## II Тарау. СЫЗЫҚТЫ КЕҢІСТІКТЕР

### § 2.1 Сызықты кеңістіктің анықтамасы

Осы курстың I-бөлімінде (аналитикалық геометрия) векторды векторға қосу және санды векторға көбейту амалдарын қарастырдық. Осы амалдарға орындалатын қасиеттермен таныстық. Ал II-бөлімнің I тарауында бірдей ретті матрицаны матрицаға қосу және матрицаны санға көбейту амалдарын қарастырып, осы амалдарға орындалатын қасиеттердің векторға орындалатын қасиеттермен бірдей екендігін байқадық. Енді осы тарауда *сызықты* кеңістікте орындалатын амалдарға да жоғарыдағы қасиеттер орындалатынын қарастырамыз. Ол үшін жиын туралы ұғым алайық.

Әртүрлі заттарды біріктіріп оларды бір бүтін зат ретінде қарастыруымызға болады. Осы жаңа зат *жиын*, ал оның құрамындағы әртүрлі заттар жиынның *элементтері* деп аталады. Біз қарастыратын тарауда жиынның элементтерін $x$, $y$, $z$, ... — кіші латын әріптерімен, ал жиынның өзін бас латын әріптерімен және сандарды кіші грек әріптерімен белгілейтін боламыз. Мысалы: $X$ — жиын, ал $x$, $y$, $z$, ... немесе $x_1$, $x_2$, ... осы жиынның элементтері. $x$-элемент $X$ жиынның элементі болатынын (болмайтынын) былай белгілейміз $x \in X$ ($x \notin X$ немесе $x \overline{\in} X$ және ол x элемент X жиынының элементі немесе x элемент X жиынына тиісті (x элемент X жиынына тиісті емес немесе x элемент $X$ жиынының элементі емес) деп оқылады. Егер $X$ жиынының барлық элементтері $Y$ жиынының да элементтері болса, онда $X$ жиыны $Y$ жиынның *жиыншасы* деп аталып, былай белгіленеді: $X \subset Y$ немесе $Y \supset X$ және $X$ жиыны $Y$ жиынының жиыншасы немесе $X$ жиыны $Y$ жиынына тиісті деп оқылады.

**Анықтама.** $x$, $y$, $z$, ... элементтерінен анықталған $R$ жиыны *сызықты кеңістік* деп атау үшін мына төмендегі үш ереже орындалуы керек:

I. кез келген $x \in R$ пен $y \in R$ элементтері үшін осы элементтердің *қосындысы* деп аталатын $x + y$ үшінші элемент анықталып және ол $R$ жиынының элементі болса, яғни $x + y \in R$;

II. кез келген $x \in R$ және $\alpha$ саны үшін $x$ пен $\alpha$-нің *көбейтіндісі* деп аталатын $\alpha \cdot x$ элементі анықталып және ол $R$ жиынның элементі болса, яғни $\alpha \cdot x \in R$;



III. жоғарыдағы екі ереже мына аксиомаларға бағынса:

1) кез келген, $x \in R$, $y \in R$ үшін *қосындының ауыстырымдылық* қасиеті орындалады, яғни $x + y = y + x$;

2) кез келген $x \in R$ $y \in R$, $z \in R$ үшін *қосындының терімділік* қасиеті орындалады, яғни $(x + y) + z = x + (y + z)$;

3) кез келген $x \in R$ элемент үшін 0-*нөл элемент* деп аталатын элемент табылып $x + 0 = x$ теңдігі орындалады, мұндағы $0 \in R$ (кеңістіктің нөл элементі мен нөл санын бірдей әріппен белгілейміз, ал олар сөз болған жағдайда оларды мағынасына қарап бір-бірінен ажырататын боламыз);

4) кез келген $x \in R$ үшін осы элементтің *кері элементі* деп аталатын $-x$ элементі бар және $x + (-x) = 0$ болады;

5) кез келген $x \in R$ үшін $1 \cdot x = x$;

6) кез келген $x \in R$ және $\alpha, \beta$ сандары үшін $\alpha (\beta x) = (\alpha \cdot \beta) x$ теңдігі орындалады;

7) кез келген $x \in R$ және $\alpha, \beta$ сандары үшін $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta y$ теңдігі орындалады;

8) кез келген $x \in R$, $y \in R$ және $\alpha$ саны үшін $\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$ теңдігі орындалады.

Анықтамадағы сандар нақты сандар болып ондағы үш ереже орындалса, онда *R-сызықты нақты кеңістік*, ал олар комплекс сандар болса, онда *R-сызықты комплекс кеңістік* деп аталады.

Сызықты кеңістіктің элементтері *вектор* деп аталады. Сондықтан, алдағы тарауларда сызықты кеңістіктің элементтерін вектор деп айтатын боламыз, бірақ вектордың сызықша белгісін $(\overline{x})$ қоймай басқа жазылу таңбасын сақтаймыз, мысалы, $x = \{x_1; x_2; x_3\}$. Сызықты нақты кеңістікті қарастырайық. Оның мынадай қасиеттері бар.

**1.** Сызықты кеңістіктің нөл элементі тек біреу ғана.

Дәлелдеу үшін кері жорық, яғни сызықты кеңістіктің нөл элементі екеу делік және олар $0_1$ мен $0_2$ болсын. Онда, кез келген $x \in R$ үшін $x + 0_1 = x$ және $x + 0_2 = x$ теңдіктері орындалады. Осыдан $0_2 + 0_1 = 0_2$ және $0_1 + 0_2 = 0_1$, мұндағы $0_2 + 0_1 = 0_1 + 0_2$. Олай болса, $0_1 = 0_2$.

**2.** Сызықты кеңістіктің $x$ элементінің кері элементі тек біреу ғана.

Дәлелдеу үшін кері жорық, яғни $x$-элементінің кері элементі екеу және олар $y$ пен $z$ болсын, яғни $x + y = 0$ және $x + z = 0$. Енді сызықты кеңістігінің III ережесін пайдаланайық

$$y + x + z = y + (x + z) = y + 0 = y,$$
$$y + x + z = (y + x) + z = 0 + z = z.$$

Олай болса, $y = z$.

3. Сызықты кеңістіктің кез келген $x$ элементі үшін $0 \cdot x = 0$ теңдігі орындалады.

Кез келген $\beta$ санын алайық. Сонда $0 \cdot x = (\beta - \beta)\, x = \beta\, x - \beta\, x = \beta\, x + (-\beta\, x) = 0$

4. Кез келген $\alpha$ саны мен $0 \in R$ үшін $\alpha \cdot 0 = 0$ теңдігі орындалады.

$\alpha \cdot 0 = \alpha \cdot (0 + 0) = \alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0$. Осы теңдіктің екі жағына — $\alpha \cdot 0$-ді қосайық: $\alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0 = = \alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0 - \alpha \cdot 0$. Осыдан $0 = \alpha \cdot 0$.

5. Егер $\alpha \cdot x = 0$ болса, онда не $x = 0$, не $\alpha = 0$, мұндағы $x \in R$, $\alpha$ — кез келген сан.

Алдымен $\alpha \neq 0$ деп ұйғарып, $x = 0$ болатынын дәлелдейік. Шынында да,

$$x = 1 \cdot x = \left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right) x = \frac{1}{\alpha}(\alpha \cdot x) = \frac{1}{\alpha} \cdot 0 = 0.$$

Енді $x \neq 0$ деп ұйғарып, $\alpha = 0$ болатынын оқырмандарға жаттығу ретінде ұсынамыз.

6. $(-1) \cdot x$ элемент $x$ элементінің кері элементі, мұндағы $x \in R$.

Шынында да,

$$x + (-1)x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = [1 + (-1)] \cdot x = 0 \cdot x = 0.$$

Сондықтан $(-1)\, x = -x$.

Сызықты кеңістікке мысалдар:

1-мысал. Дәрежесі $n$-нен кіші әрі $n$-ге тең көпмүшеліктер жиынын қарастырайық. Бұл жиында көпмүшеліктерді қосу мен санды көпмүшелікке көбейту амалдары орындалатынына оңай көз жеткізуге болады. Сондықтан, дәрежесі $n$-нен кіші әрі $n$-ге тең көпмүшеліктер жиыны сызықты кеңістік құрайды.

Кез келген дәрежелі көпмүшеліктер жиыны да сызықты кеңістік түзейді.

2-мысал. Бірдей дәрежелі көпмүшеліктер жиынын қарастырайық, мысалы дәрежесі $n > 0$ болсын. Бұл жиын сызықты кеңістік түземейді. Себебі, санды көпмүшелікке көбейту амалы орындалғанмен де, көпмүшелікті көпмүшелікке қосып, қосындының дәрежесі $n$-нен кіші көпмүшелік аламыз.

