IV Тарау. ЕВКЛИД КЕҢІСТІГІ

§ 4.1. Нақты евклид кеңістігінің анықтамасы және оның қасиеттері

Анықтама. Нақты сызықты векторлық R кеңістіктің кез келген екі $x, y \in R$ элементіне (векторына) *скаляр көбейтінді* деп аталатын (x, y) нақты саны сәйкес келсе және оған мына төмендегі аксиомалар орындалса:

1. $(x, y) = (y, x)$,
2. $(\alpha \cdot x, y) = \alpha(x, y)$, α — нақты сан,
3. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,
4. $(x, x) > 0$, егер $x \neq 0$, $(x, x) = 0$, егер $x = 0$,

онда бұл кеңістікті *нақты Евклид кеңістігі* деп атайды.

Евклид кеңістігі кез келген шекті өлшемді немесе шексіз өлшемді болып бөлінеді.

Скаляр көбейтіндінің 1) — 3) аксиомаларын пайдаланып, оның мына төмендегі қасиеттерін дәлелдейік:

1. $(x, \alpha y) = \alpha(x, y)$.
2. $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$.
3. $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k, y) = \alpha_1(x_1, y) + \ldots + \alpha_k(x_k, y)$
4. $(x, \beta_1 \cdot y_1 + \ldots + \beta_k y_k) = \beta_1(x, y) + \ldots + \beta_k(x, y)$.

Шынында да,

1. $(x, \alpha y) = (\alpha y, x) = \alpha (y, x) = \alpha (x, y)$.
2. $(x, y + z) = (y + z, x) = (y, x) + (z, x) = (x, y) + (x, z)$.
3. $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k, y) = (\alpha_1 x_1, y) + (\alpha_2 x_2, y) + + \ldots + (\alpha_k x_k, y) = \alpha_1(x_k, y) + \ldots + \alpha_k(x_k, y)$.
4. $(x, \beta_1 y_1 + \ldots + \beta_k y_k) = (\beta_1 y_1 + \ldots + \beta_k y_k, x) = \beta_1(y_1, x) + + \ldots + \beta_k(y_k, x) = \beta_1(x, y_1) + \ldots + \beta_k(x, y_k)$.

Мысалдар. 1. $[a, b]$ сегментінде анықталған және үзіліссіз $x\,(t)$ функциялар $C_{[a,b]}$ жиынын қарастыралық, яғни $x\,(t) \in C_{[a,b]}$. Енді $x\,(t), y\,(t)$ функциялары $C_{[a,b]}$ жиынының элементтері болсын: $x\,(t), y\,(t) \in C_{[a,b]}$ және олрадың скаляр көбейтіндісі:

$$(x\,(t), y\,(t)) = \int_a^\beta x\,(t)\, y\,(t)\, dt. \qquad (4.1)$$

формуламен өрнектелсін.

(4.1) формуламен анықталған скаляр көбейтіндіге жоғарыдағы төрт аксиома орындалады. Олай болса үзіліссіз функциялар $[a, b]$ жиыны евклид кеңістік: $C_{[a,b]} = R$ және ол шексіз өлшемді.

2. Нақты n сандар $x_1, x_2, \ldots, x_n$ жиынын $\overline{X}$ *вектордың координаттары деп қарастыралық:* $x = (x_1, \ldots, x_n)$. $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *пен* $y = (y_1, \ldots, y_n)$ *векторларды қосу, оларды* α *нақты санға көбейту*

$$(x + y) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \quad \alpha \cdot x = (\alpha \cdot x_1, \ldots, \alpha \cdot x_n)$$

формуларымен анықтайық, ал олардың скаляр көбейтіндісін

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{4.2}$$

формуламен өрнектейік. (4.2) формуламен өрнектелген скаляр көбейтіндіге анықтамадағы төрт аксиома түгелімен орындалады. Олай болса, бұл векторлар жиыны n-өлшемді евклид кеңістік.

§ 4.2. Евклид кеңістігінің нормасы және оның қасиеттері

Евклид R кеңістігінің анықтамасындағы 4-аксиома бойынша кез келген $x \neq 0$ элементтің (вектордың) скаляр (x, x) көбейтіндісі нақты оң сан. Сондықтан, бұл скаляр (x, x) көбейтіндіден квадрат түбір былай табылады:

$$\sqrt{(x,x)}.$$

Анықтама. Евклид R кеңістігінің $x \neq 0$ элементіне сәйкес келетін (x, x) скаляр көбейтіндінің квадрат түбірін $\sqrt{(x,x)}$ оның нормасы (немесе ұзындығы, модулі) деп атаймыз және оны $\|x\|$ символымен белгілеп, мына төмендегі

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$$

формуламен өрнектейміз.

4.1-теорема. Евклид R кеңістігінің кез келген $x, y \in R$ элементіне Коши

$$(x, y)^2 \leq (x, x)\,(y, y) \tag{4.3}$$

немесе

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

теңсіздігі орындалады.

Д ә л е л д е у і. Егер α нақты сан болса, онда $\alpha \cdot x - y$ векторы үшін

$$(\alpha \cdot x - y, \alpha \cdot x - y) \geq 0$$

теңсіздігі орындалады. Бұдан

$$\alpha^2 \cdot (x, x) - 2\alpha \cdot (x, y) + (y, y) \geq 0.$$

α-ға байланысты бұл квадратты үшмүшеліктің теріс болмауы үшін оның дискриминанты оң болмауы:

$$(x, y)^2 - (x, x)\,(y, y) \leq 0.$$

қажетті әрі жеткілікті. Осы теңсіздіктен (4.3) теңсіздігі алынады. Теорема дәлелденді.

4.2-теорема. Евклид R кеңістігінің кез келген екі $x, y \in R$ элементіне (векторына):

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \tag{4.4}$$

үшбұрыш теңсіздігі орындалады.

