III Тарау. СЫЗЫҚТЫ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ

§ 3.1. Негізгі ұғымдар

Өткен тарауларда анықтауыштар мен матрицалар және сызықты кеңістіктер теорияларымен таныстық. Бұл теориялар сызықты теңдеулер жүйесін зерттеуге кеңінен қолданылады. Енді осы сызықты теңдеулер жүйесінде пайдаланылатын негізгі ұғымдар анықтамалары мен түсініктемелеріне тоқталамыз.

Белгісіз шамаларды $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — әріптерімен белгілейік. Осы белгісіз шамалар *сызықты* деп аталады, егер олар мына түрде өрнектелсе

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n = b,$$

мұндағы a_i мен b — кез келген белгілі нақты сандар, $i = \overline{1, n}$.

Бізге n белгісізі бар m сызықты теңдеулер жүйесі берілсін делік (белгісіздер саны n-ге, ал сызықты теңдеулер саны m-ге тең):

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m, \end{cases} \tag{3.1}$$

мұндағы a_{ij} — кез келген нақты сандар. x_i — белгісіз шамалар, ал b_i — бос мүшелер, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Берілген жүйедегі a_{ij} — осы жүйенің *коэффициенттері*, ал b_i бос мүшелері деп аталады. Жүйенің белгісіздерінің алдындағы коэффициенттер екі индекспен берілген, бірінші индексі осы коэффициентті қай теңдеудің коэффициенті болатынын, ал екіншісі қай белгісіздің коэффициенті болатынын анықтайды. Бос мүшелер бір индекспен берілген және ол берілген жүйенің қай теңдеуінің бос мүшесі болатынын білдіреді. Мысалы, a_{ij} коэффициенті i сызықты теңдеуіндегі x_j белгісізінің алдындағы коэффициент, b_i бос мүше i сызықты теңдеуінің бос мүшесі.

Енді (3.1) сызықты теңдеулер жүйесінің коэффициенттерінен анықталған мына матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

(3.1) жүйенің *матрицасы* немесе *негізгі матрицасы* деп аталады және ол m жатық, n тік жолдардан анықталған.

Сызықты теңдеулер жүйесінің бос мүшелерін A матрицасының $n+1$ тік жолы етіп алсақ, онда мына матрицаны аламыз:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1n}\, b_1 \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2n}\, b_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\, a_{m2} \dots a_{mn}\, b_m \end{pmatrix},$$

бұл матрица (3.1) жүйенің *кеңейтілген (ұлғайтылған) матрицасы* деп аталады. Кеңейтілген матрица m жатық, $n+1$ тік жолдардан анықталған.

Жүйенің белгісіздерінен анықталған мына матрица

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

жүйенің *тік жолды белгісіздер матрицасы* (n-жатық, бір тік жолдары бар), ал

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}$$

жүйенің *тік жолды бос мүшелер матрицасы* (m жатық, бір тік жолдары бар) деп аталады.

Берілген (3.1) жүйені вектор түрінде жазып, кеңейтілген матрицаның тік жолдарын m-өлшемді сызықты кеңістіктегі $\overline{l_1}, \overline{l_2}, \dots, \overline{l_n}, \overline{b}$ векторларының координаттары деп қарастырайық:

$$\overline{l_k} = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mk} \end{pmatrix}, \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, n}. \qquad (3.2)$$

(3.1) сызықты теңдеулер жүйесі вектор түрде өрнектелінеді:

$$x_1 \cdot \overline{l_1} + x_2 \cdot \overline{l_2} + \dots + x_n \cdot \overline{l_n} = \overline{b}, \qquad (3.3)$$

мұндағы $x_1, x_2, \dots, x_n$ белгісіздерді b векторының $\overline{l_1}, \overline{l_2}, \dots, \overline{l_n}$ базисіндегі координаттары деп қарастырамыз.

Сызықты теңдеулер жүйесіндегі $b_1, b_2, \dots, b_m$ бос мүшелерінің кем дегенде біреуі нөлге тең болмаған жағдайда, жүйені *біртекті емес* сызықты теңдеулер жүйесі деп атайды. $b_1, b_2, \dots, b_m$ бос мүшелерінің бәрі нөлге тең болса, онда ол *біртекті* сызықты теңдеулер жүйесі деп аталады.

Жалпы жағдайда біртекті және біртекті емес сызықты теңдеулер жүйесіндегі теңдеулер саны мен белгісіздер саны тең $(m = n)$ немесе тең болмауы $(m \neq n)$ мүмкін. Теңдеулердің саны мен белгісіздердің саны тең болса, онда мұндай жүйені квадратты жүйе дейміз.

Анықтама. Егер $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$ — сандар жиыны теңдеулер жүйесіндегі теңдеулердің бәрін қанағаттындырса, онда осы сандар жиыны (3.1) сызықты теңдеулер жүйесінің *шешімі* деп аталады.

Егер (3.1) — сызықты теңдеулер жүйесінің кем дегенде бір шешімі бар болса, онда ол *үйлесімді жүйе*, ал егер бірде бір шешімі болмаса (жоқ болса), онда ол *үйлесімсіз жүйе* деп аталады. Мысалы, екі белгісізі бар біртекті емес екі сызықты теңдеулер жүйесін қарастырайық (квадратты жүйе: теңдеулер саны белгісіздер санына тең):

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Бұл жүйенің тек бір ғана шешімі (басқа шешімі жоқ) бар $x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = -\frac{1}{4}$. Демек, берілген жүйе үйлесімді. Мына квадратты жүйені қарастырайық:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1, \\ 3x_1 - 6x_2 = 3. \end{cases}$$

Бұл жүйе де үйлесімді. Себебі берілген жүйенің шексіз көп шешімі бар. Бірінші теңдеуді 3-ке көбейтіп, екінші теңдеуді аламыз. Демек, берілген жүйе негізінде екі белгісізі бар бір теңдеуден тұрады. Ал мұндай теңдеудің шексіз көп шешімі бар. Шынында, бірінші теңдеуден x_1-ді табайық:

$$x_1 = 1 + 2x_2.$$

x_2-ге кез келген мән берейік мысалы, $x_2 = \alpha$. Онда $x_1 = 1 + 2\alpha$ Сонымен, α-нің кез келген мәнінде

$$x_1 = 1 + 2\alpha,$$

$$x_2 = \alpha,$$

берілген жүйенің шексіз шешімі болады. Үйлесімсіз теңдеулер жүйесін қарастырайық:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1\,, \\ 2x_1 + x_2 = 3\,. \end{cases}$$

Бұл жүйенің үйлесімсіз болатыны жүйедегі екі теңдеудің де сол жағындағы өрнектер кез келген x_1 мен x_2-нің мәндерінде өзара тең, ал оң жағы өзара тең емес. Сондықтан бұл жүйенің бірде бір шешімі жоқ.

