес матрицасына көбейтіледі, яғни $A_1 = \lambda \cdot A$.

Анықтама. φ_1 мен φ_2 *сызықты түрлендірулердің көбейтіндісі* деп φ түрлендіруін айтамыз, бұл жағдайда R кеңістігінің әрбір $x \in R$ элементіне $\varphi_1(\varphi_2(x))$ элементі сәйкес келеді және түрлендірулердің көбейтіндісі $\varphi(x) = \varphi(\varphi_2(x))$, $x \in R$ таңбасымен белгіленеді.

Анықтамадағы $\varphi(x) = \varphi_1(\varphi_2(x))$ түрлендіруі де — сызықты түрлендіру. Шынында да:

$$\varphi(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) = \varphi_1(\varphi_2(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2)).$$

Берілген φ_1 мен φ_2 түрлендірулері сызықты. Онда:

$$\varphi(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) = \varphi_1(\lambda_1 \cdot \varphi_2(x_1) + \lambda_2 \cdot \varphi_2(x_2)) =$$
$$= \varphi_1(\lambda_1 \varphi_2(x)) + \varphi_1(\lambda_2 \varphi_2(x_2)) = \lambda_1 \cdot \varphi_1(\varphi_2(x_1)) +$$
$$+ \lambda_2 \varphi_1(\varphi_2(x_2))$$

теңдігі орындалады.

Енді φ_1 мен φ_2 түрледірулерін көбейткенде олардың сәйкес матрицаларына қандай амал орындалатынын қарастырайық. Ол үшін φ_1 түрлендіруінің сәйкес матрицасы $A_1 = (a_{ik}^{(1)})_{n \times n}$, φ_2 түрлендіруінің матрицасы $A_2 = (a_{ik}^{(2)})_{n \times n}$ болсын делік. Онда (5.4) формулаларынан

$$\varphi(l_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \cdot l_i, \ \varphi_1(l_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}^{(1)} \cdot l_i, \ \varphi_2(l_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}^{(2)} \cdot l_i,$$

теңдіктерін аламыз. Осыдан және

$$\varphi(l_k) = \varphi_1(\varphi_2(l_k))$$

теңдігінен мына төмендегі теңдік орындалады:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} \cdot l_i = \varphi_1 \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}^{(2)} \cdot l_i \right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}^{(2)} \varphi_1 (l_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ik}^{(2)} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji}^{(1)} \cdot l_j \right).$$

Соңғы қосындының i индексін j индексіне, ал j-ді i-ге алмастырайық:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} \cdot l_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} \cdot a_{jk}^{(2)} \right) l_i \ .$$

l_i элементтерінің коэффициенттерін теңестірсек:

$$a_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} \cdot a_{jk}^{(2)}, \ i = \overline{1, n} \ , \ k = \overline{1, n} \ ,$$

яғни

$$A = A_1 \cdot A_2.$$

Сонымен, *сызықты түрлендірулерді көбейткенде олардың сәйкес матрицалары көбейтіледі.*

Соңғы анықтамадан: φ түрлендіруі мен ε бірлік түрлендіруінің көбейтіндісі φ түрлендіруінің өзіне тең, яғни

$$\varphi (\varepsilon (x)) = \varphi (x), \ x \in R.$$

Анықтама. Егер R кеңістігінің кез келген $x \in R$ элементі үшін $\varphi_1 (x) = \varphi_2 (x)$, $x \in R$ теңдігі орындалса, онда φ_1 мен φ_2 сызықты түрлендірулер тең деп аталады, тең түрлендірулерді $\varphi_1 = \varphi_2$ таңбасымен белгілейміз.

R кеңістігінің $l_1, l_2, ..., l_n$ базисіндегі φ_1 мен φ_2 сызықты түрлендірулерінің сәйкес $A_1 = (a_{ik}^{(1)})$ мен $A_2 = (a_{ik}^{(2)})$ матрицаларын қарастырайық. Егер φ_1 мен φ_2 түрлендірулері тең және $x = l_k$, $k = \overline{1, n}$ болса, онда

$$\varphi_1 (x) = \varphi_2 (x), \ x \in R$$

теңдігінен (5.4) формулалар бойынша мына төмендегі теңдікті аламыз

$$\varphi_1 (l_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}^{(1)} \cdot l_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}^{(2)} \cdot l_i \equiv \varphi_2 (l_k) \ , \ k = \overline{1, n}$$

немесе

$$\varphi_1 (l_k) = a_{1k}^{(1)} \cdot l_1 + ... + a_{nk}^{(1)} \cdot l_n =$$

$$= a_{1k}^{(2)} \cdot l_1 + ... + a_{nk}^{(2)} \cdot l_n = \varphi_2 (l_n).$$

Соңғы теңдіктегі $l_1, l_2, ..., l_n$ — базисінің коэффициенттерін теңестіріп

$$a_{ik}^{(1)} = a_{ik}^{(2)}$$

теңдігін аламыз, яғни *тең түрлендірудің сәйкес матрицалары да өзара тең* болады.

Сонымен, жоғарыдағы айтылған анықтамалардан мынадай қорытындыға келеміз. Сызықты түрлендіруге қолданылатын амалдар қосу, көбейту, дәрежелеу амалдардың шарттарын қанағаттандырады:

1. $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_2 + \varphi_1$;
2. $(\varphi_1 + \varphi_2) + \varphi_3 = \varphi_1 + (\varphi_2 + \varphi_3)$;
3. $\varphi_1 (\varphi_2 (\varphi_3)) = (\varphi_1 (\varphi_2)) \varphi_3$;
4. $(\varphi_1 + \varphi_2) \varphi_3 = \varphi_1 (\varphi_3) + \varphi_2 (\varphi_3)$;
5. $\varphi_1 (\varphi_2 + \varphi_3) = \varphi_1 (\varphi_2) + \varphi_1 (\varphi_3)$;
6. $\varphi (\varphi) = \varphi^2$, $\varphi^2 (\varphi) = \varphi^3$, ... $\varphi^{n-1} (\varphi) = \varphi^n$;
7. $\varphi^{n+m} = \varphi^n (\varphi^m)$, $\varphi^0 = \varepsilon$.

§ 5.4. Базистен базиске көшу матрицасы

Кез келген сызықты R кеңістігі берілсін. Берілген кеңістіктің төмендегі екі базисін қарастырайық:

I базис: $l_1, l_2, ..., l_n$, $l_i \in R$, $i = \overline{1, n}$,
II базис: $l_1', l_2', ..., l_n'$, $l_i' \in R$, $i = \overline{1, n}$.

R кеңістігінің кез келген элементі I базис бойынша жіктелінеді (2.4-теорема). Сондықтан, II базистің кез келген элементі I базис бойынша жіктелсін:

$$\begin{aligned} l_1' &= a_{11} \cdot l_1 + a_{12} \cdot l_2 + ... + a_{1n} \cdot l_n \, , \\ l_2' &= a_{21} \cdot l_1 + a_{22} \cdot l_2 + ... + a_{2n} \cdot l_n \, , \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ l_n' &= a_{n1} \cdot l_1 + a_{n2} \cdot l_2 + ... + a_{nn} \cdot l_n \, , \end{aligned} \qquad (5.6)$$

Анықтама. Берілген (5.6) жүйенің a_{ij} коэффициенттерінен анықталған квадрат кесте

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

I *базистен* II *базиске көшу матрицасы* (қысқаша *көшу матрицасы*) деп аталады.

Көшу матрицаға орындалатын негізгі қасиеттерге тоқталайық.

5.2-теорема. Көшу A матрицасы ерекше емес матрица, яғни A матрицаның анықтауышы нөлге тең емес: $|A| \neq 0$.

Д ә л е л д е у і. II базис сызықты тәуелсіз элементтер:

$$c_1 \cdot l'_1 + c_2 \cdot l'_2 + \dots + c_n \cdot l'_n = 0, \qquad (5.7)$$

яғни сызықты комбинация нөл элемент. Сондықтан, (5.7) теңдіктен $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ болады. (5.6) теңдіктерді (5.7) формулаға қойып, мына теңдікті аламыз:

$$c_1 (a_{11} \cdot l_1 + a_{12} \cdot l_2 + \dots + a_{1n} \cdot l_n) + c_2 (a_{21} \cdot l_1 + a_{22} \cdot l_2 +$$
$$+ \dots + a_{2n} \cdot l_n) + c_n + \dots + (a_{n1} \cdot l_1 + a_{n2} \cdot l_2 + \dots + a_{nn} \cdot l_n) = 0. \qquad (5.8)$$

Соңғы теңдікті $l_1, l_2, \dots, l_n$ элементтері арқылы жинақтап

$$(c_1 \cdot a_{11} + c_2 \cdot a_{21} + \dots + c_n \cdot a_{n1}) \cdot l_1 + (c_1 \cdot a_{12} + c_2 \cdot a_{22} +$$
$$+ \dots + c_n \cdot a_{n2}) \cdot l_2 + \dots + (c_1 \cdot a_{1n} + c_2 \cdot a_{2n} + \dots + c_n \cdot a_{nn}) \cdot l_n = 0$$

теңдігін аламыз. $l_1, l_2, \dots, l_n$ — элементтері сызықты тәуелсіз болғандықтан, (5.8) теңдігіндегі $l_1, l_2, \dots, l_n$ элементтерінің барлық коэффициенттері нөлге тең, яғни

$$\begin{cases} c_1 \cdot a_{11} + c_2 \cdot a_{21} + \dots + c_n \cdot a_{n1} = 0, \\ c_1 \cdot a_{12} + c_2 \cdot a_{22} + \dots + c_n \cdot a_{n2} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_1 \cdot a_{1n} + c_2 \cdot a_{2n} + \dots + c_n \cdot a_{nn} = 0. \end{cases} \qquad (5.9)$$

(5.9) жүйені матрица түрінде жазуға болады:

$$A' \cdot C = 0,$$

мұндағы A' матрица A матрицаның транспонирленген матрицасы, ал C тік жолды матрица:

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix}.$$

$c_1 = \dots = c_n = 0$ болғандықтан, (5.9) жүйеден Крамер формуласы бойынша

$$c_k = |\cdot|/|A'| = 0, \; k = \overline{1, n}$$

болады. Осыдан $|A'| \neq 0$. Егер $|A| = |A'|$ ескерсек, онда $|A| \neq 0$. Теорема дәлелденді.

Сонымен, $|A| \neq 0$ болғандықтан, A матрицасының A^{-1} кері матрицасы бар және (5.6) жүйеден $l'_1, \dots, l'_n$ элементтері арқылы өрнектелетін $l_1, l_2, \dots, l_n$ элементтерін табуға болады. Басқаша айтқанда, I базистен II базиске көшу A матрица арқылы атқарылады.

Енді II базистен I *базиске көшу A матрицасының A^{-1} кері матрицасы арқылы атқарылатынын дәлелдейік.* Ол үшін I базистің кез келген l_i, $i = \overline{1, n}$ элементін II базис арқылы жіктейік:

$$\begin{aligned} l_1 &= b_{11} \cdot l_1' + b_{12} \cdot l_2' + \dots + b_{1n} \cdot l_n', \\ l_2 &= b_{21} \cdot l_1' + b_{22} \cdot l_2' + \dots + b_{2n} \cdot l_n', \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ l_n &= b_{n1} \cdot l_1' + b_{n2} \cdot l_2' + \dots + b_{nn} \cdot l_n', \end{aligned} \qquad (5.10)$$

мұндағы b_{ij} $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$ және

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

матрица II *базистен* I-*базиске көшу матрицасы* деп аталады.

$B = A^{-1}$ теңдігінің орындалатынын дәлелдесек жеткілікті. Ол үшін (5.6) формуланы (5.10) формулаға қоялық:

$$l_1 = b_{11} (a_{11} \cdot l_1 + a_{12} \cdot l_2 + \dots + a_{1n} \cdot l_n) + b_{12} (a_{21} \cdot l_1 + a_{22} \cdot l_2 +$$
$$+ \dots + a_{2n} \cdot l_n) + \dots + b_{1n} (a_{n1} \cdot l_1 + a_{n2} \cdot l_2 + \dots + a_{nn} \cdot l_n),$$

$$l_2 = b_{21}(a_{11}\cdot l_1 + a_{12}\cdot l_2 + \ldots + a_{1n}\cdot l_n) + b_{22}(a_{21}\cdot l_1 + a_{22}\cdot l_2 + \ldots + a_{2n}\cdot l_n) + \ldots + b_{2n}(a_{n1}\cdot l_1 + a_{n2}\cdot l_2 + \ldots + a_{nn}\cdot l_n),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$l_n = b_{n1}(a_{11}\cdot l_1 + a_{12}\cdot l_2 + \ldots + a_{1n}\cdot l_n) + b_{n2}(a_{21}\cdot l_1 + a_{22}\cdot l_2 + \ldots + a_{2n}\cdot l_n) + \ldots + b_{nn}(a_{n1}\cdot l_1 + a_{n2}\cdot l_2 + \ldots + a_{nn}\cdot l_n).$$

Осыдан:

$$\begin{aligned}
l_1 &= [b_{11}\cdot a_{11} + b_{12}\cdot a_{21} + \ldots + b_{1n}\cdot a_{n1}]\cdot l_1 + \\
&+ [b_{11}\cdot a_{12} + b_{12}\cdot a_{22} + \ldots + b_{1n}\cdot a_{n2}]\cdot l_2 + \ldots + \\
&+ [b_{11}\cdot a_{1n} + b_{12}\cdot a_{2n} + \ldots + b_{1n}\cdot a_{nn}]\cdot l_n, \\
l_2 &= [b_{21}\cdot a_{11} + b_{22}\cdot a_{21} + \ldots + b_{2n}\cdot a_{n1}]\cdot l_1 + \\
&+ [b_{21}\cdot a_{12} + b_{22}\cdot a_{22} + \ldots + b_{2n}\cdot a_{n2}]\cdot l_2 + \ldots + \\
&+ [b_{21}\cdot a_{1n} + b_{22}\cdot a_{2n} + \ldots + b_{2n}\cdot a_{nn}]\cdot l_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
l_n &= [b_{n1}\cdot a_{11} + b_{n2}\cdot a_{21} + \ldots + b_{nn}\cdot a_{n1}]\cdot l_1 + \\
&+ [b_{n1}\cdot a_{12} + b_{n2}\cdot a_{22} + \ldots + b_{nn}\cdot a_{n2}]\cdot l_2 + \ldots + \\
&+ [b_{n1}\cdot a_{1n} + b_{n2}\cdot a_{2n} + \ldots + b_{nn}\cdot a_{nn}]\cdot l_n
\end{aligned}$$

немесе

$$\begin{cases}
l_1 = c_{11}\cdot l_1 + c_{12}\cdot l_2 + \ldots + c_{1n}\cdot l_n, \\
l_2 = c_{21}\cdot l_1 + c_{22}\cdot l_2 + \ldots + c_{2n}\cdot l_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
l_n = c_{n1}\cdot l_1 + c_{n2}\cdot l_2 + \ldots + c_{nn}\cdot l_n,
\end{cases}$$

мұндағы $c_{ij} = \sum_{k=i}^{n} b_{ik}\, a_{kj}$ немесе $C = BA$.

Сонымен, (5.11) формула тек $c_{ij} = 1$, $c_{ij} = 0$, $i \neq j$ болғанда ғана орындалады, яғни $E = C = B\cdot A$. Олай болса, $B = A^{-1}$. Теорема дәлелденді.

R кеңістігінің кез келген бір x элементінің екі базистегі координаттарының арасындағы байланысын анықтайық. Ол үшін $x \in R$ элементінің I базистегі координаттары $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ болсын, яғни

$$x = \alpha_1\cdot l_1 + \alpha_2\cdot l_2 + \ldots + \alpha_n\cdot l_n \qquad (5.12)$$

немесе координат түрінде

$$x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

ал осы элементтің II базистегі координаттары $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ болсын, яғни

$$x = \beta_1\cdot l'_1 + \beta_2\cdot l'_2 + \ldots + \beta_n\cdot l'_n \text{ немесе } x = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\} \qquad (5.13)$$

Жоғарыдағы (5.12) мен (5.13) теңдіктерінен

$$\alpha_1\cdot l_1 + \alpha_2\cdot l_2 + \ldots + \alpha_n\cdot l_n = \beta_1\cdot l'_1 + \beta_2\cdot l'_2 + \ldots + \beta_n\cdot l'_n \qquad (5.14)$$

теңдігін аламыз. Енді (5.6) теңдікті (5.14) теңдіктің оң жағына апарып қойып, мына теңдікті аламыз:

$$\begin{aligned}
\alpha_1\cdot l_1 + \alpha_2\cdot l_2 + \ldots + \alpha_n\cdot l_n &= \beta_1(a_{11}\cdot l_1 + a_{12}\cdot l_2 + \ldots + a_{1n}\cdot l_n) + \\
&+ \beta_2(a_{21}\cdot l_1 + a_{22}\cdot l_2 + \ldots + a_{2n}\cdot l_n) + \ldots + \\
&+ \beta_n(a_{n2}\cdot l_2 + a_{n2}\cdot l_2 + \ldots + a_{nn}\cdot l_n).
\end{aligned}$$

Соңғы теңдіктегі $l_1, l_2, \ldots, l_n$ элементтерінің коэффициенттерін теңестірсйік, сонда

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \beta_1\cdot a_{11} + \beta_2\cdot a_{21} + \ldots + \beta_n\cdot a_{n1}, \\
\alpha_2 &= \beta_1\cdot a_{12} + \beta_2\cdot a_{22} + \ldots + \beta_n\cdot a_{n2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_n &= \beta_1\cdot a_{1n} + \beta_2\cdot a_{2n} + \ldots + \beta_n\cdot a_{nn}.
\end{aligned} \qquad (5.15)$$

Бұл (5.15) жүйе матрица түрінде былай жазылады:

$$\alpha = A'\cdot\beta, \qquad (5.16)$$

мұндағы

$$\alpha = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \alpha_n\end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \beta_n\end{pmatrix}$$

тік жолды матрицалар.

Сонымен, (5.16) формуладан мынадай қорытындыға келеміз: кез келген $x \in R$ элементінің I *базистегі* α_i *координаттары осы элементтің* II *базистегі* β_i *координаттарымен* A *матрицасының* A' *транспонирленген матрицасы арқылы өрнектеледі.*

§ 5.5. Сызықты түрлендірудің әртүрлі базистегі матрицаларының байланысы. Кері түрлендіру

Кез келген сызықты R кеңістігінде φ сызықты түрлендіруі мен

$$l_1, l_2, \ldots, l_n, \tag{5.17}$$

$$f_1, f_2, \ldots, f_n \tag{5.18}$$

базистері берілсін. Онда $f_k \in R$ болғандықтан, әрбір f_k базисін (5.17) базис бойынша жіктеуге болады:

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{11} \cdot l_1 + a_{21} \cdot l_2 + \ldots + a_{n1} \cdot l_n, \\ f_2 &= a_{12} \cdot l_1 + a_{22} \cdot l_2 + \ldots + a_{n2} \cdot l_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n &= a_{1n} \cdot l_1 + a_{2n} \cdot l_2 + \ldots + a_{nn} \cdot l_n \end{aligned}$$

немесе

$$f_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \cdot l_i, \ k = \overline{1, n} \quad f = A \cdot l, \ A = (a_{ij})_{n \times n}, \tag{5.19}$$

мұндағы A матрица (5.17) базистен (5.18) базиске *көшу матрицасы* деп аталады және $|A| \neq 0$ болады, яғни базистен базиске көшу матрицасының A^{-1} кері матрицасы бар.

φ түрлендіруінің (5.17) базистегі матрицасы B, ал оның (5.18) базистегі матрицасы C болсын, яғни (5.2) формула бойынша:

$$\varphi(l_k) = \sum_{i=1}^{n} b_{ik} \cdot l_i, \qquad k = \overline{1, n}, \tag{5.20}$$

$$\varphi(f_k) = \sum_{i=1}^{n} c_{ik} \cdot f_i, \qquad k = \overline{1, n}, \tag{5.21}$$

мұндағы

$$B = (b_{ij})_{n \times n} = \begin{pmatrix} b_{11}\, b_{12} \ldots b_{1n} \\ b_{21}\, b_{22} \ldots b_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ b_{n1}\, b_{n2} \ldots b_{nn} \end{pmatrix}, \ C = (c_{ij})_{n \times n} = \begin{pmatrix} c_{11} \ldots c_{1n} \\ c_{21} \ldots c_{2n} \\ \ldots\ldots \\ c_{n1} \ldots c_{nn} \end{pmatrix}$$

Ендігі мақсат A, B, C матрицаларының арасындағы байланысты табу.

5.3-теорема. Егер φ сызықты түрлендірудің (5.17) базистегі матрицасы $B = (b_{ij})_{n \times n}$ және (5.18) базистегі матрицасы $C = (c_{ij})_{n \times n}$ болса, онда B мен C матрицалар арасындағы байланыс мына төмендегі формуламен өрнектеледі:

$$C = A^{-1} \cdot B \cdot A \text{ немесе } B = A^{-1} \cdot C \cdot A, \tag{5.22}$$

мұндағы A матрица (5.19) формуламен өрнектеледі және $|A| \neq 0$.

Дәлелдеуі. Теореманы дәлелдеу үшін (5.19) формуланы (5.21) формулаға апарып қоялық, яғни

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik} \cdot l_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_{ik}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} \cdot l_j\right),$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} \cdot \varphi(l_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ik}\, a_{ji}\, l_j.$$

Соңғы теңдікке (5.20) теңдікті қойып,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ik} \sum_{j=1}^{n} b_{ji} \cdot l_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, c_{ik} \cdot l_j$$

немесе

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ji}\, a_{ik}\right) \cdot l_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \cdot c_{ik}\right) \cdot l_j$$

теңдігін аламыз. Соңғы теңдіктің l_j элементтерінің коэффициенттерін теңестірейік, сонда

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ji}\, a_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, c_{ik}, \ j, k = \overline{1, n}.$$

Осыдан

$$B \cdot A = A \cdot C, \tag{5.23}$$

яғни соңғы теңдіктің матрица түріндегі теңдігін аламыз. A матрицаның кері матрицасы бар болғандықтан, (5.23) теңдігін солдан оңға қарай A^{-1} кері матрицаға көбейтіп, (5.22) формуланы аламыз. Теорема дәлелденді.

Сонымен, φ түрлендіруінің (5.18) базистегі C матрицасы (5.22) формуладан анықталады, яғни түрлендіруінің әртүрлі базистегі матрицалары арасындағы байланыс (5.23) формуламен беріледі және B мен C матрицалары ұқсас (1.15 тақырып). Демек, *φ сызықты түрлендіруінің әртүрлі базистегі матрицалары ұқсас болады.*

Мысал. φ түрлендіруінің l_1, l_2 базистегі матрица

$$B = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

болсын. φ түрлендіруінің f_1, f_2 базистегі матрицасын табыңдар, мұндағы $f_1 = l_1 + 2l_2$, $f = 2l_1 + 3l_2$.

l_1, l_2 базистен f_1, f_2 базиске көшу A матрицасы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \ |A| = -1 \neq 0.$$

Сондықтан, A матрицаның кері матрицасы бар. Кері матрицаны элементар түрлендіру көмегімен анықтайық (1.10-тақырып, 2-мысал):

$$\frac{A}{E} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right),$$

яғни

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Сонда

$$C = A^{-1} \cdot B A =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Анықтама. Сызықты φ түрлендіруі *ерекше емес* деп аталады, егер $\varphi(x) = 0$ теңдігі $x \equiv 0$ болғанда ғана орындалса, ал бұл теңдік $x \neq 0$ болғанда орындалса, онда ол *ерекше түрлендіру* деп аталады.

5.4-теорема. φ сызықты түрлендіру ерекше емес түрлендіру болу үшін, φ түрлендіруінің A матрицасы ерекше емес болуы, яғни $|A| \neq 0$, қажетті әрі жеткілікті.

Дәлелдеуі. Сызықты R кеңістігінің $l_1, l_2, \dots, l_n$ базисін қарастырайық. Кез келген $x \in R$ элементті $l_1, l_2, \dots, l_n$ базис бойынша жіктейік:

$$x = \alpha_1 \cdot l_1 + \alpha_2 \cdot l_2 + \dots + \alpha_n \cdot l_n,$$

мұндағы α_i қарастырып отырған x элементінің $l_1, l_2, \dots, l_n$ базистегі координаттары: $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Теореманы дәлелдеу үшін $x = 0$ болатын $\alpha_i \equiv 0$, $i = \overline{1, n}$, сандарын табайық. Ол үшін φ сызықты түрлендірудің A матрицасын пайдаланып, мына төмендегі біртектес сызықты теңдеулер жүйесін қарастырайық:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot \alpha_1 + a_{12} \cdot \alpha_2 + \dots + a_{1n} \cdot \alpha_n = 0, \\ a_{21} \cdot \alpha_1 + a_{22} \cdot \alpha_2 + \dots + a_{2n} \cdot \alpha_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \cdot \alpha_1 + a_{n2} \cdot \alpha_2 + \dots + a_{nn} \cdot \alpha_n = 0. \end{cases}$$

Бұл біртектес жүйенің тек нөлдік шешімі болу үшін, яғни $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ оның анықтауышы $|A|$ нөлге тең емес (ерекше емес) болуы қажетті әрі жеткілікті (3.1-теорема), яғни $|A| \neq 0$. Онда $x = 0$ нөлдік элемент бар және ол элемент үшін $\varphi(x) = 0$ теңдігі орындалады. Теорема дәлелденді.

Осы сияқты мына теореманы дәлелдеуге болады.

5.5-теорема. φ сызықты түрлендіру ерекше болу үшін, φ түрлендіруінің A матрицасы ерекше болуы, яғни $|A| = 0$, қажетті әрі жеткілікті.

Теореманың дәлелдеуін оқырмандарға ұсынамыз.

Мысалы. 5.2-тақырыптағы 2-мысалды қарастырайық. $\lambda = 1$ болғандағы $\varphi \equiv \varepsilon$ — бірлік түрлендіруінің

$$E = \begin{pmatrix} 1 \dots 0 \\ \dots\dots \\ 0 \dots 1 \end{pmatrix}$$

бірлік матрицасы ерекше емес, яғни $|E| = 1 \neq 0$. Сондықтан, $\varphi = \varepsilon$ бірлік түрлендіруі ерекше емес түрлендіру болады.