Д ә л е л д е у і. Норманың және скаляр көбейтіндінің анықтамасы бойынша:

$$\|x + y\| = \sqrt{(x + y, x + y)} = \sqrt{(x, x) + 2(x, y) + (y, y)}.$$

(4.3) Коши теңсіздігін ескерсек, онда

$$\|x + y\| \leq \sqrt{(x, x) + 2\sqrt{(x,x)}\,\sqrt{(y,y)} + (y, y)} =$$

$$= \sqrt{(\sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)})^2} = \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)} =$$

$$= \|x\| + \|y\|.$$

Теорема дәлелденді.

Е с к е р т у. **1.** Егер x, y векторлары сызықты тәуелді болса: $x = \alpha \cdot y$, онда (4.3) теңсіздігі теңдікке айналады:

$$|(x, y)| = \|x\| \cdot \|y\|.$$

Шынында да,

$$|(x, y)| = |(\alpha y, y)| = |\alpha \cdot (y, y)| = |\alpha| \cdot (y, y) =$$

$$= |\alpha| \cdot \|y\|^2 = |\alpha| \cdot \|y\| \cdot \|y\| =$$

$$= \|\alpha \cdot y\| \cdot \|y\| = \|x\| \cdot \|y\|.$$

2. Егер x, y векторлары сызықты тәуелсіз болса: $x - \alpha y \neq 0$, онда (4.4) теңсіздігі мына түрде жазылады:

$$|(x, y)| < \|x\| \cdot \|y\|.$$

Шынында да, $x - \alpha y \neq 0$ векторы үшін:
$(x - \alpha y, x - \alpha y) > 0$ немесе $(x, x) - 2\alpha(x, y) + \alpha^2(y, y) > 0$. Бұдан

$$(x, y)^2 - (x, x) \cdot (y, y) < 0$$

немесе
$|(x, y)| < ||x|| \cdot ||y||$.

Ескерту. Егер x және y векторлары бағытталған кесінділер болса, онда (4.4) үшбұрыш теңсіздігінен шығатын қорытынды: үшбұрыштың бір қабырғасының ұзындығы оның басқа екі қабырғасының ұзындықтарының қосындысынан кіші.

Нақты евклид кеңістігінде берілген екі $x \neq 0$, $y \neq 0$ векторлардың арасындағы φ бұрышты

$$Cos\,\varphi = \frac{(x, y)}{||x|| \cdot ||y||} \tag{4.5}$$

формуламен анықтауға болады.

Егер $|Cos\,\varphi| \leq 1$ теңсіздігін ескерсек, онда (4.5) формуладан Коши теңсіздігін аламыз.

4.3-теорема. Егер берілген $x \neq 0$ векторын кез келген нақты санға көбейтсек, онда $\alpha \cdot x$ вектордың ұзындығы $||\alpha \cdot x||$ берілген x вектордың ұзындығы $||x||$ мен α санының модулінің көбейтіндісіне тең:

$$||\alpha \cdot x|| = |\alpha| \cdot ||x||.$$

Дәлелдеуі. Норманың анықтамасын ескерсек, онда $||\alpha \cdot x|| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha^2 (x, x)} = |\alpha| \cdot ||x||$. Теорема дәлелденді.

§ 4.3. Ортонормалданған векторлар жүйесі және оның қасиеттері

Анықтама. Егер евклид R кеңістігіндегі

$$l_1, l_2, ..., l_n \tag{4.6}$$

векторлар жүйесіне

$$(l_i, l_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \tag{4.7}$$

теңдіктері орындалса, онда (4.6) векторларды *ортонормалданған* векторлар дейміз, егер (4.7) теңдіктердің тек бірінші теңдіктері ғана орындалса, онда оны *ортогоналды* векторлар деп атаймыз.

4.4-теорема. Нөлдік вектор кез келген векторға ортогонал: $(x, 0) = 0$, $\forall x \in R$.

Дәлелдеуі. Кез келген $y \in R$ векторға $(x, y) = 0$ теңдеуі орындалсын делік. Дәлелдеу керек $x = 0$. $y = x$ болғанда $(x, x) = 0$. Бұдан $x = 0$. Теорема дәлелденді.

4.5-теорема (Пифагор). Егер x, y векторлары ортогонал болса: $(x, y) = 0$, онда

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

Дәлелдеуі. Егер $(x, y) = 0$ болса, онда (4.5) формуладан $\cos\varphi = 0$, яғни $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Ендеше x, y векторлары бір-біріне перпендикуляр: $x \perp y$. Олай болса, $||x||$, $||y||$ тік бұрышты үшбұрыштың катеттері, $||x + y||$ оның гипотенузасы ретінде қарастырылады. Норманың анықтамасы бойынша:

$$||x + y||^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) =$$
$$= (x, x) + (y, y) = ||x||^2 + ||y||^2.$$

Теорема дәлелденді.

4.6-теорема. Ортонормалданған $l_1, l_2, ..., l_n$ векторлар жүйесі сызықты тәуелсіз.

Дәлелдеуі. Берілген векторлардың сызықты тәуелсіз екенін дәлелдеу үшін

$$c_1 \cdot l_1 + ... + c_n \cdot l_n = 0 \tag{4.8}$$

теңдеуді қарастырып, оның тек $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$ болғанда ғана орындалатынын дәлелдесек жеткілікті. Ол үшін (4.8) теңдеудің екі жағында l_i векторына скаляр көбейтелік, яғни:

$$(c_1 \cdot l_1 + ... + c_n \cdot l_n, l_i) = 0, \ i = \overline{1, n}.$$

Осыдан

$$c_1 \cdot (l_1, l_i) + c_2 \cdot (l_2, l_i) + ... + c_n \cdot (l_n, l_i) = 0, \ i = \overline{1, n}.$$

i-дің біртіндеп 1, 2, . . ., n мәндерін қабылдағанын және $l_1, ..., l_n$ ортонормалданған векторлар екенін ескерсек, онда $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$. Теорема дәлелденді.