Жоғарыдағы анықтамалардан және мысалдардан мынаны байқаймыз: үйлесімді жүйенің тек бір ғана шешімі немесе бірден көп шешімі бар. Тек бір ғана шешімі бар жүйе *анықталған жүйе* деп аталады. Кем дегенде екі шешімі бар жүйе *анықталмаған жүйе* деп аталады. Жоғарыда қарастырылған бірінші мысал — анықталған жүйе, ал екінші мысал — анықталмаған жүйе.

§ 3.2. Крамер әдісі

n белгісізі бар біртекті емес n сызықты теңдеулер жүйесін қарастырайық:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1\,, \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + \ldots + a_{nn}\cdot x_n = b_n\,. \end{cases} \tag{3.4}$$

Берілген жүйенің белгісіздер саны теңдеулер санына тең, жүйенің негізгі матрицасы n жатық, n тік жолдардан тұрады. Сондықтан жүйенің негізгі матрицасы n-ретті квадрат матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

A матрицаның анықтауышы берілген *сызықты теңдеулер жүйесінің анықтауышы* деп аталады. (3.4) *жүйенің анықтауышы* нөлге тең болмасын, яғни $|A| \neq 0$.

Крамер әдісімен (3.4) жүйенің шешімін іздестірместен бұрын төмендегі шартты белгілеуге келісіп алайық. Берілген жүйенің

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,k-1} & a_{1k} & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,k-1} & a_{2k} & a_{2,k+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,k-1} & a_{nk} & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{3.6}$$

анықтауышының бірінші тік жолының элементтері x_1 белгісіздің коэффициенттері, ал екінші тік жолдың элементтері x_2 белгісіздің коэффициенттері т. с. с. Осы анықтауыштың кез келген тік жолының мысалы, к-тік жолының элементтерін (x_k белгісізінің коэффициенттерін) (3.4) жүйенің сәйкес бос мүшелерімен орын алмастырғанда алынған анықтауышты Δ_k таңбасымен белгілейік:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad k = \overline{1, n}. \tag{3.7}$$

3.1-теорема (Крамер теоремасы). Егер (3.4) біртекті емес сызықты теңдеулер жүйесінің негізгі матрицасының анықтауышы нөлге тең болмаса, онда ол анықталған жүйе. Бұл жүйенің шешімі Крамер формуласымен анықталады:

$$x_k = \Delta_k/|A|, \quad k = \overline{1, n}. \tag{3.8}$$

Дәлелдеу. Ең алдымен, (3.4) жүйе үйлесімді деп (3.8) формуланы дәлелдейік. Ол үшін, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ сандары берілген жүйенің шешімі болсын. $|A|$ анықтауышының k-тік жолының элементтерін x_k-ға көбейтейік (анықтауыштың 4-қасиеті):

$$|A|\cdot x_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k-1} & a_{1k}\cdot x_k & a_{1k+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2k-1} & a_{2k}\cdot x_k & a_{2k+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nk-1} & a_{nk}\cdot x_k & a_{nk+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{3.9}$$

Бұл анықтауыштың бірінші тік жолын x_1-ге, екінші тік жолын x_2-ге, т. с. с. n-тік жолын x_n-ге көбейтіп (k-тік жолын көбейтпейміз), k-тік жолына қосайық. Мұндай өрнектеу нәтижесінде анықтауыштың 7-қасиеті бойынша $|A| \cdot x_k$ анықтауышының мәні өзгермейді.

Сондай-ақ басқа тік жолдарының элементтері өзгермейді. Ал k-тік жолының бірінші элементі мына қосындыға

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{ik} \cdot x_k + \ldots + a_{1n} \cdot x_n$$

тең болады, мұндағы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ берілген (3.4) жүйенің шешімі болғандықтан, бұл сызықты комбинация b_1-ге тең. Осы сияқты мына тепе-теңдіктерді аламыз:

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_1 + \ldots + a_{2k} \cdot x_k + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \ldots + a_{nk} \cdot x_k + \ldots + a_{nn} \cdot x_n = b_n.$$

Осыдан және (3.7) формуланы ескеріп, (3.9) теңдігінің оң жағын мына түрге өрнектеуге болады

$$\begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots a_{2k-1} & b_2 & a_{2k+1} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nk-1} & b_n & a_{nk+1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_k .$$

Осыдан және (3.9) формуладан мына төмендегі диагоналды жүйені аламыз:

$$|A| \cdot x_k = \Delta_k, \ k = \overline{1, n}.$$

Сонымен, (3.4) жүйенің шешімі $x_1, x_2, \ldots, x_n$ диагоналды жүйенің де шешімі. Сондықтан, $\Delta \neq 0$ ескеріп жүйеден (3.8) Крамер формуласын аламыз.

Крамер формуласы (3.4) жүйенің шешімі екенін дәлелдейік. Ол үшін Крамер формуласын (3.4) жүйенің i-теңдеуіне апарып қоялық:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot x_k = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot \Delta_k}{\Delta}.$$

Δ_k анықтауышын k тік жолының элементтері арқылы жіктеп:

$$\Delta_k = b_1 \cdot A_{1k} + b_2 \cdot A_{2k} + \ldots + b_n \cdot A_{nk},$$

және 1.4 пен 1.5-теоремаларды ескеріп

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot x_k = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot \sum\limits_{j=1}^{n} b_j \cdot A_{jk}}{\Delta} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} b_j \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk}}{\Delta} =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\Big[b_1 (a_{i1} \cdot A_{11} + a_{i2} \cdot A_{12} + \ldots + a_{in} \cdot A_{1n}) + \ldots +$$

$$+ b_i (a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}) + \ldots +$$

$$+ b_n \left(a_{i1} \cdot A_{n1} + \ldots + a_{in} \cdot A_{nn}\right)\Big] = \frac{\Delta \cdot b_i}{\Delta} = b_i ,$$

яғни (3.8) формулалар (3.4) жүйенің тек бір ғана шешімі екеніне көз жеткіземіз. Теорема дәлелденді.