Енді осы тақырыптағы 3-мысалды қарастырайық: $\varphi(p) = p'(t)$, мұндағы φ түрлендіруінің матрицасы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

және $|A| = 0$. Бұл түрлендіру ерекше түрлендіру. Осы сияқты, проекциялаушы түрлендіру де ерекше түрлендіру (4-мысал).

Анықтама. Сызықты R кеңістігінің ψ түрлендіруі сызықты φ түрлендіруінің *кері түрлендіруі* деп аталады, егер ε бірлік түрлендіру мен кез келген $x \in R$ элемент үшін $\varphi(\psi) = \psi(\varphi) = \varepsilon$ немесе $\varphi(\psi(x)) = \psi(\varphi(x)) = \varepsilon(x) = x$, $x \in R$ теңдігі орындалса және φ түрлендіруінің кері түрлендіруі φ^{-1} таңбасымен белгіленеді, яғни

$$\varphi^{-1}(\varphi) = \varphi(\varphi^{-1}) = \varepsilon$$

немесе

$$\varphi^{-1}(\varphi(x)) = \varphi(\varphi^{-1}(x)) = \varepsilon(x) = x, \ x \in R. \qquad (5.24)$$

Енді берілген φ *сызықты түрлендіруінің кері түрлендіруде* φ^{-1} *сызықты* болатынын дәлелдейік. Дәлелдеу үшін

$$\varphi^{-1}(\lambda \cdot u + \mu \cdot y) = \lambda\varphi^{-1}(u) + \mu \cdot \varphi^{-1}(y), \ u \in R, \ y \in R$$

теңдігін дәлелдесек жеткілікті. $\varphi^{-1}(u) = x$, $\varphi^{-1}(y) = y$ деп белгілейік немесе $u = \varphi(x)$, $y = \varphi(y)$, мұндағы $x, y \in R$. φ түрлендіруі сызықты, сондықтан

$$\varphi(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot \varphi(x) + \mu \cdot \varphi(y) = \lambda \cdot u + \mu \cdot y.$$

Осыдан дәлелдеу керек теңдігімізді аламыз:

$$\varphi^{-1}(\lambda \cdot u + \mu \cdot y) = \varphi^{-1}[\varphi(\lambda \cdot x + \mu \cdot y)] = \varepsilon(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) =$$
$$= \lambda \cdot x + \mu \cdot y = \lambda \cdot \varphi^{-1}(u) + \mu \cdot \varphi^{-1}(y).$$

Кез келген сызықты түрлендіруінің кері түрлендіруі болмауы мүмкін. Мысалы, 5.2-тақырыптың 3-мысалындағы $\varphi(p) = p'(t)$ дифференциал түрлендіруінің кері түрлендіруі жоқ.

Кері түрлендіру және кері матрица туралы түсінік байланысты, яғни (5.24) теңдікті матрица түрінде былай жазуға болады:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E \qquad (5.25)$$

немесе керісінше, яғни (5.25) түрден (5.24) түрге көшуге болады.

5.6-теорема. Сызықты R кеңістігінің сызықты φ түрлендіруінің кері φ^{-1} түрлендіруі бар болу үшін, оның ерекше емес болуы қажетті әрі жеткілікті.

Қажеттілігі. φ^{-1} кері түрлендірудің бары белгілі дейік:

$$\varphi^{-1} \cdot \varphi = \varphi \cdot \varphi^{-1} = \varepsilon.$$

Онда $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ теңдігі орындалады, яғни A матрицаның A^{-1} кері матрицасы бар немесе $|A| \neq 0$. Ендеше 5.4-теорема бойынша φ ерекше емес түрлендіру.

Жеткіліктілігі. φ ерекше емес түрлендіру делік. Олай болса, 5.4-теорема бойынша $|A| \neq 0$, яғни A^{-1} бар. Онда $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ немесе $\varphi \cdot \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \cdot \varphi = \varepsilon$, яғни кері түрлендіру бар. Теорема дәлелденді.

Демек, кері түрлендірудің анықтамасынан: кез келген y элемент үшін $\varphi^{-1}(\varphi(y)) = y$ теңдігі орындалады, яғни егер φ түрлендіру y элементке $\varphi(y)$ элементті сәйкес қойса, онда φ^{-1} кері түрлендіруі $\varphi(y)$ элементке y элементті сәйкес қояды.

Мысал. $\varphi(x) = x$ түрлендіруінің кері түрлендіруін анықтайық, мұндағы $x = \{x_1 - x_2 + x_3; x_3; x_2\}$ болсын. Берілген түрлендірудің матрицасын алайық:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ |A| = -1 \neq 0.$$

Осыдан

$$A = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сондықтан, $\varphi^{-1}(x) = \{x_1 - x_2 + x_3; x_3; x_2\}$.

§ 5.6. Түрлендірудің бейнесі мен ядросы

Анықтама. Сызықты R кеңістігіндегі φ *түрлендіруінің бейнесі* деп $y = \varphi(x)$, $x \in R$ түріндегі барлық элементтердің жиынын айтамыз және ол $R_б$ немесе

$$\operatorname{im}\varphi = R_б = \{y : \varphi(x) = y,\ x \in R\}$$

таңбасымен белгіленеді.

Басқаша айтқанда, $\varphi(x) = y$ теңдігінің кем дегенде бір шешімі бар болатын y элементтерінің жиыны φ түрлендірудің бейнесі болады.

$R_б$ кеңістігінің өлшемі φ сызықты *түрлендіруінің рангісі* деп аталады және ол $\operatorname{rang}(R_б)$ немесе $\operatorname{rang}\varphi = \dim R_б = \dim(\operatorname{im}\varphi)$.

Анықтама. Сызықты R кеңістігіндегі φ *сызықты түрлендіруінің ядросы* деп, $\varphi(x) = 0$ теңдеуін қанағаттандыратын $x \in R$ элементтерінің жиынын айтамыз және ол $R_я$ немесе

$$\ker\varphi = R_я = \{x \in R : \varphi(x) = 0\}$$

таңбасымен белгіленеді.

$R_я$ кеңістігінің өлшемі сызықты φ *түрлендіруінің дефектісі* деп аталады.

5.7-теорема. $R_б$ бейне мен $R_я$ ядро сызықты R кеңістігінің ішкі сызықты кеңістіктері болады.

Дәлелдеуі. Алдымен $R_б$ сызықты ішкі кеңістік болатынын дәлелдейік. Ол үшін $y_1, y_2 \in R_б$ болсын. Енді $\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2$ элемент $R_б$ бейненің элементі болатынын дәлелдейік, яғни $\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 \in R_б$. y_1 мен y_2 элементтері $R_б$ кеңістігінің элементі болғандықтан, y_1 мен y_2 элементтері R кеңістігінің бейнесі:

$$y_1 = \varphi(x_1),\ y_2 = \varphi(x_2).$$

Енді $\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2$ сызықты комбинациясын қарастырайық. R сызықты кеңістік болғандықтан, $\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \in R$ болады. φ түрлендіруі сызықты болғандықтан

$$\varphi(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) = \lambda_1 \cdot \varphi(x_1) + \lambda_2 \cdot \varphi(x_2) = \lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2.$$

Осыдан $\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 \in R$. Демек, $R_б$ кеңістігі R сызықты кеңістігінің ішкі кеңістігі.

Енді $R_я$ — ішкі сызықты кеңістік болатынын дәлелдейік. Ол үшін $x_1, x_2 \in R_я$ болсын, онда $\varphi(x_1) = 0$, $\varphi(x_2) = 0$. Бұл тұжырымды дәлелдеу үшін $\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2$ элементі $R_я$ кеңістігінің элементі болатынын дәлелдесек жеткілікті. x_1 мен x_2 элементтері $R_я$ кеңістігінің элементтері, яғни

$$\varphi(x_1) = 0,\ \varphi(x_2) = 0$$

және φ сызықты түрлендіру болғандықтан

$$\varphi(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) = \lambda_1 \cdot \varphi(x_1) + \lambda_2 \cdot \varphi(x_2) = 0$$

теңдігі орындалады. Олай болса, $R_я$ сызықты ішкі кеңістік. Теорема дәлелденді.

Мысал. Дәрежесі n-нен үлкен емес көпмүшеліктердің R кеңістігіндегі дифференциал түрлендіруін қарастырайық:

$$\varphi(p) = p'(t),\ p(t) \in R,$$

мұндағы $p(t)$ — дәрежесі n-нен үлкен емес көпмүшеліктер, яғни $\dim R = n + 1$. Енді φ түрлендіруінің бейнесінің анықтамасы бойынша

$$p \in R,\ \varphi(p) = p'(t) \in R_б,$$

яғни $R_б$ кеңістігі дәрежесі $n-1$-ден үлкен емес көпмүшеліктерден анықталған. Олай болса, $\dim R_б = n$. Сондықтан,

$$p'(t) = 0\,,\ p(t) = const\,,\ \dim R_я = 1$$

$$\dim R_я + \dim R_б = \dim R = n + 1$$

теңдігі орындалады.

Енді φ^2 түрлендіруін қарастырайық, яғни

$$\varphi^2(p) = p''(t).$$

Онда

$$\varphi^2(p) = p''(t) = 0,\ p(t) \in R,$$

яғни $R_я$ кеңістігінің дәрежесі 1-ден үлкен емес көпмүшеліктерден анықталған. Сондықтан, $\dim R_я = 2$. φ түрлендіруінің анықтамасы бойынша

$$p \in R,\ \varphi^2(p) = p''(t) \in R_б,$$

яғни $R_б$ кеңістігінің дәрежесі $n-2$-ден үлкен емес көпмүшеліктерден анықталған. Олай болса,

$$\dim R_б = n - 1.$$

Демек

$$\dim R_я + \dim R_б = \dim R.$$

Осы сияқты, φ^{n-1} түрлендіруін қарастыралық, яғни:

$$\varphi^{n-1}(p) = p^{(n-1)}(t)$$

болсын. Онда

$$\dim R_я = n - 1, \ \dim R_б = 2,$$

яғни $\dim R_я + \dim R_б = \dim R$.

Ең соңында, φ^n түрлендіруін қарастыралық, яғни:

$$\varphi^n(p) \equiv p^{(n)}(t)$$

болсын. Онда:

$$\dim R_я = n, \ \dim R_б = 1$$

болады, яғни $\dim R_я + \dim R_б = \dim R$ теңдігі орындалады.

5.8-теорема. Сызықты n-өлшемді R кеңістігінің кез келген сызықты φ түрлендіруі үшін

$$\dim R_я + \dim R_б = \dim R = n$$

немесе

$$\dim(\mathrm{im}\,\varphi) + \dim(\ker\varphi) = \dim R$$

формуласы орындалады.

Дәлелдеуі. Теореманы дәлелдеу үшін сызықты φ түрлендіруінің ядросының өлшемі k болсын ($k \neq n$) делік, яғни $\dim R_я = k$. $R_я$ ядросының

$$l_1, l_2, \ldots, l_k \qquad (5.26)$$

базисін қарастырайық және $y \in R_я$ болсын, онда

$$y = c_1 \cdot l_1 + c_2 \cdot l_2 + \ldots + c_k \cdot l_k.$$

(5.26) базисті R кеңістігінің базисіне дейін толықтырайық (2.10-теорема):

$$l_1, l_2, \ldots, l_k, l_{k+1}, \ldots, l_n. \qquad (5.27)$$

φ түрлендіруінің $l_{k+1}, l_{k+2}, \ldots, l_n$ элементтерінің бейнесін қарастырайық:

$$\varphi(l_{k+1}), \varphi(l_{k+2}), \ldots, \varphi(l_n) \in R_б. \qquad (5.28)$$

Алдымен (5.28) элементтері сызықты тәуелсіз болатынын дәлелдейік, мұндағы элементтердің саны $n - k$-ға тең. Ол үшін кері жориық, яғни (5.28) элементтер сызықты тәуелді болсын дейік:

$$\alpha_{k+1} \cdot \varphi(l_{k+1}) + \alpha_{k+2} \cdot \varphi(l_{k+2}) + \ldots + \alpha_n \cdot \varphi(l_n) = 0, \qquad (5.29)$$

мұндағы α_i сандарының барлығы бір мезгілде нөлге тең болмайды. (α_i-дің кем дегенде біреуі нөлге тең емес).

Енді кез келген

$$u = \alpha_{k+1} \cdot l_{k+1} + \alpha_{k+2} \cdot l_{k+2} + \ldots + \alpha_n \cdot l_n \qquad (5.30)$$

түріндегі элементті қарастырамыз, мұндағы α_i саны (5.29) формуладағы тұрақты сандар. Онда, (5.29), (5.30)-дан және түрлендіруінің сызықты болуынан

$$\varphi(u) = \alpha_{k+1} \cdot \varphi(l_{k+1}) + \alpha_{k+2} \cdot \varphi(l_{k+2}) + \ldots +$$
$$+ \alpha_n \cdot \varphi(l_n) = 0$$

теңдігін аламыз, яғни $u \in R_я$. Демек, u элементі (5.26) базис бойынша жіктелінеді:

$$u = \alpha_1 \cdot l_1 + \alpha_2 \cdot l_2 + \ldots + \alpha_n \cdot l_n. \qquad (5.31)$$

Сондықтан, $u \in R_я$ элементі (5.30), (5.31) түрлерінде (екі түрде) жіктелінеді. Олай болуы мүмкін емес. Сонымен, бұл қайшылық (5.28) элементтерінің сызықты тәуелсіз болатындығын дәлелдейді.

Енді (5.28) элементтер $R_б$ — кеңістігінің базисі болатынын дәлелдейік. Ол үшін $R_б$ кеңістігінің кез келген (5.28) элементтері арқылы сызықты y элементі өрнектелетінін дәлелдесек жеткілікті. Шынында да, $y \in R_б$ болғандықтан y элементіне $x \in R$ элементі сәйкес келеді, яғни $y = \varphi(x)$. Мұндағы $x \in R$ болғандықтан, ол (5.27) базис бойынша жіктелінеді:

$$x = c_1 \cdot l_1 + c_2 \cdot l_2 + \ldots + c_k \cdot l_k + c_{k+1} \cdot l_{k+1} + \ldots + c_n \cdot l_n.$$

Осыдан және φ түрлендіруі сызықты болғандықтан

$$y = \varphi(x) = c_1 \cdot \varphi(l_1) + \ldots + c_k \cdot \varphi(l_k) + c_{k+1}\varphi(l_{k+1}) + \ldots +$$
$$+ c_n \cdot \varphi(l_n) = c_{k+i}\varphi(l_{k+1}) + c_{k+2}\varphi(l_{k+2}) + \ldots + c_n \cdot \varphi(l_n)$$

болады. Сонымен, кез келген $y \in R$ элементі (5.28) элементтер арқылы сызықты өрнектелінеді. Демек, біріншіден (5.28) элементтері сызықты тәуелсіз, екіншіден $R_б$ кеңістігінің кез келген элементі (5.28) элементтер бойынша сызықты өрнектелінеді әрі (5.28) элементтерінің саны $n-k$-ға тең, яғни $\dim R = n-k$. Олай болса,

$$\dim R_я + \dim R_б = n.$$

Теорема дәлелденді.

Мысал. Берілген түрлендіруінің $R_б$ мен $R_я$ кеңістіктерінің өлшемі және олардың базисін анықтаңдар: $\varphi(x) = y$, мұндағы $x = \{2x_1 - x_2 - x_3;\ x_1 - 2x_2 + x_3;\ x_1 + x_2 - 2x_3\}$.

Берілген φ түрлендіруінің матрицасын анықтайық:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$R_б$ — кеңістігінің анықтамасы бойынша: y элемент $R_б$ кеңістігінің элементі болу үшін $\varphi(x) = y,\ y \in R$ орындалуы қажетті әрі жеткілікті, яғни матрица түрінде

$$y = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$|A| = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

A матрицасының рангісі 2-ге тең, олай болса $\operatorname{rang}(\varphi) = \operatorname{rang} R_б = 2$. Енді R кеңістігінің базисі ретінде A матрицаның тік жолдарын алайық, мысалы $l_1 = \{2; 1; 1\}$. $l_2 = \{-1; -2; 1\}$.

$R_я$ ядроның анықтамасы бойынша: x элемент $R_я$ кеңістігінің элементі болу үшін $\varphi(x) = 0$ теңдігі орындалуы қажетті әрі жеткілікті, яғни матрица түрінде

$$A \cdot x = 0, \quad |A| = 0$$

немесе

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Демек, $R_я$ кеңістігі біртекті жүйенің шешімдерінен анықталған кеңістік болады. Сондықтан

$$\dim R_я = \dim R - \dim R_б = 3 - 2 = 1.$$

$R_я$ — кеңістігінң базисі ретінде біртектес жүйенің іргелі шешімдерін алуға болады. Енді осы жүйенің іргелі шешімдерін табайық:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = x_3, \\ x_1 - 2x_2 = -x_3, \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_3 & -1 \\ -x_3 & -2 \end{vmatrix} = -2x_3 - x_3 = -3x_3,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & x_3 \\ 1 & -x_3 \end{vmatrix} = -2x_3 - x_3 = -3x_3,$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = x_3, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = x_3,$$

Сонымен, $x_1 = x_3$, $x_2 = x_3$. Мысал $x_3 = 2$ болғанда $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$, яғни $l_1 = \{2; 2; 2\}$ базис $R_я$ — ядроның базисі.

§ 5.7. Инвариантты ішкі кеңістіктер

Кез келген R_1 кеңістігі сызықты R кеңістігінің ішкі кеңістігі ($R_1 \subset R$), ал φ — түрлендіру R кеңістігінің сызықты түрлендіруі болсын. Берілген φ түрлендіруі R кеңістігінің кез келген элементіне сол кеңістіктің элементін сәйкес келтірсін, оны қысқаша $R \xrightarrow{\varphi} R$ деп белгілейік.

Анықтама. R кеңістігінің R_1 — ішкі кеңістігі ($R_1 \subset R$) φ түрлендіруінде *инварианты ішкі кеңістік* ($R \xrightarrow{\varphi} R$) деп аталады, егер кез келген $x \in R_1$ элементі үшін $\varphi(x) \in R_1$ болса (қысқаша, *инвариантты кеңістік* деп аталады).

Мысалдар. 1. Егер R_1 мен R_2 инвариантты кеңістік болса, онда $R_1 + R_2$ және $R_1 \cap R_2$ кеңістіктері де инвариантты болады. Шынында да, егер R_1 мен R_2 кеңістіктері φ түрлендіуіндегі инвариантты және $x \in R_1 \cap R_2$ болса, онда $x \in R_1$, $x \in R_2$, $\varphi(x) \in R_1$, $\varphi(x) \in R_2$. Сондықтан, $\varphi(x)$ $R_1 \cap R_2$ кеңістігінің де элементі, яғни $\varphi(x) \in R_1 \cap R_2$.

Егер $x \in R_1 + R_2$ болса, онда $x = x_1 + x_2$ әрі $x_1 \in R_1$, $x_2 \in R_2$, R_1 мен R_2 — инвариантты болғандықтан, $\varphi(x_1) \in R_1$, $\varphi(x_2) \in R_2$. Демек, $\varphi(x) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) \in R_1 + R_2$.

2. $\ker\varphi = R_я$ мен $\operatorname{im}\varphi = R_б$ кеңістіктері де инвариантты. Шынында да, егер $x \in R_б \subset R$ болса, онда $\varphi(x) \in R_б$. Егер $x \in R_я \subset R$ болса, онда $\varphi(x) = 0 \in R_я$. Демек, R кеңістігіндегі кез келген φ — сызықты түрлендіруі үшін $\ker\varphi = R_я$ мен $\operatorname{im}\varphi = R_б$ кеңістіктері инвариантты.

5.9-теорема. Егер $R_1 \subset R$ кеңістігі φ түрлендіруінде инвариантты кеңістік болса, онда R_1 кеңістігі $f(\varphi)$ түрлендіруінде де инвариантты кеңістік болады, мұндағы f — кез келген φ-ге тәуелді көпмүшелік:

$$f(\varphi) = \alpha_0 \cdot \varphi^m + \alpha_1 \varphi^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-1} \cdot \varphi + \alpha_m.$$

Дәлелдеуі. $x \in R_1$ болсын, онда теореманың шарты бойынша $\varphi(x) \in R_1$. Теореманы толық дәлелдеу үшін $f(\varphi(x))$ элементі R_1 — инвариантты кеңістігінің элементі болатынын дәлелдейік, яғни $f(\varphi(x)) \in R_1$. Басқаша айтқанда, R_1 кеңістігі $f(\varphi)$ түрлендіруінде инвариантты кеңістік болатынын дәлелдесек жеткілікті. Шынында да, $x \in R_1$ және $\varphi(x) \in R_1$ болса, онда $\varphi(\varphi(x)) = \varphi^2(x) \in R_1$, $\varphi(\varphi^2(x)) = = \varphi^3(x) \in R_1$, . . ., $\varphi^{(k)}(x) \in R_1$, $k = 1, 2, \ldots$ Сондықтан, $\varphi^0(x) = x$, $\varphi(x)$, . . ., $\varphi^m(x)$ элементтерінің

$$\alpha_0 \cdot \varphi^m(x) + \alpha_1 \cdot \varphi^{m-1}(x) + \ldots + \alpha_m \cdot \varphi^0(x)$$

сызықты комбинациясы да R_1 кеңістігінің элементі болады, мұндағы $\varphi^0(x) = x$. Теореманың шарты бойынша

$$f(\varphi(x)) \equiv \alpha_0 \cdot \varphi^m(x) + \alpha_1 \cdot \varphi^{m-1}(x) + \ldots + \alpha_{m-1} \varphi(x) + \alpha_m.$$

Демек, $f(\varphi(x)) \in R_1$, егер $x \in R$ болса. Теорема дәлелденді. Осыдан егер $R_1 \subset R$ инвариантты болса, онда R кеңістігіндегі φ — сызықты түрлендіруінің A матрицасын табуға бола ма? деген заңды сұрақ туады.

Бұл сұраққа төмендегі мына теоремадан жауап аламыз.

5.10-теорема. Егер R_1 — ішкі кеңістігі ($R_1 \subset R$) φ сызықты түрлендіруінде инвариантты кеңістік болса, онда осы түрлендірудің A матрицасы мына түрде анықталады:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline B & A_2 \end{array}\right), \qquad (5.32)$$

мұндағы A_1 мен A_2 — квадрат матрицалар, 0 — нөлдік матрица, B — тікбұрышты матрица.

Дәлелдеуі. R_1 кеңістігіндегі φ сызықты түрлендіру болсын:

$$R_1 \xrightarrow{\varphi} R_1 : x \in R_1, \ \varphi(x) \in R_1,$$

енді R_1 — кеңістігінің

$$l_1, l_2, \ldots, l_m \qquad (5.33)$$

базисін қарастырайық, яғни $\dim R_1 = m$. R_1 кеңістігінің (5.33) базисін R кеңістігінің базисіне дейін толықтырайық. (2.10-теорема):

$$l_1, l_2, \ldots, l_{m-1}, l_m, \ldots, l_n \qquad (5.34)$$

$l_k \in R_1$, $k = \overline{1, m}$ және R_1 кеңістік φ сызықты түрлендіруінде инвариантты кеңістік болғандықтан, $\varphi(l_k) \in R_1$ $k = \overline{1, m}$. Сондықтан, $\varphi(l_k)$-ны R_1 кеңістігінің элементтері ретінде қарастыруға болады және (5.33) — базис бойынша жіктелінеді:

$$\varphi(l_k) = a_{k1} \cdot l_1 + a_{k2} \cdot l_2 + \ldots + a_{km} \cdot l_m, \ k = \overline{1, m}, \qquad (5.35)$$

ал $R_1 \bar{\ni} \varphi(l_{k+1}) \in R, \ldots, R_1 \bar{\ni} \varphi \cdot (l_n) \in R$ элементтері (5.34) базис бойынша жіктелінеді:

$$\varphi(l_{m+1}) = a_{m+1,1} \cdot l_1 + \ldots + a_{m+1,m} \cdot l_m +$$
$$+ a_{m+1,m+1} \cdot l_{m+1} + \ldots + a_{m+1,n} \cdot l_n,$$
$$\varphi(l_{m+2}) = a_{m+2,1} \cdot l_1 + \ldots + a_{m+2,m} \cdot l_m +$$
$$+ a_{m+2,m+1} \cdot l_{m+1} + \ldots + a_{m+2,n} \cdot l_n,$$

. . . .

$$\varphi(l_n) = a_{n1} \cdot l_1 + \ldots + a_{nm} \cdot l_m + a_{n,m+1} \cdot l_{m+1} + \ldots + a_{nn} \cdot l_n. \qquad (5.36)$$

(5.35) және (5.36) теңдіктерінен φ түрлендірулерінің A матрицасын (5.32) түрінде анықтаймыз:

$$A=\left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline B & A_2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1m} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & 0 & \dots & 0 \\ \hline a_{m+11} & \dots & a_{m+1m} & a_{m+1m+1} & \dots & a_{m+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} & a_{nm+1} & \dots & a_{nn} \end{array}\right).$$

Теорема дәлелденді.

Соңғы теореманың кері теоремасы да орындалады.

5.11-теорема. Егер φ сызықты түрлендіруінің матрицасы (5.32) түрінде анықталса (берілсе), онда $R_1 \subset R$ кеңістігі φ түрлендіруінде инвариантты кеңістік болады.

Кері теореманың дәлелдеуін жаттығу ретінде оқырмандарға ұсынамыз.

Енді R сызықты кеңістігінің R_1 мен R_2 ішкі кеңістіктерін қарастырайық: $R_i \subset R$, $i = 1, 2$ және φ түрлендіруінің екі инвариантты кеңістігі бар жағдайды қарастырайық.

5.12-теорема. Егер $R_1 \subset R$, және $R_2 \subset R$ кеңістіктері φ сызықты түрлендіруінде инвариантты кеңістіктер және $R = R_1 \oplus R_2$ (тура қосынды) болса, онда φ түрлендіруінің A матрицасы мына төмендегі блокты-диагонал матрица түрінде анықталады:

$$A=\left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right), \qquad (5.37)$$

мұндағы A_1 мен A_2 — квадратты матрицалар.