4.7-теорема. Егер евклид R кеңістігіндегі $a_1, a_2, ..., a_k$, $a_i \neq 0$, $i = \overline{1, k}$ сызықты тәуелсіз векторлар жүйесі болса, онда оған сызықты тәуелді $l_1, l_2, \ldots, l_k$ ортогоналды векторлар жүйесі мына төмендегі

$$l_1 = a_1 \neq 0,\ l_i = a_i + \alpha_{i1} l_1 + \ldots + \alpha_{ii-1} l_{i-1},\ i = \overline{2, k} \quad (4.9)$$

формулалармен өрнектеледі, мұндағы

$$\alpha_{ij} = -\frac{(a_i, l_j)}{(l_i, l_i)},\ i = \overline{2, k},\ j = \overline{1, i-1}. \quad (4.10)$$

Дәлелдеуі. Теореманы индукция әдісімен дәлелдейміз. Іздеп отырған l_1 векторын берілген a_1 векторға тең деп аламыз: $l_1 = a_1 \neq 0$, ал l_2 векторды

$$l_2 = a_2 + \alpha_{21} l_1 \quad (4.11)$$

теңдеуінен анықтаймыз, мұндағы α_{21} белгісіз тұрақты коэффициент. Егер $l_2 = 0$ болса, онда a_1, a_2 векторлары сызықты тәуелді, ал бұл теореманың шартына қарама қайшы, себебі a_1, a_2 сызықты тәуелсіз. Сондықтан, $l_2 \neq 0$. Белгісіз α_{21} коэффициентті табу үшін (4.11) теңдікті $l_1 \neq 0$ векторына скаляр көбейтеміз:

$$(l_2, l_1) = (a_2, l_1) + \alpha_{21} (l_1, l_1).$$

Іздеп отырған l_2 вектор белгілі $l_1 = a_1$ векторына ортогонал болу керек: $(l_2, l_1) = 0$. Онда

$$\alpha_{21} = -\frac{(a_2, l_1)}{(l_1, l_1)}.$$

Сонымен, (4.9), (4.10) формулалардың $i = 2, j = 1$ тең жағдайлары дәлелденді.

$l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}$ ортогонал векторларын (4.9)-дан, оның $\alpha_{ij}, i = \overline{2, k-1}, j = \overline{1, i-1}$ коэффициенттерін (4.10) формула- мен өрнектелетіндей етіп e_k векторын ізделік. Ол e_k векторды

$$l_k = a_k + \alpha_{k1} l_1 + \ldots + \alpha_{kk-1} l_{k-1} \quad (4.12)$$

теңдігінен анықтаймыз, мұндағы α_{kj}, $j = \overline{1, k-1}$ белгісіз тұрақты коэффициенттер. Егер $l_k = 0$ болса, онда $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ векторлары сызықты тәуелді, ал ол теореманың шартына қарама қайшы. Ендеше, $l_k \neq 0$. Белгісіз α_{kj}, $j = \overline{1, k-1}$ тұрақты коэффициенттерді табу үшін, (4.12) теңдеуді $l_1, l_2, \ldots, l_{k-1}$ векторларына біртіндеп скаляр көбейтіп және $l_1, l_2, \ldots, l_k$ ортогонал векторлар екенін

ескеріп, белгісіз α_{kj}, $j = \overline{1, k-1}$ коэффициенттері (4.10), $i = k$, $j = \overline{1, k-1}$ формулалардан анықталатынын дәлелдейміз. Теорема дәлелденді.

4.7-теореманы дәлелдеу әдісін, яғни берілген сызықты тәуелсіз векторлар жүйесінен ортогоналды векторлар жүйесін құру әдісі, *ортогонализациялаутәсілі* деп аталады.

4.8-теорема. Егер евклид кеңістігіндегі $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $a_i \neq 0$, $i = \overline{1, k}$ ортогоналды векторлар жүйесі болса, онда оған сызықты тәуелді $l_1, l_2, \ldots, l_k$ ортонормалданған векторлар жүйесін мына төмендегі

$$l_i = \frac{a_i}{\|a_i\|},\ i = \overline{1, k} \quad (4.13)$$

формулалармен өрнектеуге болады.

Дәлелдеуі. Теореманы дәлелдеу үшін (4.13) формулалармен өрнектелген l_i, $i = \overline{1, k}$ ортонормалданған векторлар жүйесі екенін дәлелдесек жеткілікті. Шынында да, егер $i \neq j$ болса, онда:

$$(l_i, l_j) = \left(\frac{a_i}{\|a_i\|}, \frac{a_j}{\|a_j\|}\right) = \frac{(a_i a_j)}{\|a_i\| \cdot \|a_j\|} = 0,$$

ал егер $i = j$ болса, онда

$$(l_i, l_i) = \frac{(a_i, a_i)}{\|a_i\|^2} = 1.$$

Теорема дәлелденді.

4.9-теорема. Кез келген n өлшемді евклид Rкеңістігінде n вектордан құрылған ортонормалданған базис бар.

Дәлелдеуі. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ векторлар жүйесі евклид R кеңістігінің базисі болсын делік. Сондықтан, 4.7-теорема бойынша $a_1, a_2, \ldots, a_n$ векторларына сызықты тәуелді $b_1, \ldots, b_n$ ортогонал векторлар жүйесін құрамыз: $(b_i, b_j) = 0$, $i \neq j$. Енді 4.8-теореманы пайдаланып, $b_1, \ldots, b_n$ векторларына сызықты тәуелді $l_1, l_2, \ldots, l_n$ ортонормалданған вектор жүйесін құрамыз, ал ол жүйе 4.6-теорема бойынша сызықты тәуелсіз, яғни $l_1, l_2, \ldots, l_n$ евклид R кеңістігінің ортонормалды базисі. Теорема дәлелденді.