3-мысал. $[a, b]$ сегментте анықталған әрі үзіліссіз функциялар жиынын қарастырайық. Мұндай функциялардың жиыны математикалық талдауда $C[a; b]$ — символымен белгіленеді, $f(x) \in C[a;b]$, $x \in [a;b]$. Үзіліссіз функцияларды қосу және нақты санды үзіліссіз функцияға көбейту амалдары орындалғанда $[a; b]$ сегментте анықталған үзіліссіз функцияларды аламыз. Сондықтан, $C[a; b]$ кеңістігі сызықты кеңістік түзейді.



4-мысал. $X$ жиынының элементтері квадрат матрица болсын, мысалы $n$-ретті. Онда $X$ жиынының элементтеріне, матрицаны матрицаға қосу:

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (c_{ij}),\ i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, n},$$

және санды матрицаға көбейту:

$$(\alpha\ (a_{ij})) = \alpha\ (a_{ij}),\ i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, n},$$

амалдары орындалып $n$-ретті квадрат матрица аламыз. Нөл элемент $(0_{ij})$ — нөл матрица. Сонымен, сызықты кеңістіктің барлық аксиомалары да орындалады. Сондықтан, $X$ — жиыны сызықты кеңістік түзейді.

## § 2.2 Сызықты кеңістік элементтерінің сызықты тәуелділігі

Осы курстың I-бөлімінің (аналитикалық геометрия) 2-тарауында векторлардың сызықты тәуелділігі туралы, ал осы бөлімнің §1.11-тақырыбында матрицаның жатық (тік) жолдарының сызықты тәуелділігі туралы сөз болған. Енді біз сызықты кеңістік элементтерінің сызықты тәуелділігі туралы айтпақпыз.

**Анықтама.** $R$ — сызықты нақты кеңістігіндегі $x, y, \ldots, z$ элементтерінің *сызықты комбинациясы* деп

$$\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \ldots + \gamma \cdot z \tag{2.1}$$

қосындыны айтамыз, мұндағы $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ кез келген нақты сандар және олар осы сызықты комбинацияның *коэффициенттері* деп аталады.

$R$-сызықты кеңістігідегі $x, y, \ldots, z$ элементтерінің кем дегенде біреуі нөлге тең емес $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ — нақты сандары бар болып,

$$\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \ldots + \gamma \cdot z = 0 \tag{2.2}$$

теңдігі орындалса, онда оны *сызықты тәуелді* деп атаймыз.

Мысалы: $[a, b]$ сегментіндегі $x(t) = \cos^2 t$, $y(t) = \sin^2 t$, $z(t) = 1$ элементтері сызықты тәуелді. Себебі



6—212

$$\alpha \cos^2 t + \beta \sin^2 t + \gamma = 0$$

теңдігі тек $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -1$ болғанда ғана орындалады.

Осы анықтамадан $R$-сызықты кеңістігінің сызықты тәуелді емес элементтері *сызықты тәуелсіз* деп аталады. Осы анықтаманы басқаша берейік.

Егер $\alpha = \beta = ... = \gamma = 0$ болғанда ғана (2.1) сызықты комбинация нөлге тең болса, онда $R$ сызықты кеңістігінің $x, y, \ldots, z$ элементтері *сызықты тәуелсіз* деп аталады.

Осы тақырыптағы негізгі теоремаларды қарастырайық.

**2.1-теорема.** $R$ сызықты кеңістігінің $x, y, \ldots, z$ элементтері сызықты тәуелді болу үшін олардың біреуі қалғандарының сызықты комбинациясы болуы қажетті әрі жеткілікті.

Қажеттілігі. Сызықты кеңістігінің $x, y, \ldots, z$ элементтері сызықты тәуелді болсын деп жорып, олардың біреуі қалғандарының сызықты комбинациясы болатынын дәлелдейік. Жоруымыз бойынша (2.2) теңдігі орындалады және ондағы сызықты комбинация коэффициенттерінің кем дегенде біреуі нөлге тең емес. Анықтық үшін $\alpha \neq 0$ болсын. Онда (2.2) теңдігін $\alpha \neq 0$ санына бөліп мына теңдікті аламыз

$$x = \lambda \cdot y + ... + \mu \cdot z, \qquad (2.3)$$

мұндағы $\lambda = -\beta/\alpha, ..., \mu = -\gamma/\alpha$. Ал бұл теңдік, $x$ элементі $y, \ldots, z$ элементтерінің сызықты комбинациясы болатынын көрсетеді.

Жеткіліктігі. Енді $x, y, \ldots, z$ элементтерінің біреуі қалған элементтерінің сызықты комбинациясы болсын деп ұйғарып, олардың сызықты тәуелді болатынын дәлелдейік. Анықтық үшін, $x$ элементі қалған элементтерінің сызықты комбинациясы болсын, яғни (2.3) теңдігі орындалады. Осы теңдіктен

$$(-1)\,x + \lambda \cdot y + ... + \mu \cdot z = 0 \qquad (2.4)$$

теңдігін аламыз, мұндағы $(-1), \lambda, ..., \mu$ — коэффициенттерінің кем дегенде біреуі нөлге тең емес $(-1) \neq 0$). Демек, (2.4) теңдігі $x, y, \ldots, z$ элементтерінің сызықты тәуелді болатынын көрсетеді. Теорема дәлелденді.

**2.2-теорема.** $R$ сызықты кеңістігіндегі $x, y, \ldots, z$ элементтерінің ішінде нөл элемент бар болса, онда олар сызықты тәуелді.

Дәлелдеуі. Шынында да, мысалы $x = 0$ нөл элемент болсын, онда



$$\alpha \cdot x + \beta \cdot y + ... + \gamma \cdot z = 0$$

теңдігі тек $\alpha = 1,\ \beta = ... = \gamma = 0$ болғанда ғана орындалады. Теорема дәлелденді.

**2.3-теорема.** Егер $R$ сызықты кеңістігіндегі $x, y, \ldots, z$ элементтерінің бір бөлігі сызықты тәуелді болса, онда $x, y, \ldots, z$ элементтері сызықты тәуелді.

Дәлелдеуі. Мысалы, $y, \ldots, z$ элементтері сызықты тәуелді болсын, яғни

$$\beta \cdot y + ... + \gamma \cdot z = 0,$$

мұндағы $\beta, ..., \gamma$ сандарының кем дегенде біреуі нөлге тең емес. Онда, осы $\beta, ..., \gamma$ сандары мен $\alpha = 0$ саны үшін (2.2) теңдігі орындалады. Теорема дәлелденді.

Жаттығу: Егер $R$ кеңістігіндегі $x, y, \ldots, z$ элементтері сызықты тәуелсіз болса, онда оның кез келген бөлігі сызықты тәуелсіз болатынын дәлелдеңдер.

1-мысал. Төрт өлшемді кеңістікте

$$\overline{a}_1 = \{1;\ -1;\ 1;\ -2\},\ \overline{a}_2 = \{3;\ -1;\ 2;\ 0\}$$

$$\overline{a}_3 = \{0;\ 1;\ -1;\ 1\},\ \overline{a}_4 = \{-4;\ 1;\ -2;\ 1\}$$

векторлары сызықты тәуелді бола ала ма?

Берілген векторлардың қосындысы нөлге тең:

$$\overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \overline{a}_3 + \overline{a}_4 = 0, \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1 \neq 0,$$

Сондықтан, векторлардың кез келгенін қалғандары арқылы өрнектейміз, мысалы

$$\overline{a}_3 = -\overline{a}_1 - \overline{a}_2 - \overline{a}_4$$

Демек, $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3, \overline{a}_4$ векторларының кез келгені қалғандарының сызықты комбинациясы. Олай болса, 2.1-теорема бойынша берілген векторлар сызықты тәуелді.

2-мысал. Берілген

$$\overline{a}_1 = \{2;\ 3;\ 4\},\ \overline{a}_2 = \{1;\ -2;\ 1\}$$

$$\overline{a}_3 = \{0;\ 0;\ 0\},\ \overline{a}_4 = \{1;\ 2;\ -3\}$$

векторлары сызықты тәуелді бола ала ма?

Берілген вектордың бірі нөл вектор: $\overline{a}_3$. Олай болса,

$$\alpha_1 \cdot \overline{a}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{a}_2 + \alpha_3 \cdot \overline{a}_3 + \alpha_4 \cdot \overline{a}_4 = 0$$

теңдігі $\alpha_3 \neq 0, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = 0$ болған жағдайда ғана орындалады. Сондықтан, берілген векторлар сызықты тәуелді.