§ 3.3. Гаусс әдісі

Кез келген матрицаға элементар түрлендірулер қолданып үшбұрышты матрица аламыз. Гаусс әдісі негізінен берілген жүйенің кеңейтілген матрицасын үшбұрышты матрицаға түрлендіру. Сонда элементар түрлендіру арқылы алынған матрицалардың рангісі 1.12-теорема бойынша берілген жүйенің кеңейтілген матрицасының рангісіне тең. Басқаша айтақанда, берілген жүйенің кеңейтілген матрицасына эквивалентті үшбұрышты матрица аламыз. Сондықтан, берілген жүйені шешу үшін осы жүйенің кеңейтілген матрицасына элементар түрлендірулер арқылы алынған үшбұрышты матрицаға сәйкес жүйені шешсек жеткілікті.

Біз n белгісізі бар біртекті емес n сызықты теңдеулер жүйені Гаусс әдісімен шешейік:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 , \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2 , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n = b_n , \end{cases} \tag{3.10}$$

мұндағы $|A| \neq 0$ болсын.

Берілген жүйенің кеңейтілген матрицасын қарастырайық:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,n-1} & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,n-1} & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3,n-1} & a_{3n} & b_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} & b_{n-1} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,n-1} & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

Кеңейтілген матрицаны үшбұрышты матрицаға келтіру жолын бірнеше қадамға бөлейік.

1-қадам. Элементар түрлендірулер арқылы кеңейтілген матрицаның бірінші тік жолының a_{21} — екінші, a_{31} — үшінші, a_{41} — төртінші, т. с. с. a_{n1} — элементтерін нөлге айналдырайық. Алдымен a_{21} екінші элементін нөлге айналдырайық, яғни элементар түрлендірулер көмегімен a_{21} — элементінің орнына нөл алайық. Ол үшін матрицаның бірінші жатық жол элементтерін $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$-ге көбейтіп оларды екінші жатық жолдың сәйкес элементтеріне қосайық. Енді a_{31} — үшінші элементін нөлге айналдырайық. Ол үшін матрицаның бірінші жатық жол элементтрін $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$-ге көбейтіп оларды үшінші жатық жолдың сәйкес элементтеріне қосайық, т. с. с. Ең соңында бірінші жатық жол элементтерін $-\frac{a_{n1}}{a_{11}}$-ге көбейтіп, n жатық жолдың сәйкес элементтеріне қосайық. Сонда 1-қадамның нәтижесінде бірінші жатық жол мен бірінші тік жолдың қиылысуындағы x_1 белгісізінің коэффициенттерінің орнына элементар түрлендірулер көмегімен нөл аламыз:

$$\widetilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,n-1} & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a^{1}_{22} & \ldots & a^{1}_{2,n-1} & a^{1}_{2n} & b^{1}_2 \\ 0 & a^{1}_{32} & \ldots & a^{1}_{3,n-1} & a^{1}_{3n} & b^{1}_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a^{1}_{n-1,2} & \ldots & a^{1}_{n-1,n-1} & a^{1}_{n-1,n} & b^{1}_{n-1} \\ 0 & a^{1}_{n1} & \ldots & a^{1}_{n,n-1} & a^{1}_{nn} & b^{1}_n \end{array}\right).$$

2-қадам. Соңғы матрицаның бірінші жатық жолына элементар түрлендірулер қолданбаймыз. Енді матрицаның екінші тік жолының a'_{32} — үшінші, a'_{42} — төртінші, т. с.

с. a'_{n2} — элементтерін 1-қадамғыдай нөлге айналдырамыз. Сонда $\widetilde{A}$ — кеңейтілген матрицаға эквивалентті мына матрицаны аламыз:

$$\widetilde{A} \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1,n-1} & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a^{1}_{22} & a^{1}_{23} & \ldots & a^{1}_{2,n-2} & a^{1}_{2n} & b^{1}_2 \\ 0 & 0 & a^{2}_{33} & \ldots & a^{1}_{3,n-2} & a^{2}_{3n} & b^{2}_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & a^{2}_{n-1,3} & \ldots & a^{2}_{n-1,n-1} & a^{2}_{n-1,n} & b^{2}_{n-1} \\ 0 & 0 & a^{2}_{n3} & \ldots & a^{2}_{n,n-1} & a^{2}_{nn} & b^{2}_n \end{array}\right).$$

Осылайша, қадамдарды жалғастырып n - 1-қадамнан соң мына матрицаны аламыз:

$$\widetilde{A} \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n-1} & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a^{1}_{22} & a^{1}_{23} & \ldots & a^{1}_{2n-1} & a^{1}_{2n} & b^{1}_2 \\ 0 & 0 & a^{2}_{33} & \ldots & a^{2}_{3n-1} & a^{2}_{3n} & b^{2}_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a^{n-2}_{n-1n-1} & a^{n-2}_{n-1n} & b^{n-2}_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a^{n-1}_{nn} & b^{n-1}_n \end{array}\right). \quad (3.11)$$

(3.11) матрицаға сәйкес келетін жүйені құрайық. Біз жоғарыдағы қадамдарда тік жолдардың орындарын алмастырғанымыз жоқ. Сондықтан, бірінші тік жолдың элементтері x_1-дің, екінші тік жол x_2-нің коэффициенттері, т. с. с.

$$\begin{array}{r} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + \ldots + a_{1n-1} \cdot x_{n-1} + a_{1n} \cdot x_n = b_1, \\ a^{1}_{22} \cdot x_2 + a^{1}_{23} \cdot x_3 + \ldots + a^{1}_{2n-1} \cdot x_{n-1} + a^{1}_{2n} \cdot x_n = b^{1}_2, \\ a^{2}_{33} \cdot x_3 + \ldots + a^{2}_{3n-1} \cdot x_{n-1} + a^{2}_{3n} \cdot x_n = b^{2}_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a^{n-2}_{n-1n-1} \cdot x_{n-1} + a^{n-2}_{n-1n} \cdot x_n = b^{n-2}_{n-1}, \\ a^{n-1}_{nn} \cdot x_n = b^{n-1}_n. \end{array} \quad (3.12)$$

1.12-теорема бойынша (3.12) жүйенің матрицасының рангісі (3.10) жүйенің матрицасының рангісіне тең эквивалентті матрицалар. Жоғарыдағы қадамдарды (3.10) жүйеге тікелей қолданып (3.12) жүйені алсақ, бұл жүйенің шешімі берілген (3.10) жүйенің де шешімі болады. Сондықтан (3.12) жүйені шешсек жеткілікті. Берілген (3.10) жүйенің Крамер теоремасы бойынша тек бір ғана шешімі бар. (3.12) жүйеден осы шешімді табу үшін (3.12) жүйенің n теңдеуінен x_n белгісізін тауып, оны n - 1-ге қойып, одан x_{n-1} белгісізді табамыз. Осылайша, ең соңында бірінші теңдеуге табылған $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_3, x_2$ — лердің мәндерін қойып, одан x_1-ді табамыз.