Д ә л е л д е у і. Теореманың шарты бойынша, φ сызықты түрлендіруінің екі R_1 мен R_2 иварианты кеңістігі бар және

$$R = R_1 \oplus R_2.$$

Енді R_1 инвариантты кеңістігінен

$$l_1, l_2, \dots, l_m \qquad (5.38)$$

($\dim R_1 = m$), ал R_2 инвариантты кеңістігінен

$$l_{m+1},\ l_{m+2},\ \dots,\ l_n \qquad (5.39)$$

($\dim R_2 = n - m$) базисін алайық. Теореманың шарты бойынша:

$$\varphi(l_k) \in R_1,\ k = \overline{1, m};\ \varphi(l_k) \in R_2,\ k = \overline{m+1, n}.$$

Онда $\varphi(l_k)\, k = \overline{1, m}$ элементі (5.38) базис бойынша жіктелінеді, ал $\varphi(l_k)\, k = \overline{m+1, n}$ элементі (5.39) базис бойынша жіктелінеді, яғни

$$\begin{aligned} &\varphi(l_1) = a_{11} \cdot l_1 + \dots + a_{1m} \cdot l_m, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\varphi(l_m) = a_{m1} \cdot l_1 + \dots + a_{mm} \cdot l_m, \\ &\varphi(l_{m+1}) = a_{m+1m+1} \cdot l_{m+1} + \dots + a_{m+1} \cdot l_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\varphi(l_n) = a_{nm+1} \cdot l_{m+1} + \dots + a_{nn} \cdot l_n. \end{aligned} \qquad (5.40)$$

(5.40) теңдіктерінен φ — сызықты түрлендіруінің сәйкес A матрицасы блокты-диагонал (5.37) түрінде анықталатынын аламыз:

$$A=\left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right),$$

мұндағы $A_1 = (a_{ij})$, $i,j = \overline{1, m}$, ал $A_2 = (a_{ij})$, $i,j = \overline{m+1, n}$. Теорема дәлелденді.

5.12-теореманың кері теоремасы да орындалады.

5.13-теорема. Егер φ — сызықты түрлендіруінің A матрицасы (5.37) блокты-диагонал түрінде анықталса, онда $R_1 \subset R$ — кеңістіктері φ түрлендіруінде инвариантты кеңістіктер болады және R кеңістігі R_1 мен R_2 кеңістіктерінің тура қосындысына тең, яғни

$$R = R_1 \oplus R_2.$$

Біз жоғарыдағы теоремаларды R_1 мен R_2 — ішкі кеңістіктері үшін дәлелдедік. Осы теоремалар саны санаулы R_i кеңістіктері үшін де орындалады, $i = \overline{1, k}$.

Егер $R_1, R_2, \dots, R_k$ кеңістіктері R кеңістігінің φ — сызықты түрлендіруінде инвариантты және

$$R = R_1 \oplus R_2 \oplus \dots \oplus R_k,\ \dim R_i = n_i,\ i = \overline{1, k}$$

болса, онда φ түрлендіруінің A матрицасы блокты-диагонал түрінде анықталады:

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$$

мұндағы A_i – n_i-ретті квадрат матрицалар, $i = \overline{1, k}$, $n_1 + n_2 + \dots n_k = n$.

§ 5.8. Сызықты түрлендірудің меншікті мәні мен меншікті элементі

Кез келген n өлшемді сызықты R кеңістігіндегі φ сызықты түрлендіруді қарастырайық: $R \xrightarrow{\varphi} R$ және R кеңістігінен

$$l_1, l_2, \ldots, l_n$$

базисін алайық ($\dim R = n$). Қарастырып отырған φ түрлендіруінің матрицасы $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$ болсын.

Анықтамалар. 1. Сызықты φ түрлендіруінің A матрицасының *сипаттамалық матрицасы* деп мына төмендегі

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

матрицаны айтамыз, $\Delta_A(\lambda) \equiv |A - \lambda E|$ — анықтауышы φ — сызықты түрлендіруінің *сипаттамалық көпмүшелігі*, ал $\Delta_A(\lambda) = 0$ оның *сипаттамалық теңдеуі* деп аталады.

2. Сызықты φ түрлендіруінің *меншікті элементі* (векторы) деп

$$\varphi(x) = \lambda \cdot x \tag{5.41}$$

теңдігін қанағаттандыратын, нөлге тең емес $x\,(x \neq 0)$ элементті айтамыз, ал λ саны φ түрлендіруінің *меншікті мәні* немесе *сипаттамалық түбірі* деп аталады.

Бұл анықтама, яғни (5.41) теңдік, матрица түрінде былай айтылады: нөлге тең емес $x \neq 0$ вектор A матрицаның *меншіктің векторы*, ал λ оның *меншікті мәні* деп аталады, егер

$$A \cdot x = \lambda \cdot x, \; x \neq 0. \tag{5.42}$$

5.14-теорема. λ_0 саны φ сызықты түрлендіруінің меншікті мәні болу үшін, ол оның сипаттамалық көпмүшелігінің түбірі болуы:

$$\Delta(\lambda_0) = |A - \lambda_0 \cdot E| \equiv 0$$

қажетті әрі жеткілікті.

Қажеттілігі. λ_0 — саны φ түрлендіруінің меншікті мәні болсын:

$$\varphi(x) = \lambda_0 \cdot x, \; x \neq 0 \tag{5.43}$$

немесе матрица түрінде, яғни (5.42) түрінде

$$A \cdot x = \lambda_0 \cdot x, \; x \neq 0 \tag{5.44}$$

теңдігі орындалады.

Енді λ_0 саны сипаттамалық көпмүшеліктің түбірі болатынын дәлелдейік: $\Delta_A(\lambda_0) = |A - \lambda_0 E| = 0$. Ол үшін кері жориық, яғни λ_0 саны сипаттамалық көпмүшеліктің түбірі болмасын:

$$\Delta_A(\lambda_0) = |A - \lambda_0 \cdot E| \neq 0.$$

(5.44) — теңдіктен

$$(A - \lambda_0 \cdot E)\,x = 0, \; x \neq 0 \tag{5.45}$$

теңдігін аламыз. Ұйғаруымыз бойынша $\Delta_A(\lambda_0) \neq 0$ онда 3.1-теорема бойынша (5.45) — біртектес жүйенің тек нөлдік шешімі ғана бар, яғни $x \equiv 0$. Ал бұл ($x \equiv 0$), ұйғарымға (λ_0 саны φ түрлендіруінің меншікті мәні болсын және $x \neq 0$) қайшы келеді. Осы қайшылық теореманың қажеттілігін дәлелдейді:

$$\Delta_A(\lambda_0) = |A - \lambda_0 \cdot E| \equiv 0,$$

яғни λ_0 саны сипаттамалық көпмүшеліктің түбірі.

Жеткіліктігі. λ_0 саны φ сызықты түрлендіруінің сипаттамалық көпмүшелігінің түбірі болсын:

$$|A - \lambda_0 E| \equiv 0.$$

λ_0 саны φ түрлендіруінің меншікті мәні болатындығын дәлелдейік, яғни $x \neq 0$ элементі табылып, (5.43) теңдігі, яғни

$$\varphi(x) = \lambda_0 x \text{ немесе } A x = \lambda_0 x, \; x \neq 0$$

теңдігі орындалатынын дәлелдейік. Осыдан біртектес теңдеулер жүйесін аламыз:

$$(A - \lambda_0 E)\,x = 0$$

Ұйғарым бойынша: $|A - \lambda_0 E| \equiv 0$. Сондықтан, 3.4-теорема бойынша біртектес жүйенің нөлден өзгеше шешімі бар, яғни $x \neq 0$. Демек, анықтама бойынша λ_0 саны φ түрлендіруінің меншікті мәні болады. Теорема дәлелденді.

Салдар. Кез келген евклид R кеңістігіндегі сызықты φ түрлендіруінің кем дегенде бір меншікті элементі бар. Комплексті (нақты) евклид R кеңістігіндегі кез келген сызықты түрлендіруінің бір өлшемді (бір немесе екі өлшемді) инвариантты ішкі кеңістігі бар.

Дәлелдеуі. $l_1, l_2, \dots, l_n$ вектор жиыны евклид кеңістігінің базисі, ал φ түрлендірудің сол базистегі матрицасы $A = (a_{ij})$, $j,i = \overline{1,n}$ болсын делік. Егер x евклид R кеңістігінің кез келген элементі болса, онда $x = x_1 \cdot l_1 + \dots + x_n \cdot l_n$, мұндағы $x_1, \dots, x_n$ оның $l_1, \dots, l_n$ базистегі координаттары. Енді элемент x берілген φ түрлендіруінің меншікті элементі, ал λ_0 оның меншікті мәні болу үшін

$$\varphi(x) = \lambda_0 x$$

теңдігі орындалуы керек немесе

$$Ax = \lambda_0 : x, \ (A - \lambda_0 \cdot E)\, x = 0.$$

Сонда 5.14-теорема бойынша λ_0 сипаттамалық $\Delta(\lambda)$ көпмүшеліктің түбірі болады, яғни $\Delta(\lambda_0) = |A - \lambda_0 E| \equiv 0$, мұндағы $\Delta(\lambda) \equiv |A - \lambda E|$ n дәрежелі λ-ға тән көпмүшелік. Бұл n дәрежелі көпмүшеліктің кем дегенде бір түбірі бар, демек, φ түрлендірудің кем дегенде бір меншікті элементі бар.

Енді екінші тұжырымды дәлелдейік. Ол үшін біртекті сызықты $(A - \lambda E)\, x = 0$ теңдеулер жүйесінің нөлге тең емес $x \neq 0$ шешімін анықтасақ жеткілікті. Оның $x \neq 0$ шешімі болу үшін, $\Delta(\lambda) \equiv |A - \lambda E| = 0$ теңдігі орындалуы керек. Бұл теңдеудің кем дегенде бір комплексті λ_0 түбірі бар: $\Delta(\lambda_0) = |A - \lambda_0 \cdot E| \equiv 0$. Енді λ_0 түбірге тән біртекті сызықтық теңдеулер жүйесін аламыз: $(A - \lambda_0 \cdot E) = 0$ және оның нөлге тең емес шешімі бар: $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \neq 0$. Сонымен, $x_0 = x_1^0 \cdot l_1 + \dots + x_n^0 \cdot l_n \varphi$ түрлендірудің меншікті элементі, ал λ_0 оның меншікті мәні. Сондықтан, егер вектор x_0 сызықты φ түрлендірудің элементі болса, онда $\lambda \cdot x_0$ векторлар жиыны R кеңістігінің бір өлшемді инвариантты кеңістігін құрастырады.

Ең соңында, нақты евклид кеңістігіндегі сызықты түрлендірудің бір немесе екі өлшемді инвариантты кеңістігінің бар екенін дәлелделік. Бұл жағдайда сипаттамалық $\Delta(\lambda)$ көпмүшеліктің коэффициенттері нақты сан. Онда оның кем дегенде бір λ_0 түбірі бар, яғни $\Delta(\lambda_0) \equiv 0$. Бұл λ_0 түбірдің екі мүмкіндігі бар.

а) λ_0 — нақты сан. Сондықтан, біртекті сызықты $(A - \lambda_0 \cdot E)\, x = 0$ теңдеулер жүйесінің $x \neq 0$ шешімі бар, ал ол φ түрлендірудің меншікті элементі: $\varphi(x) = \lambda_0 x$, яғни $\lambda_0 \cdot x$ бір өлшемді инвариант кеңістігін құрастырады.

б) λ_0 — комплексті сан: $\lambda_0 = \alpha + i\beta$. Онда біртекті сызықты $(A - \lambda_0 \cdot E)\, x = 0$ жүйенің шешімі $x + iy = (x_1 + i y_1, \dots, x_n + i y_n)$ болады. Егер бұл комплексті шешімді $(A - \lambda E)\, x = 0$ жүйеге қойсақ және оның нақты, жорымал бөліктерін жеке теңестірсек, онда ол жүйе екі жүйеге бөлінеді, яғни

$$Ax = \alpha x - \beta y, \ Ay = \alpha y + \beta x$$

немесе

$$\varphi(x) = \alpha x - \beta y, \ \varphi(y) = \alpha y + \beta x.$$

Сонымен, нақты евклид R кеңістігінде x пен y элементтерден (векторлардан) анықталған екі өлшемді ішкі кеңістік бар және ол φ түрлендіруде инвариантты. Салдар дәлелденді.

5.15-теорема. Сызықты φ түрлендірудің A матрицасы берілген l_k, $k = \overline{1,n}$ базисте диагоналды болу үшін, осы базистің элементтері φ түрлендірудің меншікті элементі болуы: $\varphi(l_k) = \lambda_k \cdot l_k$, $k = \overline{1,n}$ қажетті әрі жеткілікті.

Дәлелдеуі. Берілген l_k, $k = \overline{1,n}$ базисті түрлендірудің меншікті элементтері болсын деп жориық:

$$\varphi(l_k) = \lambda_k \cdot l_k, \ k = \overline{1,n}. \tag{5.46}$$

Онда φ түрлендірунің A матрицасы 5.1-теорема (5.4-формула) бойынша диагоналды матрица болады:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{5.47}$$

Енді φ түрлендіруідің A матрицасы берілген l_k, $k = \overline{1,n}$ базисте диагоналды болсын деп ұйғаралық, яғни (5.47) түрде. Онда (5.4) формула (5.46) түрде жазылады. Олай болса, берілген l_k, $k = \overline{1,n}$ базис φ түрлендірудің меншікті элементтері. Теорема дәлелденді.

5.16-теорема. Егер $l_1, l_2, \dots, l_k$ — элементтері φ сызықты түрлендірулерінің меншікті элементтері және $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$ сандары меншікті элементтерге сәйкес меншікті мәндері болса: $\varphi(l_i) = \lambda_i \cdot l_i$, $i = \overline{1,k}$, онда $l_1, l_2, \dots, l_k$ — элементтері сызықты тәуелсіз.

Дәлелдеуі. Теореманы дәлелдеу үшін математикалық индукция әдісін қолданайық. $k = 1$-ден бастап $k - 1$-ге дейін дәлелденді деп ұйғарып ($l_1, l_2, \ldots, l_{k-1}$ — сызықты тәуелсіз), теореманы k үшін дәлелдейік ($k=1$ болғанда теорема өзінен өзі дәлелденіп тұр). Ол үшін кері жориық $l_1, l_2, \ldots, l_k$ сызықты тәуелді болсын, яғни

$$\alpha_1 \cdot l_1 + \alpha_2 \cdot l_2 + \ldots + \alpha_k \cdot l_k = 0 \tag{5.48}$$

теңдігі кем дегенде біреуі нөлге тең емес α_i саны үшін орындалсын. Анықтық үшін $\alpha_1 \neq 0$ болсын. Онда

$$\varphi(\alpha_1 \cdot l_1 + \ldots + \alpha_k \cdot l_k) = 0, \ \alpha_1 \cdot \varphi(l_1) + \ldots + \alpha_k \cdot \varphi(l_k) = 0,$$

$$\alpha_1 \lambda_1 \cdot l_1 + \ldots + \alpha_k \lambda_k \cdot l_k = 0. \tag{5.49}$$

(5.48) теңдікті λ_k-ға көбейтіп, (5.49) және осы көбейтіндінің айырымын қарастырайық:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k) \cdot l_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_k) \cdot l_2 + \ldots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) \cdot l_{k-1} = 0,$$

мұндағы $\alpha_1 \neq 0$, $\lambda_1 - \lambda_k \neq 0$. Сондықтан, $l_1, l_2, \ldots, l_{k-1}$ — сызықты тәуелді. Индукциялық ұйғаруымыз бойынша $l_1, l_2, \ldots, l_{k-1}$ — сызықты тәуелсіз. Осы қайшылық теореманы дәлелдейді.

5.17-теорема. Егер φ сызықты түрлендіруінің сипаттамалық көпмүшелігінің әртүрлі n түбірі бар болса, онда φ түрлендіруінің A матрицасы диагоналды болады.

Дәлелдеуі. φ түрлендіруінің сипаттамалық көпмүшелігінің әртүрлі түбірі λ_i, $i=\overline{1,n}$ болсын. Онда 5.14-теорема бойынша λ_i, $i=\overline{1,n}$ сандары φ түрлендіруінің меншікті мәндері болады:

$$\varphi(l_i) = \lambda_i \cdot l_i, \ i=\overline{1,n}, \tag{5.50}$$

мұндағы l_i, $i=\overline{1,n}$ берілген φ түрлендіруінің меншікті элементтері. Олай болса 5.16-теорема бойынша: $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — сызықты тәуелсіз болады. Егер $l_1, l_2, \ldots, l_n$ элементтерін базис ретінде алсақ, онда (5.50) теңдігінен A матрицасының диагоналды матрица, яғни

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

болатынын анықтаймыз. Теорема дәлелденді.

5.18-теорема. Кез келген сызықты φ түрлендіруінің сипаттамалық көпмүшелігі базиске тәуелсіз.

Дәлелдеуі. φ сызықты түрлендіруінің ескі базистегі матрицасы A болсын, ал жаңа базистегі матрицасы $C^{-1}AC$ болсын (5.3-теорема), мұндағы C — ерекше емес матрица ($|C| \neq 0$). Онда жаңа базистегі сипаттамалық көпмүшелік:

$$|C^{-1}AC - \lambda E| = |C^{-1}AC - \lambda C^{-1}AC| =$$

$$= |C^{-1}(A - \lambda E)C| = |C^{-1}|\,|A - \lambda E|\,|C| = |A - \lambda E|$$

болады. Демек, *φ сызықты түрлендіруінің әртүрлі базистегі сипаттамалық көпмүшеліктері тең.* Теорема дәлелденді.

§ 5.9 Түйіндес түрлендіру

Бізге евклид R кеңістігінде сызықты φ түрлендіруі берілсін: $R \xrightarrow{\varphi} R$.

Анықтама. Евклид кеңістігіндегі φ^* сызықты түрлендіру ($R \xrightarrow{\varphi^*} R$), егер кез келген $x, y \in R$ элементтер үшін

$$(\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y)), \ x, y \in R \tag{5.51}$$

теңдігі орындалса, φ түрлендіруінің *түйіндес түрлендіруі* деп аталады, мұндағы (x, y) — скаляр көбейтінді.

5.19-теорема. Евклид R кеңістігінде кез келген φ сызықты түрлендіруінің тек бір ғана φ^* сызықты түйіндес түрлендіруі бар.

Дәлелдеуі. R кеңістігінде берілген y пен кез келген x элементтерін алып, мына теңдікті қарастырайық:

$$f(x) = (\varphi(x), y), \ x \in R, \ y \in R, \tag{5.52}$$

мұндағы $f: R \xrightarrow{f} V$, ал V — нақты сандар кеңістігі.

Қарастырмақшы болған $f(x)$ функциясының сызықты болатынын дәлелдейік. Ол үшін φ түрлендіруінің сызықты болатынын ескерсек жеткілікті:

$$f(\alpha x + \beta z) = (\varphi(\alpha \cdot x + \beta z), y) = (\alpha\varphi(x) + \beta\varphi(z), y) =$$

$$= \alpha(\varphi(x), y) + \beta(\varphi(z), y) = \alpha f(x) + \beta f(z), \ x \in R, \ z \in R, \ y \in R.$$

Енді $f(x)$ функциясының сызықты және 4.18-теоремадан

$$f(x) = (x, a), \ x \in R, \ a \in R \qquad (5.53)$$

теңдігін аламыз, мұндағы x — кез келген элемент, a-берілген элемент. Олай болса, (5.52) мен (5.53) формулаларды салыстырып

$$(\varphi(x), y) = (x, a), \ x \in R \qquad (5.54)$$

теңдігін аламыз. Демек, (5.54) теңдік $\psi(y) = a$ орындалатын Ψ түрлендіруінің сызықты болатынын айқындайды, яғни

$$(\varphi(x), y) = (x, \psi(y)) \qquad (5.55)$$

ψ түрлендіруінің сызықты болатынын дәлелдейік. Шынында да, (5.55) теңдіктен

$$(x, \psi(\alpha y + \beta z)) = (\varphi(x), \alpha y + \beta z) =$$

$$= \alpha(\varphi(x), y) + \beta(\varphi(x), z) =$$

$$= \alpha(x, \psi(y)) + \beta(x, \psi(z)) =$$

$$= (x, \alpha\psi(y) + \beta\psi(z)), \ y \in R, \ z \in R, \ x \in R.$$

$\psi = \varphi^*$ теңдігі орындалатынын көрсетейік. (5.55) формуладан $(\varphi(x), y) = (x, \psi(y))$ және (5.51) теңдіктен $(\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y)) = 0$. Онда

$$(x, \varphi^*(y)) - (x, \psi(y)) = 0 \text{ және } (x, (\varphi^* - \psi)\, y) = 0.$$

Осыдан барлық $y \in R$ үшін $(\varphi^* - \psi) \cdot y = 0$ теңдігі орындалады, яғни $\psi = \varphi^*$.

Анықталған $\psi = \varphi^*$ түрлендіруі тек біреу ғана болатынын дәлелдейік. Ол үшін мұндай түрлендіруді екеу деп қарастырайық, яғни $\varphi_1^* = \psi$. Бұл жағдай (5.55) формуладан:

$$(\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y)) \text{ және } (\varphi(x), y) = (x, \varphi_1^*(y))$$

теңдіктері орындалады. Онда

$$(x, \varphi^*(y)) = (x, \varphi_1^*(y)), \ (x, (\varphi^* - \varphi_1^*) \cdot y) = 0.$$

Осыдан $(\varphi^* - \varphi_1^*) \cdot y = 0$, яғни $\varphi_1^* = \varphi^*$. Теорема дәлелденді.

Енді φ^* түйіндес түрлендіруінің қасиеттерімен танысайық.

1. Бірлік түрлендіруінің түйіндесі өзіне тең, яғни $\varepsilon = \varepsilon^*$.

2. Нөлдік түрлендіруінің түйіндесі өзіне тең, яғни $0 = 0^*$.

3. Сызықты түрлендірулердің қосындысының түйіндесі олардың түйіндестерінің қосындысына тең, яғни

$$(\varphi_1 + \varphi_2)^* = \varphi_1^* + \varphi_2^*.$$

4. $(\alpha \cdot \varphi)^* = \alpha \cdot \varphi^*$.

5. Түйіндес түрлендірудің түйіндесі сызықты түрлендірудің өзіне тең, яғни $(\varphi^*)^* = \varphi$.

6. Сызықты түрлендірулердің көбейтіндісінің түйіндесі олардың түйіндестерінің көбейтінділеріне тең, яғни

$$(\varphi_1 \cdot \varphi_2)^* = \varphi_1^* \cdot \varphi_2^*.$$

Дәлелдеуі. Жоғарыдағы қасиеттердің дәлелдемесі бірдей болғандықтан, біз, 5-қасиеттің дәлелдемесін ғана келтірейік, ал қалғандарының дәлелдемесін жаттығу ретінде оқырмандарға ұсынамыз. Сонымен,

$$(\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y)) = (\varphi^*(y), x) =$$

$$= (y, (\varphi^*)^*(x)) = ((\varphi^*)^*(x), y).$$

Осыдан $\varphi(x) = (\varphi^*)^*(x)$, яғни $\varphi = (\varphi^*)^*$.

Енді бізге берілген R евклид кеңістігінің кез келген R^1 ішкі кеңістігін алайық: $R^1 \subset R$. Евклид кеңістігінің барлық $x \in R$ элементі мен R^1 ішкі кеңістігінің барлық $y \in R^1$ элементі үшін $(x, y) = 0$ теңдігі орындалатын R кеңістігінің $R^1_\perp$ ішкі кеңістігін $R^1_\perp \subset R$ қарастырайық, яғни

$$R^1_\perp = \{x \in R : (x, y) = 0, \ y \in R^1\}.$$

Осылайша анықталған $R^1_\perp$ кеңістігі R^1 ішкі кеңістігінің *ортогонал толықтауышы* деп алатады. $R^1_\perp$ кеңістігіндегі $\perp$ таңба (перпендикуляр таңбасы) оның кез келген элементі R^1 кеңістігінің кез келген элементіне ортогонал болатынын білдіреді, яғни $x \perp y, \ x \in R^1_\perp, \ y \in R^1$ немесе $(x, y) = 0$.

Осы анықтамадан және тура қосындының анықтамасынан

$$R = R^1 \oplus R^1_\perp$$

теңдігі орындалады.

5.20-теорема. Егер R^1 ішкі кеңістік φ сызықты түрлендіруде инвариантты болса, онда $R^1_\perp$ — ортоганал толықтауыш φ^* — сызықтық түйіндес түрлендіруде инвариантты болады.

Дәлелдеуі. Теореманың шарты бойынша R^1 ішкі кеңістігі φ түрлендіруде инвариантты, яғни кез келген $y \in R^1$ үшін $\varphi(y) \in R^1$ болады. Кез келген $x \in R^1_\perp$ элемент үшін $\varphi^*(x) \in R^1_\perp$ болатынын дәлелдейік. Ол үшін барлық $x \in R^1_\perp$ элемент үшін

$$(\varphi^*(x), y) = 0, \ x \in R^1_\perp, \ y \in R^1$$

теңдігі кез келген $y \in R^1$ үшін орындалатынын дәлелдесек жеткілікті. Шынында да,

$$(\varphi^*(x), y) = (x, \varphi(y)),$$

мұндағы $\varphi(y) \in R^1$, $x \in R^1_\perp$, яғни $(x, \varphi(y)) = 0$.

Демек, $(\varphi^*(x), y) = 0$. Теорема дәлелденді.

Енді мына сұраққа жауап іздестірейік: φ мен оның φ^* түйіндес түрлендірулерінің сәйкес матрицалары арасында қандай байланыс бар деген сұраққа төмендегі теорема жауап береді.

5.21-теорема. Егер нақты евклид R кеңістігіндегі φ сызықты түрлендіруінің ортонормалданған базистегі матрицасы $A = (a_{ij})$ болса, онда осы базистегі φ^* түйіндес түрлендіруінің $A' = (a_{ji})$ матрицасы бар, мұндағы A' матрица A матрицасының транспонирленген матрицасы.