Мысал. $[-1, 1]$ сегментте анықталған дәрежесі үштен аспайтын көпмүшеліктер кеңістігіндегі ортогонал базисті табалық.

Ортогонал базисті табу үшін

$$f_0(t) = 1,\ f_1(t) = t,\ f_2(t) = t^2,\ f_3(t) = t^3$$

элементтерін базис ретінде қарастыралық. Енді $1, t, t^2, t^3$ элементтеріне сызықты тәуелді $g_0(t)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$, $g_3(t)$ ортогонал базис ізделік. (4.9) формула бойынша:

$$g_0(t) = f_0(t) = 1, \quad g_1(t) = f_1(t) + \alpha_{10} \cdot g_0(t),$$

мұндағы

$$\alpha_{10} = -\frac{(f_1, g_0)}{(g_0, g_0)} \cdot = \frac{-(f_1, g_0)}{2} = 0.$$

Сонымен,

$$g_1(t) = f_1(t) = t.$$

(4.9) формуладан

$$g_2(t) = f_2(t) + \alpha_{21} \cdot g_1(t) + \alpha_{20} \cdot g_0(t),$$

мұндағы

$$\alpha_{20} = -\frac{(f_2, g_0)}{(g_0, g_0)} = -\int_{-1}^{1} t^2 \frac{dt}{2} = -\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3},$$

$$\alpha_{21} = -\frac{(f_2, g_1)}{(g_1, g_1)} = -\int_{-1}^{1} 3t^3 \frac{dt}{2} = 0.$$

Сонымен,

$$g_2(t) = t^2 - \frac{1}{3}.$$

Ең соңында (4.9) формуладан:

$$g_3(t) = f_3(t) + \alpha_{32} \cdot g_2(t) + \alpha_{31} \cdot g_1(t) + \alpha_{30} \cdot g_0(t),$$

мұндағы

$$\alpha_{30} = -\frac{(f_3, g_0)}{(g_0, g_0)} = -\int_{-1}^{1} t^3 \frac{dt}{2} = 0,$$

$$\alpha_{31} = -\frac{(f_3, g_1)}{(g_1, g_1)} = -\int_{-1}^{1} 3t^4 \frac{dt}{2} = -\frac{3}{5},$$

$$\alpha_{32} = -\frac{(f_3 g_2)}{(g_2, g_2)} = -\int_{-1}^{1} \frac{3}{2}\left(t^5 - \frac{t}{3}\right)^3 dt = 0,$$

Сонымен,

$$g_3(t) = t^3 - \frac{3t}{5}.$$

§ 4.4. Ортонормалданған базисте координаттарымен өрнектелген екі вектордың скаляр көбейтіндісі

4.10-теорема. Евклид R_n кеңістігіндегі кез келген екі вектордың $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R_n$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in R_n$ скаляр көбейтіндісі

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad (4.14)$$

формуламен өрнектелу үшін, оның $l_1, l_2, \ldots, l_n$ базисі ортонормалданған болуы қажетті әрі жеткілікті.

Қажеттілігі. (4.14) формула орындалсын деп, $l_1, l_2, \ldots, l_n$ базис ортонормалданған болуын дәлелдейік. x пен y векторларын берілген базисте жіктелік:

$$x = x_1 \cdot l_1 + \ldots + x_n \cdot l_n, \quad y = y_1 \cdot l_1 + \ldots + y_n \cdot l_n.$$

(4.14) формуладан

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = (x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i l_i, \sum_{j=1}^{n} y_j l_j\right) = x_1 y_1 \cdot (l_1, l_1) +$$

$$+ x_2 y_1 \cdot (l_2, l_1) + \ldots + x_n y_1 \cdot (l_n, l_1) + x_1 y_2 \cdot (l_1, l_2) +$$

$$+ x_2 y_2 \cdot (l_2, l_2) + \ldots + x_n y_2 \cdot (l_n, l_2) + \ldots + x_1 y_n \cdot (l_1, l_n) +$$

$$+ x_2 y_n \cdot (l_2, l_n) + \ldots + x_n y_n \cdot (l_n, l_n),$$

яғни

$$\sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \cdot (l_i, l_j) = x_1 \cdot y_1 + \ldots + x_n \cdot y_n.$$

Соңғы теңдіктің орындалуы үшін евклид R_n кеңістігінің базисі ортонормалданған болуы жеткілікті:

$$(l_i, l_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Жеткіліктігі. Евклид R_n кеңістігінің $l_1, l_2, \ldots, l_n$ базисі ортонормалданған болсын деп ұйғарып, (4.14) формуланы дәлелделік. Ол үшін x пен y векторларының скаляр көбейтіндісін қарастырамыз:

$$(x, y) = (x_1 \cdot l_1 + \ldots + x_n \cdot l_n, y_1 \cdot l_1 + \ldots + y_n \cdot l_n) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i \cdot y_j (l_i, l_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_1 (l_i, l_1) + \sum_{i=1}^{n} x_i y_2 \cdot (l_i, l_2) + \ldots +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} x_i y_n (l_i, l_n) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=z}^{n} x_i y_i .$$

Теорема дәлелденді.

4.11-теорема. Евклид R_n кеңістігіндегі $l_1, l_2, \ldots, l_n$ ортонормалданған базисте $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R_n$ вектордың координаттары $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$x_i = (x, l_i),\ i = \overline{1, n} \qquad (4.15)$$

формуламен өрнектеледі.