§ 3.4. Матрица әдісі

Берілген (3.10) жүйені матрица әдісімен шешу үшін осы жүйенің төмендегі матрицаларын қарастырайық:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix},$$

мұндағы $|A| \neq 0$ болсын, X — белгісіз $n \times 1$ өлшемді матрица.

Матрицаларға қолданылатын амалдарға сүйене отырып (1.7-тақырып), A мен X матрицаларының көбейтіндісі (бұл көбейтінді анықталған — бар) (3.10) жүйенің сол жағындағы өрнектен анықталған матрицаға тең деп аламыз. Алдымен A мен X матрицаларының көбейтіндісін анықтайық:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11}\ x_1 + & a_{12}\, x_2 + & \ldots + & a_{1n}\, x_n \\ a_{21}\ x_1 + & a_{22}\, x_2 + & \ldots + & a_{2n}\, x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\ x_1 + & a_{n2}\, x_2 + & \ldots + & a_{nn}\, x_n \end{pmatrix}.$$

AX пен B матрицаларының теңдігінен мына теңдеуді аламыз:

$$A \cdot X = B, \tag{3.13}$$

мұндағы X — белгісіз $n \times 1$ матрица және $|A| \neq 0$.

(3.13) теңдеу (3.10) жүйенің *матрица түріндегі теңдеуі* деп аталады.

Берілген жүйенің матрицасы ерекше емес матрица, олай болса 1.9-теорема бойынша оның кері матрицасы бар. Енді (3.13) теңдеудің шешімін табу үшін (x-ті табу үшін) осы теңдеуді солдан оңға қарай A матрицасының кері матрицасына көбейтейік:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

мұндағы $A^{-1} \cdot A = E$ және $E \cdot X = X$. Олай болса

$$X = A^{-1} \cdot B \tag{3.14}$$

болады, мұндағы $A^{-1} \cdot B$ — көбейтіндісі бар.

Енді (3.10) жүйенің (3.14) формуладан анықталатын шешімі тек біреу ғана болатынын дәлелдейік. Ол үшін кері жориық, яғни (3.10) жүйенің (3.14) формуладан анықталатын шешімінен өзге $\overline{X}$ шешімі бар босын және ол шешім (3.14) формуладан анықталады $\overline{X} = A^{-1} \cdot B$. Онда

$$X - \overline{X} = A^{-1} \cdot B - A^{-1} \cdot B = 0.$$

Осыдан, $X = \overline{X}$.

Демек, (3.14)-матрица (3.13) теңдеудің шешімі. Сонымен, (3.10) жүйені матрица әдісімен шешу үшін 1) A матрицаның анықтауышын есептейміз, 2) берілген жүйені (3.13) түрге келтіреміз, 3) A матрицаның A^{-1} — кері матрицасын тауып, A^{-1} матрицаны B матрицаға көбейтеміз.

Мысал. Матрица әдісімен төмендегі жүйені шешіңдер:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + \ x_3 = 2\,, \\ \ x_1 \qquad\quad + 2x_3 = 3\,, \\ \ x_1 - \ x_2 + \ x_3 = 5\,. \end{cases}$$

Шешімі. Алдымен A, B, X матрицаларын жазайық:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

мұндағы $|A| \neq 0$ және

$$AX = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 + \ x_3\ , \\ x_1 \qquad\quad + 2x_3\ , \\ x_1 - \ x_2 + \ x_3\ . \end{pmatrix}.$$

Сонда берілген жүйе (3.13) түрге келді. Енді A матрицасының кері матрицасын анықтайық (1.10-тақырыптағы 1-мысалды қараңдар):

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

Анықталған A^{-1} матрицаны B матрицаға көбейтіп, іздестіріп отырған X матрицаны табамыз:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{7} \\ -\frac{17}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}.$$

Сонымен, $x_1 = \frac{15}{7}$, $x_2 = -\frac{17}{7}$, $x_3 = \frac{3}{7}$ — берілген жүйенің шешімі.

§ 3.5. Біртекті емес кез келген сызықты теңдеулер жүйесі

n белгісізі бар біртекті емес m сызықты теңдеулер жүйесін қарастырайық:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1\ , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_2 = b_2\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m\ . \end{cases} \tag{3.15}$$

Берілген жүйенің матрицасының рангісі мен оның кеңейтілген матрицасының рангісі арасында

$$rangA \le rang\widetilde{A}$$

байланыстарының барын 1.12-тақырыптан байқауға болады, мұндағы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} & b_1 \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Берілген жүйені зерттеу немесе үйлесімді немесі үйлесімсіз болатынын айқындайтын Кронекер-Капелли теоремасын дәлелдейік.

3.2-теорема (Кронекер-Капелли). Біртекті емес (3.15) сызықты теңдеулер жүйесі үйлесімді болу үшін жүйенің матрицасының рангісі оның кеңейтілген матрицасының рангісіне тең болуы:

$$rangA = rang\widetilde{A}$$

қажетті әрі жеткілікті.