3-мысал. $C[a; \ b]$ кеңістігінің $y_1 = e^x$, $y_2 = 2e_x$ элементтері сызықты тәуелді болатынын дәлелдеңдер.

$y_1$ мен $y_2$ элементтері сызықты тәуелді, себебі

$$2y_1 - y_2 = 0$$

теңдігі орындалады.

## § 2.3. Сызықты кеңістіктің базисі мен өлшемі

**Анықтама.** Егер $R$ сызықты кеңістігінде 1) $l_1, l_2, ..., l_n$ элементтері сызықты тәуелсіз болса, 2) сызықты кеңістіктің әр $x$ элементі үшін $x_1, x_2, ..., x_n$ нақты сандар табылып

$$x = x_1 \cdot l_2 + x_n \cdot l_2 + ... + x_n \cdot l_n \qquad (2.5)$$

теңдігі орындалса, онда $l_1, l_2, ... l_n$ элементтерінің жиынтығы осы кеңістіктің *базисі* деп аталады. Бұл жағдайда (2.5) теңдігі $x$ элементінің $l_1, l_2, ..., l_n$ — базисі арқылы жіктелінуі, ал $x_1, x_2, ... x_n$ — нақты сандар $x$ элементінің *координаттары* деп аталады және $x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ символымен белгіленеді.

**Анықтама.** $R$ сызықты кеңістігі *n-өлшемді кеңістік* деп аталады, егер осы кеңістікте $n$ сызықты тәуелсіз элементтер бар болып, ал кез келген $n + 1$ элементтері сызықты тәуелді болса және ол $R_n$ — әрпімен, белгіленеді. Бұл жағдайда $n$-саны $R_n$ сызықты кеңістігінің *өлшемі* деп аталады да $dim R_n = n$ символымен белгіленеді.

Мысалы, дәрежесі $n$ - 1-ден кіші және $n$ - 1-ге тең көпмүшеліктердің жиынтығы $n$-өлшемді кеңістік. Себебі бұл кеңістікте $n$ дәрежелі көпмүшелік, яғни $1, t, t^2, ..., t^{n-1}$ сызықты тәуелсіз. Жазықтықтағы векторлар жиынының өлшемі 2-ге, кеңістіктегі векторлар жиынының өлшемі 3-ке, ал $R_n - n$ өлшемді кеңістігінің өлшемі $n$-ге тең.

Егер $R$ сызықты кеңістігінде шексіз сызықты тәуелсіз элементтер бар болса, онда ол кеңістік *шексіз кеңістік* деп аталады. Мысалы, $C[a; \ b]$-кеңістігі шексіз кеңістік.

Себебі бұл кеңістікте шексіз сызықты тәуелсіз функциялар бар.

Егер кеңістіктің өлшемі шектелген болса, онда ол кеңістік *шектелген сызықты кеңістік* деп аталады.

Негізінде біз бұл тарауда $n$ өлшемді кеңістіктерді қарастырмақпыз.

**2.4-теорема.** $R_n$ — сызықты кеңістігінің $x$ элементі $l_1, l_2, ..., l_n$ базисі арқылы жіктелінуі



$$x = x_1 \cdot l_1 + x_2 \cdot l_2 + ... + x_n \cdot l_n \qquad (2.5)$$

тек біреу ғана.

Дәлелдеуі. Теореманы дәлелдеу үшін кері жорық, яғни $R_n$ кеңістігінің $x$ элементі $l_1, l_2, ..., l_n$ базисі арқылы (2.5) жіктелуінен өзгеше жіктелсін, яғни

$$x = x'_1 \cdot l_1 + x'_2 \cdot l_2 + ... + x'_n \cdot l_n. \qquad (2.6)$$

(2.6) мен (2.5) жіктелулерінің айырымын қарастырайық:

$$0 = (x'_1 - x_1) \cdot l_1 + (x'_2 - x_2) \cdot l_2 + ... + (x'_n - x_n) \cdot l_n \qquad (2.7)$$

(2.7) теңдіктен және $l_1, l_2, ..., l_n$ — базисінің сызықты тәуелсіздігінен

$$x'_1 - x_1 = 0, \ x'_2 - x_2 = 0, \ . \ . \ ., \ x'_n - x_n = 0$$

теңдіктерін аламыз. Осыдан $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$, . . ., $x_n = x'_n$. Теорема дәлелденді.

Ескерту. $R_n$ кеңістігіндегі кез келген $x$ элемент әртүрлі базисте әртүрлі жіктелінеді, яғни $x$ элементінің базисі өзгерсе, онда оның координаталары да өзгереді.

Осы теоремадан: берілген $l_1, l_2, ..., l_n$ базисте $R_n$ сызықты кеңістігінің кез келген элементінің координаттары бар және ол тек біреу ғана.

Егер $l_1, l_2, ..., l_n$ базистегі $x$ элементінің координаттары $x_1, x_2, ..., x_n$, ал $y$ элементінің координаттары $y_1, y_2, ..., y_n$ болса, яғни

$$x = x_1 \cdot l_1 + x_2 \cdot l_2 + ... + x_n \cdot l_n = \{x_1; x_2; ...; x_n\},$$

$$y = y_1 \cdot l_1 + y_2 \cdot l_2 + ... + y_n \cdot l_n = \{y_1; y_2; ...; y_n\},$$

онда

$$x + y = (x_1 \pm y_1) \cdot l_1 + (x_2 \pm y_2) \cdot l_2 + ... + (x_n \pm y_n) \cdot l_n =$$

$$= \{x_1 \pm y_1; ...; x_n \pm y_n\},$$

$$\lambda \cdot x = \lambda \cdot y_1 \cdot l_1 + \lambda \cdot y_2 \, l_2 + ... + \lambda \cdot y_n \, l_n =$$

$$= \{\lambda \cdot y_1; \lambda \cdot y_2; ...; \lambda \cdot y_n \}.$$

Демек, мынадай тұжырымға келеміз: координаттарымен берілген элементтердің қосындысын табу үшін олардың сәйкес координаттарын қосу қажет, ал нақты санды элементке көбейту үшін оның барлық координаттарын осы санға көбейту қажет. Сызықты кеңістіктің сәйкес координаттары тең болса, онда оның екі элементі тең деп аталады.

$R$ сызықты кеңістігінің өлшемі мен базисі арасындағы байланысты қарастыралық.

**2.5-теорема.** Егер $R$ сызықтық кеңістігінің өлшемі $n$ болса: $dimR = n$, онда осы кеңістіктің кез келген $n$ сызықты тәуелсіз элементтері базис түзейді.

Дәлелдеуі. $l_1, l_2, \dots, l_n$ элементтері $R$ сызықты кеңістігінің тәуелсіз элементтері және $x$ осы кеңістіктің кез келген элементі болсын, $x \neq l_i$, $i = \overline{1, n}$. Онда $n$-өлшемді сызықты кеңістіктің анықтамасы бойынша $x, l_1, l_2, \dots, l_n$ элементтері сызықты тәуелді, яғни кем дегенде біреуі нөлге тең емес $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ — нақты сандары табылып

$$\alpha_0 \cdot x + \alpha_1 \cdot l_1 + \alpha_2 \cdot l_2 + \dots + \alpha_n \cdot l_n = 0 \qquad (2.8)$$

теңдігі орындалады, мұндағы $\alpha_0 \neq 0$. Ал $\alpha_0 = 0$ болғанда $l_1, l_2, \dots, l_n$ элементтері сызықты тәуелді болар еді. Сондықтан, (2.8) теңдігінен

$$x = x_1 \cdot l_1 + x_2 \cdot l_2 + \dots + x_n \cdot l_n \qquad (2.9)$$

теңдігін аламыз, мұндағы $x_i = -\alpha_i \cdot / \alpha_0$, $\alpha_0 \neq 0$, $i = \overline{1, n}$. Сонымен $x$ элемент $R$ кеңістігінің кез келген элементі болғандықтан әрі (2.9) теңдігінің орындалуынан және анықтамадан дәлелдеу керегімізді аламыз. Теорема дәлелденді.

**2.6-теорема.** $R$-сызықты кеңістігінің $n$ элементтен анықталған базисі бар болса, онда $R$ сызықты кеңістіктің өлшемі $n$-ге тең, яғни $dim\ R = n$.