Дәлелдеуі. Берілген $x \in R_n$ векторды $l_1, \ldots, l_n$ базис бойынша жіктейік:

$$x = x_1 \cdot l_1 + \ldots + x_n \cdot l_n.$$

Осы жіктеудің екі жағында l_i векторына скаляр көбейтсек және $l_1, l_2, \ldots, l_n$ ортонормалданған векторлар жүйесі екенін ескерсек, онда

$$(x, l_i) = x_1 (l_1, l_i) + x_2 (l_2, l_i) + \ldots + x_n (l_n, l_i) = x_i.$$

Теорема дәлелденді.

§ 4.5. Ортогонал толықтауыш

Анықтама. Егер кез келген $x \in R_1$ векторы кез келген $y \in R_2$ векторына ортогонал болса, яғни $(x, y) = 0$, онда евклид R кеңістігінің екі ішкі R_1 мен R_2 кеңістіктерін: $R_1 \in R, R_2 \in R$ өзара ортогонал деп атаймыз, яғни $R_1 \perp R_2$.

4.12-теорема. Евклид R кеңістігінің ішкі R_1 мен R_2 кеңістіктегі бір-бірімен ортогонал болу үшін, яғни $R_1 \perp R_2$, R_1 кеңістігінің барлық базистері R_2 кеңістігінің барлық базистеріне ортогонал болуы қажетті әрі жеткілікті.

Қажеттілігі. R_1 мен R_2 кеңістіктері өзара ортогонал болсын деп ұйғарайық, яғни $R_1 \perp R_2$. Онда анықтама бойынша R_1 кеңістігінің барлық базистері R_2 кеңістігінің барлық базистеріне ортогонал болады.

Жеткіліктілігі. $l_1, l_2, \ldots, l_k$ векторлар жүйесі R_1 кеңістігінің базисі, ал $f_1, f_2, \ldots, f_m - R_2$ кеңістгінің базисі болсын және $(l_i, f_j) = 0$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, m}$ теңдіктері орындалсын деп есептелік. Енді кез келген $x = (x_1, \ldots, x_k) \in R_1$, $y = (y_1, \ldots, y_m) \in R_2$ векторлардың сәйкес базистерде жіктеулерін

$$x = x_1 \cdot l_1 + \ldots + x_k \cdot l_k, \quad y = y_1 \cdot f_1 + \ldots + y_m \cdot f_m$$

алып, олардың скаляр көбейтіндісін қарастыралық. Онда

$$(x, y) = (x_1 \cdot l_1 + \ldots + x_k \cdot l_k, y_1 \cdot f_1 + \ldots + y_m \cdot f_m) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j (l_i, f_j) = 0,$$

яғни кез келген $x \in R_1$, $y \in R_2$ векторлары ортогонал немесе $R_1 \perp R_2$. Теорема дәлелденді.

4.13-теорема. Егер евклид R кеңістігінің екі ішкі R_1 мен R_2 кеңістіктері өзара ортогонал болса: $R_1 \perp R_2$, онда олардың қиылысуы нөл вектор болады: $R_1 \cup R_2 = 0$.

Дәлелдеуі. Кез келген x вектор $R_1 \cup R_2$ кеңістігінің элементі болсын деп ұйғаралық, яғни $x \in R_1 \cup R_2$. Онда $x \in R_1$, $x \in R_2$ және $(x, x) = 0$. Бұдан $x = 0$. Теорема дәлелденді.

Айталық, евклид R кеңістігінің кез келген ішкі R_1 кеңістігі берілсін: $R_1 \subset R$, ал $l_1, l_2, \ldots, l_k$ оның ортонормалданған базисі болсын делік. Енді ол базисті евклид R кеңістігінің ортонормалданған базисіне дейін толықтыралық, яғни $l_1, \ldots, l_k\, l_{k+1}, \ldots, l_n$, мұндағы $n = \dim R$, $k = \dim R_1$. $l_{k+1}, l_{k+2}, \ldots, l_n$ векторлар жүйесі евклид R кеңістігінің өлшемі $(n - k)$-ға тең ішкі R_2 кеңістігін құрастырады, яғни $R_2 \subset R$, $n - k = \dim R_2$.

4.14-теорема. Егер кез келген $x \in R$ вектор ішкі R_1 кеңістігінің кез келген векторына ортогонал болса: $x \perp R_1$, онда x ішкі R_2 кеңістігінің векторы: $x \in R_2$.

Дәлелдеуі. Теореманың шарты бойынша $x = x_1 \cdot l_1 + \ldots + x_n \cdot l_n \in R$ және $x \perp R_1$, яғни $(x, l_i) = 0$, $i = \overline{1, k}$.

Енді x вектордың жіктелуінің екі жағында l_i, $i=\overline{1,k}$ векторларына біртіндеп скаляр көбейтелік:

$$(x,l_i)=x_1\cdot(l_1,l_i)+\ldots+x_k\cdot(l_k,l_i)+x_{k+1}\cdot(l_{k+1},l_i)+$$
$$+\ldots+x_n\cdot(l_n,l_i),\ i=\overline{1,k}.$$

Егер $l_1,l_2,\ldots,l_n$ ортонормалданған векторлар және $(x,l_i)=0$ екенін ескерсек, онда

$$(x,l_i)=x_i=0,\ i=\overline{1,k}.$$

Демек, x вектордың жіктелуі мына түрде жазылады: $x=x_{k+1}\cdot l_{k+1}+\ldots+x_n\cdot l_n$. Бұдан, $x\in R_2$. Теорема дәлелденді.

Анықтама. Егер $x\in R$ векторлар жиыны ішкі R_1 кеңістігінің кез келген векторына ортогонал болса, онда ондай $x\in R$ векторлар жиынын $R_2=(x\in R: x\perp R_1)$ ішкі R_1 кеңістігінің *ортогонал толықтауышы* деп атаймыз, ал ол ішкі R_2 кеңістікті $R_1^{\perp}$ символымен белгілейміз $R_2=(x\in R: x\perp R_1)=R_1^{\perp}$, мұндағы $\perp$ — перпендикуляр таңбасы.