Қажеттілігі. Біртекті емес (3.15) сызықты теңдеулер жүйесі үйлесімді болсын деп ұйғарайық, яғни $x_i = \alpha_i$, $i = \overline{1, n}$., сандары табылып, олар жүйенің шешімдері болсын. Онда осы мәндерді (3.15) жүйеге қойып, m тепе-теңдікті аламыз:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot \alpha_1 + \ldots a_{1n} \cdot \alpha_n \equiv b_1\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ , \\ a_{m1} \cdot \alpha_1 + \ldots a_{mn} \cdot \alpha_n \equiv b_m\ . \end{cases} \tag{3.16}$$

$\widetilde{A}$ матрицасының бірінші тік жолын α_1-ге, екінші тік жолын α_2-ге және т.с.с. n-тік жолын α_n-ге көбейтіп, оларды соңғы $n + 1$ тік жолға апарып қоссақ, онда (3.16) жүйені ескере отырып, мына төмендегі B матрицасын аламыз:

$$\widetilde{A} \sim B = \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ & 0 \\ A & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & 0 \end{array}\right).$$

1.12-теорема бойынша $rangA = rang\widetilde{A}$.

Жеткіліктігі. Енді A мен $\widetilde{A}$ матрицаларының рангілері тең болсын делік: $rangA = rang\widetilde{A} = r = \min(n,m)$. Анықтық үшін, A матрицаның алғашқы r тік жолдары мен r жатық жолдарына орналасқан минор Δ нөлге тең болмасын деп ұйғарсақ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1r} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{r1} \ldots a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0,$$

яғни (3.15) жүйенің алғашқы r жатық жолдарына орналасқан теңдеулер сызықты тәуелсіз, ал оның қалған $m - r$ жатық жолдарына орналасқан теңдеулер оларға тәуелді. Сондықтан, (3.15) жүйенің алғашқы r теңдеулерінен құрылған жүйені шешу жеткілікті. Мұнда екі жағдайды қарастыруға болады.

Бірінші жағдай: $r = n < m$. Бұл жағдайда (3.15) жүйе мына түрде жазылады:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + \ldots a_{1r} \cdot x_r = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1} \cdot x_1 + \ldots + a_{rr} \cdot x_r = b_r \end{cases} \qquad (3.17)$$

Егер де $\Delta \neq 0$ ескерсек, онда жүйенің шешімі $x_1, \ldots, x_r$ тек біреу ғана және ол Крамер формуласымен анықталады. Бұл шешу (3.15) жүйенің қалған $m - r$ теңдеулерін қанағаттандырады. Сонымен, (3.15) жүйе үйлесімді және анықталған.

Екінші жағдай: $r < n$. Бұл жағдайда (3.15) жүйені мына түрде жазуға болады:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x + \ldots + a_{11} \cdot x_r = b_1 - a_{1r,+1} \cdot x_{r+1} - \ldots - a_{1n} \cdot x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1} \cdot x_1 + \ldots + a_{rr} \cdot x_r = b_r - a_{r,r+1} \cdot x_{r+1} - \ldots - a_{rn} \cdot x_n, \end{cases} \qquad (3.18)$$

мұндағы $x_{r+1}, \ldots, x_n$ белгісіздер бос мүшелер олар кез келген тұрақты сандарды қабылдайды. Енді $\Delta \neq 0$ ескеріп, Крамер формуласын пайдаланып, (3.18) жүйенің де шешімін $x_1, \ldots, x_r$ анықтаймыз. Сонымен, (3.15) жүйе үйлесімді. Бұл шешім $x_{r+1}, \ldots, x_n$ арқылы өрнектелгендіктен, (3.15) анықталмаған жүйе, яғни оның шексіз көп шешімі бар. Теорема дәлелденді.

Сонымен, Кронекер-Капелли теоремасы мына төмендегідей қорытындыға келтіреді:

1) Егер $rang\widetilde{A} = rangA = r = n$, онда (3.15) жүйенің тек бір ғана шешімі бар;

2) Егер $rangA = rang\widetilde{A} = r < n$ болса, онда (3.15) жүйенің шексіз көп шешімі бар және ол шешімдер (3.18) жүйеден анықталады.

(3.18) жүйеден анықталған $x_1, x_2, \ldots, x_r$ шешімі (3.15) жүйенің *жалпы шешімі* деп аталады. Егер $x_{r+1}, \ldots, x_n$ айнымалы шамаларға кез келген сандық мәндерді берсек, онда оның жалпы шешімінен жүйенің *дербес шешімін* анықтаймыз. (3.18) жүйенің $x_1, x_2, \ldots, x_r$ коэффициенттерінен анықталған

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1r} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{r1} \ldots a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (3.19)$$

анықтауыш (3.18) жүйенің *негізгі миноры* деп аталады.

Берілген (3.15) жүйенің шешімін табу үшін мына ережені пайдаланған тиімді:

1) Жүйенің үйлесімді не үйлесімсіз болатынын анықтау керек. Ол үшін негізгі A матрица мен кеңейтілген $\widetilde{A}$ матрицаның рангілірін табу қажет.

2) Егер жүйе үйлесімді болса: $rangA = rang\widetilde{A} = r$, онда r ретті (3.19) негізгі минорды қарастырамыз. Δ негізгі минордың коэффициенттері арқылы анықталған r теңдеуді аламыз, ал қалған $m - r$ теңдеулерді емес, яғни (3.18) жүйені қарастырамыз, мұндағы $x_1, \ldots, x_r$ — белгісіздер, ал $x_{r+1}, \ldots, x_n$ — бос мүшелер.

3) Жоғарыда қарастырылған әдістермен (Крамер, Гаусс, матрица әдістері) берілген r белгісізі бар біртекті емес r сызықты теңдеулер жүйесінің шешімін табамыз.

Мысалдар. Төмендегі жүйелерді зерттеп, олардың шешімдерін табыңдар:

1. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 6x_3 = 3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 14x_2 + 11x_3 - 13x_4 = -16, \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = -8, \\ x_1 + 11x_2 + 9x_3 - 10x_4 = -12, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$

Шешімдері. 1. Берілген жүйенің негізгі A матрицасы мен кеңейтілген $\widetilde{A}$ матрицасының рангілерін табамыз: $rangA = rang\widetilde{A} = 2$. Олай болса, Кронекер-Капелли теоремасы бойынша берілген жүйе үйлесімді, бірақ анықталмаған жүйе. Жүйенің негізгі миноры ретінде екінші ретті

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$$

минорды аламыз. Осы минордың коэффициенттері арқылы мына жүйені қарастырамыз:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 = 6 - 3x_3 - x_4 \\ 3x_1 + 5x_2 = 4 - 2x_3 - 2x_4 \end{cases},$$

мұндағы x_1, x_2 — белгісіздер, ал x_3, x_4 — бос мүшелер. Осы жүйеден

$$x_1 = \frac{(x_3 - 9x_4 - 2)}{11}, \quad x_2 = \frac{(-5x_3 + x_4 + 10)}{11}$$

екенін табамыз, бұл шешім-берілген жүйенің жалпы шешімі, мұндағы x_3, x_4 — кез келген сандар. Енді жүйенің кез келген бір дербес шешімін табу үшін x_3, x_4-ке, мысалы, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ қойамыз:

$$x_1 = -\frac{2}{11}, \ x_2 = \frac{10}{11}, \ x_3 = 0, \ x_4 = 0.$$

Осы сияқты, берілген жүйенің басқа да дербес шешімдерін табуға болады.