Дәлелдеуі. $l_1, l_2, \dots, l_n$ элементтері $R$ сызықты кеңістігінің $n$ базисі болсын, яғни $l_1, l_2, \dots, l_n$ элементтері сызықты тәуелсіз. Теореманы дәлелдеу үшін $R$ кеңістігінің кез келген $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ — $n + 1$ — элементтерінің сызықты тәуелділігін дәлелдесек жеткілікті. $x_i \in R$ болғандықтан, $n + 1$ элементтерінің әрқайсысын $l_1, l_2, \dots, l_n$ базисі бойынша жіктейміз:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_{11} \cdot l_1 + x_{12} \cdot l_2 + \dots + x_{1n} \cdot l_n, \\
x_2 &= x_{21} \cdot l_1 + x_{22} \cdot l_2 + \dots + x_{2n} \cdot l_n, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_n &= x_{n1} \cdot l_1 + x_{n2} \cdot l_2 + \dots + x_{nn} \cdot l_n, \\
x_{n+1} &= x_{n+1,1} \cdot l_1 + x_{n+1,2} \cdot l_2 + \dots + x_{n+1,n} \cdot l_n,
\end{aligned}$$

мұндағы $x_{ik}$ — нақты сандар, $i = \overline{1, n+1}$, $k = \overline{1, n}$.



Дәлелдемекші $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ — элементтерінің сызықты тәуелділігі осы элементтердің координаттарынан анықталған

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \\ x_{n+1,1} & x_{n+1,2} & \dots & x_{n+1,n} \end{pmatrix}$$

матрицасының жатық жолдар элементтерінің сызықты тәуелділігіне эквивалентті. Матрица $n + 1$ жатық және $n$ тік жолдардан анықталған. Бұл матрицаның жатық жолдары сызықты тәуелді, өйткені оның базистік минорының реті $n$-нен үлкен емес және $n + 1$ жатық жолдарының кем дегенде біреуі базис бола алмайды. Демек, базистік минор туралы 1.14-теорема бойынша, ол жатық жол қалған жатық жолдардың сызықты комбинациясы болады. Теорема дәлелденді.

**2.7-теорема.** $R$-сызықты кеңістігінің $n$ элементі сызықты тәуелсіз болу үшін осы элементтердің координаттарынан анықталған анықтауыштың мәні нөлге тең болмауы қажетті әрі жеткілікті.

Дәлелдеуі. Теореманы дәлелдеу үшін $R$ сызықты кеңістігінің $n$ элементін

$$\begin{aligned}
x_1 &= \{x_{11};\ x_{12};\ \dots;\ x_{1n}\}, \\
x_2 &= \{x_{21};\ x_{22};\ \dots;\ x_{2n}\}, \\
&\dots\dots\dots\dots;\ \dots \\
x_n &= \{x_{n1};\ x_{n2};\ \dots;\ x_{nn}\}
\end{aligned}$$

әріптерімен, ал осы элементтердің координаттарынан анықталған теоремадағы анықтауышты $\Delta$ әрпімен белгілейік:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}.$$

1.14-теореманың салдары бойынша, $\Delta$ анықтауыштың мәні нөлге тең болу үшін оның жатық жолдары сызықты тәуелді болуы қажетті әрі жеткілікті. Олай болса, $\Delta$-анықтауыштың мәні, тек олардың жатық жолдары сызықты тәуелсіз болған жағдайда ғана нөлге тең болмайды. Теорема дәлелденді.

**Салдар.** $R$ сызықты кеңістігінің $n$ элементі базис құрау үшін осы элементтердің координаттарынан анықталған анықтауыштың мәні нөлге тең болмауы қажетті әрі жеткілікті.

Дәлелдеуін жаттығу ретінде оқырмандардың өзіне ұсынамыз.

**1-мысал.** $R_n$ сызықты кеңістігінің $x_1 = \{1;\ 0;\ .\ .\ .;\ 0\}$, $x_2 = \{0;\ 1;\ .\ .\ .;\ 0\}$, . . ., $x_n = \{0;\ 0;\ .\ .\ .,\ 1\}$ элементтері базис құрайды. Шынында да, осы элементтердің координаталарынан анықталған

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

анықтауышы нөлге тең емес.

**2-мысал.** $x = \{1;\ 4\}$ элементінің $l_1, l_2$ және $l'_1, l'_2$ базистеріндегі координаттарын анықта, мұндағы $l_1 = \{1;\ 2\}$, $l_2 = \{-2;\ 3\}$ және $l'_1 = \{1;\ 1\}$, $l'_2 = \{1;\ 0\}$.

Алдымен $x$ элементінің $l_1, l_2$ базисіндегі координаттарын анықтайық. $x$ элементінің $l_1, l_2$ базисіндегі координаттары $x_1, x_2$ болсын, яғни

$$x = x_1 \cdot l_1 + x_2 \cdot l_2.$$

$l_1$-ді $x_1$-ге, $l_1$-ні $x_2$-ге көбейтіп, қосайық:

$$x_1 \cdot l_1 + x_2 \cdot l_2 = \{x_1; 2x_1\} + \{-2x_2; 3x_2\} = \{x_1 - 2x_2; 2x_1 + 3x_2\}$$

Сонда $\{x_1 - 2x_2;\ 2x_1 + 3x_2\} = x$. Тең элементтердің (векторлардың) теңдігін ескеріп

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1\ , \\ 2x_1 + 3x_2 = 4 \end{cases}$$

түзулер жүйесін аламыз. Осыдан $x_1 = \frac{11}{7}$, $x_2 = 2/7$ — мәндерін табамыз. Сонымен, $x$ элементінің $l_1$, $l_2$ базисте координаттары $\frac{11}{7}$ және $\frac{2}{7}$, яғни $\left\{\frac{11}{7}, \frac{2}{7}\right\} = 11 \cdot \frac{l_1}{7} + 2 \cdot \frac{l_2}{7}$. *$x$ элементінің $l'_1, l'_2$ базисіндегі координаттарын табайық, ол координаттар да $x_1, x_2$ болсын дейік, сонда*

$$x = x_1 \cdot l'_1 + x_2 \cdot l'_2.$$

Осыдан



$$x_1 \cdot l'_1 + x_2 l'_2 = \{x_1; x_1\} + \{x_2; 0\} = \{x_1 + x_2; x_1\},$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1\ , \\ x_1 = 4\ . \end{cases}$$

Сонымен $x_1 = 4$, $x_2 = -3$ сандары $x$ элементінің $l'_1, l'_2$ базисіндегі координаттары, яғни $x = \{4;\ -3\} = 4 \cdot l'_1 - 3 \cdot l'_2$.

3-мысал. $l_1 = \{1;\ 0;\ .\ .\ .;\ 0\}$, $l_2 = \{0;\ 1;\ .\ .\ .;\ 0\}$, $l_n = \{0;\ 0;\ .\ .\ .;\ 1\}$, $x = \{x_1; x_2; ...; x_n\}$ элементтері сызықты тәуелді болатынын дәлелдеңдер.

Ол үшін мына сызықты комбинацияны қарастырайық:

$$\alpha \cdot x + \alpha_1 \cdot l_1 + \alpha_2 \cdot l_2 + ... + \alpha_n \cdot l_n,\ \alpha \neq 0,\ \alpha_i \neq 0.$$

Осы комбинацияның нөл элемент болатындығын дәлелдесек жеткілікті. Шынында да,

$$\alpha \cdot x + \alpha_1 \cdot l_1 + \alpha_2 \cdot l_2 + ... + \alpha_n \cdot l_n =$$

$$= \{\alpha \cdot x_1; \alpha \cdot x_2; ...; \alpha \cdot x_n\} +$$

$$+ \{\alpha_1; 0; ...; 0\} + \{0;\ \alpha_2; ...; 0\} + \{0;\ 0;\ .\ .\ .;\ \alpha_n\} =$$

$$= \{\alpha \cdot x_1 + \alpha_1; \alpha \cdot x_2 + \alpha_2; ...; \alpha \cdot x_n + \alpha_n\} = 0$$

нөл элемент, егер $\alpha = -1$, $\alpha_1 = x_1, ..., \alpha_n = x_n$ болса. Сонымен, кез келген $x$ элементін $l_1, l_2, ..., l_n$ элементтері бойынша өрнектейміз:

$$x = \alpha_1 \cdot l_1 + \alpha_2 \cdot l_2 + ... + \alpha_n \cdot l_n = x_1 \cdot l_1 + x_2 \cdot l_2 + ... + x_n \cdot l_n.$$

## § 2.4. Сызықты кеңістіктердің изоморфтылығы

$A$ мен $B$ жиындарын қарастырайық. Егер $A$ жиынының кез келген бір элементіне $B$ жиынының тек бір элементі сәйкес келсе және $B$ жиынының кез келген бір элементіне $A$ жиынының тек бір элементі сәйкес келсе, онда мұндай жиындар *өзара бір мәнді* деп аталады. Бұл жағдайда $B$ жиынында $A$ жиынындағы элементке сәйкес келмейтін элемент жоқ әрі $A$ мен $B$ жиындарының элементтері арасында өзара бір мәнді сәйкестік бар және ол сәйкестік $a \leftrightarrow b$ таңбасымен белгіленеді, мұндағы $a \in A$, $b \in B$.