Дәлелдеуі. $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — элементтері R евклид кеңістігінің ортонормалданған базисі болсын:

$$(l_i, l_j) = 0, \text{ егер } i \neq j; \ (l_i, l_j) = 1, \text{ егер } i = j.$$

Осы базистегі $\varphi(l_k)$ мен $\varphi^*(l_k)$-ны қарастырайық және олар $\varphi(l_k) \in R$, $\varphi^*(l_k) \in R$, болғандықтан,

$$\begin{aligned} \varphi(l_k) &= a_{k1} \cdot l_1 + a_{k2} \cdot l_2 + \ldots + a_{kn} \cdot l_n, \ k = \overline{1, n}, \\ \varphi^*(l_k) &= b_{k1} \cdot l_1 + b_{k2} \cdot l_2 + \ldots + b_{kn} \cdot l_n, \ k = \overline{1, n}, \end{aligned} \tag{5.56}$$

мұндағы $A = (a_{kj})$ берілген φ сызықты түрлендірулерінің $l_1, l_2, \ldots, l_n$ базистегі матрицасы, ал $B = (b_{kj})$ берілген φ^* түйіндес түрлендірудің $l_1, l_2, \ldots, l_n$ базистегі матрицасы.

Енді теореманы дәлелдеу үшін $B = A'$ немесе $b_{kj} = a_{jk}$ теңдігін дәлелдесек жеткілікті. Ол үшін (5.56) теңдіктерді l_m — элементіне скаляр көбейтейік:

$$(\varphi(l_k), l_m) = a_{k1}(l_1, l_m) + \ldots + a_{km}(l_m, l_m) + \ldots + a_{kn}(l_n, l_m) = a_{km},$$

$$(\varphi^*(l_k), l_m) = a_{k1}(l_1, l_m) + \ldots + b_{km}(l_m, l_m) + \ldots + b_{kn}(l_n, l_m) = b_{km}.$$

Осыдан

$$b_{km} = (\varphi^*(l_k), l_m) = (l_k, \varphi(l_m)) = (\varphi(l_m), l_k) = a_{mk}.$$

Сонымен, $b_{km} = a_{mk}$, яғни $B = A'$. Теорема дәлелденді.

§ 5.10. Симметриялы түрлендіру

Анықтама. Егер евклид R кеңістігіндегі φ сызықты түрлендіру өзінің түйіндес түрлендіруіне тең болса: $\varphi = \varphi^*$ онда ол симметриялы деп аталады.

5.22-теорема. Евклид R кеңістігіндегі сызықты φ түрлендіру симметриялы болу үшін, барлық $x, y \in R$ элементтер үшін

$$(\varphi'(x), y) = (x, \varphi(y)), \ \forall \ x, y \in R \tag{5.57}$$

теңдігі орындалуы қажетті әрі жеткілікті.

Қажеттілігі. Берілген φ түрлендіруі симметриялы болсын деп ұйғарып, (5.57) теңдікті дәлелдейік. Онда

$$(\varphi(x), y)) = ((x, \varphi^*(y)) = (x, \varphi(y)).$$

Жеткіліктігі. (5.57) теңдігі орындалсын деп ұйғарып, $\varphi = \varphi^*$ теңдігін дәлелдейік. Онда (5.57) теңдіктен:

$$(x, \varphi^*(y)) = (\varphi(x), y) = (x, \varphi(y)).$$

Осыдан $\varphi^* = \varphi$ болады. Теорема дәлелденді.

Енді симметриялы түрлендірудің негізгі қасиеттерімен танысайық.

1. Егер φ түрлендіруі симметриялы болса, онда φ мен φ^* түрлендірулері ауыстырымды болады, яғни

$$\varphi \cdot \varphi^* = \varphi^* \cdot \varphi.$$

Шынында да, берілген φ түрлендіруі симметриялы $\varphi = \varphi^*$. Сондықтан, $\varphi \cdot \varphi^* = \varphi^* \cdot \varphi$.

2. Егер φ мен ψ түрлендірулері симметриялы болса, онда $\varphi+\psi, \lambda\varphi$ және φ^{-1} түрлендірулері симметриялы болады, яғни $(\varphi+\psi)^*=\varphi+\psi$, $(\lambda\varphi)^*=\lambda\varphi$, $(\varphi^{-1})^*=\varphi^{-1}$.

Шынында да, $(\varphi+\psi)^*=\varphi^*+\psi^*=\varphi+\psi$, $(\lambda\varphi)^*=$ $=\lambda\varphi^*=\lambda\varphi$, $(\varphi^{-1})^*=(\varphi^*)^{-1}=\varphi^{-1}$.

3. Егер φ мен ψ түрлендірулері симметриялы болса, онда $\varphi\cdot\psi$ түрлендіру симметриялы болу үшін, олар ауыстырымды болуы қажетті әрі жеткілікті.

Қажеттілігі. $\varphi\cdot\psi$ симметриялы болсын: $(\varphi\cdot\psi)^*=$ $=\varphi\cdot\psi$ деп ұйғарып, $\varphi\cdot\psi=\psi\cdot\varphi$ теңдігін дәлелдейік. Онда

$$\varphi\cdot\psi=(\varphi\cdot\psi)^*=\psi^*\varphi^*=\psi\cdot\varphi.$$

Жеткіліктігі. $\varphi\cdot\psi=\psi\cdot\varphi$ ауыстырымды болсын деп ұйғарып, $(\varphi\cdot\psi)^*=\varphi\cdot\psi$ теңдігін дәлелдейік. Онда $(\varphi\cdot\psi)^*=\psi^*\cdot\varphi^*=\psi\cdot\varphi=\varphi\cdot\psi$.

Енді n-өлшемді евклид R кеңістігіндегі ортонормалданған

$$l_1, l_2, \ldots, l_n;\ (l_i, l_j)=0\ \ i\neq j,\ (l_i, l_i)=1, i=j \qquad (5.58)$$

базисті қарастырайық және осы базистегі φ сызықты түрлендіруінің матрицасы $A=(a_{ij})$, $i,j=\overline{1,n}$ болсын.

5.23-теорема. Евклид R кеңістігіндегі φ сызықты түрлендіруі ортонормалданған (5.58) базисте симметриялы болу үшін, оның матрицасы симметриялы болуы: $A=A'$ қажетті әрі жеткілікті.

Қажеттілігі. Бірілген φ сызықты түрлендіруі симметриялы болсын: $\varphi=\varphi'$ деп ұйғарып, $A=A'$ теңдігінің орындалатынын дәлелдейік. Берілген φ сызықты түрлендіруінің матрицасы A, яғни $\varphi(l_j)=a_{1j}\cdot l_1+\ldots+$ $+a_{nj}\cdot l_n$, $j=\overline{1,n}$. Онда:

$$(l_i, \varphi(l_j))=a_{ij},\ (\varphi(l_i), l_j)=a_{ji}$$

5.22-теорема бойынша $a_{ij}=a_{ji}$, яғни $A=A'$.

Жеткіліктігі. $A=A'$ теңдігі орындалсын деп, φ түрлендіруінің симметриялы ($\varphi=\varphi^*$) болатындығын дәлелдейік. Кез келген x, y элементтерін қарастырайық:

$$x=x_1\cdot l_1+\ldots+x_n\cdot l_n,\ y=y_1\cdot l_1+\ldots+y_n\cdot l_n,\ x\in R,\ y\in R.$$

Онда

$$(\varphi(x), y)=(x_1\cdot\varphi(l_1))+\ldots+x_n\cdot\varphi(l_n),\ y_1\cdot l_1+\ldots+y_n\cdot l_n)=$$
$$=x_1\sum_{j=1}^{n} y_j a_{j1}+\ldots+x_n\sum_{j=1}^{n} y_j a_{jn}=\sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j a_{ji}=$$
$$=\sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j\cdot a_{ij}=(x, \varphi(y)).$$

Енді 5.22-теореманы ескерсек, онда φ симметриялы түрлендіру. Теорема дәлелденді.

Ескерту. 5.22-мен 5.23-теоремалар эквивалентті теоремалар.

Симметриялы матрицаның анықтамасы бойынша $A=A'$, яғни A матрица өзінің транспонирленген матрицасына тең. Олай болса 5.23-теоремадан: R — *евклид кеңістігіндегі φ симметриялы сызықты түрлендіруінің матрицасы өзінің транспонирленген матрицасына тең.*

5.24-теорема. Евклид R кеңістігіндегі φ симметриялы сызықты түрлендіруінің симметриялы матрицасының характеристикалық көпмүшелігінің барлық меншікті түбірі нақты сан.

Дәлелдеуі. Теореманың шарты бойынша $\varphi=\varphi^*$ және λ саны оның меншікті мәні болсын, мұндағы λ саны $\Delta(\lambda)=|A-\lambda E|$ көпмүшелігініңі түбірі. Онда $0\neq x$ элемент меншікті элемент:

$$\varphi(x)=\lambda x.$$

λ саны нақты сан болатынын дәлелдейік. Ол үшін соңғы теңдікті x элементке скаляр көбейтелік:

$$(\varphi(x), x)=(\lambda x, x),\ (\varphi(x), x)=\lambda(x, x).$$

Осыдан:

$$\lambda=(\varphi(x), x)/(x, x)=(\varphi(x), x)/||x||^2.$$

Скаляр көбейтінді және $||x||$ нақты сан болғандықтан, λ саны да нақты сан. Теорема дәлелденді.

5.25-теорема. Евклид кеңістігіндегі φ симметриялы сызықты түрлендіруінің әр түрлі меншікті мәндеріне λ, μ сәйкес меншікті элементтері x, y, яғни

$$\varphi(x)=\lambda x,\ \varphi(y)=\mu y,\ x, y\in R,\ \lambda\neq\mu,$$

ортогонал $(x, y)=0\ (x\perp y)$ болады.

Дәлелдеуі. φ түрлендіруі симметриялы, онда 5.22-теорема бойынша

$$(\varphi(x), y) = (x, \varphi(y)),\ x, y \in R,$$
$$(\varphi(x), y) = (\lambda x, y) = \lambda(x, y),$$
$$(x, \varphi(y)) = (x, \mu y) = \mu(x, y),$$

яғни

$$\lambda(x, y) = \mu(x, y),\ (\lambda - \mu)(x, y) = 0,\ \lambda \neq \mu.$$

Бұдан $(x, y) = 0$. Теорема дәлелденді.

Евклид R кеңістігінен кез келген оның R^1 ішкі кеңістігін қарастырайық: $R^1 \subset R$. Евклид кеңістігінен

$$(x, y) = 0,\ y \in R'$$

теңдігін қанағаттандыратын $x \in R$ элементтерінің жиынын $R^1_\perp$ таңбасымен белгілейік (5.9-тақырып):

$$R^1_\perp = \{x \in R : (x, y) = 0,\ y \in R^1\}$$

5.26-теорема. Егер R^1 ішкі кеңістік симметриялы φ түрлендіруде инвариантты болса, онда $R^1_\perp$ кеңістігі осы түрлендіруде инвариантты болады.

Теореманың дәлелдеуін жаттығу ретінде оқырмандарға ұсынамыз. (5.20-теореманың дәлелдеуін қараңдар).

5.27-теорема. Егер n-өлшемді евклид R кеңістігінде φ симметриялы түрлендіру болса, онда оның n ортонормалданған базисі бар, ал оның матрицасы диагоналды түрде өрнектеледі:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 \dots 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0 \dots \lambda_n \end{pmatrix},$$

мұндағы λ_i, $i = \overline{1, n}$ сандары φ түрлендіруінің ортонормалданған базистегі меншікті мәндері.

Дәлелдеуі. φ түрлендірудің $0 \neq x_1$ меншікті элементі, ал λ_1-оның меншікті мәні болсын:

$$\varphi(x_1) = \lambda_1 x_1,\ x_1 \in R.$$

l_1 элементті мына түрде анықтайық:

$$l_1 = x_1/||x_1||,\ ||x_1||^2 = (x_1, x_1),$$

онда $||l_1|| = 1$ болады. Сондықтан, l_1 элементі де меншікті элемент:

$$\varphi(l_1) = \lambda_1 l_1. \tag{5.59}$$

(5.59) теңдігі орындалатын, анықталған l_1 элементтен түзелген бір өлшемді кеңістікті R_1 деп белгілейік және барлық $x \in R$ үшін

$$(x, l_1) = 0,\ l_1 \in R_1$$

теңдігін қанағаттандыратын x элементтерінің жиыны

$$R^1_\perp = (x \in R : (x, l_1) = 0)$$

болсын. Енді $R^1_\perp \subset R$ кеңістігі φ және φ^* түрлендірулерінде инвариантты болатынын дәлелдейік, яғни егер $y \in R^1_\perp$ болса, онда $\varphi(y) \in R^1_\perp$ және $\varphi^*(y) \in R^1_\perp$. Шынында да, егер $y \in R^1_\perp$ болса, онда

$$(y, l_1) = 0. \tag{5.60}$$

(5.57), (5.59) және (5.60) формулалардан

$$(\varphi(y), l_1) = (y, \varphi(l_1) = (y, \lambda_1 l_1) = \lambda_1 (y, l_1) = 0.$$

Бұдан $\varphi(y) \in R^1_\perp$. Осы сияқты: $(\varphi^*(y), l_1) = 0,\ \varphi^*(y) \in R^1_\perp$.

φ түрлендірудің $0 \neq x_2 \in R^1_\perp$ меншікті элементі, ал λ_2 оның мәні болсын:

$$\varphi(x_2) = \lambda_2 x_2,\ x_2 \neq 0. \tag{5.61}$$

l_2 — элементті анықтайық: $l_2 = x_2/||x_2||$. Онда $||l_2|| = 1$ және $l_i \in R^1_\perp, i = 1, 2$

$$\varphi(l_2) = \lambda_2 l_2$$

теңдігін аламыз. Енді

$$\varphi(l_i) = \lambda_i l_i,\ (l_1, l_2) = 0,\ i = 1, 2,\ l_1 \in R^1,\ l_2 \in R^1_\perp$$

теңдіктерді қанағаттандыратын l_1 мен l_2 элеменнтерден анықталған кеңістікті R_2-деп белгілейік, мұнда $||l_1||^2 = (l_1, l_1) = 1$, $||l_2||^2 = (l_2, l_2) = 1$. Барлық $x \in R$ элементі

$$(x, l_i) = 0,\quad i = 1, 2$$

теңдікті қанғаттандыратын x элементтерінің жиынын $R^2_\perp$ деп белгілейік:

$$R^2_\perp = \{ x \in R, (x, l_i) = 0, i = 1, 2 \}.$$

5.26-теореманы пайдаланып, $R^2_\perp \subset R$ кеңістігі φ мен φ^* түрлендірулерінде инвариантты кеңістік екенін дәлелдеуге болады.

Осылайша жалғастырып, φ симметриялы сызықты түрлендірудің ортонормалданған

$$l_1, l_2, \ldots, l_n, (l_i, l_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j \end{cases}$$

базисін құрамыз және

$$\varphi (l_i) = \lambda_i l_i, \quad i = \overline{1, n}. \tag{5.62}$$

5.1-теореманы ескеріп, онда φ симметриялы сызықты түрлендіруінің $l_1, l_2, \ldots, l_n$ базистегі матрицасы диагоналды A матрица болады. Теорема дәлелденді.

§ 5.11. Ортогонал түрлендіру

Анықтама. Евклид R кеңістігінің *φ сызықты түрлендіруі ортогонал* деп аталады, егер барлық $x, y \in R$ элементтері үшін

$$(\varphi (x), \varphi (y)) = (x, y) \tag{5.63}$$

теңдігі орындалса.

5.28-теорема. Евклид R кеңістігінің φ сызықты түрлендіруі ортогонал болу үшін, оның түйіндес түрлендіруі кері түрлендіруге тең болуы

$$\varphi^* = \varphi^{-1} \tag{5.64}$$

қажетті әрі жеткілікті.

Қажеттілігі. Евклид кеңістігінің φ сызықты түрлендіруі ортогонал болсын, яғни (5.63) теңдік орындалады. (5.64) теңдікті дәлелдейік. Онда (5.63) теңдіктен:

$$(x, y) = (\varphi (x), \varphi (y)) = (x, \varphi^* (\varphi (y)))$$

Осыдан $\varphi^* \varphi = \varepsilon$. Онда $\varphi_* = \varphi^{-1}$ болады.

Жеткіліктігі. Евклид кеңістігінің φ сызықты түрлендіруі үшін (5.64) теңдігі орындалсын. (5.63) теңдікті дәлелдейік. Шынында да:

$$(\varphi (x), \varphi (y)) = (x, \varphi^* (\varphi (y))) = (x, \varphi^{-1} \varphi (y)) =$$
$$= (x, \varepsilon (y)) = (x, y).$$

Теорема дәлелденді.

Салдар. (5.64) — формуланың теңдігінен $\varphi^* \varphi = \varphi \cdot \varphi^* = \varepsilon$ теңдігін аламыз, яғни ортогонал түрлендіруге ауыстырымдылық орындалады.

5.28-теоремадағы (5.64) формуланы матрицалық түрде жазайық. Ол үшін евклид R кеңістігінен:

$$l_1, l_2, \ldots, l_n, (l_i, l_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j \end{cases} \tag{5.65}$$

ортонормалданған базисті алайық және осы базисте φ сызықты түрлендіруге

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{n \times n}, i, j = \overline{1, n}$$

матрица сәйкес келсін. Онда 5.21-теорема бойынша φ түрлендіруінің φ^* түйіндес түрлендіруіне

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ji}) \quad, i, j = \overline{1, n}$$

матрица сәйкес келеді.

Анықтама. Сызықты φ түрлендіруінің A матрицасы *ортогонал* деп аталады, егер

$$A' = A^{-1} \text{ немесе } A' \cdot A = A \cdot A' = E$$

теңдігі орындалса, мұндағы E — бірлік матрица.

Осы анықтамадан соң 5.28-теореманы «матрица тілінде» тұжырымдауға болады.

5.29-теорема. Евклид R кеңістігіндегі φ сызықты түрлендіруі (5.65) ортонормалданған базисте ортогонал болу үшін, осы түрлендірудің матрицасы ортогонал болуы:

$$A' = A^{-1} \text{ немесе } A' \cdot A = A \cdot A' = E \qquad (5.66)$$

қажетті әрі жеткілікті.

Қажеттілігі. φ түрлендіруі ортогонал болсын деп ұйғарып, (5.66) теңдікті дәлелдейік. (5.64) теңдіктен

$$\varphi \cdot \varphi^* = \varphi^* \varphi = \varepsilon$$

Осыдан $A' \cdot A = A \cdot A' = E$ болады, онда $A' = A^{-1}$.

Жеткіліктігі. (5.66) теңдігі орындалды деп ұйғарып, (5.64) теңдікті дәлелдейік. (5.66) теңдіктен

$$A' A = A \cdot A' = E, \ \varphi \cdot \varphi^* = \varphi^* \varphi = \varepsilon.$$

Онда $\varphi^* = \varphi^{-1}$ теңдігі орындалады. Теорема дәлелденді.

Жоғарыдағы теоремалардан: *кез келген ортогонал түрлендірудің кері түрлендіруі бар, ал ортогонал матрицаның кері матрицасы бар.*

Ортогонал түрлендірудің қасиеттерін қарастыралық.

1. ε бірлік түрлендіру ортогоналды.

Шынында да, $\varepsilon(x) = x$, $\varepsilon(y) = y$, онда $(\varepsilon(x), \varepsilon(y)) = (x, y)$ теңдігі орындалады.

2. Егер φ мен ψ ортгонал түрлендірулер болса, онда $\varphi \cdot \psi$ де ортогонал түрлендіру.

Шынында да,

$$(\varphi \cdot \psi(x), \varphi \cdot \psi(x)) = (\psi(x), \varphi^* \varphi(y)) =$$

$$= (\psi(x), \psi(y)) = (x, y).$$

3. Егер φ ортогонал түрлендіру болса, онда φ^{-1} түрлендіру де ортогонал.

Шынында да, φ ортогонал түрлендіру болғандықтан, $(\varphi^* = \varphi^{-1})$:

$$(\varphi^{-1})^* = (\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^{-1}$$

теңдігі орындалады.

4. Егер φ ортогонал түрлендіру болса, онда $\alpha \cdot \varphi$ ортогонал болуы үшін, $\alpha = \pm 1$ болуы қажетті әрі жеткілікті.

Шынында да,

$$(\alpha\varphi(x), \alpha\varphi(y)) = \alpha^2(\varphi(x), \varphi(y)) = \alpha^2(x, y).$$

Осыдан

$$(\alpha\varphi(x), \alpha\varphi(y)) = (x, y)$$

теңдігі орындалу үшін, $\alpha^2 = 1, \alpha = \pm 1$ болуы қажетті әрі жеткілікті.

5. Егер φ ортогонал түрлендіру болса, онда ол элементтің ұзындығын өзгертпейді, яғни

$$\|\varphi(x)\|^2 = \|x\|^2, \ x \in R.$$

Шынында да, барлық $x = y \in R$ үшін (5.63) теңдіктен

$$(\varphi(x), \varphi(x)) = (x, x), \ \|\varphi(x)\|^2 = \|x\|^2$$

теңдігін аламыз.

6. φ ортогонал түрлендіруінің меншікті мәні ± 1-ге тең.

Шынында да, егер $\varphi(x) = \lambda x$ болса, онда

$$(x, x) = (\varphi(x), \varphi(x)) = (\lambda x, \lambda x) = \lambda^2(x, x).$$

Осыдан $\lambda^2 = 1, \lambda = \pm 1$.

7. φ ортогонал түрлендірудің әртүрлі меншікті мәндерінің меншікті элементтері ортогонал болады.

Шынында да, $\varphi(x) = \lambda_1 x$, $\varphi(y) = \lambda_2 y$ және $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ болсын. $(x, y) = 0$ теңдігін дәлелдейік. Ол үшін (x, y) скаляр көбейтіндіні қарастырайық:

$$(x, y) = (\varphi(x), \varphi(y)) = \lambda_1 \lambda_2 (x, y).$$

Осыдан $(1 - \lambda_1\lambda_2)(x, y) = 0$, мұндағы $1 - \lambda_1\lambda_2 \neq 0$. Онда, $(x, y) = 0$.

Осы сияқты R кеңістігінің ортогонал түрлендіруінің ортогонал матрицасына төмендегі қасиеттер дәлелденеді.

1.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \text{ бірлік матрица ортогонал.}$$

2. Егер A мен B матрицалары ортогонал болса, онда AB матрицасы да ортогонал болады.

3. Егер A матрица ортогонал болса, онда A^{-1} ортогонал болады.

$$A^{-1}(A^{-1})' = A^{-1}(A')^{-1} = (A'A)^{-1} = E.$$

4. Егер A ортогонал болса, онда $\alpha \cdot A$ ортогонал болу үшін $\alpha = \pm 1$ болуы қажетті әрі жеткілікті.

5. A ортогонал матрицаның меншікті мәндері комплекс болуы мүмкін, мысалы

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

матрицасы ортогонал, яғни $A \cdot A' = E$, ал оның меншікті мәндері комплекс сандар:

$$\lambda_{1/2} = \cos\varphi \pm i \cdot \sin\varphi.$$

6. Егер A ортогонал матрицаның меншікті мәні нақты сан болса, онда ол ± 1-ге тең.

7. A ортогонал матрицаның әртүрлі меншікті мәндерінің меншікті элементтері ортогонал болады.

8. A ортогонал матрицаның анықтауышы ± 1-ге тең.

Евклид R кеңістігінің R^1 — ішкі кеңістігі болсын: $R^1 \subset R$ және $R^1_\perp$ кеңістігі R^1 кеңістігінің ортогонал толықтауышы болсын:

$$R^1_\perp = \{ x \in R : (x, y) = 0 \,,\, y \in R^1 \}.$$

Онда $R = R^1 \oplus R^1_\perp$ болады.

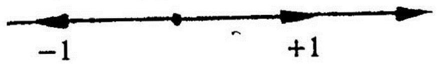
5.30-теорема. Егер R^1 ішкі кеңістік φ ортогонал сызықты түрлендіруде инвариантты болса, онда $R^1_\perp$ кеңістігі де ол түрлендіруде инвариантты болады.

Дәлелдеуі. Теореманың шарты бойынша R^1 кеңістігі φ түрлендіруде инвариантты, яғни барлық $y \in R^1$ үшін $\varphi(y) \in R^1$. Теореманы дәлелдеу үшін барлық $x \in R^1_\perp$ элемент үшін $(\varphi(x), y) = 0$ болатынын дәлелдесек жеткілікті, мұндағы $y \in R^1$. Шынында да, егер $y \in R^1$ болса, онда $z = \varphi(y) \in R^1$. Осыдан $y = \varphi^{-1}(z) \in R^1$, яғни барлық $y \in R^1$ үшін $\varphi^{-1}(y) \in R^1$. Олай болса, $(x, \varphi^{-1}(y)) = 0$, $x \in R^1_\perp$. Демек,

$$(\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y)) = (x, \varphi^{-1}(y)) = 0$$

теңдігі орындалады, яғни $\varphi(x) \in R^1_\perp$, (барлық $x \in R^1_\perp$ элементтер үшін). Теорема дәлелденді.

n өлшемді евклид R кеңістігіндегі φ ортогонал түрлендірулерінің ортогонал матрицасын қарастырайық. Алдымен дербес жағдайдан бастайық. R_1 — евклид кеңістігі түзу болсын және $l \in R_1$, ал φ түрлендіруі R_1 кеңістіктегі ортогонал түрлендіру болсын.



1-сурет

Онда $\varphi(l) = \lambda l$, мұндағы $\lambda = \pm 1$. Бұл жағдайда $\varphi(l) = \pm l$ болады, яғни $\varphi = \varepsilon$ бірлік түрлендіру немесе φ *орта симметриялы түрлендіру* деп аталады (1-сурет).