2. Берілген жүйенің матрицасы мен кеңейтілген матрицасының рангі 3-ке тең: $rangA = rang\widetilde{A} = 3$. Сондықтан, жүйе үйлесімді әрі ол анықталған. Жүйенің негізгі миноры ретінде

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 4 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 46 \neq 0$$

минорын аламыз. Сонда

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

Бұл жүйенің анықтауышы нөлге тең емес ($\Delta_3 \neq 0$), олай болса, берілген жүйенің тек бір ғана шешімі бар, ол

$$x_1 = \frac{30}{23}, \ x_2 = -\frac{29}{46}, \ x_3 = -\frac{3}{46}.$$

Бұл мысалда берілген жүйенің төртінші теңдеуін қарастырмаймыз (ол бірінші мен үшінші теңдеулердің сызықты комбинациясы).

3. Берілген жүйенің $rangA = 2$, $rang\widetilde{A} = 3$. Сондықтан, Кронекер-Капелли теоремасы бойнша берілген жүйе үйлесімсіз.

§ 3.6. Біртекті сызықты теңдеулер жүйесі

Бізге n белгісізі бар біртекті m теңдеулер жүйесі берілсін

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{3.20}$$

немесе

$$A \cdot X = 0, \quad 0 = (0,0, \ldots, 0)'.$$

Берілген (3.20) жүйенің A мен $\widetilde{A}$ матрицасының рангісі тең, себебі $\widetilde{A}$ матрицасының соңғы тік жолының барлық элементтері нөлге тең. Олай болса, Кронекер-Капелли теоремасы бойынша берілген (3.20) біртекті жүйе әрқашанда үйлесімді және оның әрқашанда нөлдік шешімі бар: $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. Ал бізге (3.20) жүйенің нөлдік шешімнен өзге шешімдерін табу қажет.

Енді (3.20) жүйенің рангісі r-ге тең болсын деп ұйғарайық: $rangA = r$. Анықтық үшін A матрицасының алғашқы r жатық жолы сызықты тәуелсіз болсын (бұл жағдайда базистік минор матрицаның жоғары сол жағында орналасқан).

3.3-теорема. (3.20) біртекті сызықты теңдеулер жүйесінің нөлден өзге шешімдері бар болуы үшін $r < n$ теңсіздігінің орындалуы қажетті әрі жеткілікті.

Дәлелдеуі. Шынында да, егер $n = r$ болса, онда 3.2-теорема бойынша (3.20) жүйесінің тек бір ғана нөлдік шешімінен өзге шешімдері жоқ. Сондықтан, $r = n$ деп кері жорымалдауымыз теореманың $r < n$ шартына қайшы келеді. Ендеше, $r < n$ шарты (3.20) жүйенің нөлден өзге шешімнің бар болуы үшін қажетті.

Енді $r < n$ шартының жеткілікті болатынын дәлелдейік. Егер $r < n$ болса, онда (3.20) жүйе үйлесімсіз болуы мүмкін емес. Олай болса жүйенің шексіз көп шешімдері бар ($r > n$ болуы мүмкін емес). Теорема дәлелденді.

3.4-теорема. n белгісізі бар $m = n$ біртекті сызықты теңдеулер жүйесінің нөлден өзге шешімдері бар болуы үшін жүйенің анықтауышы нөлге тең болуы: $|A| = 0$ қажетті әрі жеткілікті.

Дәлелдеуі. Бұл теореманың дәлелі 3.3-теормадан алынады. Шынында да, егер $|A| \neq 0$ болса, онда қарастырылып отырған жүйенің тек бір ғана нөлдік шешімнен өзге шешімдері жоқ. Сондықтан, $|A| \neq 0$ деп жоруымыз теореманың шартына қайшы келеді. Олай болса, $|A| = 0$ шарты жүйенің нөлден өзге шешімі бар болуы үшін қажетті.

Осы шарттың жеткілікті болатынын көрсетейік. Егер $|A| = 0$ болса, онда қарастырып отырған жүйенің матрицасының рангісі белгісіздер санынан кіші болады, яғни $r < n$. Сондықтан, жүйенің нөлден өзге шексіз көп шешімдері бар (3.3-теорема). Теорема дәлелденді.

1. Егер $r = n$ болса, онда Крамер теормемасы бойынша (3.20) біртекті жүйенің $x_i = 0$, $i = \overline{1, n}$ нөлдік шешімнен өзге шешімі жоқ, мұндағы n-белгісіздер саны.

2. Егер $r < n$ болса, онда (3.20) біртекті жүйенің нөлдік шешімнен өзге шексіз көп шешімдері бар. Бұл жағдайда A матрицасының жатық жолдарының r жатық жолдары сызықты тәуелсіз, ал қалған жатық жолдары осы r жатық жолдары арқылы сызықты өрнектеледі.

Матрицаның r сызықты тәуелсіз жолдары оның жоғары сол жағына орналасқандықтан, (3.20) жүйе мына түрде өрнектеледі:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = d_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = d_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r1}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = d_r, \end{cases} \tag{3.21}$$

мұндағы

$$\begin{aligned} d_1 &= -a_{1r+1}x_{r+1} - a_{1r+2}x_{r+2} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ d_2 &= -a_{2r+1}x_{r+1} - a_{2r+2}x_{r+2} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_r &= -a_{rr+1}x_{r+1} - a_{rr+2}x_{r+2} - \ldots - a_{rn}x_n \end{aligned} \tag{3.22}$$

немесе

$$d_j = -a_{jr+1}\cdot c_{r+1} - a_{jr+2}\cdot c_{r+2} - \ldots - a_{jn}\cdot c_n,$$

$$j = \overline{1, r}, \ c_i = x_i, \ i = \overline{r+1, n}$$

және

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

себебі A матрицасының алғашқы r жатық жолдары сызықты тәуелсіз (1.15-теорема).