Бізге кез келген $R$ мен $R'$ сызықты кеңістіктері берілсін.

**Анықтама.** $R$ мен $R'$ — сызықты *кеңістіктері изоморфты* деп аталады, егер олардың $x \in R$ $x' \in R'$

элементтері арасында бір мәнді сәйкестікті анықтасақ, яғни $x \leftrightarrow x'$, демек $R$ кеңістігінің $x$, $y$ элементтеріне $R'$ кеңістігінің $x', y'$ элементтері сәйкес келсе, онда $x + y$ элементіне $x' + y'$ элементі, ал $\alpha \cdot x$ элементіне $\alpha \cdot x'$ элементі сәйкес келеді, яғни егер $x \leftrightarrow x'$, $y \leftrightarrow y'$ болса, онда $x + y \leftrightarrow x' + y'$, $\alpha x \leftrightarrow \alpha \cdot x'$.

Сонымен, изоморфтылық дегеніміз элементтерді қосқанда және санды элементке көбейткенде сақталатын өзара бір мәнді сәйкестік.

Осы анықтамадан, *егер екі кеңістік изоморфты болса, онда ол екі кеңістік бір өлшемді изоморфты.*

Осы сияқты, егер $R$ мен $R'$ сызықты кеңістіктері изоморфты болса және $R$ кеңістігінің $x, y, \ldots, z$ элементтеріне $R'$ кеңістігінің $x', y', \ldots, z'$ элементтері сәйкес келсе, онда $\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \ldots + \gamma \cdot z = 0$ теңдігіне $\alpha \cdot x' + + \alpha \cdot y' + \ldots + \alpha \cdot z' = 0$ теңдігі пара-пар, яғни $R$ кеңістігінің сызықты тәуелсіз элементтеріне $R'$ кеңістігінің сызықты тәуелсіз элементтері сәйкес келеді және керісінше. Сондықтан, $R$ мен $R'$ кеңістіктері изоморфты болса, онда *$R$ кеңістігінің нөл элементіне $R'$ кеңістігінің нөл элементі сәйкес келеді.*

Осылардан және анықтамадан: *әртүрлі өлшемді екі сызықты кеңістік изоморфты емес.* Шынында да, $R$ мен $R'$ кеңістіктері изоморфты болсын деп жориық. Онда бұл кеңістіктердің ең үлкен сызықты тәуелсіз элементтерінің саны тең, яғни олардың өлшемі тең. Олай болса, әртүрлі өлшемді кеңістіктер өзара изоморфты бола алмайды.

**2.8-теорема.** Кез келген $n$ өлшемді екі сызықты кеңістік изоморфты.

Дәлелдеуі. $R$ мен $R'$ сызықты кеңістіктерін және $R$ кеңістігінен $l_1, l_2, \ldots, l_n$, ал $R'$ кеңістігінен $l'_1, l'_2, \ldots, l'_n$ базистерін қарастырайық. $R$ кеңістігінің кез келген

$$x = x_1 \cdot l_1 + x_2 \cdot l_2 + \ldots + x_n \cdot l_n \tag{2.10}$$

элементіне $R'$ кеңістігінің

$$x' = x_1 \cdot l'_1 + x_2 \cdot l'_2 + \ldots + x_n \cdot l'_n \tag{2.11}$$

элементі сәйкес келсін делік, мұнда $x$ пен $x'$ элементтерінің координаттары бірдей (тең). Енді осы сәйкестіктің өзара бір мәнді сәйкестік болатынын дәлелдейік. 2.4-теорема бойынша $R$ кеңістігінің кез келген $x$ элементі (2.10) түрінде



$x_1, x_2, \ldots, x_n$ координаттары арқылы тек біреу ғана болып жіктеледі. Демек $x_1, \ldots, x_n$ координаттары және де $R'$ кеңістігінің $x'$ элементі арқылы бір мәнді анықталады. $R$ мен $R'$ кеңістіктерінің «теңдігінен» кез келген $x'$ элементіне $R$ кеңістігінен $x$ элемент сәйкес келеді және ол тек біреу ғана болады деген тұжырым шығады.

Сондықтан, егер $x \leftrightarrow x'$, $y \leftrightarrow y'$ болса, онда 2.4-теореманың тұжырымы бойынша $x + y \leftrightarrow x' + y'$ және $\alpha \cdot x \leftrightarrow \alpha \cdot x'$, мұндағы $x, y \in R$, $x', y' \in R$, яғни $R$ мен $R'$ сызықты кеңістіктері изоморфты. Теорема дәлелденді.

Сонымен, жоғарыда айтылғандардан: *шектелген сызықты кеңістігінің негізгі сипаты оның өлшемі бола алады* деген қорытынды шығады.

## § 2.5. Сызықты кеңістіктің ішкі кеңістігі

Айталық, $R$ сызықты кеңістігі мен осы кеңістіктің $L$ жиыншасы берілсін. Ол жиыншаның барлық элементтеріне төмендегі екі ереже орындалсын делік:

1) егер $x$ пен $y$ элементтері $L$ жиыншаның элементтері болса, онда олардың $x + y$ қосындысы да осы жиыншаның элементі, яғни $x + y \in L$;

2) егер $x \in L$ және $\alpha$ кез келген сан болса, онда олардың көбейтіндісі де осы жиынның элементі, яғни $\alpha \cdot x \in L$.

Жоғарыдағы екі ережені қанағаттандыратын кез келген $L$ жиынша сызықты кеңістік болатынын көрсетейік. Ол үшін 2.1-тақырыптағы, сызықты кеңістік анықтамасындағы, 1—8-аксиомалар $L$ жиыншаның элементтеріне де орындалатынын дәлелдесек жеткілікті. Анықтамадағы 3-пен 4-аксиомалардан басқа аксиомалар $L$ жиыншаның элементтеріне де орындалады. Себебі, 1—8-аксиомалар $R$ кеңістігінің кез келген элементтеріне орындалады. Енді 3 пен 4-аксиомалар $L$ жиыншаның элементтеріне орындалатынын тексерейік. $x$ элемент $L$ жиыншаның кез келген элементі, ал $\alpha$ кез келген сан болсын. Онда, 2) ереже бойынша $\alpha \cdot x \in L$ әрі сызықтық кеңістіктің 3 пен 6-шы қасиеттері (2.1-тақырып) бойынша $\alpha \cdot x$ элементі $\alpha = 0$ болғанда $R$ сызықты кеңістігінің нөл элементіне, $\alpha = -1$ болғанда $R$ кеңістігінің $x$ элементінің кері элементіне, яғни $-x$ элементіне айналады. Демек, нөл элемент пен $L$ жиыншадағы кез келген элементтің кері элементі осы жиыншаға тиісті. Олай болса, 3 пен 4-аксиомалар $L$

жиыншаға да орындалады, яғни $R$ сызықты кеңістігінің жиыншасы да сызықты кеңістік.

**Анықтама.** $R$ сызықты кеңістігінің *сызықты ішкі кеңістігі* деп 1) мен 2) ережені қанағаттандыратын осы сызықты кеңістіктің $L$ жиыншасын айтамыз. Бұл қысқаша *ішкі кеңістік* деп аталады.

Егер $L$ кеңістігі $R$ сызықты кеңістігінің ішкі кеңістігі болса, онда $R$ кеңістігін *негізгі кеңістік* дейміз.

Мысалы, $R$ сызықты кеңістігінің тек бір ғана нөл элементтен анықталған жиыншасы $R$ кеңістігінің ішкі кеңістігі болады, бұл жағдайда ол *ішкі нөл кеңістік* деп аталады.

Дәрежесі $n$ натурал санынан үлкен емес $P_n(t)$ — көпмүшеліктер жиыны, яғни $\{P_n(t)\} = L$ жиыны $C[a;\ b]$ сызықты кеңістігінің ішкі кеңістігі болады, мұндағы $C[a;\ b]$ кеңістігі $[a;\ b]$ сегментте анықталған барлық үзіліссіз функциялардың жиыны. Шынында да, $L$ жиынының элементтеріне 1) мен 2) — ережелер орындалады, егер $P'(t)$ мен $P''(t) \in L$ болса, онда $P'(t) + P''(t) \in L$ болады, себебі $P'(t) + P''(t)$ көпмүшелігінің дәрежесі әрқашанда $n$ натурал санынан үлкен емес. Осы сияқты $\alpha \cdot P'(t) \in L$.