Енді $R = R_2$ — жазықтық және φ осы жазықтықтағы ортогонал түрлендіру болсын, ал оның ортонормалданған базистегі матрицасы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

болсын. Онда 5.29-теорема бойынша $A' = A^{-1}$ теңдігі орындалады және

$$E = A' \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 & a_{11} \cdot a_{12} + a_{21} \cdot a_{22} \\ a_{11} + a_{12}\, a_{22} & a_{12}^2 + a_{22}^2 \end{pmatrix}$$

теңдігінен

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, \; a_{11} \cdot a_{12} + a_{21} \cdot a_{22} = 0, \; a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \quad (5.67)$$

теңдіктерін аламыз. (5.67) жүйенің бірінші мен үшінші теңдіктерінен мынаны байқауға болады:

$$a_{11} = \cos\alpha, \; a_{21} = \sin\alpha \text{ және } a_{12} = \cos\beta, \; a_{22} = \sin\alpha,$$

яғни осы теңдіктер орындалатын α мен β бұрыштары табылады, ал екінші теңдіктен

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta = \cos(\beta-\alpha) = 0.$$

Осыдан: I. $\beta - \alpha = \pi/2$, II. $\beta - \alpha = 3\pi/2$.

1-жағдай. $\beta = \alpha + \pi/2$, $a_{12} = \cos(\pi/2+\alpha) = -\sin\alpha$, $a_{22} = \sin\beta = \sin(\pi/2+\alpha) = \cos\alpha$ болады. Онда

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \tag{5.68}$$

яғни ортогонал φ түрлендіру координат жүйені бас нүктеде α бұрышқа бұру түрлендіруі балады. $\alpha = 0$ болғанда

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

яғни $\varphi = \varepsilon$ бірлік түрлендіру. $\alpha = \pi$ болғанда

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

яғни φ түрлендіруі — координат жүйенің бас нүктесі арқылы симметриялы.

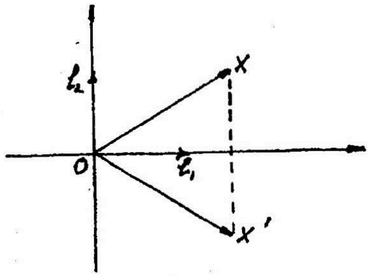
2-жағдай. $\beta = 3\pi/2 + \alpha$, $a_{12} = \sin\alpha$, $a_{22} = -\cos\alpha$. Онда

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}, \ |A - \lambda E| = \lambda^2 - 1, \ \lambda = \pm 1,$$

яғни A ортогонал матрица симметриялы. Ендеше ортогонал φ түрлендіру де симметриялы. Олай болса, 5.27-теорема бойынша оның ортонормалданған l_1, l_2 базисі табылып, A матрицаны диагоналды түрге келтіреміз:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{5.69}$$

яғни $x = x_1\cdot l_1 + x_2\cdot l_2$ элементке $x' = x_1\cdot l_1 - x_2\cdot l_2$ элементі сәйкес келеді. Ендеше бұл ортогонал φ түрлендіруі — l_1 вектормен анықталған өске симметриялы түрлендіру.



2-сурет

Сонымен, екі өлшемді R_1 ішкі кеңістігіндегі ортогонал түрлендіруі координат жүйені бас нүктеде анықтауышы +1-ге тең α бұрышқа бұру түрлендіру немесе анық- тауышы —1-ге тең өске симметриялы түрлендіру болады (2-сурет).

Жалпы жағдайды қарастырайық. Евклид R кеңістігіндегі φ ортогонал түрлендіруі болсын, $\dim R = n$.

5.31-теорема. n-өлшемді евклид R кеңістігіндегі φ ортогонал түрлендіруінің ортонормалданған базисі бар, ал оның матрицасы мына түрде өрнектеледі:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\alpha_k & -\sin\alpha_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\alpha_k & \cos\alpha_k \end{pmatrix}$$

Дәлелдеуі. n-өлшемді евклид R кеңістігінде бір немесе екі өлшемді инвариантты ішкі R кеңістік бар (5.8-тақырып). Егер R бір өлшемді инвариантты ішкі кеңістік болса, онда оның ортогонал түрлендіруіне $\varphi(l_1) = \lambda l_1$ теңдігі орындалады, мұндағы $\lambda = \pm 1$, $l_1 \in R_1$, $||l_1|| = 1$.

Егер R_1 екі өлшемді инвариантты ішкі кеңістік болса, онда оның ортогонал φ түрлендіруінің ортонормалданған базистегі A матрицасы (5.68) түрде өрнектеледі:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \ |A| = +1,$$

яғни ортогонал φ түрлендіру координат жүйені бас нүктеде α бұрышқа бұру түрлендіруі болады немесе ол A матрица мына түрде өрнектеледі:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}, \ |A| = -1.$$

Бұл матрица симметриялы. Ендеше ортогонал φ түрлендіруде симметриялы. Олай болса, 5.27-теорема бойынша оның ортонормалданған l_1, l_2 базисі бар және A матрица (5.69) диагоналды матрица түрінде өрнектеледі:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Евклид кеңістігінің барлық $x \in R$ элементтері мен оның инвариантты R_1 ішкі кеңістігінің барлық $y \in R_1$ элементтері үшін $(x, y) = 0$ теңдігі орындалатынын ішкі R_1 кеңістігінің $R_2 \equiv R_1^{\perp}$ ортогонал толықтаушын қарастырайық, яғни:

$$R_2 = (x \in R : (x, y) = 0, y \in R_1).$$

Егер 5.30-теореманы ескерсек, онда ішкі R_2 кеңістік ортогонал φ түрлендіруде инвариантты болады. Бұл инвариантты R_2 ішкі кеңістігінде де бір немесе екі өлшемді инвариантты кеңістігі және онда ортогонал φ түрлендірудің ортонормалданған базисі бар. Осы тәсілді одан әрі қарай жалғастыра отырып, n өлшемді R кеңістігіндегі ортонормалданған базисті анықтаймыз, ал ортогонал φ түрлендірудің осы анықталған базистегі матрицасы B. Теорема дәлелденді.

§ 5.12. Унитар кеңістігіндегі түйіндес және симметриялы түрлендірулер

Анықтама. Унитар R кеңістігіндегі φ^* түрлендіруді сызықты φ түрлендіруінің *түйіндес түрлендіруі* деп аталады, егер барлық $x, y \in R$ элементтері үшін

$$(\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y))$$

теңдігі орындалса.

5.9-тақырыптағы 5.19, 5.20-теоремалар және қасиеттер толық орындалады, яғни:

$$\varepsilon = \varepsilon^*, \; 0 = 0^*, \; (\varphi_1 + \varphi_2)^* = \varphi_1^* + \varphi_2^*,$$

$$(\alpha\varphi)^* = \bar{\alpha}\varphi^*, \; (\varphi^*)^* = \varphi, \; (\varphi_1 \cdot \varphi_2)^* = \varphi_1^* \varphi_2^*.$$

5.32-теорема. Унитар R кеңістігіндегі φ^* сызықты түрлендіруінің ортонормалданған базистегі матрицасы

$A = (a_{ij})$ болса, онда осы базистегі φ^* түйіндес түрлендіруінің $B = (b_{ij})$ матрицасы бар және

$$B = \bar{A}^{\prime} \; (b_{ij} = \bar{a}_{ji}), \tag{5.70}$$

мұндағы $\bar{A}^{\prime}$ — матрица A матрицасының комплексті түйіндес транспонирленген матрицасы.

Дәлелдеуі. $l_1, l_2, \dots, l_n$ элементтер R унитар кеңістігінің ортонормалданған базисі болсын:

$$(l_i, l_j) = \begin{cases} 1, \text{ егер } i = j, \\ 0, \text{ егер } i \neq j \end{cases}$$

және теореманың шарты бойынша

$$\varphi(l_k) = a_{k1} \cdot l_1 + \dots + a_{kn} \cdot l_n,$$

$$\varphi^*(l_k) = b_{k1} \cdot l_1 + \dots + b_{kn} \cdot l_n, \; k = \overline{1, n} \tag{5.71}$$

болады. (5.71) теңдікті l_m элементіне скаляр көбейтелік:

$$(\varphi(l_k), l_m) = a_{k1}(l_1, l_m) + \dots + a_{km}(l_m, l_m) + \\ + \dots + a_{kn}(l_n, l_m) = a_{km}$$

осыдан $(\varphi(l_k), l_m) = a_{km}$. Осы сияқты $(\varphi^*(l_k), l_m) = b_{km}$.

Енді b_{km} коэффициенттерін есептейік:

$$b_{km} = (\varphi^*(l_k), l_m) = (l_k, \varphi(l_m)) = (\varphi(l_m), l_k) = \bar{a}_{mk},$$

яғни (5.70) теңдігі орындалады. Теорема дәлелденді.

Анықтама. Егер унитар R кеңістігіндегі сызықты φ түрлендіруі өзінің түйіндесіне φ^* тең болса: $\varphi = \varphi^*$, онда оны *симметриялы* деп атаймыз.

5.10-тақырыпта дәлелденген 5.22, 5.24—5.27-теоремалар мен қасиеттер бұл жағдайда да толық орындалады, тек $\lambda\varphi$ түрлендіруінің симметриялы болуын әрі 5.23-теореманы дәлелделік.

Симметриялы φ түрлендіру мен λ санының көбейтіндісі $\lambda\varphi$ симметриялы болуы үшін, λ саны нақты болуы $\lambda = \bar{\lambda}$ қажетті әрі жеткілікті.

Қажеттілігі. $\lambda\varphi$ түрлендіруі симметриялы болсын: $(\lambda\varphi)^* = \lambda\varphi$. Онда $(\lambda\varphi)^* = \bar{\lambda} \cdot \varphi^* = \bar{\lambda}\varphi$, $(\lambda\varphi)^* = \lambda\varphi$. Бұдан $\lambda\varphi = \bar{\lambda}\varphi$, яғни $\lambda = \bar{\lambda}$.

Жеткіліктігі. λ нақты сан болсын: $\lambda = \overline{\lambda}$. Онда $(\lambda \varphi)^* = \overline{\lambda} \varphi^* = \lambda \varphi$.

5.33-теорема. Унитар R кеңістігіндегі сызықты φ түрлендіруі ортонормалданған $l_1, l_2, ..., l_n$ базисте симметриялы болу үшін, φ түрлендірудің осы базистегі A матрицасы және оның комплексті түйіндес транспонирленген $\overline{A}^{\text{t}}$ матрицасы тең болуы, яғни $A = \overline{A}^{\text{t}}$, қажетті әрі жеткілікті.

Қажеттілігі. Берілген түрлендіру симметриялы болсын: $\varphi = \varphi^*$. Теореманың шарты бойынша φ түрлендірудің матрицасы A, яғни: $\varphi(l_j) = a_{1j} \cdot l_1 + a_{2j} \cdot l_2 + ... + a_{nj} \cdot l_n$, $j = \overline{1, n}$. Онда

$$(l_i, \varphi(l_j)) = a_{ij}, \ (\varphi(l_i), l_j) = a_{ji}.$$

5.22-теорема унитар R кеңістігінде де орындалады. Олай болса, $\overline{a}_{ij} = (l_i, \varphi(l_j)) = (\varphi(l_i), l_j) = a_{ji}$, яғни $A = \overline{A}^{\text{t}}$.

Жеткіліктігі. $A = \overline{A}^{\text{t}}$. теңдігі орындалсын делік. Кез келген x, y элементтерін қарастырайық:

$$x = x_1 \cdot l_1 + ... + x_n \cdot l_n, \ y = y_1 \cdot l_1 + ... + y_n \cdot l_n.$$

Онда: $(\varphi(x), y) = (x_1 \cdot \varphi(l_1) + ... + x_n \cdot \varphi(l_n), y_1 \cdot l_1 +$

$$+ ... + y_n \cdot l_n) = x_1 \cdot \sum_{j=1}^{n} y_j a_{j1} + ... + x_n \cdot \sum_{j=1}^{n} y_j a_{jn} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j a_{ji} = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j a_{ij} = (x, \varphi(y)).$$

Енді 5.22-теореманы ескерсек, онда $\varphi = \varphi^*$. Теорема дәлелденді.

§ 5.13. Қалыпты түрлендіру

Анықтама. Егер унитар R кеңістігіндегі сызықты φ түрлендіруі өзінің түйіндісімен ауыстырымдылы болса, яғни

$$\varphi \varphi^* = \varphi^* \varphi, \tag{5.72}$$

онда ол *қалыпты түрлендіру* деп аталады.

Бізге 5.32-теоремадан белгілі, φ^* түйіндес түрлендірудің ортанормалданған базистегі матрицасы $\overline{A}^{\text{t}}$ болады, ал $\overline{A}^{\text{t}}$ матрица φ түрлендіруінің сол базистегі A матрицасының комплексті транспонирленген матрицасы. Онда (5.72) теңдіктен

$$A \cdot \overline{A}^{\text{t}} = \overline{A}^{\text{t}} \cdot A$$

теңдігін аламыз, яғни φ мен φ^* түрлендірулерінің сәйкес A мен $\overline{A}^{\text{t}}$ матрицаларына да ауыстырымдылық заң орындалады.

5.34-теорема. Егер $x \neq 0$ элемент қалыпты φ түрлендіруінің меншікті мәніне сәйкес меншікті элементі болса: $\varphi(x) = \lambda x$, онда $x \neq 0$ элемент φ^* түрлендіруінің меншікті элементі, ал $\overline{\lambda}$ оның меншікті мәні болады: $\varphi^*(x) = \overline{\lambda} x$, мұндағы $\overline{\lambda}$ мәні λ мәнінің комплексті түйіндесі.

Дәлелдеуі. Теореманың шарты бойынша:

$$\varphi \cdot \varphi^* = \varphi^* \varphi, \ (\varphi - \lambda \varepsilon) \cdot x = 0, \ \varepsilon(x) = x. \tag{5.73}$$

Теореманы дәлелдеу үшін

$$(\varphi^* - \overline{\lambda} \varepsilon) \cdot x = 0$$

теңдігін дәлелдесек жеткілікті. (5.73) теңдікті $(\varphi - \lambda \varepsilon) \cdot x$ элементіне скаляр көбейтейік:

$$((\varphi - \lambda \varepsilon) \cdot x, (\varphi - \lambda \varepsilon) \cdot x) = 0.$$

Енді осы скаляр көбейтіндіні есептейік:

$$((\varphi - \lambda \varepsilon) x, (\varphi - \lambda \varepsilon) x) = (x, (\varphi - \lambda \varepsilon)^* (\varphi - \lambda \varepsilon) \cdot x) =$$

$$= (x, (\varphi^* - \overline{\lambda} \varepsilon)(\varphi - \lambda \varepsilon) \cdot x) = (x, (\varphi^* \varphi - \overline{\lambda} \varphi - \lambda \varphi^* + \overline{\lambda} \lambda \varepsilon) \cdot x) =$$

$$= (x, (\varphi \cdot \varphi^* - \lambda \cdot \overline{\varphi} - \lambda \cdot \varphi^* + \overline{\lambda} \cdot \lambda \cdot \varepsilon) \cdot x) = (x, (\varphi - \lambda \varepsilon)(\varphi^* - \overline{\lambda} \varepsilon) \cdot x) =$$

$$= ((\varphi - \lambda \varepsilon)^* x, (\varphi^* - \overline{\lambda} \varepsilon) \cdot x) = ((\varphi^* - \overline{\lambda} \varepsilon) x, (\varphi^* - \overline{\lambda} \cdot \varepsilon) \cdot x) = 0.$$

Осыдан $(\varphi^* - \overline{\lambda} \cdot \varepsilon) \cdot x = 0$. Теорема дәлелденді.

5.35-теорема. Қалыпты φ түрлендіруінің әртүрлі мәншікті мәндеріне сәйкес келетін меншікті элементтері ортогонал болады.

Дәлелдеуі. φ қалыпты түрлендіруінің меншікті λ_k мәндеріне сәйкес келетін меншікті элементтері x_k болсын, $k = 1, 2$:

$$(\varphi - \lambda_1 \varepsilon) \cdot x_1 = 0, \ (\varphi - \lambda_2 \varepsilon) \cdot x_2 = 0. \tag{5.74}$$

Енді $(x_1, x_2) = 0$ теңдігін дәлелдейік. (x_1, x_2) скаляр көбейтіндіні λ_1-ге көбейтіп, (5.74) — теңдікті және 5.34-теореманы $(\varphi^* x_2 = \overline{\lambda}_2 x_2)$ ескерсек

$$\lambda_1 (x_1, x_2) = (\lambda_1 \cdot x_1, x_2) = (\varphi (x_1), x_2) = (x, \varphi^* (x_2)) =$$

$$= (x_1, \overline{\lambda}_2 x_2) = (\overline{\lambda}_2 x_2, x_1) = \lambda_2 (x_1, x_2).$$

Осыдан $(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0$. Теореманың шарты бойынша $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Олай болса, $(x_1, x_2) = 0$. Теорема дәлелденді.

5.36-теорема. Унитар R кеңістігі φ қалыпты сызықты түрлендіруінің ортонормалданған базисі бар және ол базис φ түрлендіруінің меншікті элементтерінен анықталған, ал оның осы базистегі матрицасы диагоналды болады.

Дәлелдеуі. Унитар R кеңістігінің өлшемі n болсын, яғни $\dim R = n$. $l_1 \neq 0$ элемент φ түрлендіруінің меншікті λ_1 мәніне сәйкес меншікті элементі болсын:

$$\varphi (l_1) = \lambda_1 l_1, \ l_1 \in R. \tag{5.75}$$

Енді l_1 элементке ортогонал болатын R кеңістігіндегі элементке ортогонал болатын R кеңістігіндегі элементтердің жиынын L_1 деп белгілейік:

$$L_1 = \{ x \in R : (x, l_1) = 0 \}.$$

Бұл L_1 — ішкі кеңістігі φ мен φ^* түрлендірулерде инвариантты екенін дәлелдейік, яғни $y \in L_1$ болғанда $\varphi (y) \in L_1$ және $\varphi^* (y) \in L_1$ болатынын дәлелдейік. Шынында да, $y \in L_1$ болсын, онда $y \perp l_1$ болады, яғни

$$(y, l_1) = 0. \tag{5.76}$$

$(\varphi (y), l_1)$ — скаляр көбейтіндіні есептейік. Ол үшін (5.75) пен (5.76) формулаларды ескерейік:

$$(\varphi (y), l_1) = (y, \varphi^* (l_1)) = (y, \overline{\lambda}_1 l_1) = \lambda_1 (y, l_1) = 0.$$

Осыдан $\varphi (y) \in L_1$. Осы сияқты

$$(\varphi^* (y), l_1) = (y, \varphi (l_1)) = (y, \lambda_1 l_1) = \overline{\lambda}_1 (y, l_1) = 0, \ \varphi^* (y) \in L_1.$$

Сонымен, φ мен φ^* түрлендірулерінде L_1 кеңістігі R кеңістігінің инвариантты ішкі кеңістігі болады. Ендеше ішкі L_1 кеңістігінде φ түрлендірудің меншікті $l_2 \neq 0$ элементі

бар: $\varphi (l_2) = \lambda_2 \cdot l_2$. Енді $l_2 \in L_1$ элементке ортогонал болатын R кеңістігіндегі барлық элементтердің жиынын L_2 деп белгілейік:

$$L_2 = (x \in R : (x, l_2) = 0), \ l_2 \neq 0$$

және $L'_2 = L_1 \cap L_2$ болсын. L_2 ішкі кеңістігі φ мен φ^* түрлендірулерде инвариантты болатынын жоғарғыдай көрсетеміз. L_1 мен L_2 ішкі кеңістіктер φ мен φ^* түрлендірулерде инварианттары болғандықтан, L'_2 кеңістікте φ мен φ^* түрлендірулері де инвариантты болады. Ендеше L'_2 кеңістіктен φ түрлендірудің меншікті l_3 элементі табылып: $l_3 \in L'_2$, $\varphi (l_3) = \lambda_3 l_3$, оған ортогонал болатын R кеңістігіндегі барлық элементтердің жиынын L_3 деп белгілейік:

$$L_3 = (x \in R : (x, l_3) = 0), \ l_3 \neq 0.$$

Бұдан былай $L'_3 = L_1 \cap L_2 \cap L_3$ деп белгілеп, l_1, l_2, l_3 элементтеріне ортогонал әрі инвариантты болатын кеңістік құрамыз. Осы тәсілді әрі қарай жалғастырып, R кеңістігіндегі ортогоналды $l_1, l_2, \ldots, l_n$ базисін табамыз және ол базис φ түрлендірудің меншікті элементтері: $\varphi (l_i) = \lambda_i \cdot l_i$, $i = \overline{1, n}$, мұндағы λ_i, $i = \overline{1, n}$ — сызықты φ түрлендірудің мәндері. Бұл ортогоналды базисті ортонормалданған базис деп қарастырайық. Демек, R кеңістігінің $l_1, l_2, \ldots, l_n$ ортонормалданған базисі бар және ол базис φ түрлендіруінің меншікті элементтері. Олай болса, R кеңістігіндегі φ қалыпты түрлендіруінің матрицасы диагоналды:

$$\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

мұндағы λ_i, $i = \overline{1, n}$ сандары — φ түрленіудің ортонормалданған базистегі меншікті мәндері, яғни $\varphi (l_i) = l_i \cdot \lambda_i$, $i = \overline{1, n}$. Теорема дәлелденді.

§ 5.14. Қиғаш-симметриялы түрлендіру

Анықтама. Унитар R кеңістігінің сызықты φ түрлендіруі *қиғаш-симметриялы* деп аталады, егер

$$\varphi^* = -\varphi$$

теңдігі орындалса.

5.37-теорема. Унитар R кеңістігіндегі сызықты φ түрлендіруі қиғаш-симметриялы болу үшін, барлық $x, y \in R$ элементтері үшін

$$(\varphi(x), y) = -(x, \varphi(y)), \ x \in R, \ y \in R \qquad (5.77)$$

теңдігінің орындалуы қажетті әрі жеткілікті.

Қажеттілігі. Қарастырып отырған φ түрлендіруді қиғаш-симметриялы болсын деп ұйғарып, (5.77) теңдікті дәлелдейік. Ол үшін $(\varphi(x), y)$ скаляр көбейтуді есептелік:

$$(\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y)) = (x, -\varphi(y)) = -(x, \varphi(y)).$$

Жеткіліктігі. Енді (5.77) теңдігі орындалсын деп ұйғарып, түрлендіруі қиғаш-симметриялы болатынын дәлелдейік:

$$(\varphi(x), y) = -(x, \varphi(y)) = -\overline{(\varphi(y), x)} = -\overline{(y, \varphi^*(x))} =$$

$$= -(\varphi^*(x), y) = (-\varphi^*(x), y).$$

Соңғы теңдіктен дәлелдеу керек $\varphi = -\varphi^*$ теңдігімізді аламыз. Теорема дәлелденді.

5.38-теорема. Унитар R кеңістігіндегі сызықты φ түрлендіру ортонормалданған $l_1, l_2, ..., l_n$ базисте:

$$(l_i, l_j) = \begin{cases} 1, \ i = j, \\ 0, \ i \neq j. \end{cases} \qquad (5.78)$$

қиғаш-симметриялы болу үшін,

$$\overline{A}' = -A \qquad (5.79)$$

теңдігінің орындалуы қажетті әрі жеткілікті, мұндағы A — берілген φ түрлендіруінің матрицасы, $\overline{A}'$ матрица — A матрицаның түйіндес транспонирленген комплекс матрицасы.

Қажеттілігі. φ түрлендіруі қиғаш-симметриялы болсын деп ұйғарып, (5.79) теңдікті дәлелдейік. φ түрлендіруінің (5.78) базистегі матрицасы A болсын. Онда 5.32-теорема бойынша φ^* түрлендіруіне $\overline{A}'$ матрица сәйкес келеді. Ұйғаруымыз бойынша $\varphi^* = -\varphi$, онда $\overline{A}' = -A$ болады.

Жеткіліктігі. Енді $\overline{A}' = -A$ болсын. Онда $\varphi^* = -\varphi$. Теорема дәлелденді.

Қиғаш-симметриялы түрлендіруінің негізгі қасиеттерімен танысайық.

1. Егер φ қиғаш-симметриялы болса, онда $\alpha\,\varphi$ түрлендіруі де қиғаш-симметриялы, α — нақты сан.

Шынында да:

$$(\alpha\varphi)^* = \overline{\alpha}\varphi^* = \alpha\varphi^* = -\alpha\varphi.$$

2. Егер φ мен ψ қиғаш-симметриялы болса, онда $\varphi + \psi$ түрлендіруі де қиғаш-симметриялы.

Шынында да:

$$(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^* = -\varphi - \psi = -(\varphi + \psi).$$

5.39-теорема. Қиғаш-симметриялы φ түрлендіруінің кез келген меншікті мәні не нөлге тең, не нақты бөлігі нөлге тең комплекс сан.

Дәлелдеуі. $\varphi(x) = \lambda x$ теңдігі орындалсын, мұндағы $x \neq 0$ меншікті элемент, $x \in R$, λ — меншікті мән. Дәлелдеу үшін мына теңдіктерді қарастырайық:

$$(x, \varphi(x)) = (x, \lambda x) = \overline{\lambda}(x, x),$$

$$(\varphi(x), x) = (\lambda x, x) = \lambda(x, x).$$

5.37-теорема бойынша:

$$(x, \varphi(x)) = -(\varphi(x), x), \ \overline{\lambda}(x, x) = -\lambda(x, x).$$

Осыдан

$$\overline{\lambda} = -\lambda. \qquad (5.80)$$

Егер λ — комплекс сан болса: $\lambda = \alpha + i\beta$, $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$, онда (5.80) теңдіктен

$$\alpha - i\beta = -\alpha - i\beta, \ 2 \cdot \alpha = 0, \ \alpha = 0, \ \lambda = \pm i\beta.$$

Сонымен, λ саны комплекс санының жорымал бөлігіне тең.

Егер λ нақты сан болса: $\lambda = \overline{\lambda}$, онда (5.80) теңдіктен $2\lambda = 0$, $\lambda = 0$. Теорема дәлелденді.

§ 5.15. Унитар түрлендіру

Анықтама. Унитар R кеңістігіндегі сызықты φ түрлендіру *унитар* деп аталады, егер кез келген $x, y \in R$ элементтеріне

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$$

теңдігі орындалса.

5.40-теорема. Унитар R кеңістігіндегі φ түрлендіру унитар болу үшін, оның түйіндес және кері түрлендірулері өзара тең болуы:

$$\varphi^* = \varphi^{-1} \tag{5.81}$$

қажетті әрі жеткілікті.