4.15-теорема. Егер $R_1\subset R$ және $\dim R_1=k$, $\dim R=n$, онда $\dim R_1^{\perp}=n-k$ немесе $\dim R=\dim R_1+\dim R_1^{\perp}$.

Дәлелдеуі. $a_1,a_2,\ldots,a_k$ векторлар жиыны ішкі R_1 кеңістігінің базисі, ал $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\ldots,\alpha_{in}$ нақты сандар жиыны a_i вектордың координаттары болсын деп ұйғаралық: $a_i=(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\ldots,\alpha_{in})$, $i=\overline{1,k}$.

$l_1,l_2,\ldots,l_n$ векторлар жиыны евклид R кеңістігінің ортонормалданған базисі болсын (4.9-теорема). Онда:

$$x=x_1\cdot l_1+\ldots+x_n\cdot l_n,\ a_i=\alpha_{i1}\cdot l_1+\ldots+\alpha_{in}\cdot l_n,\ i=\overline{1,n}, \tag{4.16}$$

мұндағы $x_1,\ldots,x_n$ берілген $x\in R$ вектордың координаттары.

Берілген вектор $x=(x_1,\ldots,x_n)$ ішкі $R_1^{\perp}$ кеңістігінің элементі болу үшін, яғни $x\in R_1^{\perp}$,

$$(x,a_i)=0,\ i=\overline{1,k} \tag{4.17}$$

теңдіктердің орындалуы қажетті әрі жеткілікті (4.12-теорема). Енді (4.16) формулаларды (4.17) теңдіктерге қойып, және $l_1,l_2,\ldots,l_n$ ортонормалданған векторлар екенін ескерсек, онда

$$\begin{cases}\alpha_{11}\cdot x_1+\ \alpha_{12}\cdot x_2\ +\ldots+\alpha_{1n}\cdot x_n=0,\\ \alpha_{21}\cdot x_1+\ \alpha_{22}\cdot x_2\ +\ldots+\alpha_{2n}\cdot x_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_{k1}\cdot x_1+\ \alpha_{k2}\cdot x_2\ +\ldots+\alpha_{kn}\cdot x_n=0,\end{cases} \tag{4.18}$$

мұндағы $x_1,x_2,\ldots,x_n$ вектор x-тің координаттары. Бұл (4.18) біртекті сызықты теңдеулер жүйенің матрицасының рангісі k. Сондықтан, (4.18) жүйенің $(n-k)$ сызықты тәуелсіз шешімі бар. Олай болса, $\dim R_1^{\perp}=n-k$. Теорема дәлелденді.

4.13, 4.15-теоремаларды ескеріп, мына төмендегі тұжырымға келеміз.

4.16-теорема. Евклид R кеңістігі өзінің кез келген ішкі R_1 кеңістігімен оның $R_1^{\perp}$ортогонал толықтауышының тұра қосындысына тең:

$$R=R_1\oplus R_1^{\perp}.$$

§ 4.6. Евклид кеңістіктерінің изоморфтылығы

Анықтама. Егер екі евклид R мен R' кеңістіктерінің элементтері (векторлары) арасында бір мәнді сәйкестік анықталып: $x\leftrightarrow x'$, $x\in R$, $x'\in R'$, төмендегі шарттар орындалса, онда олар *изоморфты* болады. Бұл жағдайда:

1) егер R кеңістігінің x,y элементтеріне R' кеңістігінің x',y' элементтері сәйкес келсе: $x\leftrightarrow x', y\leftrightarrow y'$, онда $x+y\in R$ элементіне $x'+y'\in R'$ элементі сәйкес келеді,

2) егер $x\leftrightarrow x'$, онда $\alpha\cdot x\leftrightarrow\alpha\cdot x'$, мұндағы α — кез келген нақты сан,

3) егер $x\leftrightarrow x', y\leftrightarrow y'$, онда $(x,y)=(x',y')$.

Сонымен, олар сызықты кеңістіктер ретінде изоморфты болса және олардың екі сәйкес элементтерінің (векторларының) скаляр көбейтінділері өзара тең болса, онда екі Евклид R мен R' кеңістіктері изоморфты болады.

4.17-теорема. Бірдей өлшемді барлық евклид кеңістіктері өзара изоморфты.

Дәлелдеуі. Теормеманы дәлелдеу үшін барлық n-өлшемді евклид кеңістіктері арнаулы алынған бір n-өлшемді евклид кеңістігіне изоморфты болатынын дәлелдесек жеткілікті. Бұл арнаулы n-өлшемді евклид R' кеңістігі ретінде 4.1-тақырыптағы 2-мысалды қарастырайық, яғни онда x' вектор кез келген n нақты

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ сандарының жиыны: $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ал $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R'$, $y' = (y_1, \ldots, y_n) \in R'$ векторларының скаляр көбейтіндісі (4.2) формуламен өрнектеледі, яғни

$$(x', y') = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

n-өлшемді евклид R кеңістігін қарастыралық, ал $l_1, l_2, \ldots, l_n$ векторлар жүйесі оның ортонормалды базисі болсын деп ұйғаралық. $x = x_1 \cdot l_1 + \ldots + x_n \cdot l_n \in R$ векторға нақты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ сандар жиынын, яғни $x' = (x_1, \ldots, x_n) \in R'$ векторын сәйкестендірейік. Бұл келтірілген сәйкестік бір мәнді. Енді оның изоморфты екенін дәлелдейік. Ол үшін анықтамадағы үш шартты тексерсек жеткілікті. Бірінші мен екінші шарттар орындалады. Үшінші шартты тексерелік. $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R$ мен $y = (y_1, \ldots, y_n) \in R$ векторларының скаляр көбейтіндісі 4.10-теорема бойынша мына формуламен өрнектеледі:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

ал $x' = (x_1, \ldots, x_n) \in R'$ пен $y' = (y_1, \ldots, y_n) \in R'$ векторлардың скаляр көбейтіндісі 4.1-тақырыптағы 2-мысал бойынша (4.2) формуламен өрнектеледі:

$$(x', y') = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Сонымен, $(x, y) = (x', y')$. Теорема дәлелденді.