Осы сияқты үш өлшемді сызықты кеңістіктегі координат жүйесінің бас нүктесінен өтетін жазықтықтың бойында жатқан векторлардың жиыны үш өлшемді кеңістіктің ішкі кеңістігі болады. Шынында да, векторларды қосқанда және санды векторға көбейткенде алынған жаңа векторлар осы жазықтықтың бойында жатады.

Кез келген $R$ сызықты кеңістігінің $L$ ішкі кеңістігін құруға болады. Ол кеңістікті құру үшін $R$ сызықты кеңістігінің кез келген $x,\ y,\ .\ .\ .,\ z$ элементтер жиынын аламыз. Осы элеметтердің барлық сызықты комбинацияларының жиыны $R$ сызықты кеңістігінің ішкі кеңістігі болады. Себебі, $R$ кеңістігінің $x,\ y,\ .\ .\ .,\ z$ элементтерінің қосындысы және элементтерді сандарға көбейтіп, осы көбейтіндінің сызықты комбинациясы да $L$ кеңістігінің элементтері болады.

**Анықтама.** $R$ сызықты кеңістігінің $x,\ y,\ .\ .\ .,\ z$ элементтерінен анықталған барлық $\alpha \cdot x + \beta \cdot y + ... + \gamma \cdot z$ — сызықты комбинациясының жиынтығы осы элементтердің *сызықты қабықшасы* деп аталады және ол $L(x,\ y,\ .\ .\ .,\ z) = \{\alpha \cdot x + \beta \cdot y + ... + \gamma \cdot z\}$ — таңбамен белгіленеді, мұндағы $\alpha, \beta, ..., \gamma$ — нақты сандар.

Осы анықтамадан, $R$ сызықты кеңістігінен еркімізше алынған $x,\ y,\ .\ .\ .,\ z$ элементтерінен анықталған $L(x,\ y,\ .\ .\ .,\ z)$ — сызықты қабықшаға жоғарыдағы 1) мен 2) — ережелер



орындалады. Олай болса $L(x,\ y,\ .\ .\ .,\ z)$ сызықты қабықшасы $R$ сызықты кеңістігінің ішкі кеңістігі болады. $x,\ y,\ .\ .\ .,\ z$ элементтер осы элементтердің сызықты комбинациясынан анықталған $L(x,\ y,\ .\ .\ .,\ z)$ кеңістігінің де элементтері болып табылады. Сондықтан, $x,\ y,\ .\ .\ .,\ z$ элементтерінің $L(x,\ y,\ .\ .\ .,\ z)$ — сызықты қабықшасы ең кіші ішкі сызықты кеңістік болады.

Егер $L$ сызықты кеңістігі $R$ сызықты кеңістігінің ішкі кеңістігі болса, онда $dimL \le dimR$ болады, яғни *ішкі кеңістіктің өлшемі негізгі сызықты кеңістіктің өлшемінен үлкен болмайды.* Шынында да, $L$ ішкі кеңістігінің сызықты тәуелсіз элементтері $R$ негізгі кеңістігінің де элементтері бола алады. Олай болса, $dimL \le dimR$.

Егер $dimL = dimR$ болса, онда $L = R$.

**2.9-теорема.** Егер $l_1, l_2, ..., l_k$ сызықты тәуелсіз элементтер және $l_{k+1} \notin L(l_1, l_2, ..., l_k)$ болса, онда $l_1, l_2, ..., l_k, l_{k+1}$ элементтері де сызықты тәуелсіз, мұндағы $l_i \in L\ (l_1, l_2, ..., l_k)$, $i = \overline{1, k}$.

Дәлелдеуі. Теореманы дәлелдеу үшін кері жорық: $l_1, l_2, ..., l_k, l_{k+1}$ сызықты тәуелді болсын, яғни

$$c_1 \cdot l_1 + c_2 \cdot l_2 + ... + c_k \cdot l_k + c_{k+1} \cdot l_{k+1} = 0,\ c_i \ne 0,\ i = \overline{1, k}.$$

Анықтық үшін $c_{k+1} \ne 0$ болсын, онда

$$l_{k+1} = -c_1 \cdot l_1/c_{k+1} - c_2 l_2/c_{k+1} - ... - c_k \cdot l_k/c_{k+1}.$$

Осыдан $l_{k+1} \in L\ (l_1, l_2, ..., l_k)$, ал теореманың шарты бойынша $l_{k+1} \notin L\ (l_1, l_2, ..., l_k)$. Осы қайшылық теореманы дәлелдейді.

**2.10-теорема.** $R_k$ кеңістігі $R_n$ сызықты кеңістігінің ішкі кеңістігі, ал $l_1, l_2, ..., l_k$ — элементтері $R_k$ кеңістігінің базисі болса, онда $l_1, l_2, ..., l_{k+1}, ..., l_n$ элементтері $R_n$ кеңістігінің базисі болатындай етіп, $l_1, l_2, ..., l_k$ базисін $R_n$ кеңістігінің $l_{k+1}, ..., l_n$ элементтері арқылы толықтыруға болады.

Дәлелдеуі. Егер $k = n$ болса, яғни $R_k = R_n$, онда $l_1, l_2, ..., l_k$ элементтері $R_n$ кеңістігінің базисі болады.

Егер $k < n$ болса, онда $R_n$ кеңістігінен $l_{k+1}$ элемент табылып, $l_1, l_2, ..., l_k, l_{k+1}$ — элементтері сызықты тәуелсіз болады. Егер бұл элементтер сызықты тәуелді болған жағдайда $R_n$ кеңістігі $k$ өлшемді болған болар еді.

Егер $k + 1 = n$ болса, яғни $R_{k+1} = R_n$, онда $l_1, l_2, ..., l_{k+1}$ элементтері $R_n$ кеңістігінің базисі болады.

Егер $k+1<n$ болса, онда $R_n$ кеңістігінен $l_{k+2}$ элемент табылып $l_1, l_2, ..., l_k, l_{k+1}, l_{k+2}$ — элементтері сызықты тәуелсіз болады, ал олар сызықты тәуелді болған жағдайда $dimR_n = k+1$ болған болар еді. Осы әдісті жалғастыра отырып, дәлелдеу керегімізді аламыз.
Теорема дәлелденді.

**2.11-теорема.** $L\ (x, y, \ldots, z)$ сызықты қабықшасының өлшемі $x, y, \ldots, z$ элементтеріндегі сызықты тәуелсіз элементтер санының ең үлкеніне тең.

Дәлелдеуі. Берілген $x, y, \ldots, z$ элементтерінде сызықты тәуелсіз элементтер бар әрі олардың санының үлкені $r$ болсын және ол элементтерді $x_1, x_2, ..., x_r$ деп белгілейік. Онда $x, y, \ldots, z$ элементтерінің кез келген $r+1$ элементтері сызықты тәуелді әрі 2.5-теорема бойынша $x, y, \ldots, z$ элементтерінің әрқайсысы $x_1, x_2, ..., x_r$ элементтерінің сызықты комбинациясы болады. Сызықты қабықшаның анықтамасы бойынша $L\ (x, y, \ldots, z)$ — қабықшасының кез келген элементі $x_1, x_2, ..., x_r$ элементтерінің сызықты комбинациясы болады. Олай болса, $x_1, x_2, ..., x_r$ элементері $L\ (x, y, \ldots, z)$ қабықшасының базисін түзейді (құрайды), яғни $L\ (x, y, \ldots, z)$ сызықты қабықшасының базисі $r$-ге тең. Теорема дәлелденді.

Салдар. Егер $x, y, \ldots, z$ элементтері сызықты тәуелсіз болса, онда $L\,(x, y, \ldots, z)$ сызықты қабықшасының өлшемі $x, y, \ldots, z$ элементтерінің санына тең.

## § 2.6. Сызықты кеңістіктердің тік қосындысы

Айталық, $R_n$ *сызықты кеңістігі және оның* $L_1$ *мен* $L_2$ *ішкі кеңістіктері берілсін.*

**Анықтама.** Егер $R_n$ кеңістігінің кез келген $y$ элементі $x \in L_1$ пен $x' \in L_2$ элементтерінің қосындысы: $y = x + x'$ түрінде өрнектелсе әрі ол тек біреу ғана болса, онда $R$ кеңістігі $L_1$ мен $L_2$ кеңістіктері арқылы *тік қосындыға жіктелінеді* делінеді, ол $R = L_1 \oplus L_2$ символымен белгіленеді.