Теореманың дәлелдеуін оқырмандар өздеріңізге ұсынамыз (5.28-теореманы қараңыздар).

Салдар. Кез келген унитар φ түрлендіру қалыпты түрлендіру болады.

Шынында да, (5.81) формуладан $\varphi \cdot \varphi^* = \varphi^* \varphi = \varepsilon$ теңдігін алып, оған ауыстырымдылық қасиеттің орындалғанын көреміз, яғни φ қалыпты түрлендіру.

5.40-теореманы матрица түрінде өрнектейік. Ол үшін унитар R кеңістігінен ортонормалданған $l_1, l_2, \ldots, l_n$ базис алайық және осы базисте сызықты φ түрлендіруге $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$ матрицасы сәйкес келсін. Онда 5.32-теорема бойынша φ түрлендіруінің φ^* түйіндес түрлендіруіне $\overline{A}' = (\overline{a}_{ji})$, $i, j = \overline{1, n}$ матрица сәйкес келеді.

5.41-теорема. Унитар R кеңістігіндегі сызықты φ түрлендіруі ортонормалданған $l_1, l_2, \ldots, l_n$ базисте унитар болу үшін оның A матрицасына

$$\overline{A}' = A^{-1} \text{ немесе } A^{-1} \cdot A = A \cdot \overline{A}' = E \tag{5.82}$$

теңдігінің орындалуы қажетті әрі жеткілікті.

Теореманың дәлелдеуін оқырмандардың өздеріне қалдырамыз. (5.29-теореманы қара).

Анықтама. Егер унитар φ түрлендіруінің A матрицасына (5.82) теңдік орындалса, онда оны *унитар матрица* деп атаймыз.

Енді унитар түрлендірудің қасиеттеріне тоқталайық.

1). ε — бірлік түрлендіру унитарлы.

2). Унитар φ, ψ түрлендірулердің көбейтіндісі $\varphi \cdot \psi$ — унитар түрлендіру.

3). Унитар φ түрлендірудің кері φ^{-1} түрлендіруі унитарлы.

4). Егер φ унитар түрлендіру болса, онда $\alpha\varphi$ унитар түрлендіру болу үшін, $|\alpha| = 1$ болуы қажетті әрі жеткілікті. Шынында$(\alpha \cdot \varphi(x), \alpha \cdot \varphi(y)) = \alpha \cdot \overline{\alpha}(\varphi(x), \varphi(y)) =$ $= |\alpha|^2 (x, \varphi^* \varphi(y)) = |\alpha|^2 (x, y)$. Осыдан, $(\alpha\varphi(x), \alpha\varphi(y)) = (x, y)$ теңдігі орындалуы үшін, $|\alpha| = 1$ болуы қажетті әрі жеткілікті.

5). Егер φ унитар түрлендіру болса, онда ол вектордың ұзындығын өзгертпейді, яғни $||\varphi(x)||^2 = ||x||$, $x \in R$.

6). Унитар φ түрлендірудің меншікті мәндерінің модулі 1-ге тең, яғни $|\lambda| = 1$. Шынында да, егер $\varphi(x) = \lambda \cdot x$, $x \neq 0$ болса, онда $(x, x) = (\varphi(x), \varphi(x)) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot x) =$ $= \lambda \cdot \overline{\lambda}(x, x) = |\lambda|^2 (x, x)$, яғни $\lambda \cdot \overline{\lambda} = 1$, $|\lambda| = 1$.

7) Егер унитар R кеңістігіндегі кез келген сызықты φ түрлендіру вектордың ұзындығын өзгертпесе, онда φ унитар түрлендіру болады. Шынында да, кез келген $x, y \in R$ элементтеріне сәйкес x', y' элементтерді түрлендірейік:

$$x' = \varphi(x), \; y' = \varphi(y).$$

Егер φ түрлендірудің сызықтылығын және вектордың ұзындығын өзгертпейтіндігін ескерсек, онда

$$(x + \alpha y, x + \alpha \cdot y) = (\varphi(x + \alpha y), \varphi(x + \alpha y)) =$$
$$= (\varphi(x) + \alpha\varphi(y), \varphi(x) + \alpha \cdot \varphi(y)) = (x' + \alpha y', x' + \alpha y').$$

Осыдан:

$$(x, x) + \alpha(y, x) + \overline{\alpha}(x, y) + \alpha\overline{\alpha}(y, y) =$$
$$= (x', x') + \alpha(y', x') + \overline{\alpha}(x', y') + \alpha \cdot \overline{\alpha}(y', y'),$$
$$(x, x) + \alpha(y, x) + \overline{\alpha}(x, y) + \alpha\overline{\alpha}(y, y) =$$
$$= (\varphi(x), \varphi(x)) + \alpha(y', x') + \overline{\alpha}(x', y') + \alpha\overline{\alpha}(\varphi(y), \varphi(y))$$

немесе

$$\alpha(y, x) + \overline{\alpha}(x, y) = \alpha(y', x') + \overline{\alpha}(x', y'). \tag{5.83}$$

Егер α комплекс сан болса: $\alpha = a + ib$, $\overline{\alpha} = a - ib$, онда (5.83) теңдіктен мына төмендегі екі теңдік аламыз:

$$(y, x) + (x, y) = (y', x') + (x', y'),$$
$$(y, x) - (x, y) = (y', x') + (x', y').$$

Бұдан $(y, x) = (y', x')$ немесе $(y, x) = (\varphi(y), \varphi(x))$, яғни φ унитарлы түрлендіру.

Унитар R кеңістігінің R_1 ішкі кеңістігі $R_1 \subset R$, ал $R_\perp^1$ кеңістігі оның ортогонал толықтауышы болсын:

$$R_\perp^1 = (x \in R : (x, y) = 0, y \in R_1.$$

5.42-теорема. Егер R_1 ішкі кеңістік унитар түрлендіруде инвариантты болса, онда оның ортогонал $R_\perp^1$ толықтауышы φ түрлендіруде инвариантты болады.

Теореманың дәлелдеуі оқырмандарға ұсынамыз (5.30-теореманы қара).

5.43-теорема. Егер n-өлшемді унитар R кеңістігінде сызықты унитар φ түрлендіруі және l оның меншікті элементі болса:

$$\varphi(l) = \lambda \cdot l, \qquad l \neq 0,$$

онда $(n-1)$ — өлшемді ішкі R_1 кеңістік $(R_1 \subset R)$:

$$R_1 = (x \in R : (x, l) = 0)$$

сызықты φ түрлендіруде инвариантты болады.

Дәлелдеуі. Ішкі R_1 кеңістігінің кез келген y элементін қарастырайық. Онда $(y, l) = 0$, $y \in R_1$. Енді $\varphi(y)$ ішкі R_1 кеңістігінің элементі екенін дәлелдейік, яғни $\varphi(y) \in R_1$, $y \in R_1$. Ол үшін скаляр $(\varphi(y), \varphi(l)$ көбейтіндіні ескерелік:

$$(\varphi(y), \varphi(l)) = (\varphi^* \varphi(y), l) = (y, l) = 0. \qquad (5.83)$$

Теоремадағы $\varphi(l) = \lambda \cdot l$ теңдігін ескеріп, (5.83) формуладан

$$\bar{\lambda}(\varphi(y), l) = 0$$

теңдігін аламыз. Бұдан $(\varphi(y), l) = 0$, себебі $\lambda \neq 0$.

Сонымен, $\varphi(y) \in R_1$. Демек, ішкі R_1 кеңістік φ түрлендіруде инвариантты. Теорема дәлелденді.

5.44-теорема. n-өлшемді унитар R кеңістігіндегі сызықты φ унитар түрлендіруінің ортонормалданған $l_1, l_2, ..., l_n$ базисі бар, ал оның сол базистегі матрицасы

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (5.84)$$

диагоналды түрде өрнектеледі, мұндағы $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ сызықты φ унитар түрлендіруінің модулі 1-ге тең меншікті мәндері: $|\lambda_i| = 1$, $i = \overline{1, n}$.

Дәлелдеуі. Сызықты φ түрлендірудің R кеңістігінде кем дегенде бір меншікті l_1 элементі бар: $\varphi(l_1) = \lambda_1 \cdot l_1$, $||l_1|| = 1$ (5.14-теорема). 5.43-теорема бойынша $(n-1)$-өлшемді ішкі $R_1 \subset R$ кеңістігі: $R_1 = (x \in R : (x, l_1) = 0)$ сызықты φ түрлендіруде инвариантты. Ендеше φ түрлендіру R_1 кеңістігінде де кем дегенде бір меншікті l_2 элементі бар: $\varphi(l_2) = \lambda_2 l_2$, $||l_2|| = 1$ және ішкі $R_2 \subset R_1$ кеңістік: $R_2 = (x \in R_1 : (x, l_2) = 0)$ сызықты φ түрлендіруде инвариантты. Осы тәсілді жалғастыра отырып, ортонормалданған $l_1, l_2, ..., l_n$ базисті аламыз: $\varphi(l_i) = \lambda_i l_i$, $i = \overline{1, n}$. Онда сызықты φ унитар түрлендірудің ортонормалданған $l_1, l_2, ..., l_n$ базистегі матрицасы (5.84) диагоналды түрде өрнектеледі, ал $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ сызықты φ унитар түрлендіруінің модулі 1-ге тең меншікті мәндері. Теорема дәлелденді.

§ 5.16. Теріс емес түрлендіру

Анықтама. Унитар кеңістігіндегі φ түрлендіру: 1) симметриялы болса, 2) барлық $x \in R$ элемент үшін

$$(\varphi(x), x) \geq 0, \ \forall x \in R$$

теңдігі орындалса, онда ол *теріс емес* деп аталады, $x = 0$ болғанда $(\varphi(x), x) = 0$.

Теріс емес түрлендірудің қасиеттерімен танысайық.

1. Егер φ мен ψ теріс емес түрлендірулер болса, онда олардың кез келген $\alpha\varphi + \beta\psi$ сызықты комбинациясы да теріс емес түрлендіру болады, мұндағы $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$.

Шынында да,

$$((\alpha\varphi + \beta\psi)x, x) = (\alpha\varphi(x) + \beta\psi(x), x) =$$

$$= \alpha(\varphi(x), x) + \beta(\psi(x), x) \geq 0.$$

2. Егер φ^* түрлендіруі φ сызықты түрлендіруінің түйіндес түрлендіруі болса, онда $\varphi \cdot \varphi^*$ мен $\varphi^* \varphi$ түрлендірулері теріс емес түрлендірулер.

Шынында да,

$$(\varphi \cdot \varphi^*(x), x) = (\varphi^*(x), \varphi^*(x)) \geq 0,$$

$$(\varphi^* \cdot \varphi(x), x) = (\varphi(x), \varphi(x)) \geq 0.$$

3. Егер φ симметриялы түрлендіру болса, онда φ^2 теріс емес түрлендіру.

Шынында да, φ симметриялы болғандықтан,

$$(\varphi^2(x), x) = (\varphi \cdot \varphi(x), x) = (\varphi(x), \varphi^*(x)) = (\varphi(x), \varphi(x)) \geq 0.$$

4. Теріс емес φ түрлендіруінің барлық λ меншікті түбірлері нақты және теріс емес сан болады.

Шынында да, $(\varphi(x), x) \geq 0$ және $\varphi(x) = \lambda x$ болсын, $x \neq 0$. Берілген түрлендіру φ симметриялы болғандықтан, λ нақты сан. $(\varphi(x), x) = (\lambda x, x)$. Онда $\lambda(x, x) \geq 0$. Мұндағы $x \neq 0$ және $(x, x) > 0$ болғандықтан, $\lambda \geq 0$ болады.

5. Егер евклид немесе унитар R кеңістіктегі φ симметриялы түрлендіруінің теріс емес меншікті мәндері $(\lambda_i \geq 0)$ бар болса, онда φ теріс емес түрлендіру.

Шынында да, φ симметриялы түрлендіру болғандықтан, ол қалыпты түрлендіру: $\varphi \cdot \varphi^* = \varphi^* \cdot \varphi$. R кеңістікте φ симметриялы түрлендіруінің меншікті элементтерінен анықталған ортонормалданған базис бар (5.27-теорема):

$$l_1, l_2, \ldots, l_n:\ (l_i, l_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{5.85}$$

$$\varphi(l_k) = \lambda_k l_k,\ k = \overline{1, n}.$$

R кеңістігінің кез келген x элементін (5.85) базис бойынша жіктейік:

$$x = \alpha_1 \cdot l_1 + \alpha_2 \cdot l_2 + \ldots + \alpha_n \cdot l_n. \tag{5.86}$$

(5.85), (5.86) теңдіктерден:

$$(\varphi(x), x) = (\alpha_1 \varphi(l_1) + \ldots + \alpha_n \varphi(l_n), \alpha_1 l_1 + \ldots + \alpha_n l_n) =$$
$$= (\alpha_1 \lambda_1 l_1 + \ldots + \alpha_n \lambda_n l_n, \alpha_1 l_1 + \ldots + \alpha_n l_n) =$$
$$= \lambda_1 [\alpha_1 \overline{\alpha}_1 (l_1, l_1) + \ldots + \alpha_1 \overline{\alpha}_n (l_1, l_n)] + \ldots +$$
$$+ \lambda_n [\alpha_n \overline{\alpha}_1 (l_1, l_n) + \ldots + \alpha_n \cdot \overline{\alpha}_{n-1} (l_1, l_{n-1}) + \alpha_n \cdot \overline{\alpha}_n (l_n, l_n)] =$$
$$= \lambda_1 \alpha_1 \overline{\alpha}_1 + \ldots + \lambda_n \alpha_n \overline{\alpha}_n = \lambda_1 |\alpha_1|^2 + \ldots + \lambda_n |\alpha_n|^2.$$

Енді $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{1, n}$ ескерсек, онда $(\varphi(x), x) \geq 0$. Демек, φ теріс емес түрлендіру.

6. Егер евклид немесе унитар R кеңістігіндегі сызықты φ түрлендіру теріс емес болса, онда оның меншікті мәндері теріс емес.

Шынында да, $(\varphi(x), x) \geq 0$ және $\varphi(x) = \lambda \cdot x$. Осыдан, $(\varphi(x), x) = \lambda(x, x)$. Егер $(x, x) > 0$ және $(\varphi(x), x) > 0$ ескерсек, онда $\lambda \geq 0$.

7. Егер евклид немесе унитар R кеңістігіндегі кез келген сызықты φ түрлендіру болса, онда $\varphi \cdot \varphi^*$ теріс емес түрлендіру.

Шынында да, кез келген $x \in R$ элементіне: $(\varphi \cdot \varphi^*(x), x) = (\varphi^*(x), \varphi^*(x)) \geq 0$ және $(\varphi \cdot \varphi^*)^* = \varphi^{**} . \varphi^* = \varphi \cdot \varphi^*$, яғни $\varphi \cdot \varphi^*$ — симметриялы түрлендіру. Демек, $\varphi \cdot \varphi^*$ — теріс емес түрлендіру.

Анықтама. Сызықты ψ түрлендіру сызықты φ түрлендірудің *квадрат түбірі* деп аталады, егер

$$\psi^2 = \varphi \tag{5.87}$$

теңдігі орындалса.

φ түрлендіруге байланысты (5.87) теңдеудің шешімі жоқ немесе бар болуы мүмкін. Егер де теріс емес түрлендіру болса, онда (5.87) теңдеудің шешімі бар.

5.45-теорема. Егер унитар R кеңістігінде φ теріс емес түрлендіру болса, онда (5.87) теңдеудің қанағаттандыратын теріс емес ψ түрлендіруі бар.

Дәлелдеуі. Теріс емес түрлендірудің симметриялы екенін ескеріп, унитар R кеңістіктегі φ түрлендірудің меншікті элементтерінен анықталған ортонормалданған базисті қарастырайық (5.27-теорема, 5.12-тақырып):

$$l_1, l_2, \ldots, l_n,\ (l_i, l_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

және $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ сандары φ түрлендірудің меншікті мәндері:

$$\varphi(l_k) = \lambda_k \cdot l_k, \quad k = \overline{1, n}. \tag{5.88}$$

Онда 4-қасиет бойынша $\lambda_k \geq 0$, $k = \overline{1, n}$ нақты сандар. Енді l_k элементіне $\sqrt{\lambda_k} \cdot l_k$ элементін сәйкес қоятын ψ түрлендіруін алайық:

$$\psi(l_k) = \sqrt{\lambda_k} \cdot l_k,\ k = \overline{1, n}, \tag{5.89}$$

мұндағы $\sqrt{\lambda_k} \geq 0$, $k = \overline{1, n}$ сандары ψ түрлендірудің меншікті мәндері. Енді $(\psi(l_k), l_k)$ скаляр көбейтіндіні есептейік:

$$(\psi(l_k), l_k) = (\sqrt{\lambda_k} \cdot l_k, l_k) = \sqrt{\lambda_k}(l_k, l_k) \geq 0.$$

Сонымен, (5.88), (5.89) теңдіктері бойынша φ, ψ түрлендірулерінің $l_1, l_2, \dots, l_n$ базистегі матрицалары төмендегі диогоналды түрде өрнектеледі:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Егер B матрицаның симметриялы екенін ескерсек: $B = B'$, оның түрлендіруі де симметриялы: $\psi = \psi^*$. Сондықтан, ψ теріс емес түрлендіру. Енді (5.88), (5.89) формулаларды пайдаланып, $\psi^2(l_k)$ түрлендіруін есептейік:

$$\psi^2(l_k) = \psi \cdot \psi(l_k) = \sqrt{\lambda_k} \cdot \psi(l_k) = \lambda_k \cdot l_k = \varphi(l_k),$$

яғни $\psi^2 = \varphi$. Демек, φ түрлендіруінен алынған квадрат түбір бар. Теорема дәлелденді.

5.46-теорема. Егер унитар R кеңістігіндегі кез келген сызықты φ түрлендіру ерекше емес болса, онда оны теріс және ерекше емес ψ түрлендіру мен унитар σ түрлендірудің көбейтіндісіне жіктеуге болады, яғни:

$$\varphi = \psi \cdot \sigma. \tag{5.90}$$

Дәлелдеуі. Енді 7-қасиетті ескерсек, онда $\varphi \cdot \varphi^*$ теріс емес ψ түрлендіру табылып, $\psi^2 = \varphi \cdot \varphi^*$ теңдігі орындалады және $\varphi \cdot \varphi^*$ мен ψ түрлендірулердің кез келген ортонормалданған базистегі матрицалары диагоналды болады:

$$A = \begin{pmatrix} \mu_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \sqrt{\mu_n} \end{pmatrix}.$$

$\varphi \cdot \varphi^*$ мен ψ ерекше емес түрлендірулер екенін дәлелдейік. Шынында да, 5.4-теорема бойынша ерекше емес φ және оның түйіндесі φ^* түрлердірулерінің кез келген ортонормалданған базистегі. матрицалары

$$C = (c_{ij}), \quad C^* = (\overline{c}_{ji}) = \overline{C}', \quad i, j = \overline{1, n}$$

ерекше емес, яғни олардың анықтауыштары нөлге тең емес: $|C| \neq 0$, $|C^*| \neq 0$. Ендеше $\varphi \cdot \varphi^*$ мен ψ түрлендірулердің де матрицалары $A = C \cdot C^*$ мен B ерекше емес, яғни

$$|A| = \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n \neq 0, \quad |B| = \sqrt{\mu_1} \cdot \sqrt{\mu_2} \dots \sqrt{\mu_n} \neq 0,$$

$$\mu_i > 0, \quad c = \overline{1, n}.$$

Онда 5.4-теорема бойынша $\varphi \cdot \varphi^*$ мен ψ ерекше емес түрлендірулер. Егер 5.6-теореманы ескерсек, онда ерекше емес ψ түрлендірудің кері ψ^{-1} түрлендіруі бар.

σ түрлендіруді мына төмендегі формуладан анықтайық:

$$\sigma = \psi^{-1} \cdot \varphi. \tag{5.91}$$

$\sigma \cdot \sigma^*$ түрлендіруін есептейік:

$$\sigma \cdot \sigma^* = \psi^{-1} \varphi \cdot (\psi^{-1} \varphi)^* = \psi^{-1} \varphi \cdot \varphi^* (\psi^{-1})^* =$$

$$= \psi^{-1} \psi^2 (\psi^*)^{-1} = \psi^{-1} \psi^2 \cdot \psi^{-1} = \psi^{-1} \psi \cdot \psi \cdot \psi^{-1} = \varepsilon.$$

Демек, σ — унитарлы түрлендіру. (5.91) формуладан (5.90) формуланы анықтаймыз. Теорема дәлелденді.

§ 5.17. Сызықты түрлендірудің жордан матрицасы

Жоғарыда көрсетілгендей, n өлшемді кеңістіктің кейбір арнаулы түрлендіруінің n сызықты эементтерден құрылған базисі бар және оның сол базистегі матрицасы диагоналды болады (§§ 10, 13, 15), ал жалпы жағдайда оның сызықты тәуелсіз меншікті элементтер саны n-нен кіші. Ендеше, ондай сызықты түрлендірудің матрицасын диагоналды түрге келтіруге болмайды. Мысалы, кез келген базистегі сызықты φ түрлендірудің матрицасы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

делік. A матрицаның меншікті мәндері λ_1, λ_2 тең: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, ал меншікті элементтері мына теңдеуден анықталады: $0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 0$ немесе $x_2 = 0$ мұндағы x_1, x_2 — меншікті элементтердің координаттары. Олай болса, φ түрлендірудің меншікті элементтерден құрылған базисі жоқ және оның матрицасын диагоналды түрге келтіруге болмайды.

n өлшемді кеңістікте анықталған кез келген түрлендірудің базисін және оның осы базистегі матрицасын қарастырамыз.

1. Көпмүшелі матрица және оның канонды диагонал матрицасы мен инвариантты көбейткіштері. Біз элементтері айнымалы λ-ға тәуелді квадрат матрица қарастырайық:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \dots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \dots & a_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(\lambda) & a_{n2}(\lambda) & \dots & a_{nn}(\lambda) \end{pmatrix},$$

мұндағы a_{ij} элементтері λ-ға тәуелді көпмүшелік. Матрица $A(\lambda)$ көпмүшелі матрица немесе *λ-матрица* деп аталады. Мысалы, $B = (b_{ij})$ квадрат матрицаның $B - \lambda E$ сипаттамалық матрицасы λ матрица болып табылады.

Анықтама. *λ-матрицалардың элементар түрлендірулері* деп мына төмендегі түрлендірулерді айтамыз:

1) оның кез келген жатық (тік) жолын $\alpha \neq 0$ санына көбейту,

2) оның кез келген жатық (тік) жолын $P(\lambda) \neq 0$ көпмүшелігіне көбейтіп, кез келген басқа жатық (тік) жолына қосу.

3) оның кез келген екі жатық (тік) жолдарын орын алмастыру.

λ-матрицаның i жатық (тік) жолын j жатық (тік) жолымен алмастыру үшін бірінші мен екінші элементар түрлендірулерін пайдалануға болады, ол үшін мына төмендегі схеманы пайдаланамыз:

$$\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} i+j \\ j \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} i+j \\ -i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} j \\ -i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix}.$$

Анықтама. Егер элементар түрлендірулер көмегімен $A(\lambda)$ матрицадан $B(\lambda)$ матрицаны алсақ, онда $A(\lambda)$ мен $B(\lambda)$ — *матрицалары эквивалентті* деп аталады, олардың эквиваленттілігі $A(\lambda) \sim B(\lambda)$ таңбасымен белгіленеді.

λ — матрицаның негізгі қасиеттерін атап өтелік:

1) егер $A(\lambda)$ матрица $B(\lambda)$ матрицаға эквивалентті болса: $A(\lambda) \sim B(\lambda)$, онда $B(\lambda) \sim A(\lambda)$.

2) егер $A(\lambda) \sim B(\lambda)$ және $C(\lambda) \sim B(\lambda)$ болса, онда $A(\lambda) \sim C(\lambda)$,

3) егер $A(\lambda)$ матрицаның барлық $a_{ij}(\lambda)$ көпмүшелік элементтері $P(\lambda) \neq 0$ көпмүшелікке бөлінсе (қалдықсыз) және $A(\lambda) \sim B(\lambda)$, онда $B(\lambda)$ матрицаның барлық $b_{ij}(\lambda)$ көпмүшелік элементтері $P(\lambda)$-ға бөлінеді.

λ матрицаның бұл қасиеттерінің дәлелдеулерін оқырмандарға тапсырамыз.

Анықтама. Егер $I_1(\lambda)$ матрица:

1) диагоналды матрица болса:

$$I(\lambda) = \begin{pmatrix} i_1(\lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & i_n(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{5.92}$$

2) кез келген $i_k(\lambda)$ көпмүшелігі $i_{k-1}(\lambda)$ көпмүшелігіне бөлінсе және $i_k(\lambda), k = 1,n$ көпмүшеліктерінің бастапқы коэффициенттері 1-ге тең болса, онда ол *канонды-диагонал λ матрица* немесе *канонды диагонал матрица* деп аталады.

Ескерту. Егер $i_k(\lambda)$ көпмүшелігінің кейбіреулері нөлге тең болса, онда анықтаманың 2 шарты бойынша нөлге тең көпмүшеліктер (5.92) матрицаның диагоналының соңғы орындарында тұруы керек, ал егер $i_k(\lambda)$ көпмүшеліктерінің кейбіреулері нөл дәрежелі көпмүшеліктер (тұрақты сан) болса, онда анықтаманың екінші шарты бойынша олар (5.92) матрицаның диагоналының бастапқы орындарында тұруы және олар 1-ге тең болуы керек. Сонымен, бұл жағдайда (5.92) матрица мына түрде жазылады:

$$I(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & i_2(\lambda) & & \\ & & & & i_k(\lambda) & \\ & & & & & 0 \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

5.47-теорема. Кез келген λ матрица элементар түрлендірулер көмегімен канонды-диагонал λ матрица түрінде өрнектеледі.