§ 4.7. Евклид кеңістігіндегі сызықты функция

Анықтама. Евклид R кеңістігінде анықталған функция $f(x)$ *сызықты* деп аталады, егер

1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $x \in R$, $y \in R$,
2) $f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$, α — тұрақты сан.

4.18-теорема. Егер $l_1, l_2, \ldots, l_n$ евклид R кеңістігінің ортонормалданған базисі болса, онда R кеңістігінде анықталған сызықты $f(x)$ функцияға және оның базисіне тәуелді векторы $a \in R$ табылып, ол $f(x)$ функция x пен a векторларының скаляр көбейтіндісіне тең болады:

$$f(x) = (x, a), \tag{4.19}$$

мұндағы $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a_i = f(l_i)$, $i = \overline{1, n}$.

Дәлелдеуі. (4.19) формуладан: $f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = (\alpha \cdot x + \beta \cdot y, a) = \alpha (x, a) + \beta (y, a) = \alpha f(x) + \beta \cdot f(y)$, яғни (4.19) формуламен өрнектелген $f(x)$ сызықты функция. Енді (4.19) формуланы дәлелделік. Егер $x = x_1 \cdot l_1 + \ldots, + x_n \cdot l_n$ евклид R кеңістігінің кез келген векторы болса, онда

$$f(x) = f(x_1 \cdot l_1 + \ldots + x_n \cdot l_n) = x_1 \cdot f(l_1) + \ldots + x_n \cdot f(l_n). \tag{4.20}$$

Енді $f(l_i)$, $i = \overline{1, n}$ мәндерін a_i деп белгілеп: $f(l_i) = a_i$, $i = \overline{1, n}$, (4.20) теңдікті басқаша

$$f(x) = x_1 a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_n \cdot a_n \tag{4.21}$$

формула түрінде жазамыз. Егер $a_1, a_2, \ldots, a_n$ мәндерін $a \in R$ вектордың координаттары десек, онда (4.21) теңдіктен (4.19) формуланы аламыз:

$$f(x) = (x, a),$$

мұндағы $a = a_1 \cdot l_1 + a_2 \cdot l_2 + \ldots + a_n \cdot l_n$, ал $f(l_i) = (l_i, a) = (l_i, a_1 \cdot l_1 + \ldots + a_n \cdot l_n) = a_i$, $i = \overline{1, n}$.

Ең соңында, евклид R кеңістігінде берілген ортонормалданған базиске немесе берілген $a \in R$ векторға тән тек бір ғана (4.19) формуламен өрнектелген сызықты функция болатынын дәлелдейік. Ол үшін, керісінше, $a \in R$ мен $b \in R$ векторларына тек бір ғана $f(x)$ сызықты функция тән болсын деп ұйғаралық, яғни $(x, a) = (x, b)$, $x \in R$. Бұдан $(x, a) - (x, b) = 0$ немесе $(x, a - b) = 0$. Егер $x = a - b$ болса, онда $(a - b, a - b) = 0$, яғни $a - b = 0$ немесе $a = b$. Теорема дәлелденді.

§ 4.8. Комплексті евклид кеңістіктері

1. Комплексті евклид кеңістігінің анықтамасы. Комплексті сызықты R кеңістік *комплексті евклид* немесе *унитар* кеңістігі деп аталады, егер кез келген екі $x, y \in R$ элементіне скаляр көбейтіндісі деп аталатын (x, y) комплексті сан сәйкес келіп, оған мына төмендегі аксиомалар орындалса:

1). $(x, y) = \overline{(y, x)}$, мұндағы $\overline{\alpha}$ саны α комплексті санының түйіндесі,
2). $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,
3). $(\alpha \cdot x, y) = \alpha \cdot (x, y)$,
4). $(x, x) > 0$, егер $x \neq 0$.

Скаляр көбейтіндінің 1) — 3) аксиомаларын пайдаланып, оның төмендегі қасиеттерін дәлелделік:

1. $(x, \alpha \cdot y) = \overline{\alpha} \cdot (x, y)$,
2. $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$.

Шынында да,
1. $(x, \alpha \cdot y) = \overline{(\alpha \cdot y, x)} = \overline{\alpha} \cdot \overline{(y, x)} = \overline{\alpha} \cdot (x, y)$,

2. $(x, y + z) = \overline{(y + z, x)} = \overline{(y, x)} + \overline{(z, x)} = (x, y) + (x, z)$.

Мысалдар. 1. $[a, b]$ сегментінде анықталған комплексті $z(t) = x(t) + iy(t)$ функциялар $C_{[a,b]}$ жиынын қарастыралық, мұндағы $x(t), y(t)$ $[a, b]$ сегментінде анықталған және үзіліссіз функциялар.

Комплексті $z_1(t), z_2(t)$ функциялардың скаляр көбейтіндісін төмендегі формуламен өрнектейміз:

$$(z_1, z_2) = \int_a^b z_1(t) \cdot \overline{z}_2(t)\, dt, \tag{4.22}$$

мұндағы $z_2(t) = x_2(t) + iy_2(t)$, $\overline{z}_2(t) = x_2(t) - iy_2(t)$.