**2.12-теорема.** Егер де: 1) $L_1$ мен $L_2$ кеңістіктеріне ортақ тек бір ғана нөл элементі бар болса,

2) $L_1$ мен $L_2$ кеңістіктерінің өлшемдерінің қосындысы $R_n$ кеңістігінің өлшемінің қосындысына тең, яғни $dimL_1 + dimL_2 = dimR_n = n$, болса, онда $R_n$ — кеңістігі $L_1$ мен $L_2$ ішкі кеңістіктері арқылы тік қосындыға жіктелінеді:



$$R_n = L_1 \oplus L_2, \text{ яғни } y = x + x', \ x \in L_1, \ x' \in L_2, \ y \in R_n.$$

Дәлелдеуі. Берілген $L_1$ кеңістігінен $l_1, l_2, \ldots, l_k$, ал $L_2$ — кеңістігінен $l'_1, l'_2, ..., l'_m$ базисін қарастырайық, онда теореманың шарты бойынша $dimL_1 + dimL_2 = k + m = n$.

Мына

$$l_1, l_2, ..., l_k, \ l'_1, l'_2, ..., l'_m, \ k+m=n \qquad (2.12)$$

элементтері сызықты тәуелсіз болатын дәлелдейік.

Ол үшін (2.12) элементтерінің сызықты комбинациясы нөлдік элемент болсын делік, яғни

$$x_1 \cdot l_1 + x_2 \cdot l_2 + \ldots + x_k \cdot l_k +$$
$$+ x'_1 \cdot l'_1 + x'_2 \cdot l'_2 + \ldots + x'_m \cdot l'_m = 0. \qquad (2.13)$$

Бұдан

$$x_1 \cdot l_1 + x_1 \cdot l_2 + \ldots + x_k \cdot l_k = -x'_1 \cdot l'_1 - x'_2 \cdot l'_2 \ldots - x'_m \cdot l'_m.$$

Теңдіктің сол жағындағы элемент $L_1$, оң жағындағы элемент $L_2$ — ішкі кеңістіктерінің элементтері. Теореманың 1) — шарты бойынша

$$x_1 \cdot l_1 + x_2 \cdot l_2 + \ldots + x_k \cdot l_k = 0,$$

$$x'_1 \cdot l'_1 + x'_2 \cdot l'_2 + \ldots + x'_k \cdot l'_k = 0$$

теңдіктерін аламыз және мұндағы $l_1, l_2, ..., l_k$ элементтері $L_1$ кеңістігінде, ал $l'_1, l'_2, ..., l'_m$ элементтері $L_2$ кеңістігінде сызықты тәуелсіз. Олай болса, $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$ және $x'_1 = x'_2 = \ldots = x'_m = 0$. Сонымен, (2.13) тепе-теңдігі, тек $x_1 = x_2 = \ldots x_k = x'_1 = \ldots = x'_m = 0$ болғанда ғана орындалады. Демек, (2.12) элементтері $n$ сызықты тәуелсіз элементтерден тұрады, яғни (2.12) элементтері $R_n$ кеңістігінің базисі.

$R_n$кеңістігінің кез келген $y$ элементі $y = x + x'$, $x \in L_1$, $x' \in L_2$ өрнегі түрінде жіктелетінін және оның тек біреуі ғана екенін дәлелдейік.

Ол үшін кез келген $y \in R_n$ элементті (2.12) базис бойынша жіктелік:

$$y = \alpha_1 \cdot l_1 + \ldots + \alpha_k \cdot l_k + \beta_1 \cdot l'_1 + \ldots + \beta_m \cdot l'_m,$$

мұндағы $x = \alpha_1 \cdot l_1 + \ldots + \alpha_k \cdot l_k \in L_1$, $x' = \beta_1 \cdot l'_1 + \ldots + \beta_2 \cdot l_2' + \ldots + \beta_m \cdot l_m' \in L_2$. Сонымен, $y = x + x'$.

Енді бұл жіктеудің тек біреу ғана екенін дәлелдейік. Бұл тұжырымды дәлелдеу үшін кері жорық, яғни мұндай жіктелiну екеу болсын:

$$y = x + x', \quad x \in L_1, \quad x' \in L_2,$$

$$y = \overline{x} + \overline{x}', \quad \overline{x} \in L_1 \quad x' \in L_2.$$

Бірінші теңдікпен екінші теңдіктің айырымын қарастырайық:

$$0 = (x + x') - (\overline{x} + \overline{x}').$$

Осыдан $x + x' = \overline{x} + \overline{x}'$.

Соңғы теңдіктің оң жағындағы элемент $L_2$ кеңістігінің, ал сол жағындағы элемент $L_1$ кеңістігінің элементтері. Олай болса, теореманың 1-шарты бойынша олар нөл элемент, яғни

$$x = \overline{x}, \quad x' = \overline{x}'.$$

Теорема дәлелденді.

### § 2.7. Ішкі кеңістіктердің қиылысуы мен қосындысы

$R_n$ — сызықты кеңістігі және оның кез келген $L_1$ мен $L_2$ ішкі кеңістіктері берілсін.

**Анықтама.** $L_1$ мен $L_2$ кеңістіктерінің екеуіне де тиісті $R_n$ кеңістігі элементтерінің жиынтығы осы кеңістіктің $L_0$ ішкі кеңістігін түзейді, ал бұл $L_0$ кеңістік $L_1$ мен $L_2$ *кеңістіктерінің қиылысу кеңістігі* деп аталып, $L_0 = L_1 \cap L_2$ таңбасымен белгіленеді.

Мысалы, $R_3$ — үш өлшемді кеңістігінің екі өлшемді $L_1$ мен $L_2$ — ішкі кеңістіктерін қарастырайық. Онда $L_1$ мен $L_2$ кеңістіктерінің қиылысуы бір өлшемді ішкі кеңістікті анықтайды. Бұл жағдайда $L_1$ мен $L_2$ кеңістіктері ретінде координат жүйесінің бас нүктесінен өтетін кез келген жазықтықтардың екеуін қарастырамыз. Ол екі жазықтықтың қиылысуы түзу, яғни ол бір өлшемді ішкі кеңістік болады.

Анықтамадағы $L_0 = L_1 \cap L_2$ кеңістігі де $R_n$ кеңістігінің ішкі кеңістігі болатынын көрсетейік. Ол үшін $x \in L_0$, $x' \in L_0$ элементтерін алайық. Жоғарыдағы анықтама бойынша $x$ пен $x'$ элементтері $L_1$ мен $L_2$ кеңістіктерінің элементтері және $L_1$ мен $L_2$ — ішкі кеңістіктер болғандықтан, $x + x' \in L_1$, $x + x' \in L_2$. Демек, $x + x' \in L_0$. Енді $x \in L_0$, $\alpha$ — кез келген



сан болсын. Жоғарыдағы анықтама бойынша $x \in L_1$, $x \in L_2$, $L_1$ мен $L_2$ кеңістіктері ішкі кеңістік болғандықтан, $\alpha \cdot x$ элементі $L_1$ мен $L_2$-нің де элементі, яғни $\alpha \cdot x \in L_1$ және $\alpha \cdot x \in L_2$. Олай болса, $\alpha \cdot x$ элементі $L_0$ кеңістігінің де элементі, яғни $\alpha \cdot x \in L_0$. Сондықтан, $L_0 = L_1 \cap L_2$ — ішкі кеңістік.

Сонымен, бізге берілген $L_1$ мен $L_2$ ішкі кеңістіктері бойынша олардан өзге (басқа) үшінші $L_0$ ішкі кеңістігін анықтадық.

Берілген ішкі кеңістіктер бойынша $L_0$ кеңістігінен өзге ішкі кеңістікті құруға (анықтауға) болады. Енді осы кеңістікті анықтайық.

**Анықтама.** $L_1$ мен $L_2$ *ішкі кеңістіктерінің қосындысы* деп, барлық $x + y$ элементтерінің жиынтығынан анықталған кеңістікті айтамыз, мұндағы $x \in L_1$, $y \in L_2$ және ол $\overline{L} = L_1 + L_2$ символымен белгіленеді (жалпы жағдайда $x + y$ элементі бір мәнді анықталмайды).

Мысалы. $R_3$ үш өлшемді кеңістіктегі координат жүйесінің бас нүктесінен өтетін кез келген екі түзуді $L_1$ мен $L_2$ кеңістіктері ретінде қарастырады. Онда осы екі түзу арқылы анықталған жазықтық анықтамадағы $\overline{L}$ кеңістігі, яғни $\overline{L} = L_1 + L_2$.