Дәлелдеуі. Теореманы дәлелдеу үшін математикалық индукция әдісін пайдаланамыз. Матрица бір элементтен тұрса, яғни $n = 1$ болса, онда $A(\lambda) = (a_{11}(x))$. Егер $a_{11}(\lambda) = 0$, болса, онда $A(\lambda)$ матрицаның өзі канонды-диагонал матрица, ал $a_{11}(\lambda) \equiv \alpha_1 \neq 0$. — тұрақты сан болса, онда оны α_1^{-1} санына көбейтіп, $B(\lambda) = (i_1(\lambda))$ — канонды-диагонал матрицаны аламыз, мұндағы $i_1(\lambda) = 1$. Егер $a_{11}(\lambda)$ бастапқы коэффициенті нөлге тең емес $\alpha_1 \neq 0$ кез келген көпмүшелік болса, онда оны α_1^{-1} санына көбейтіп, $B(\lambda) = (i_1(\lambda))$ канонды-диагонал матрицаны аламыз, мұндағы $i_1(\lambda)$ — бастапқы коэффициенті бірге тең кез келген көпмүшелік. Сонымен, $n=1$, болған жағдайда теорема дәлелденді.

$(n-1)$-ретті λ матрица үшін теорема дәлелденді деп ұйғарып, оны n-ретті матрица үшін дәлелдейік. Барлық элементтері $a_{ij}(\lambda)=0$ болғанда $A(\lambda)$ матрицаның өзі — канонды-диагонал.

Егер $a_{11}(\lambda)=0$ немесе $a_{11}(\lambda)\neq 0$ көпмүшелігінің дәрежесі $a_{ij}(\lambda)$ көпмүшелктерінің дәрежесінен үлкен болса, онда $a_{ij}(\lambda)$ көпмүшеліктерінің ішінен нөлге тең емес дәрежесі ең кіші көпмүшелік табылып (ондай көпмүшелік $a_{11}(\lambda)$ элементтің өзі болуы мүмкін, егер $a_{11}(\lambda)=\alpha_1\neq 0$ тұрақты сан болса немесе $a_{11}(\lambda)$ көпмүшеліктің дәрежесі $a_{ij}(\lambda)$ көпмүшеліктерінің дәрежесінен кіші (кейбіреулерінің дәрежелерімен тең) болса , оны элементар түрлендірулердің 3-ережесі көмегімен $a_{11}(\lambda)$ элементтің орнына алмастырамыз және оны анықтық үшін $a_{11}(\lambda)\neq 0$ деп белгілейміз. Енді $a_{ij}(\lambda)$ көпмүшеліктері сол $a_{11}(\lambda)$ бөлінетіндей етіп элементар түрлендірулер көмегімен бастапқы $A(\lambda)$ матрицаға эквивалентті $B(x)=(b_{ij}(x))$, $i,j=\overline{1,n}$ матрица аламыз: $A(\lambda)\sim B(\lambda)$, мұндағы $b_{11}(\lambda)\neq 0$ көпмүшелігінің дәрежесі $b_{ij}(\lambda)$ көпмүшеліктерінің дәрежелерінен кіші және $b_{1j}(\lambda)$, $b_{i1}(\lambda)$ көпмүшеліктері $b_{11}(\lambda)$-ге қалдықсыз бөлінеді (төмендегі мысалды қара). Енді элементар түрлендірулер көмегімен $B(\lambda)$ матрицаның бірінші жатық және тік жолдарының екінші элементтерінен бастап барлық элементтерін нөлге айналдырамыз, ал ең соңында бірінші жатық (тік) жолдың элементтерін $b_{11}(\lambda)$ көпмүшелігінің бастапқы β_1 коэффициентіне бөлеміз және оны $i_1(\lambda)$ деп белгілейміз, мұндағы $i_1(\lambda)=1$. немесе $i_1(\lambda)$ бастапқы коэффициенті 1-ге тең көпмүшелік. Сонымен, біз элементар түрлендірулер көмегімен $B(\lambda)$ матрицаға эквивалентті матрицаны аламыз:

$$A(x)\sim B(\lambda)\sim\left(\begin{array}{c|c} i_1(\lambda) & 0 \\ \hline 0 & C(\lambda)\end{array}\right),$$

мұндағы $C(\lambda)$ матрица $n-1$-ретті матрица, $i_1(\lambda)$ коэффициенті 1-ге тең көпмүшелік немесе $i_1(\lambda)=1$ Осылайша жалғастырып, $C(\lambda)$ матрицаны элементар түрлендірулер көмегімен канонды-диагонал түрге келтіруге болады. Сонымен, $A(\lambda)$ матрица (5.92) канонды-диагонал матрицаға келтірілді.

Кез келген $i_k(\lambda)$ көпмүшелігі $i_{k-1}(\lambda)$ көпмүшелігіне бөлінстінін дәлелдейік. Ол үшін кері жорық, яғни

$$i_k(\lambda)=q(\lambda)\cdot i_{k-1}(\lambda)+r(\lambda),$$

мұндағы $r(\lambda)\neq 0$ көпмүшелігінің дәрежесі $i_{k-1}(\lambda)$ көпмүшелігінің дәрежесінен кіші. Онда (5.92) матрицаны мына түрде жазамыз:

$$\begin{pmatrix} i_1(\lambda) & & & & & & 0\\ & i_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots\, i_{k-1}(\lambda) & & & & \\ & & & a_1(\lambda)\cdot i_{k-1}(\lambda)+r(\lambda) & & & \\ & & & & i_{k+1}(\lambda) & & \\ 0 & & & & & \ddots & i_n(\lambda)\end{pmatrix}.$$

Осы матрицаны $k-1$ тік жолын — $q(\lambda)$ көпмүшелігіне көбейтіп, оны k-тік жолына қосайық, содан соң $k-1$ жатық жолын k жатық жолына қосып, мына канонды-диагонал матрицаны аламыз:

$$\begin{pmatrix} i_1(\lambda) & & & & 0\\ \ddots & i_{k-1}(\lambda) & & & \\ & & r(\lambda) & & \\ & & & i_{k+1}(\lambda) & \\ 0 & & & \ddots & i_n(\lambda)\end{pmatrix}.$$

Бұл канонды-диагонал матрицадағы $r(\lambda)$ көпмүшелігі $i_{k-1}(\lambda)$ көпмүшелігіне бөлінуі керек, бірақ ол бөлінбейді, себебі $r(\lambda)$ көпмүшелігінің дәрежесі $i_{k-1}(\lambda)$ көпмүшелігінің дәрежесінен кіші. Олай болса, $i_k(\lambda)$ көпмүшелігі $i_{k-1}(\lambda)$ көпмүшелігіне бөлінбейді деген жоруымыз дұрыс емес, яғни $r(x)=0$. осы қайшылықтан дәлелдеу керектігімізді аламыз. Теорема дәлелденді.

5.48-теорема. Берілген $A(\lambda)$ матрицаның (5.92) канонды-диагонал матрицасы тек біреу ғана болады.

Дәлелдеуі. Бұл тұжырымды дәлелдеу үшін $i_k(\lambda)$, $k=\overline{1,n}$ көпмүшеліктері тек біреу ғана болып анықталатынын дәлелдесек жеткілікті. Шынында да, $A(\lambda)$ матрица элементтерінің ең үлкен ортақ бөлгішін тауып, ол үлкен ортақ бөлгішті оның бастапқы коэффициентіне бөлейік. Енді бастапқы коэффициенті 1-ге тең ол ортақ бөлгішті $d_1(\lambda)$ деп белгілейік және бұл табылған $d_1(\lambda)$ тек біреу ғана.

$A(\lambda)$ матрицаның барлық екінші ретті минорларын қарастырайық. Осы минорлардың ең үлкен ортақ бөлгішін тауып, ол үлкен ортақ бөлгішті оның бастапқы коэффициентіне бөлейік. Енді бастапқы коэффициенті 1-ге тең ол ортақ бөлгішті $d_2(\lambda)$ деп белгілейік және бұл табылған $d_2(\lambda)$ көпмүшелік тек біреу ғана. Осылайша жалғастырып, ең соңында $A(\lambda)$ матрицаның $|A(\lambda)|$ анықтауышынан анықталған көпмүшелікті тауып, ол көпмүшелікті оның бастапқы коэффициентіне бөлеміз және бастапқы коэффициенті 1-ге тең ол көпмүшелікті $d_n(\lambda)$ деп белгілейміз.

Сонымен, бастапқы коэффициенттері 1-ге тең барлық

$$d_1(\lambda),\ d_2(\lambda),\ \ldots,\ d_n(\lambda) \tag{5.93}$$

ең үлкен ортақ бөлгіштер тек біреу ғана болып анықталды.

(5.93) көпмүшеліктерін анықтайық. Эквивалентті λ матрицалардың $d_k(\lambda)$ көпмүшеліктері бірдей (дәлелдеңдер!). Олай болса, $A(\lambda)$ мен $I(\lambda)$ матрицаның $d_k(\lambda)$ көпмүшеліктері бір-біріне тең, себебі $A(\lambda) \sim J(\lambda)$. Ендеше $I(\lambda)$ матрицаның $d_k(\lambda)$ көпмүшеліктерін анықтау жеткілікті. Егер $i_2(\lambda)$ көпмүшелігі $i_1(\lambda)$-ге бөлінетіндігін, $i_3(\lambda)$ көпмүшелігі $i_2(\lambda)$-ге бөлінетіндігін және ең соңында $i_n(\lambda)$ көпмүшелігі $i_{n-1}(\lambda)$-ге бөлінетіндігін ескерсек, онда $I(\lambda)$ матрица элементтерінің ең үлкен ортақ бөлгіші $i_1(\lambda)$-ге тең, яғни $d_1(\lambda) = i_1(\lambda)$. Енді $I(\lambda)$ матрицасының нөлге тең емес екінші ретті барлық минорларын қарастырайық:

$$\begin{array}{l} i_1(\lambda)\cdot i_2(\lambda),\quad i_1(\lambda)\cdot i_3(\lambda),\ \ldots,\ i_1(\lambda)\cdot i_n(\lambda),\\ \qquad\qquad i_2(\lambda)\cdot i_3(\lambda),\ \ldots,\ i_2(\lambda)\cdot i_n(\lambda),\\ \quad\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \qquad\qquad\qquad\qquad i_{n-1}(\lambda)\cdot i_n(\lambda) \end{array}$$

немесе $i_p(\lambda)\cdot i_q(\lambda)$, $p<q$. Егер $i_k(\lambda)$ көпмүшеліктері $i_{k-1}(\lambda)$ көпмүшеліктеріне бөлінетінін ескерсек, онда $i_p(\lambda)\cdot i_q(\lambda)$, $p<q$ көпмүшеліктер $i_1(\lambda)\cdot i_2(\lambda)$ көпмүшелігіне қалдықсыз бөлінеді. Олай болса, $d_2(\lambda) = i_1(\lambda)\cdot i_2(\lambda)$. Егер $I(\lambda)$ матрицаның нөлге тең емес 3-ретті минорларын қарастырсақ және барлық $i_k(\lambda)$ көпмүшеліктері $i_1(\lambda)$, $i_2(\lambda)$, $i_3(\lambda)$ көпмүшеліктеріне

бөлінетінін ескерсек, онда $i_p(\lambda)\cdot i_q(\lambda)\cdot i_r(\lambda)$, $p<q<r$ көпмүшеліктер $i_1(\lambda)\cdot i_2(\lambda)\cdot i_3(\lambda)$ көпмүшелігіне қалдықсыз бөлінеді. Олай болса, $d_3(\lambda) = i_1(\lambda)\cdot i_2(\lambda)\cdot i_3(\lambda)$. Осылайша жалғастырып, $I(\lambda)$ матрицаның $d_k(\lambda)$ көпмүшелігін мына төмендегі формуламен анықтаймыз:

$$d_k(\lambda) = i_1(\lambda)\cdot i_2(\lambda)\ldots i_k(\lambda),\ k=\overline{1,n}. \tag{5.94}$$

$d_k(\lambda)$ тек біреу ғана болып анықталады. (5.94) формуладан:

$$d_k(\lambda) = d_{k-1}(\lambda)\cdot i_k(\lambda),\ k=\overline{1,n},$$

мұндағы $d_0(\lambda)\equiv 1$. Онда $I(\lambda)$ матрицаның $i_k(\lambda)$ элементтері мына төмендегі

$$i_k(\lambda) = \frac{d_k(\lambda)}{d_{k-1}(\lambda)},\ k=\overline{1,n} \tag{5.95}$$

формуламен анықталады. Сонымен, $i_k(\lambda)$ көпмүшелігі (5.95) формуладан тек біреу ғана болып анықталады. Теорема дәлелденді.

Ескерту. Егер бір r нөмірден бастап: $i_{r+1}(\lambda) = i_{r+2}(\lambda) = i_{r+3}(\lambda) = \ldots = i_n(\lambda) = 0$ болса, онда (5.94) формуладан:

$$d_{r+1}(\lambda) = d_{r+2}(\lambda) = \ldots = d_n(\lambda) = 0.$$

Анықтама. Канонды-диагонал $I(\lambda)$ матрицаның $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \ldots, i_n(\lambda)$ элементтерін A матрицаның *инварианттық көбейткіштері* деп атаймыз.

Мысалдар. Мына төмендегі λ — матрицаларды канонды матрицаларға келтіріп, олардың инварианттық көбейткіштерін табыңдар.

1). $A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^3-\lambda & \lambda^2 \\ \lambda^2+\lambda & 2\lambda \end{pmatrix}$, 2). $B(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2-9 & \lambda+3 \\ \lambda+3 & (\lambda+3)^2 \end{pmatrix}$.

1). $A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda^3-\lambda \\ 2\lambda & \lambda^2+\lambda^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2\lambda & \lambda^2+\lambda \\ \lambda^2 & \lambda^3-\lambda \end{pmatrix}_+ \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} 2\lambda & \lambda^2+\lambda \\ 0 & +\frac{\lambda}{2}(\lambda^2-\lambda-2) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2\lambda & \lambda^2+\lambda \\ 0 & \lambda(\lambda^2-\lambda-2) \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda^2-\lambda-2) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda^2-\lambda-2) \end{pmatrix},$$

яғни $i_1(\lambda)=\lambda,\ i_2(\lambda)=\lambda(x^2-x-2)$.

2).

$$B(\lambda) \sim \begin{pmatrix} \lambda+3 & \lambda^2-9 \\ (\lambda+3)^2 & (\lambda+3) \end{pmatrix}_+ \sim \begin{pmatrix} \lambda+3 & \lambda^2-9 \\ 0 & -(\lambda+3)(\lambda^2-10) \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda+3 & \lambda^2-9 \\ 0 & (\lambda+3)(\lambda^2-10) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda+3 & 0 \\ 0 & (\lambda+3)(\lambda^2-10) \end{pmatrix} \sim$$

Осыдан инвариантты көбейткіштерді аламыз:

$$i_1(\lambda)=\lambda+3,\ i_2(\lambda)=(\lambda+3)(\lambda^2-10).$$

Инвариантты көбейткіштерді (5.95) формуланың көмегімен анықтайық.

1. $A(\lambda)$ матрицаның барлық элементтері λ-ға бөлінеді. Онда $d_1(\lambda)=\lambda\cdot A(\lambda)$ матрицаның анықтауышы: $|A(\lambda)|=\lambda^2(\lambda^2-\lambda-2)$. Бұдан: $d_2(\lambda)=\lambda^2(\lambda^2-\lambda-2)$. Енді (5.95) формуладан: $i_1(\lambda)=d_1(\lambda)=\lambda$, $i_2(\lambda)=\dfrac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)}=\lambda\cdot(\lambda^2-\lambda-2)$.

2. $B(\lambda)$ матрицаның барлық элементтері $\lambda+3$-ға бөлінеді. Олай болса: $d_1(\lambda)=\lambda+3$. $B(\lambda)$ матрицаның анықтауышы: $|B(\lambda)|=(\lambda+3)^2\cdot(\lambda^2-10)$ көпмүшелікке тең, яғни $d_2(\lambda)=(\lambda+3)^2\cdot(\lambda^2-10)$. (5.95) формуладан:

$$i_1(\lambda)=d_1(\lambda)=\lambda+3,\ i_2(\lambda)=\frac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)}=(\lambda+3)(\lambda^2-10).$$

2. Элементар бөлгіштер. Кез келген дәрежесі n-ге ($n\geq 1$) тең $f(\lambda)$ *келтірілмейтін (келтірілетін)*

көпмүшелік деп аталады, егер ол дәрежесі n-нен кіші көпмүшеліктердің көбейтіндісіне жіктелмесе (жіктелсе).

Мысалы 1. $f(\lambda)=\lambda^2+1$ көпмүшелігін қарастырайық. Бұл көпмүшелік коэффиценттері нақты сандар өрісінде келтірілмейтін көпмүшелік, ал коэффициенттері комплекс сандар өрісінде келтірілетін көпмүшелік, яғни $f(\lambda)=(\lambda+i)(\lambda-i)$, $i^2=-1$.

2. Кез келген бірінші дәрежелі көпмүшелік келтірілмейтін көпмүшелік.

n-ретті $A(\lambda)$ матрицаны қарастырайық және $\operatorname{rang} A=n$ болсын. Онда барлық инвариантты көбейткіштер нөлге тең емес, яғни $i_k(\lambda)\neq 0$, $k=\overline{1,n}$. Бірге тең емес инвариантты көбейткіштерді келтірілмейтін көпмүшелікке жіктейік:

$$\begin{aligned} i_1(\lambda) &= (\varepsilon_{11}(\lambda))^{s_{11}}\cdot(\varepsilon_{12}(\lambda))^{s_{12}}\ldots(\varepsilon_{1p_1}(\lambda))^{s_{1p_1}}, \\ i_2(\lambda) &= (\varepsilon_{21}(\lambda))^{s_{21}}\cdot(\varepsilon_{22}(\lambda))^{s_{22}}\ldots(\varepsilon_{2p_2}(\lambda))^{s_{2p_2}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ i_n(\lambda) &= (\varepsilon_{n1}(\lambda))^{s_{n1}}\cdot(\varepsilon_{n2}(\lambda))^{s_{n2}}\ldots(\varepsilon_{np_n}(\lambda))^{s_{np_n}}, \end{aligned} \tag{5.96}$$

мұндағы $\varepsilon_{kj}(\lambda)$ бастапқы коэффициенттері 1-ге тең әртүрлі келтірілмейтін көбейткіштер, ал $s_{kj}>0$ натурал сандар.

Осы (5.96) жіктелулерден мына төмендегі көпмүшеліктерді құрастырайық:

$$\begin{gathered} l_1(\lambda)=(\varepsilon_{11}(\lambda))^{s_{11}},\ l_2(\lambda)=(\varepsilon_{12}(\lambda))^{s_{12}},\ldots,\ l_{p_1}(\lambda)=(\varepsilon_{1p_1}(\lambda))^{s_{1p_1}}, \\ l_{p_1+1}(\lambda)=(\varepsilon_{21}(\lambda))^{s_{21}},l_{p_1+2}(\lambda)=(\varepsilon_{22}(\lambda))^{s_{22}},\ldots,l_{p_1+2}(\lambda)=(\varepsilon_{2p_2}(\lambda))^{s_{2p_2}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_{p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}+1}(\lambda)=(\varepsilon_{n1}(\lambda))^{s_{n1}},\ l_{p_1+\ldots+_{n-1}+2}(\lambda)= \\ =(\varepsilon_{n2}(\lambda))^{s_{n2}},\ldots,\ l_{p_1+\ldots+p_n}(\lambda)=(\varepsilon_{np_n}(\lambda))^{s_{np_n}}, \end{gathered} \tag{5.97}$$

мұндағы $p_1+\ldots+p_n=n$ — құрастырылған $l_1,\ldots,l_n$ көпмүшеліктер саны.

Анықтама. Инвариантты көбейткіштерді $i_k(\lambda)\neq 0$, $k=\overline{1,n}$ келтірілмейтін көпмүшелікке жіктеуден (яғни

(5.96) көпмүшеліктер кестесінен) құрастырылған (5.97) көпмүшеліктер $l_k(\lambda)$, $k = \overline{1, n}$ $A(\lambda)$ матрицаның *элементар бөлгіштері* деп аталады.

Мысалы. $i_1(\lambda) = 1$, $i_2(\lambda) = \lambda$, $i_3(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2$, $i_4(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2$ көпмүшеліктер $A(\lambda)$ — матрицаның инвариантты көбейткіштері болсын. Осы матрицаның элементар бөлгіштерін анықтайық. Ол үшін бірге тең емес инвариантты көбейткіштерді келтірілмейтін көпмүшелікке жіктейік:

$$i_2(\lambda) = \lambda,\ i_3(\lambda) = \lambda^2(\lambda + 1),\ i_4(\lambda) = \lambda^2(\lambda + 1)^2.$$

Онда $A(\lambda)$ — матрицаның элементар бөлгіштері мына төмендегі көпмүшеліктер болады:

$$l_1(\lambda) = \lambda,\ l_2(\lambda) = \lambda^2,\ l_3(\lambda) = \lambda^2,$$

$$l_4(\lambda) = \lambda + 1,\ l_5(\lambda) = (\lambda + 1)^2.$$

$A(\lambda)$ матрицаның элементар бөлгіштер саны оның коэффициенттері нақты немесе комплексті сандар өрісінде болуына байланысты өзгеріп тұрады.

Мысалы. $i_1(\lambda) = 1$, $i_2(\lambda) = \lambda^2 + 3$, $i_3(\lambda) = (\lambda^4 - 9)^2$, $i_4(\lambda) = 0$ көпмүшеліктер $A(\lambda)$ — матрицаның инвариантты көбейткіштері болсын. Осы $A(\lambda)$ матрицаның коэффициенттері нақты немесе комплексті сандар өрісінде болуына байланысты элементар бөлгіштерін табайық.

1. Нақты сандар өрісіндегі жағдай. Ол үшін берілген инвариантты көбейткіштерді коэффициенттері нақты сандар болатындай етіп келтірілмейтін көпмүшелікке жіктейік:

$$i_2(\lambda) = \lambda^2 + 3,$$

$$i_3(\lambda) = (\lambda^2 - 3)^2 \cdot (\lambda^2 + 3)^2 = (\lambda + \sqrt{3})^2 \cdot (\lambda - \sqrt{3})^2 \cdot (\lambda^2 + 3)^2.$$

Онда:

$$l_1(\lambda) = \lambda^2 + 3,\ l_2(\lambda) = (\lambda^2 + 3)^2,$$

$$l_3(\lambda) = (\lambda + \sqrt{3})^2,\ l_4(\lambda) = (\lambda - \sqrt{3})^2,$$

яғни элементар бөлгіштер саны 4-ке тең.

2. Комплексті сандар өрісіндегі жағдай. Бұл жағдайда:

$$i_2(\lambda) = (\lambda + i\sqrt{3})(\lambda - i\sqrt{3}),$$

$$i_3(\lambda) = (\lambda + \sqrt{3})^2 \cdot (\lambda - \sqrt{3})^2 (\lambda + i\sqrt{3})^2 \cdot (\lambda - i\sqrt{3})^2.$$

Онда:

$$l_1(\lambda) = (\lambda + i\sqrt{3}),\ l_2(\lambda) = (\lambda + i\sqrt{3})^2,\ l_3(\lambda) = (\lambda - i\sqrt{3}),$$

$$l_4(\lambda) = (\lambda - i\sqrt{3})^2,\ l_5(\lambda) = (\lambda + \sqrt{3})^2,\ l_6(\lambda) = (\lambda - \sqrt{3})^2,$$

яғни элементар бөлгіштер саны 6-ға тең.

Комплексті сандар өрісінде кез келген көпмүшелік сызықты көпмүшеліктерге жіктеледі. Олай болса, кез келген λ матрицаның элементар бөлгіштері комплексті сандар өрісінде тек сызықты көпмүшеліктерден құрастырылады, яғни бұл жағдайда элементар бөлгіштер мына түрде жазылады: $(\lambda - \lambda_0)^k$, мұндағы λ_0 — нақты немесе комплексті сан. Жоғарыдағы мысалда нақты сандар өрісінде $l_1(\lambda) = \lambda^2 + 3$, $l_2(\lambda) = (\lambda^2 + 3)^2$ элементар бөлгіштері екінші дәрежелі жіктелмейтін $\lambda^2 + 3$ көпмүшеліктен, ал комплексті сандар өрісінде барлық элементар бөлгіштер сызықты көпмүшеліктерден құрастырылған.

Егер $A(\lambda)$ матрицаның элементар бөлгіштері берілсе, онда оның барлық инвариантты көбейткіштерін анықтауға болады. Ол үшін мына төмендегі әдісті пайдаланамыз. Біріншіден, ең соңғы инвариантты көбейткішті анықтап жазайық. Инвариантты көбейткіштердің қасиеттері бойынша, соңғы $i_n(\lambda) \neq 0$ инвариантты көбейткіш оның алдында орналасқан инвариантты көбейткіштердің бәріне де бөлінеді. Ендеше, соңғы инвариантты көбейткіш (5.97) элементар бөлгіштердің әртүрлі жіктелмейтін көпмүшеліктерінің ең жоғарғы дәрежелерінен құрастырған элементар бөлгіштердің көбейтіндісіне тең. (5.97) элементар бөлгіштер кестесінен пайдаланылған элементар бөлгіштерді сызып, қалған элементар бөлгіштер кестесін (5.97*) деп белгілейміз. Екіншіден, соңғы инвариантты көбейткіштің алдында тұрған $i_{n-1}(\lambda) \neq 0$ инвариантты көбейткішті анықтаймыз. Инвариантты көбейткіш оның алдында орналасқан барлық инвариантты көбейткіштерге бөлінеді. Олай болса, $i_{n-1}(\lambda) \neq 0$ инвариантты көбейткіш (5.97) элементар бөлгіштер кестесінің әртүрлі жіктелмейтін көпмүшеліктерінің ең жоғарғы дәрежелерінен құрастырылған элементар бөлгіштердің көбейтіндісіне тең. Осы әдісті әрі қарай жалғастыра отырып, $A(\lambda)$ матрицаның кейбір инвариантты көбейткіштерін анықтауға болады. Егер $A(\lambda)$ матрицаның элементар бөлгіштерімен қатар оның реті және рангісі берілсе, яғни $A(\lambda) = (a_{ij})_{n \times n}$, $rang\, A = r$, онда оның барлық инвариантты көбейткіштерін анықтауға болады. Егер $A(\lambda)$ матрицаның реті n-ге, рангісі r-ге тең болса, онда оның инвариантты көбейткіштер саны n-ге (1 мен 0-ге тең инвариантты көбейткіштерді қоса есептегенде), ал нөлге тең емес инвариантты көбейткіштер саны r-ге тең, яғни $i_{r+1}(\lambda) = i_{r+2}(\lambda) = \ldots = i_n(\lambda) = 0$.