(3.21) біртекті емес сызықты теңдеулер жүйесінің шешімін Крамер формуласы бойынша табамыз:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \ j = \overline{1, r}, \tag{3.23}$$

мұндағы

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j-1} & d_1 & a_{1j+1} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & \ldots & a_{2j-1} & d_2 & a_{2j+1} & \ldots & a_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rj-1} & d_r & a_{rj+1} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix}, \ j = \overline{1, r}.$$

Сонымен, егер $r < n$ болса, онда x_{r+1}, $x_{r+2}, \ldots, x_n$ сандарының кез келген мәндерінде (3.23) Крамер формуласынан (3.21) жүйенің шешімдері анықталады. Олай болса, $x_1, x_2, \ldots, x_r, c_{r+1}, \ldots, c_n$ шешімдері (3.20) жүйенің шексіз көп шешімдері болады, мұндағы $c_i = x_i$ $i = \overline{r+1, n}$,— кез келген сандар.

Анықтама. Біртекті сызықты (3.20) теңдеулер жүйесінің кез келген $n - r$ сызықты тәуелсіз шешімі осы жүйенің іргелі *шешімі* деп аталады, мұндағы n-жүйенің белгісіздер саны, r саны A — матрицаның рангісі: $rang A = r$.

3.5-теорема. Егер $rang A = r < n$ теңсіздігі орындалса, онда (3.20) біртекті сызықты теңдеулер жүйесінің іргелі шешімі бар болады.

Дәлелдеуі. Теореманы дәлелдеу үшін мына төмендегі $n - r$ координатты сызықты тәуелсіз бірлік векторларды қарастырамыз:

$$l_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ l_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ \ldots, \ l_{n-r} = (0, \ldots, 0, 1) \tag{3.24}$$

(3.20) біртекті сызықты теңдеулер жүйесінің іргелі шешімін құрайық. (3.22) формуладағы ($x_i = c_i, i = \overline{r+1, n}$)

$$\{c_{r+1}, c_{r+2}, ..., c_n\} = l_1 = \{1; 0; ...; 0\} \qquad (3.25)$$

немесе

$$c_{r+1} = 1, c_{r+2} = 0, ..., c_n = 0$$

болсын. Онда (3.23) формуладан мына теңдікті аламыз:

$$x_j^{(1)} = \frac{\Delta_j^{(1)}}{\Delta},$$

мұндағы

$$\Delta_j^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & b_1^{(1)} & a_{1j+1} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j-1} & b_2^{(1)} & a_{2j+1} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rj-1} & b_r^{(1)} & a_{rj+1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix},$$

$$b_j^{(1)} = -a_{jr+1}, \; j = \overline{1, r}. \qquad (3.26_1)$$

Осы сияқты, (3.22) формуладағы

$$\{c_{r+1}\, c_{r+2}\, ; ...; c_n\} = l_2 = \{0; 1; ...; 0\}$$

болсын, яғни $c_{r+1} = 0, c_{r+2} = 1, ..., c_n = 0$. Онда (3.23) формуладан мына теңдікті аламыз:

$$x_j^{(2)} = \frac{\Delta_j^{(2)}}{\Delta},$$

мұндағы

$$\Delta_j^{(2)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & b_1^{(2)} & a_{1j+1} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j-1} & b_2^{(2)} & a_{2j+1} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rj-1} & b_r^{(2)} & a_{rj+1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix},$$

$$b_j^{(2)} = -a_{jr+2}, \; j = \overline{1, r}. \qquad (3.26_2)$$

Осылайша жалғастырып, ең соңында

$$\{c_{r+2}\, ; c_{r+1}\, ; ...; c_n\} = l_{n-r} = \{0;\; 0;\; ...;\; 1\}$$

болсын, яғни $c_{r+1} = 0, c_{r+2} = 0, ..., c_n = 1$. Онда (3.23) формуладан мына теңдікті аламыз:

$$x_j^{(n-r)} = \frac{\Delta_j^{(n-r)}}{\Delta},$$

мұндағы

$$\Delta_j^{(n-r)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & b_1^{(n-2)} & a_{1j+1} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j-1} & b_2^{(n-2)} & a_{2j+1} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rj-1} & b_r^{(n-2)} & a_{rj+1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix},$$

$$b_j^{(n-r)} = -a_{jn}, \; j = \overline{1, r}. \qquad (3.26_{n-r})$$

Жоғарыдағы $(3.26_1) - (3.26_{n-r})$ формулаларынан және (3.24) формуладан (3.20) біртекті жүйенің шешімін төмендегідей құрамыз:

$$\begin{aligned} x_1 &= \{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_r^{(1)}, 1; 0; \dots; 0\}', \quad (3.27) \\ x_2 &= \{x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_r^{(2)}, 0; 1; \dots; 0\}', \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-r} &= \{x_1^{(n-r)}, x_2^{(n-r)}, \dots, x_r^{(n-r)}, 0; 0; \dots; 1\}'. \end{aligned}$$

Осы (3.27) біртекті сызықты (3.20) жүйенің іргелі шешімі екендігін дәлелдейік. Ол үшін (3.27) тік жолды векторлардың сызықты комбинациясы тепе-тең нөлдік вектор болатынын қарастырайық:

$$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + ... + c_{n-r} \cdot x_{n-r} \equiv 0 \qquad (3.28)$$

немесе

$$\begin{aligned} &c_1 \cdot x_1^{(1)} + c_2 \cdot x_1^{(2)} + \dots + c_{n-r} \cdot x_1^{(n-r)} \equiv 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &c_1 \cdot x_r^{(1)} + c_2 \cdot x_r^{(2)} + \dots + c_{n-r} \cdot x_r^{(n-r)} \equiv 0, \\ &c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 + \dots + c_{n-r} \cdot 0 \equiv 0, \\ &c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 + \dots + c_{n-r} \cdot 0 \equiv 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + \dots + c_{n-r} \cdot 1 \equiv 0. \end{aligned} \qquad (3.28')$$

Бұл (3.28) жүйеден $c_1 = c_2 = ... = c_{n-r} = 0$ екенін анықтаймыз. Сонымен, (3.28) тепе-теңдік $c_1 = c_2 = ... = c_{n-r} = 0$

болғанда ғана орындалады. Ендеше (3.27) шешім сызықты тәуелсіз, яғни ол шешім (3.20) жүйенің іргелі шешімі. Теорема дәлелденді.