Соңғы анықтамадағы $\overline{L} = L_1 + L_2$ кеңістігі де $R_n$ кеңістігінің ішкі кеңістігі екенін көрсетейік. Шынында, $x$, $y$ элементері $\overline{L}$ кеңістігінің элеметтері болса: $x, y \in \overline{L}$, онда

$$x = x_1 + y_1, \quad y = x_2 + y_2,$$

мұндағы $x_1, x_2, \in L_1$, $y_1, y_2 \in L_2$. Енді осы $x$ пен $y$ элементтерінің қосындысын қарастырайық:

$$x + y = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2),$$

мұндағы $x_1 + x_2 \in L_1$, $y_1 + y_2 \in L_2$. Сондықтан, $x + y \in \overline{L}$. Енді мына көбейтіндіні жазалық:

$$\alpha \cdot x = \alpha \cdot x_1 + \alpha \cdot y_1,$$

мұндағы $\alpha \cdot x_1 \in L_1$, $\alpha \cdot y_1 \in L_2$. Одан $\alpha \cdot x \in \overline{L}$. Сондықтан, $\overline{L} = L_1 + L_2$ ішкі кеңістік.

**2.13-теорема.** Егер $L_1$ мен $L_2$ кеңістіктері $R_n$ кеңістігінің ішкі кеңістіктері болса, онда

7—212

$$dimL_1 + dimL_2 = dim(L_1 + L_2) + dim(L_1 \cap L_2)$$

теңдігі орындалады.

Дәлелдеуі. Жоғарыдағы айтылғандардан $L_1 \cap L_2$ кеңістігі $R_n$ кеңістігінің ішкі кеңістігі, сондықтан $dim(L_1 \cap L_2) = s$ болсын ( $s < n$ ). Онда, $L_1 \cap L_2$ кеңістігінде

$$l_1, l_2, ..., l_s \qquad (2.15)$$

базисі бар және $L_1 \cap L_2 \subset L_1$ болады. Олай болса, (2.15) базисін $L_1$ кеңістігінің базисіне дейін толықтырайық (2.10-теорема), яғни

$$l_1, l_2, ..., l_s, a_1, a_2, ..., a_k \qquad (2.16)$$

$L_1$ кеңістігінің базисі болсын, $s + k = dimL_1$.

Осы сияқты, $L_1 \cap L_2 \subset L_2$ болғандықтан (2.15) базисін $L_2$ кеңістігінің базисіне дейін толықтырайық, яғни

$$l_1, l_2, ..., l_s, b_1, ..., b_l \qquad (2.17)$$

$L_2$ кеңістігінің базисі болсын, $s + l = dimL_2$. Теореманы дәлелдеу үшін

$$l_1, l_2, ..., l_s, \; a_1, a_2, ..., a_k, \; b_1, b_2, ..., b_l \qquad (2.18)$$

элементтері $L_1 + L_2$ кеңістігінің базисі болатынын дәлелдесек жеткілікті. Басқаша айтқанда, алдымен (2.18) элементтері сызықты тәуелсіз болатынын, одан соң $L_1 + L_2$ кеңістігінің кез келген элементі (2.18) элементтері арқылы сызықты өрнектелетінін дәлелдесек жеткілікті.

Алдымен (2.18) элементтері сызықты тәуелсіз болатынын дәлелдейік. Ол үшін

$$\alpha_1 \cdot l_1 + \alpha_2 \cdot l_2 + ... + \alpha_s \cdot l_s + \beta_1 \cdot a_1 + ... +$$

$$+ \beta_k \cdot a_k + \gamma_1 \cdot b_1 + ... + \gamma_l \cdot b_l = 0 \qquad (2.19)$$

теңдігін қарастырайық. Енді $b_1, b_2, ..., b_l$ элементтерінің сызықты комбинациясын осы теңдеудің оң жағына шығарып, оны $y$ әрпімен белгілейік:

$$\alpha_1 \cdot l_1 + \alpha_2 \cdot l_2 + ... + \alpha_s \cdot l_s + \beta_1 \cdot a_1 + ... +$$

$$+ \beta_k \cdot a_k = -(\gamma_1 \cdot b_1 + ... + \gamma_l \cdot b_l) = y. \qquad (2.20)$$



(2.20) теңдігіндегі $y$ элемент (2.16) элементтерінің сызықты комбинациясы, сондықтан $y \in L_1$. Енді $L_1 \cap L_2 \subset L_1$ ескерсек, онда $y \in L_1 \cap L_2$. Демек, $y \in L_1$ және $y \in L_1 \cap L_2$. Олай болса, $y$ элемент мына түрде өрнектелінеді:

$$y = \begin{cases} c_1 \cdot l_1 + c_2 \cdot l_2 + \ldots + c_s \cdot l_s, \; y \in L_1 \cap L_2, \\ \alpha_1 \cdot l_1 + \alpha_2 \cdot l_2 + \ldots + \alpha_s \cdot l_s + \; \beta_1 \cdot a_1 + ... + \beta_k \cdot a_k, y \in L_1. \end{cases}$$

2.4-теорема бойынша $y$ элементі (2.15) базис бойынша жіктелінуі тек біреу ғана. Олай болса:

$$\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_k = 0, \; c_1 = \alpha_1, \; c_2 = \alpha_2, ..., c_s = \alpha_s. \; (2.21)$$

Енді $a_1, a_2, ..., a_k$ элементтерінің сызықты комбинациясын (2.19) теңдеудің оң жағына шығарып, оны $w$ әрпімен белгілейік:

$$\alpha_1 \cdot l_1 + ... + \alpha_s \cdot l_s + \gamma_1 \cdot b_1 + ... + \gamma_l \cdot b_l =$$

$$= -(\beta_1 \cdot a_1 + ... + \beta_k \cdot a_k) = w.$$

Осы теңдіктен $w \in L_2$ және $w \in L_2 \cap L_1$. Сондықтан, $w$ элементті мына түрде өрнектейміз:

$$w = \begin{cases} \delta_1 \cdot l_1 + \ldots + \delta_s \cdot l_s, \qquad w \in L_1 \cap L_2, \\ \alpha_1 \cdot l_1 + \ldots + \alpha_s \cdot l_s + \gamma_1 \cdot b_1 + ... + \gamma_l \cdot b_l, w \in L_2. \end{cases}$$

2.4-теорема бойынша $w$ элементі (2.15) базис бойынша жіктелінуі тек біреу ғана. Ендеше:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = ... = \gamma_l = 0, \; \delta_1 = \alpha_1, \; \delta_2 = \alpha_2, ..., \delta_s = \alpha_s. \; (2.22)$$

(2.15) элементтері сызықты тәуелсіз болғандықтан,

$$\alpha_1 \cdot l_1 + \alpha_2 \cdot l_2 + ... + \alpha_s \cdot l_s = 0.$$

теңдеуінің коэффициенттері бәрі бірдей нөлге тең болған жағдайында ғана, яғни

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_s = 0 \qquad (2.23)$$

болғанда да ғана орындалады.

Сонымен, (2.21) — (2.23) теңдіктерінен $\beta_i = \gamma_j = \alpha_r = 0$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, l}$, $r = \overline{1, s}$ болады, яғни (2.18) элементтер сызықты тәуелсіз.

$L_1 + L_2$ кеңістігіндегі кез келген $y$ элемент (2.18) элементтері арқылы сызықты өрнектелінетінін дәлелдейік. Егер $y \in L_1 + L_2$, $y = y_1 + y_2$, $y_1 \in L_1$, $y_2 \in L_2$:

$$y_1 = \alpha_1 \cdot l_1 + \alpha_2 \cdot l_2 + \ldots + \alpha_s \cdot l_s + \beta_1 \cdot a_1 + \ldots + \beta_k \cdot a_k,$$

$$y_2 = \gamma_1 \cdot l_1 + \gamma_2 \cdot l_2 + \ldots + \gamma_s \cdot l_s + c_1 b_1 + \ldots + c_l b_l,$$

онда

$$y = y_1 + y_2 = (\alpha_1 + \gamma_1) \cdot l_1 + \ldots + (\alpha_s + \gamma_s) \cdot l_s + \beta_1 \cdot a_1 +$$
$$+ \ldots + \beta_k \cdot a_k + c_1 \cdot b_1 + c_2 \cdot b_2 + \ldots + c_l \cdot b_l$$

теңдігі орындалады, яғни $L_1 + L_2$ кеңістігінің кез келген элементті (2.18) элементтері арқылы өрнектелінеді. Сонымен, (2.18) элементтері $L_1 + L_2$ кеңістігінің базисі. Олай болса,

$$dim(L_1 + L_2) = s + k + l.$$

Егер $dim\,(L_1 \cap L_2) = s$, $dim\,L_1 + dim L_2 = s + k + s + l = = 2s + k + l$ ескерсек, онда

$$dim L_1 + dim L_2 = dim(L_1 + l_2) + dim(L_1 \cap L_2) = 2s + k + 1.$$

Теорема дәлелденді.