Мысалы. Бізге $A(\lambda)$ матрицаның реті $n = 4$, рангісі $r = 3$ болсын және оның барлық элементар бөлгіштері берілсін (жоғарыдағы мысалды қара). Ол кестедегі бөлгіштерді төрт топқа бөліп жазалық:

I. топ: $(\lambda = \sqrt{3}) : l_1(\lambda) = (\lambda - \sqrt{3})^2$,
II. топ: $(\lambda = -\sqrt{3}) : l_2(\lambda) = (\lambda + \sqrt{3})^2$,
III. топ: $(\lambda = i\sqrt{3}) : l_3(\lambda) = \lambda - i\sqrt{3},\ l_4(\lambda) = (\lambda - i\sqrt{3})^2$,
IV. топ: $(\lambda = -i\sqrt{3}) : l_5(\lambda) = \lambda + i\sqrt{3},\ l_6(\lambda) = (\lambda + i\sqrt{3})^2$.

Берілген $A(\lambda)$ матрицаның реті 4-ке тең болғандықтан, оның 4 инвариатты көбейткіші бар, ал $r = 3$ болғандықтан, оның 3 инвариантты көбейткіші ғана нөлге тең емес. Олай болса, инвариантты көбейткіштің қасиеті бойынша $i_4(\lambda) = 0$. Енді жоғарыдағы әдісті пайдаланып, әр топтан $\lambda - \sqrt{3}$, $\lambda + \sqrt{3}$, $\lambda + i\sqrt{3}$, $\lambda - i\sqrt{3}$ сызықты көпмүшелерінің ең жоғарғы дәрежелерінің көбейтінділерін $i_3(\lambda)$ деп белгілейміз:

$$i_3(\lambda) = l_1(\lambda) \cdot l_2(\lambda) \cdot l_4(\lambda) \cdot l_6(\lambda) = (\lambda - \sqrt{3})^2 \cdot (\lambda + \sqrt{3})^2 \cdot$$

$$\cdot (\lambda - i\sqrt{3})^2 \cdot (\lambda + i\sqrt{3})^2 = (\lambda^2 - 3)^2 \cdot (\lambda^2 + 3)^2 = (\lambda^2 - 9)^2 .$$

Енді жоғарғы төрт топтан құрылған кестеден пайдаланылған l_1, l_2, l_4, l_6 элементар бөлгіштерді сызып тастаймыз. Онда:

III топ: $l_3(\lambda) = \lambda - i\sqrt{3}$,
IV топ: $l_5(\lambda) = \lambda + i\sqrt{3}$.

Осыдан:

$$i_2(\lambda) = l_3(\lambda) \cdot l_5(\lambda) = (\lambda - i\sqrt{3}) \cdot (\lambda + i\sqrt{3}) = \lambda^2 + 3.$$

Сонымен, кестедегі барлық элементар бөлгіштерді толық пайдаландық. Олай болса, инвариантты көбейт-

кіштердің қасиетін қолданып, ең бірінші орында орналасқан инвариантты көбейткіш 1-ге тең, яғни $i_1(\lambda) = 1$ (жоғарыдағы мысалды қараңдар).

3. Жордан матрицасы. Біз мына төмендегі k-ретті λ_0 санына қатысты

$$I_0 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

матрицаны қарастырайық

Анықтама. Реті k және λ_0 санына қатысы бар I_0 матрица *жордан клеткасы* деп аталады.

Енді I_0 жордан клеткасының $I_0 - \lambda E$ сипаттамалық матрицасын қарастырып:

$$I_0 - \lambda \cdot E = \begin{pmatrix} \lambda_0 - \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 - \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda_0 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \lambda_0 - \lambda \end{pmatrix}$$

оның канонды-диагонал матрицасын анықтайық. Канонды-диагонал матрицаны анықтау үшін оның инвариантты көбейткіштерін ізделік. Инвариантты көбейткіштерді табудың екі әдісі бар. Бірінші әдісі элементар түрлендірулер көмегімен $I_0 - \lambda \cdot E$ матрицаның канонды-диагонал матрицасын табу, ал екінші әдісі оның минорларының ең үлкен ортақ бөлгіштерін табу. Біз екінші әдісті пайдаланайық. Алдымен $d_k(\lambda)$ бөлгішін табамыз. Ол үшін оның анықтауышын тауып: $|I_0 - \lambda E| = (\lambda_0 - \lambda)^k$ және ол көпмүшелікті $(-1)^k$-ға бөліп, $d_k(\lambda)$ бөлгішін анықтаймыз:

$$d_k(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k,$$

мұндағы k жордан клеткасының реті. Енді $d_{k-1}(\lambda)$ бөлгішін анықтайық. Ол үшін $I_0 - \lambda \cdot E$ матрицаның $(k-1)$-ретті минорларын қарастырамыз. Егер $I_0 - \lambda E$ матрицаның бірінші тік және соңғы жатық жолдарын сызсақ, онда ол минор 1-ге тең, яғни $d_{k-1}(\lambda) = 1$. Егер $I_0 - \lambda E$ матрицаның бірінші екі тік және соңғы екі жатық жолдарын сызсақ, онда

$(k-2)$ — ретті минор 1-ге тең, яғни $d_{k-2}(\lambda)=1$. Енді осы әдісті жалғастырсақ және ең соңында $I_0-\lambda\cdot E$ матрицаның элементтерінің ішінде 1 саны бар екенін ескерсек, онда $d_1(\lambda)=1$. Сондықтан, $I_0-\lambda\cdot E$ сипаттамалық матрицаның инвариантты көбейткіштерін (5.95) формуладан анықтаймыз.

$$i_k(\lambda)=\frac{d_k(\lambda)}{d_{k-1}(\lambda)}=(\lambda-\lambda_0)^k,\ i_{k-1}(\lambda)=1\,,\dots,\ i_1(\lambda)=1\,,$$

ал оның канонды-диагонал матрицасы мына төмендегі k-ретті матрица түрінде өрнектеледі:

$$I_0-\lambda\cdot E\sim\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & (\lambda-\lambda_0)^k\end{pmatrix}. \tag{5.98}$$

Сонымен, λ_0 санына қатысты k-ретті I_0 жордан клеткасының сипаттамалық матрицасының элементар бөлгіші тек біреу ғана $l_1(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^k$ және оның сипаттамалық көпмүшелігі мына $|I-\lambda E|=(\lambda-\lambda_0)^k$ көпмүшелігіне тең. Сондықтан, λ_0 саны I_0 жордан клеткасының еселігі k-ға тең меншікті мәні.

Анықтама. Реті n-ге тең клеткалы-диагонал матрица

$$I=\begin{pmatrix}I_1(\lambda_1) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & I_k(\lambda_k)\end{pmatrix}$$

жордан матрицасы деп аталады, мұндағы $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ сандарына қатысты $I_1,\dots,I_k$ реттері сәйкес $n_1,\dots,n_k$ $(n_1+\dots+n_k=n)$ сандарға тең жордан клеткалары.

Жордан матрицасына қатысты $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ сандары оның меншікті мәндері болады, ал $n_1,\dots,n_k$ сандары сәйкес еселігі. Жалпы жағдайда $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ сандарының өзара тең болмауы және олардың $n_1,\dots,n_k$ еселіктерінің де тең болмауы қажет емес.

Енді жордан матрицасының

$$I-\lambda\cdot E=\begin{pmatrix}I_1-\lambda\cdot E_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & I_k-\lambda\cdot E_k\end{pmatrix}$$

сипаттамалық матрицасын қарастырайық, мұндағы E_i, $i=\overline{1,k}$ реті n_i-ге тең бірлік матрица және

$$I_i-\lambda\cdot E_i\sim\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & (\lambda-\lambda_i)^{n_i}\end{pmatrix},\quad i=\overline{1,k},$$

ал $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k$ сандары еселігі сәйкес $n_1,n_2,\dots,n_k$ лерге тең жордан матрицасының меншікті мәндері.

Егер жордан матрицасының: 1) $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ меншікті мәндерінің және олардың сәйкес $n_1,\dots,n_k$ еселіктерінің кейбіреулері өзара бір-бірімен тең екенін ескерсек, 2) $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ меншікті мәндерінің бір-бірімен тең емес бөлігін $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_s$, $s\le k$ деп белгілесек, 3) бір-бірімен тең емес $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ меншікті мәндеріне қатысты $p_1,p_2,\dots,p_s$ жордан клеткалары сәйкес келсін, ал олардың реттерін k_{i1},k_{i2},k_{i3}, $\dots,k_{ip_i}$, $i=\overline{1,s}$ сандары болсын деп белгілесек, онда $k_{i1},k_{i2},\dots,k_{ip_i}$ сандарына

$$k_{i1}\le k_{i2}\le\dots\le k_{ip_i},\ i=\overline{1,s} \tag{5.99}$$

теңсіздіктері орындалады. Олай болса, элементар түрлендірулердің көмегімен $I-\lambda E$ матрицаға эквивалентті $B(\lambda)$ канонды-диагонал матрицаны анықтаймыз және оның негізгі диагоналының жоғарғы элементтері 1-ге тең, ал қалған элементтеріне мына төмендегі көпмүшеліктер кестесі орналасады:

$$\begin{array}{l}(\lambda-\lambda_1)^{k_{11}},\ (\lambda-\lambda_1)^{k_{12}},\dots,\ (\lambda-\lambda_1)^{k_{1p_1}},\\ (\lambda-\lambda_2)^{k_{21}},\ (\lambda-\lambda_2)^{k_{22}},\dots,\ (\lambda-\lambda_2)^{k_{2p_2}},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ (\lambda-\lambda_s)^{k_{s1}},\ (\lambda-\lambda_s)^{k_{s2}},\dots,\ (\lambda-\lambda_s)^{k_{sp_s}}.\end{array} \tag{5.100}$$

Біз бұл жерде $B(\lambda)$ канонды-диагонал матрицаның диагоналына (5.100) көпмүшеліктерінің орналасу тәртібін көрсетіп отырған жоқпыз, ал керек жағдайда элементар түрлендірулер көмегімен олардың орнын көрсетуге болады. Олай болса, $B(\lambda)$ матрицаның диагоналына орналасқан (5.100) кесте көпмүшеліктерін мына төмендегі клеткалар түрінде орналастыруға болады:

$$\begin{pmatrix}(\lambda-\lambda_1)^{k_{11}} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & (\lambda-\lambda_s)^{k_{s1}}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}(\lambda-\lambda_1)^{k_{12}} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & (\lambda-\lambda_s)^{k_{s2}}\end{pmatrix},\ \ldots,$$

$$\begin{pmatrix}(\lambda-\lambda_1)^{k_{1p_1}} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & (\lambda-\lambda_s)^{k_{sp_s}}\end{pmatrix} \qquad (5.101)$$

I жордан матрицаның $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ меншікті мәндері бір-бірімен тең емес. Ендеше, (5.101) клеткаларды элементар түрлендірулердің көменгімен оларға эквивалентті

$$\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & (\lambda-\lambda_1)^{k_{11}}\ (\lambda-\lambda_s)^{k_{s1}}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & (\lambda-\lambda_1)^{k_{12}}\ (\lambda-\lambda_s)^{k_{s2}}\end{pmatrix},\ \ldots,$$

$$\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & (\lambda-\lambda_1)^{k_{1p_1}}\ (\lambda-\lambda_s)^{k_{sp_s}}\end{pmatrix} \qquad (5.102)$$

клеткаларды анықтаймыз.

Мысалы. $s=2$ және $k_{11}=1$, $k_{21}=1$ жағдайларды қарастырайық. Онда (5.101) бір клеткалы мына түрде болады:

$$\begin{pmatrix}\lambda-\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda-\lambda_2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}\lambda-\lambda_1 & (\lambda-\lambda_1)\cdot a_1+(\lambda-\lambda_2)\cdot a_2\\ 0 & \lambda-\lambda_2\end{pmatrix}$$

Енді a_1 мен a_2 тұрақты сандарды (нөл дәрежелі көпмүшеліктерді) табу үшін

$$(\lambda-\lambda_1)\cdot a_1+(\lambda-\lambda_2)\cdot a_2=1$$

теңдеуін қарастырайық. Бұдан:

$$\begin{cases} a_1+a_2 = 0,\\ -\lambda_1 a_1-\lambda_2 a_2=1.\end{cases}$$

Егер $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ескерсек, онда бұл жүйенің бір ғана шешімі бар:

$$a_1=-\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2},\quad a_2=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}.$$

Онда:

$$\begin{pmatrix}\lambda-\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda-\lambda_2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & \lambda-\lambda_1\\ \lambda-\lambda_2 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & \lambda-\lambda_1\\ 0 & -(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\end{pmatrix}.$$

(5.102) клеткалар орналасқан диагоналды матрицаны $C(\lambda)$ деп белгілейік және $I-\lambda E \sim C(\lambda)$. Енді $C(\lambda)$ матрицаға элементар түрлендірулердің үшінші ережесін пайдаланып, оны мына төмендегі диагоналды матрицаға келтіреміз:

$$I-\lambda\cdot E \sim \begin{pmatrix}1 & & & & & 0\\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & (\lambda-\lambda_1)^{k_{1p_1}}\ldots(\lambda-\lambda_s)^{k_{sp_s}} & & \\ 0 & & & & (\lambda-\lambda_1)^{k_{12}}\ldots(\lambda-\lambda_s)^{k_{s2}} & \\ & & & & & (\lambda-\lambda_1)^{k_{11}}\ldots(\lambda-\lambda_s)^{k_{s1}}\end{pmatrix}$$

Бұл матрицаның диагоналына орналасқан көпмүшеліктердің бастапқы коэффициенттері 1-ге тең, ал (5.99) теңсіздіктерді ескерсек, онда ол көпмүшеліктер канонды-диагонал матрицаның шартын қанағаттандырады. Олай болса, ол біздің іздеп отырған $I - \lambda E$ сипаттамалық матрицаның канонды-диагонал матрицасы.

Енді комплексті n өлшемді R кеңістігінде анықталған кез келген сызықты φ түрлендірудің белгілі бір базистегі матрицасы A, ал оның жаңа $l_1, \ldots, l_n$ базистегі матрицасы I жордан матрицасы болсын деп ұйғаралық. Олай болса, 5.3-теорема бойынша A мен I матрицаларының арасындағы байланыс мына формуламен өрнектеледі:

$$C^{-1} A C = I, \; A C = C I, \; |C| \neq 0, \qquad (5.101)$$

мұндағы C матрицаның тік жолдары $l_j = (l_{1j}, l_{2j}, \ldots l_{nj})'$, $j = \overline{1, n}$ базисті анықтайды. Бұл $l_1, \ldots, l_n$ базис жордан базисі деп аталады, ал ол (5.101) формуланың көмегімен төмендегі жүйелерден анықталады:

$$A l_1 = \lambda_1 \cdot l_1 \;,\; A l_2 = \lambda_1 \cdot l_2 + l_1 \;,\; \ldots \;,\; A l_{n_1} = \lambda_1 \cdot l_{n_1} + l_{n_1 - 1} \,,$$

$$A l_{n_1+1} = \lambda_2 \cdot l_{n_1+1} \;,\; A l_{n_1+2} = \lambda_2 \cdot l_{n_1+2} + l_{n_1+1} \;,\; \ldots \;,$$

$$A l_{n_1+n_2} = \lambda_2 \cdot l_{n_1+n_2} + l_{n_1+n_2-1} \,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A l_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1} = \lambda_k \cdot l_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1} \,,$$

$$A l_{n_1+\ldots+n_{k-1}+2} = \lambda_k \cdot l_{n_1+\ldots+n_{k-1}+2} + l_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1} \;,\; \ldots,$$

$$A l_{n_1+\ldots+n_k} = \lambda_k \cdot l_{n_1+\ldots+n_k} + l_{n_1+\ldots+n_k-1} \,, \qquad (5.102)$$

мұндағы $l_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n_1 + 1$, $n_1 + n_2 + 1, \ldots$, $n_1 + \ldots + n_k$ векторлары A матрицаның меншікті $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ мәндеріне сәйкес меншікті элементтері және $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Сонымен жоғарыдағы айтылған тұжырымдардан мынадай қорытынды шығаруға болады. Егер комплексті R кеңістігінде анықталған кез келген сызықты φ түрлендірудің A матрицасы берілсе, онда оның сипаттамалық $A - \lambda E$ матрицасына элементар түрлендірулер көмегімен оған эквивалентті жордан I матрицасының сипаттамалық $I - \lambda E$ матрицасын және онымен бірге A матрицаға ұқсас жордан I матрицасын анықтауға болады.

Берілген A матрицаға ұқсас жордан I матрицасы мен жордан базисін анықтау үшін мына төмендегі шарттарды орындау керек:

1) A матрицаның сипаттамалық $A - \lambda E$ матрицасын элементар түрлендірулердің көмегімен канонды-диагонал матрицаға келтіру,

2) канонды-диагонал матрицаның диагоналына орналасқан инвариантты көбейткіштерді келтірілмейтін сызықты көпмүшелікке жіктеу,

3) инвариантты көбейткіштерді пайдаланып, элементар бөлгіштерді анықтау.

4) элементар бөлгіштерді пайдаланып, жордан I матрицасын анықтау,

5) (5.102) жүйелердің көмегімен жордан базисін анықтау.

Мысалы. Бізге A матрицасы берілсін:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right),$$

мұндағы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & +3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

1. Алдымен оның жордан матрицасын анықтайық.

1) A_1 мен A_2 матрицалардың сипаттамалық матрицаларының элементар түрлендірулер көмегімен канонды-диагонал матрицаларын табамыз:

$$A_1 - \lambda E \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 2)^2 \end{pmatrix},$$

$$A_2 - \lambda E \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 1)^3 \end{pmatrix}.$$

Онда:

$$A - \lambda E \sim \left(\begin{array}{c|c|cc} E_3 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & \lambda - 2 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & (\lambda - 2)^2 & 0 \\ & & 0 & (\lambda - 1)^3 \end{array} \right) = B(\lambda).$$

Енді мына клетканы қарастырайық:

$$\begin{pmatrix}(\lambda-2)^2 & 0\\ 0 & (\lambda-1)^3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}(\lambda-2)^2 & a\cdot(\lambda-1)^3\\ 0 & (\lambda-1)^3\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}(\lambda-2)^2 & a\cdot(\lambda-1)^3+b\cdot(\lambda-2)^2\\ 0 & (\lambda-1)^3\end{pmatrix},$$

мұндағы $a(\lambda)=a_0\cdot\lambda+a_1$, $b(\lambda)=b_0\cdot\lambda^2+b_1\cdot\lambda+b_2$. Бұл көпмүшеліктердің коэффициенттерін мына теңдеуден табамыз:

$$a\cdot(\lambda-1)^3+b\cdot(\lambda-2)^2=1.$$

Осы теңдеудің екі жағындағы λ-нің бірдей дәрежелерін теңестіріп, белгісіз a_i мен b_j коэффициенттеріне сызықты жүйе аламыз және оны шешіп, a_i мен b_j коэффициенттерін табамыз:

$$a_0=-3,\ a_1=7,\ b_0=3,\ b_1=-4,\ b_2=2.$$

Сонымен,

$$\begin{pmatrix}(\lambda-2)^2 & 1\\ 0 & (\lambda-1)^3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & (\lambda-2)^2\\ (\lambda-1)^3 & 0\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & (\lambda-2)^2\\ 0 & -(\lambda-2)^2(\lambda-1)^3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (\lambda-2)^2(\lambda-1)^3\end{pmatrix}.$$

Енді $B(\lambda)$ матрица мына матрицаға эквивалентті болады:

$$A-\lambda\cdot E\sim(B(\lambda)\sim\left(\begin{array}{c|cc} E_4 & 0 & 0\\ \hline 0 & \lambda-2 & 0\\ & 0 & (\lambda-2)^2(\lambda-1)^3\end{array}\right)$$

2) $A-\lambda\cdot E$ сипаттамалық матрицаның инвариантты көбейткіштері:

$$i_1(\lambda)=i_2(\lambda)=i_3(\lambda)=i_4(\lambda)=1,\ i_5(\lambda)=\lambda-2,$$
$$i_6(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-1)^3$$

көпмүшеліктері арқылы өрнектеледі.

3) Бірге тең емес инвариантты көбейткіштерден элементар бөлгіштерді анықтаймыз:

$$l_1(\lambda)=(\lambda-2),\ l_2(\lambda)=(\lambda-2)^2,\ l_3(\lambda)=(\lambda-1)^3.$$

4) Анықталған элементар бөлгіштер арқылы берілген матрицаның жордан матрицасын табамыз:

$$I=\begin{pmatrix}I_1 & & 0\\ 0 & I_2 & \\ & & I_3\end{pmatrix},$$

мұндағы I_1, I_2, I_3 жордан клеткалары:

$$I_1=(2),\ I_2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix},\ I_3=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Енді $I-\lambda E$ сипаттамалық матрицаның канонды-диагонал матрицасын анықтайық:

$$I-\lambda E=\begin{pmatrix}\boxed{I_1-\lambda\cdot E_1} & & \\ & \boxed{I_2-\lambda\cdot E_2} & \\ & & \boxed{I_3-\lambda\cdot E_3}\end{pmatrix}$$

мұндағы

$$I_1-\lambda E_1=(2-\lambda)\sim(\lambda-2),$$

$$I_2-\lambda E_2=\begin{pmatrix}2-\lambda & 1\\ 0 & 2-\lambda\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (\lambda-2)^2\end{pmatrix},$$

$$I_3-\lambda E_3=\begin{pmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 1\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-1)^3\end{pmatrix}.$$

Онда

$$I-\lambda E\sim\left(\begin{array}{c|ccc} E_3 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & \lambda-2 & 0 & 0\\ & 0 & (\lambda-2)^2 & 0\\ & 0 & 0 & (\lambda-1)^3\end{array}\right).$$

Егер

$$\begin{pmatrix} (\lambda-2)^2 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\lambda-2)^2(\lambda-1)^3 \end{pmatrix}$$

ескерсек, онда

$$I-\lambda E \sim \left(\begin{array}{c|cc} E_4 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline 0 & \lambda-2 & 0 \\ & 0 & (\lambda-2)^2\cdot(\lambda-1)^3 \end{array}\right),$$

яғни $A-\lambda E$ мен $I\cdot\lambda E$ матрицалардың канонды-диагонал матрицалары тең.

5) Жордан $l_1, l_2, \ldots, l_6$ базисін анықтайық. Ол үшін (5.102) жүйелердің көмегімен мына төмендегі теңдеулерді қарастырамыз:

$$I_1:(A-2E)\,l_1=0,\ \ I_2:(A-2E)\,l_2=0,\ \ (A-2E)\,l_3=l_2,$$

$$I_3:(A-E)\,l_4=0,\ \ (A-E)\,l_5=l_4,\ \ (A-E)\,l_6=l_5,$$

мұндағы

$$A-2E=\left(\begin{array}{c|c} A_1-2E_3 & 0 \\ \hline 0 & A_2-2E_3 \end{array}\right),$$

$$A-E=\left(\begin{array}{c|c} A_1-E_3 & 0 \\ \hline 0 & A_2-E_3 \end{array}\right).$$

A матрицаның еселігі 3-ке тең $\lambda=2$ меншікті мəніне екі меншікті l_1, l_2 элементтері, ал еселігі 3-ке тең меншікті $\lambda=1$ мəніне меншікті l_4 элемент сəйкес келеді.

Меншікті мəн $\lambda=2$ қарасты l_1, l_2, l_3 элементтерді анықтайық. Меншікті l_1, l_2 элементтер

$$\begin{cases} -2x_1+x_2=0\,, \\ -x_4-3x_5+3x_6=0\,, \\ -2x_4-8x_5+13x_6=0\,, \\ -x_4-4x_5+6x_6=0 \end{cases}$$

жүйеден анықталады: $l_1=(1,2,0,0,0,0)'$, $l_2=(1,2,1,0,0,0)'$, ал $(A-2E)\,l_3=l_2$ жүйеден элемент l_3-ті анықтаймыз: $l_3=(0,1,0,0,0,0)'$.

Енді меншікті $\lambda=1$ мəнге қарасты l_4, l_5, l_6 элементтерді анықтайық. Меншікті элемент l_4:

$$\begin{cases} -x_1+x_2=0\,, & -3x_5+3x_6=0\,, \\ -4x_1+3x_2=0\,, & -2x_4-7x_5+13x_6=0\,, \\ -2x_1+x_2+x_3=0\,, & -x_4-4x_5+7x_6=0 \end{cases}$$

жүйеден анықталады: $l_4=(0,0,0,3,1,1)'$, ал l_5, l_6 элементтер $(A-E)\,l_5=l_4$, $(A-E)\,l_6=l_5$ жүйелерінен анықталады: $l_5=(0,0,0,0,-2,-1)'$, $l_6=(0,0,0,1,0,0)'$.

Бұл $l_1, l_2, \ldots, l_6$ элементтер сызықты тəуелсіз (тексеріңдер!). Олай болса, олар жордан базисін құрады.

Алынған I жордан матрицаның дұрыстығын тексерейік. Ол үшін ескі базистен $l_1, l_2, \ldots, l_6$ жана базиске көшу C матрицасын қарастырайық:

$$C=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & & & \\ 2 & 2 & 1 & & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ \hline & & & 3 & 0 & 1 \\ & 0 & & 1 & -2 & 0 \\ & & & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Онда

$$C^{-1}=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & \\ -2 & 1 & 0 & & & \\ \hline & & & 0 & -1 & 2 \\ & 0 & & 0 & -1 & 1 \\ & & & 1 & 3 & -6 \end{array}\right).$$

Енді $C^{-1}\cdot A\cdot C$ көбейтіндіні есептейік:

$$C^{-1}\cdot A\cdot C=\begin{pmatrix} \boxed{2} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}=I.$$