(4.22) скаляр көбейтіндіге жоғарыдағы 1) — 4) аксиомаларды тексерелік, яғни:

1) $$(z_2, z_1) = \int_a^b z_2 \cdot \overline{z}_1\, dt = \int_a^b \overline{z}_2 \cdot z_1\, dt = \int_a^b z_1 \cdot \overline{z}_2\, dt = (z_1, z_2);$$

2) $$(z_1 + z_2, z_3) = \int_a^b (z_1 + z_2) \cdot \overline{z}_3\, dt = \int_a^b z_1 \cdot \overline{z}_3\, dt + \int_a^b z_2 \cdot \overline{z}_3\, dt =$$
$$= (z_1, z_3) + (z_2, z_3);$$

3) $$(\alpha z_1, z_2) = \int_a^b \alpha z_1 \cdot \overline{z}_2\, dt = \alpha \int_a^b z_1 \overline{z}_2\, dt = \alpha (z_1, z_2);$$

4) $$(z, z) = \int_a^b z \cdot \overline{z}\, dt = \int_a^b |z|^2\, dt > 0, \text{ егер } z \neq 0.$$

Сонымен, скаляр көбейтіндісі (4.22) формуламен өрнектелген $C_{[a,b]}$ жиыны комплексті евклид кеңістігі.

2. Комплексті $x_1, x_2, \ldots, x_n$ сандар x вектордың координаттары деп есептеп, осындай векторлардың жиынын қарастыралық. Екі $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ векторлардың скаляр көбейтіндісін төмендегі түрде өрнектейміз:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i\ . \tag{4.23}$$

Енді (4.23) формуламен өрнектелген скаляр көбейтіндіні тексерелік, яғни:

1). $$\overline{(y, x)} = \overline{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i \overline{x}_i\right)} = \sum_{i=1}^{n} \overline{y}_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i = (x, y)\ ,$$

2). $$(x + y, z) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) \overline{z}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{z}_i + \sum_{i=1}^{n} y_i \overline{z}_i = (x, z) + (y, z),$$

3). $$(\alpha \cdot x, y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha x_i \overline{y}_i = \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i = \alpha \cdot (x, y),$$

4). $$(x, x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x}_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 > 0\ ,\ 0, \text{ мұндағы } x \neq 0.$$

Сонымен, скаляр көбейтіндісі (4.23) формуламен өрнектелген векторлар жиыны комплексті евклид кеңістігі.

2. Коши теңсіздігі. Кез келген $x, y R$ элементіне

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x) \cdot (y, y) \text{ немесе } |(x, y)| \leq ||x|| \cdot ||y||$$

теңсіздігі орындалады.

Шынында да, егер α комплексті сан болса, онда

$$(x - \alpha y, x - \alpha y) \geq 0$$

немесе

$$(x - \alpha y, x - \alpha y) = (x, x) - (\alpha y, x) - (x, \alpha y) + (\alpha y, \alpha y) =$$
$$= (x, x) - \alpha \cdot (y, x) - \overline{(\alpha y, x)} + \alpha (y, \alpha y) = (x, x) - \alpha (y, x) -$$
$$- \overline{\alpha} (x, y) + \alpha \cdot \overline{\alpha} (y, y) \geq 0.$$

α комплексті санды мына түрде алайық:

$\alpha = \beta (x, y)/|(x, y)|$, мұндағы β — кез келген нақты сан. $(x, y) \cdot (x, y) = |(x, y)|^2$ теңдікті ескеріп, соңғы теңсіздіктен

$$||x||^2 - 2\beta\,|(x, y)| + \beta^2\,||y||^2 \geq 0$$

теңсіздігін аламыз. Бұл β-ға байланысты үшмүшелік және оның коэффициенттері нақты сандар. Олай болса, оның теріс болмауы үшін бұл квадратты үшмүшеліктің дискриминанты оң болмауы керек, яғни

$$|(x, y)|^2 - ||x||^2 \cdot ||y||^2 \leq 0, \quad |(x, y)| \leq ||x|| \cdot ||y||.$$

3. Ортонормалданған базисте координаттарымен өрнектелген екі вектордың скаляр көбейтіндісі. Егер $l_1, l_2, \ldots, l_n$ комплексті евклид R_n кеңістігінің ортонормалданған базисі болса, онда оның кез келген $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R_n$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in R_n$ векторларының скаляр көбейтіндісі мына төмендегі

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i \tag{4.24}$$

формуламен өрнектеледі.

Шынында да, $x = x_1 \cdot l_1 + \ldots + x_n \cdot l_n$ мен $y = y_1 \cdot l_1 + \ldots + y_n \cdot l_n$ векторларының скаляр көбейтінділерін қарастырып және скаляр көбейтіндінің аксиомаларын ескеріп, (4.24) формуланы аламыз, яғни:

$$(x, y) = (x_1 \cdot l_1 + \ldots + x_n \cdot l_n, y_1 \cdot l_1 + \ldots + y_n \cdot l_n) =$$

$$= [(x_1 \cdot l_1, y_1 \cdot l_1) + \ldots + (x_n \cdot l_n, y_1 \cdot l_1)] + [(x_1 \cdot l_1, y_2 \cdot l_2) + \ldots +$$

$$+ (x_n \cdot l_n, y_2 \cdot l_2)] + \ldots + [(x_1 \cdot l_1, y_n \cdot l_n) + \ldots + (x_n \cdot l_n, y_n \cdot l_n)] =$$

$$= x_1 \overline{y}_1 \cdot (l_1, l_1) + x_2 \overline{y}_1 \cdot (l_2, l_1) + \ldots + x_n \overline{y}_1 \cdot (l_n, l_1) +$$

$$+ x_1 \overline{y}_2 \cdot (l_1, l_2) + x_2 \overline{y}_2 \cdot (l_2, l_2) + \ldots + x_n \overline{y}_2 \cdot (l_n, l_2) + \ldots +$$

$$+ x_1 \overline{y}_n \cdot (l_1, l_n) + \ldots + x_{n-1} \overline{y}_n \cdot (l_{n-1} l_n) + x_n \overline{y}_n \cdot (l_n, l_n) =$$

$$= x_1 \cdot \overline{y}_1 + \ldots + x_n \cdot \overline{y}_n.$$