Ескерту. Біз 3.5-теорменаны дәлелдеу үшін (3.24) сызықты тәуелсіз бірлік векторларды қарастырып, оған байланысты (3.27) іргелі шешімді құрастырдық. Сызықты тәуелсіз векторлар шексіз көп болғандықтан, біртекті сызықты (3.20) жүйенің іргелі шешімдері де шексіз көп.

Анықтама. Егер $rangA = r < n$ және (3.20) немесе (3.15) жүйенің кез келген x шешімінде $n - r$ тұрақты сан болса, онда ол шешім осы *жүйенің жалпы шешімі* деп аталады.

3.6-теорема. Егер $rangA = r < n$ және $x_1, x_2, ..., x_{n-r}$ (3.20) біртекті жүйенің іргелі шешімі болса, онда оның жалпы шешімі мына төмендегі формуламен өрнектеледі:

$$x = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + ... + c_{n-r} \cdot x_{n-r}, \qquad (3.29)$$

мұндағы c_i, $i = \overline{1, n-r}$ — кез келген сандар.

Дәлелдеуі. Теореманың шарты бойынша

$$A \cdot x_i = 0, \ i = \overline{1, n-r}$$

теңдігі, орындалады. Сондықтан

$$Ax = A(c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_{n-r} x_{n-r}) =$$
$$= c_1 Ax_1 + c_2 Ax_2 + ... + c_{n-r} Ax_{n-r} = 0\,.$$

Теорема дәлелденді.

3.7-теорема. Егер $rangA = r < n$ және $x_1, x_2, ..., x_{n-r}$ — біртекті сызықты жүйенің іргелі шешімі, ал x_0 — (3.15) біртекті емес сызықты жүйенің дербес шешімі болса, онда (3.15) жүйенің жалпы шешімі төмендегі формуламен өрнектеледі:

$$x = x_0 + c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + ... + c_{n-r} \cdot x_{n-r},$$

мұндағы c_i, $i = \overline{1, n-r}$ — кез келген тұрақты сандар.

Дәлелдеуі. Теореманың шарты бойынша

$$A \cdot x_0 = b, \ A \cdot x_i = 0, \ i = \overline{1, n-r}$$

теңдіктері орындалады. Онда

$$AX = A\,(x_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_{n-r} x_{n-r}) =$$
$$= Ax_0 + c_1Ax_1 + c_2Ax_2 + ... + c_{n-r}Ax_{n-r} = b\,.$$

Теорема дәлелденді.

Ескерту. (3.15) — біртекті емес сызықты теңдеудің x_0 — дербес шешімін (3.23) Крамер формуласынан табуға болады, егер $\{c_{r+1}; c_{r+2}; ...; c_n\} = \{0; 0; \ldots; 0\}$ болса, онда $x_0 = \{x_1^0; x_2^0; ...; x_r^0; 0; 0; ...; 0\}$, мұндағы $x_j^0 = \frac{\Delta_j^0}{\Delta}$, $d_j = b_j - [a_{jr+1}c_{r+1} + ... + a_{jn}c_n] = b_j$, $j = \overline{1, r}$,

Мысалдар. Төмендегі жүйелердің жалпы және іргелі шешімдерін анықтаңдар:

$$1.\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0\,, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0\,, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0\,, \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad\quad + 4x_4 + 8x_5 = 0\,. \end{cases}$$

$$2.\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0\,, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0\,, \\ \ \ x_1 + \ \ x_2 - 4x_3 = 0\,, \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0\,. \end{cases}$$

Шешімдері. 1. Берілген жүйенің матрицасының рангісін табайық:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 7 \\ 9 & 6 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Сонымен $rangA = rang\widetilde{A} = 2$. Сондықтан берілген жүйе төмендегі жүйемен мәндес болады:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0\,, \\ \qquad\qquad\quad x_3 - \ x_4 - 3x_5 = 0\,. \end{cases}$$

Мысалы, x_1 мен x_3 белгісіздерді x_2, x_4, x_5 арқылы өрнектейік:

$$x_3 = x_4 + 3x_5,$$
$$x_1 = -(2x_2 + 4x_4 + 8x_5)/3.$$

Жүйенің іргелі шешімдерін табу үшін x_2, x_4, x_5-ке кез келген мәндерді тағайындайық, мысалы $x_2 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$ болсын. Сонда $x_3 = 3$, $x_1 = -\frac{8}{3}$. Енді $x_2 = 0$, $x_4 = 1$,

$x_5 = 0$ болсын, сонда $x_1 = -\frac{4}{3}$, $x_3 = 1$. Енді $x_2 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ болсын, сонда $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_3 = 0$. Сонымен,

$$x_1 = \{-\frac{8}{3}; 0; 3; 0; 1\},$$

$$x_2 = \{-\frac{4}{3}; 0; 1; 1; 0\},$$

$$x_3 = \{-\frac{2}{3}; 1; 0; 0; 0\}$$

берілген жүйенің іргелі шешімі болады, ал жалпы шешімін мына түрде табамыз:

$$x = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3 =$$

$$= \{-\frac{8}{3} \cdot c_1 - \frac{4}{3} \cdot c_2 - \frac{2}{3} \cdot c_3 \,;\, c_3 \,;\, 3c_1 + c_2; c_2; c_1\},$$

мұндағы c_1, c_2, c_3 — кез келген сандар.

2. Берілген жүйенің матрицасының рангісін табайық:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 9 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 4 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 21 \\ 0 & 2 & 14 \\ 0 & 7 & 14 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 14 \\ 0 & 1 & -28 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -35 \end{pmatrix}, \; rangA = rang\widetilde{A} = 3.$$

Сондықтан,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 0\,, \\ \qquad x_2 + 7x_3 = 0\,, \\ \qquad\qquad 5x_3 = 0\,. \end{cases}$$

Бұл жүйенің тек нөлдік шешімі ғана бар, ал іргелі шешімі жоқ.